XI Международный математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"
Казань, 1–8 декабря 2007 г.

Личная олимпиада.
Довывод.

1. Бесконечная последовательность $a_0, a_1, \dots$ натуральных чисел такова, что $a_0 = 1$, и $a_n^2 > a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ при любом натуральном n. Докажите, что $a_k > k$ при любом натуральном k.

Решение. Достаточно доказать, что $a_{k-1} < a_k$. Пусть для некоторого k это не так. Переписав условие в виде $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} > \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, получим, что $1 \geqslant \dfrac{a_k}{a_{k-1}} > \dfrac{a_{k+1}}{a_k} > \dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} > \dots$. Таким образом, последовательность (a_n) убывает, начиная с $(k+1)$-го члена, что, очевидно, невозможно для последовательности с натуральными членами.

2. Даны непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2. Их общие внешние касательные d_1 и d_2 касаются ω_1 в точках A и B соответственно, а ω_2 — в точках C и D соответственно. Точка M — середина отрезка AC. Отрезки MB и MD вторично пересекают окружности ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки A, C, P, Q лежат на одной окружности.

Решение. Заметим, что $MP \cdot MB = MA^2 = MC^2 = MQ \cdot MD$, то есть четырехугольник $PQDB$ — вписанный. Тогда $\angle MQP = \angle PBD$ и $\angle MQC = \angle CDQ + \angle DCQ = \angle CDQ + \angle QDB = \angle CDB$. Следовательно, $\angle PAC + \angle PQC = \angle ABP + \angle MQP + \angle MQC = \angle ABP + \angle PBD + \angle CDB = 180°$, поэтому четырехугольник $APQC$ — вписанный.

3. Назовем натуральное число *маленьким*, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, составленному из 49 маленьких чисел, поставлено в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что можно так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, не сопоставлено оставшееся число.

Решение. Назовем набор из 50 маленьких чисел *хорошим*, если одно из них сопоставлено множеству из 49 остальных. Заметим, что каждому набору из 49 маленьких чисел соответствует не более одного хорошего набора. Так как всего наборов маленьких чисел из 50 элементов больше, чем из 49, по принципу Дирихле получаем, что не все они хорошие.

4. Существуют ли такие вещественные числа a и b, что число $a+b$ иррационально, однако при любом натуральном n число $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ рационально?

Решение. Пусть такие числа нашлись. Заметим, что $a, b \neq 0$; действительно, если $a = 0$, то b^3 и b^5 рациональны, поэтому и $b = (b^3)^2/b^5$ также рационально. Кроме того, $a \neq -b$, поэтому $a^d + b^d \neq 0$.

Пусть $k = 2n+1$. Тогда $(a^{2k} + b^{2k})(a^k + b^k) = \dfrac{2(a^{3k} + b^{3k}) + (a^k + b^k)^3}{3} \in \mathbb{Q}$, откуда $a^{2k} + b^{2k} \in \mathbb{Q}$. Аналогично получается, что $a^{4k} + b^{4k}$ рационально. Значит, $a^k b^k = \dfrac{(a^k + b^k)^2 - (a^{2k} + b^{2k})}{2} \in \mathbb{Q}$, а тогда и $ab = \dfrac{(a^3b^3)^2}{a^5b^5} \in \mathbb{Q}$. Наконец, имеем $(a+b)(a^{11} + b^{11}) = (a^{12} + b^{12}) + ab(a^{10} + b^{10}) \in \mathbb{Q}$, что противоречит нашему предположению.

XI Международный математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"
Казань, 1–8 декабря 2007 г.

Личная олимпиада.
Вывод.

5. Треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу с центром O. Для каждой вершины соединим прямой точку пересечения медиан противолежащей грани с точкой, симметричной этой вершине относительно точки O. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке F, причем отрезок, соединяющий F с серединой ребра AB, перпендикулярен ребру CD.

Решение. Пусть G — центр тяжести тетраэдра $ABCD$, а F' — точка, симметричная O относительно G. Пусть D_2 — точка, симметричная D относительно O, D_1 — центр тяжести треугольника ABC, K — середина DD_1. Так как $DG : GD_1 = 3 : 1$, точка G — середина D_1K. Четырехугольник KOD_1F' — параллелограмм, так что $D_1F' \parallel KO \parallel D_2D_1$, то есть точки D_2, D_1, F лежат на одной прямой. Проводя аналогичные рассуждения для других вершин тетраэдра, получим, что все прямые из условия проходят через F', то есть $F' = F$. Пусть M — середина AB, N — середина CD. Тогда G — середина MN, то есть $NOMF$ — параллелограмм, и $MF \parallel NO \perp CD$, что и требовалось.

6. Докажите, что существует такое число M, что при всех натуральных $n > M$ наименьший простой делитель числа $(n!)^n + 1$ превосходит $n + 2007$.

Решение. Очевидно, число $(n!)^n + 1$ не имеет простых делителей, меньших $n + 1$. Докажем, что для каждого натурального $s \leqslant 2007$ существует лишь конечное количество значений n, для которых $(n!)^n + 1$ делится на простое число $p = n + s$. Из этого будет следовать утверждение задачи.

Заметим, что при $s = 1$ и $n > 1$, в силу теоремы Вильсона и четности числа n (так как $n + 1$ — простое), $(n!)^n \equiv 1 \pmod{n+1}$, так что требуемых $n > 1$ не существует. При $s = 2$, если $n + 2$ — простое, то $n! \equiv 1 \pmod{n+2}$, так что таких n тоже не существует. Пусть теперь $s \geqslant 3$, и число $p = n + s$ простое. Имеем $n! = \dfrac{(p-1)!}{(p-1)(p-2)\dots(p-s+1)}$. Так как число $(p-1)! + 1$ делится на p, получаем, что $(n!)^n \equiv ((-1)^s s!)^{-n} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Так как $-n = (s-1) - (p-1)$, в силу малой теоремы Ферма получаем, что $((-1)^s s!)^{s-1} + 1$ делится на p. Таких p, разумеется, конечное количество.

7. В строку выписаны n нулей. За один шаг разрешается прибавить к одному из чисел единицу, если после этого все числа будут образовывать неубывающую (слева направо) последовательность. Обозначим через $Z(k, n)$ число способов получить за несколько таких ходов последовательность $\underbrace{k, k, \dots, k}_{n}$. Докажите, что $Z(k, n) = Z(n, k)$ для любых натуральных n, k.

Решение. Сопоставим каждой неубывающей последовательности $(a_1, \dots, a_n)$ из n неотрицательных целых чисел диаграмму Юнга, первый столбец которой состоит из a_n клеток, второй — из a_{n-1} клеток и т.д. Тогда *способу* получить строчку $(\underbrace{k, k, \dots, k}_{n})$ из строчки $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n})$ будет соответствовать *последовательность* диаграмм Юнга, в которой каждый следующий член получается из предыдущего добавлением одной клетки, первый член — пустая диаграмма, а последний — прямоугольник $n \times k$; таким образом, $Z(n, k)$ есть число таких последовательностей. Отразив в каждом члене каждой такой последовательности диаграмму относительно главной диагонали, получим множество всех последовательностей, заканчивающихся прямоугольником $k \times n$. Это отображение осуществляет биекцию между множествами способов, равномощность которых и требовалось доказать.