Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Первый тур 03.11.15. Высшая лига.

1. Найдите в замкнутом виде значение выражения

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{(2^k-3^1)(2^k-3^2)\dots(2^k-3^{1000})}{(2^k-2^1)\dots(2^k-2^{k-1})(2^k-2^{k+1})\dots(2^k-2^{1000})}.$$

2. Пусть $p(n)$ — количество диаграмм Юнга из n клеток. Докажите, что количество диаграмм Юнга из $2n$ клеток, допускающих единственное разбиение на клетчатые прямоугольники 1×2, равно $2p(n)$.

3. Внутри непрозрачного единичного куба находится выпуклый многогранник M, чей объём больше 1/4. Вася не знает ни формы, ни положения этого многогранника. Зато он может пронзить куб k прямолинейными лазерными лучами. При каком наименьшем k Вася может гарантировать, что хотя бы один из лучей будет иметь общую точку с M?

4. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ уравнение $x = \left(\dfrac{1-(1-x^2)^n}{1-(1-x)^n}\right)^2$ имеет в интервале (0,1) единственное решение.

5. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых n+1 дуг с длинами 1, 2, …, n+1 и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC\cdot MN = AN\cdot CM$.

7. Для натурального числа n с каноническим разложением $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$ определим $f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1}\dots\alpha_n p_n^{\alpha_n-1}$ (например, $f(1) = 1$, $f(5) = 1$, $f(24) = 12$). Для натурального a зададим бесконечную последовательность $a_1, a_2, \dots$ условиями $a_1 = a$ и $a_{i+1} = f(a_i)$. Может ли оказаться, что каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{1000000}$ встречается в этой бесконечной последовательности ровно по одному разу?

8. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ — целое.

9. Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

10. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что $\angle BLD = \angle CLN$.

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Первый тур 03.11.15. Первая лига.

1. Найдите в замкнутом виде значение выражения

$$\sum_{k=1}^{1000}\frac{(2^k-3^1)(2^k-3^2)\ldots(2^k-3^{1000})}{(2^k-2^1)\ldots(2^k-2^{k-1})(2^k-2^{k+1})\ldots(2^k-2^{1000})}.$$

2. Пусть $p(n)$ — количество диаграмм Юнга из n клеток. Докажите, что количество диаграмм Юнга из $2n$ клеток, допускающих единственное разбиение на клетчатые прямоугольники 1×2, не меньше $2p(n)$.

3. Внутри непрозрачного единичного куба находится выпуклый многогранник M, чей объём больше 1/4. Вася не знает ни формы, ни положения этого многогранника. Зато он может пронзить куб k прямолинейными лазерными лучами. При каком наименьшем k Вася может гарантировать, что хотя бы один из лучей будет иметь общую точку с M?

4. Функция g: $[0,1]\to\mathbf{R}$ называется *загадочной*, если $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и $|g(a)–g(b)| \le 2|a–b|$ для всех $a, b \in [0,1]$. Найдите наименьшее число $\beta \in \mathbf{R}$ такое, что для всех загадочных функций g и для всех $a, b \in [0,1]$ выполнено неравенство $|g(a)–g(b)| \le \beta$.

5. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, …, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC\cdot MN = AN\cdot CM$.

7. Для натурального числа n с каноническим разложением $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}$ определим $f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1}\ldots\alpha_n p_n^{\alpha_n-1}$ (например, $f(1) = 1$, $f(5) = 1$, $f(24) = 12$). Для натурального a зададим бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$ условиями $a_1 = a$ и $a_{i+1} = f(a_i)$. Может ли оказаться, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1000000}$ различны?

8. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ — целое.

9. Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

10. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \ne D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что точки B, C, N и L лежат на одной окружности.

Первый тур 03.11.15. Вторая лига.

1. Решите в вещественных числах систему $x(y+z-x^3) = y(z+x-y^3) = z(x+y-z^3) = 1$.

2. Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

3. Какое наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску так, чтобы на каждой диагонали находилось не более трех фишек?

4. Может ли число вида 381111111…1111 быть простым?

5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Окружность S_B проходит через точки A, B и касается прямой AC, окружность S_C проходит через точки A, C и касается прямой AB. Прямая, проходящая через точку A и пересекающая отрезок BC, второй раз пересекает S_B и S_C в точках X и Y соответственно. Докажите, что $OX = OY$.

6. Функция $g\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ называется *загадочной*, если $g(0)=0$, $g(1)=1$ и $|g(a)-g(b)|\le 2|a-b|$ для всех $a, b \in [0,1]$. Найдите наименьшее число $\beta \in \mathbf{R}$ такое, что для всех загадочных функций g и для всех $a, b \in [0,1]$ выполнено неравенство $|g(a)-g(b)| \le \beta$.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC\cdot MN = AN\cdot CM$.

8. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, …, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

9. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ — целое.

10. Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?

Первый тур 03.11.15. Третья лига.

1. Пусть $T_n = 1+2+\ldots+n$. Докажите, что если $2T_m = T_n$, то число T_{2m-n} является квадратом натурального числа.

2. В выпуклом 2015-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до прямых, проходящих через стороны, одна и та же. Верно ли, что многоугольник — равносторонний?

3. Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?

4. В треугольнике ABC отрезок AP является биссектрисой. На отрезке AP выбрана точка M. Точка N симметрична точке M относительно середины стороны BC. Прямая BN пересекает прямую AC в точке D, а прямая CN пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что $BE = CD$.

5. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие равенству $x^2 = y^2(x+y^4+2y^2)$.

6. Около треугольника ABC описана окружность. Точка D — середина дуги ACB. Окружность, проходящая через точки C и D, пересекает отрезки AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $AM = BN$.

7. Есть клетчатый прямоугольник, в котором 3 строки и 2015 столбцов. Петя и Вася играют в игру. Они делают ходы по очереди, начинает Петя. Каждым ходом Петя должен закрасить в черный цвет три белых клетки, образующие горизонтальную полоску. Каждым ходом Вася должен закрасить в черный цвет три белых клетки, образующие вертикальную полоску. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Какое наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску так, чтобы на каждой диагонали стояло не более трех фишек?

9. Может ли число вида 381111111…1111 быть простым?

10. Сумма квадратов неотрицательных чисел a, b, c равна 48. Докажите, что $a^2\sqrt{2b^3+16}+b^2\sqrt{2c^3+16}+c^2\sqrt{2a^3+16}\le 576$.

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Первый тур 03.11.15. Высшая юниорская лига.

1. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ — целое.

2. *Диаграмма Юнга* — это набор клеток прямоугольной таблицы, который вместе с любой своей клеткой содержит все клетки левее и ниже её. Докажите, что количество диаграмм Юнга из $2n$ клеток, допускающих единственное разбиение на фигурки домино (прямоугольники из двух клеток), не меньше удвоенного количества диаграмм Юнга из n клеток.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c+abc = 4$. Докажите, что

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)\geq 27\,.$$

4. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, …, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC\cdot MN = AN\cdot CM$.

6. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что точки B, C, N и L лежат на одной окружности.

7. Решите в вещественных числах систему $x(y+z-x^3) = y(z+x-y^3) = z(x+y-z^3) = 1$.

8. Для натурального числа n с каноническим разложением $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$ определим $f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1}\dots\alpha_n p_n^{\alpha_n-1}$. Существует ли такое n, что первые 1000000 членов последовательности n, $f(n)$, $f(f(n))$, … встречаются в ней только один раз?

9. Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

10. Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?

Первый тур 03.11.15. Первая юниорская лига.

1. Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ — целое.

2. *Диаграмма Юнга* — это набор клеток прямоугольной таблицы, который вместе с любой своей клеткой содержит все клетки левее и ниже её. Докажите, что количество диаграмм Юнга из $2n$ клеток, допускающих единственное разбиение на фигурки домино (прямоугольники из двух клеток), не меньше удвоенного количества диаграмм Юнга из n клеток.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c+abc = 4$. Докажите, что

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)\geq 27.$$

4. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, …, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $KH = AM$.

6. В треугольнике ABC отрезок AP является биссектрисой. На отрезке AP выбрана точка M. Точка N симметрична точке M относительно середины стороны BC. Прямая BN пересекает прямую AC в точке D, а прямая CN пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что $BE = CD$.

7. Найдите все пары натуральных чисел x, у, удовлетворяющие равенству $x^2 = y^2(x+y^4+2y^2)$.

8. Может ли число вида 381111111…1111 (n единиц на конце) быть простым?

9. Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

10. Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Первый тур 03.11.15. Вторая юниорская лига.

1. Является ли простым число 381111111…1111 (всего 2015 единиц)?

2. Петя и Волк играют на белой горизонтальной доске 3×2015. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. За один ход Петя может закрасить три идущие подряд по горизонтали белые клетки, а Волк — три белые клетки, идущие по вертикали. Кто не может сделать очередной ход — проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. Пусть $T_n = 1+2+\ldots+n$. Докажите, что если $2T_m = T_n$, то число T_{2m-n} является квадратом натурального числа.

4. В треугольнике ABC отрезок AP является биссектрисой. На отрезке AP выбрана точка M. Точка N симметрична точке M относительно середины стороны BC. Прямая BN пересекает прямую AC в точке D, а прямая CN пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что $BE = CD$.

5. Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что $x^2=y^2(x+y^4+2y^2)$.

6. Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?

7. В выпуклом 2015-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до прямых, проходящих через стороны, одна и та же. Верно ли, что многоугольник — равносторонний?

8. Какое наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску так, чтобы на каждой диагонали стояло не более трех фишек?