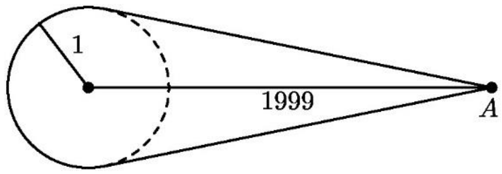
XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая лига, 2 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Назовём выпуклую фигуру на плоскости* ***толстой****, если при некотором $r > 0$ она содержит круг радиуса r и содержится в круге радиуса $1000r$. Верно ли, что любую толстую фигуру можно разрезать прямой на две толстые фигуры? (Фигура содержит свою границу.)*



Ответ. Неверно. Решение. Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке (ограниченную дугой окружности радиуса 1 и двумя отрезками касательных, проведенных из точки A на расстоянии 1999 от центра окружности). Несложно видеть, что она является толстой. Рассмотрим какой-нибудь прямолинейный разрез XY. Выберем из двух образовавшихся частей ту, которая содержит точку A; назовем ее M. Пусть радиус наибольшего круга ω, который содержится в M, равен r. Тогда центр ω — точка O — находится от точки A на расстоянии не меньше $1999r$, причем равенство достигается только в случае, когда ω касается сторон угла исходной фигуры. Пусть B — дальняя точка пересечения луча AO и ω. Тогда $AB \geq 2000r$. Значит, для того, чтобы M была толстой, необходимо, чтобы $AO = 1999r$, а ω касался сторон угла. Поскольку B лежит внутри исходной фигуры, либо точка X, либо точка Y лежит (нестрого) по другую сторону от касательной к ω в точке B, чем точка A. Пусть это точка X. Но тогда $AX > 2000r$, и не существует круга радиуса $1000r$, содержащего M.

♦ Пример без обоснования: *4 балла*.

2. *Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами* ***маленьким****, если $|f(n)| \leq 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?*

Ответ. Конечно. Решение. Пусть их бесконечное количество. Тогда, поскольку количество возможных наборов значений маленького многочлена в точках 1001, 1002, …, $1000+1000^3$ конечно, можно найти два различных маленьких многочлена $p(x)$ и $q(x)$, у которых эти наборы значений одинаковы. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого $p(1001+k) \neq q(1001+k)$. Очевидно, что $k \geq 1000^3$. Разность $p(x)–q(x)$ как многочлен делится на $(x–1001)(x–1002)...(x–1000–k)$. Так как $p(1001+k) \neq q(1001+k)$, то $|p(1001+k)–q(1001+k)| \geq k\cdot(k–1)\cdot...\cdot1 = k!$, потому что левая часть как целое число делится на правую. С другой стороны, $|p(1001+k)–q(1001+k)| \leq |p(1001+k)|+|q(1001+k)| \leq 2\cdot1000^{1001+k}$. Таким образом, $k! \leq 2\cdot1000^{1001+k}$, что, как легко понять, неверно при $k \geq 1000^3$. Получаем противоречие.

♦ Выбор двух маленьких многочленов, совпадающих в достаточно большом количестве точек: *2 балла*.

3. *В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.*

Решение. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по количеству вершин графа. База для графа с не более чем тремя вершинами очевидна.

Пусть наш граф H имеет точку сочленения a, тогда его можно разбить на два индуцированных подграфа H_1 и H_2 с единственной общей вершиной a. Покрасим их по индукционному предположению, сделав так, чтобы цвет a в обеих раскрасках был одинаковым и склеим раскраски, получив в результате раскраску H.

Пусть наш граф H имеет две вершины x, y такие, что $G-\{x, y\}$ несвязен. Тогда H можно разбить на два индуцированных подграфа H'_1 и H'_2 с двумя общими вершинами x, y. Соединим вершины x и y ребром в новых графах, если его не было и получим новые графы H_1 и H_2. Если в каком-то из них (например, в H_1) есть 4 цикла, проходящие по одному ребру, то, поскольку этих циклов нет в H, некоторые из них должны содержать ребро xy. Но это ребро можно заменить путем по вершинам из H_2, что приводит к противоречию. Значит, H_1 и H_2 удовлетворяют условию задачи, покрасим их по индукционному предположению. Цвета x и y в обеих раскрасках различны, можно считать, что x покрашена в цвет 1, а y — в цвет 2. Теперь склеим раскраски, получив в результате раскраску H.

Остается случай, когда граф H не имеет ни точек сочленения, ни разделяющих множеств, состоящих из двух вершин. Значит, все вершины имеют степень хотя бы три, тогда есть цикл длины хотя бы 4. Пусть a и b — две его несмежные вершины, тогда в $H-\{a, b\}$ существует путь P между двумя дугами, на которые a и b делят цикл (пусть внутренние вершины пути не лежат на цикле, а c и d — концы пути). Так как c и d — не соседние в цикле, существует и путь Q между двумя дугами, на которые цикл делят c и d (внутренние вершины этого пути не лежат на цикле, пусть u, v — концы пути). Если пути P и Q не пересекаются, получилось подразбиение графа K_4 (некоторые рёбра заменены путями) на вершинах u, v, c, d. Если же пути пересекаются, пусть z — первая по Q от вершины u точка пересечения с P. В этом случае мы получили подразбиение K_4 на вершинах u, z, c, d. Остается заметить, что любое ребро K_4 входит в 4 разных простых цикла.

♦ Конструкцию дерева блоков и сочленений считать известной. Сведение к случаю двусвязного графа: *2 балла*. Не разобран хотя бы один существенный случай: *не более 6 баллов*.

4. *Плоскость, касающаяся описанной сферы тетраэдра ABCD в точке A, пересекает плоскость грани BCD по прямой a. Аналогично определяются прямые b, c, d. Оказалось, что прямые a, b, c, d попарно скрещиваются. Докажите, что существует бесконечно много прямых, пересекающих каждую из этих четырех.*

Решение. Выберем произвольную точку $X \in a$ и проведём плоскость через X и c; она пересечёт прямую b в (возможно, бесконечно удалённой) точке Y. Прямая XY — это единственная прямая, проходящая через X и пересекающая (в проективном смысле) прямые b и c. Нетрудно понять, что отображение, переводящее X в Y, проективно (для понимания этого полезно спроектировать всю картинку вдоль прямой c);

обозначим его через p_c. Аналогично определим отображение p_d из a в b, в котором вместо прямой c используется d.

Для решения задачи достаточно доказать, что $p_c = p_d$. Действительно, тогда через любую точку $X \in a$ будет проходить прямая, пересекающая b, c и d в проективном смысле. Из проективности введённых (и аналогичных им) отображений следует, что лишь конечное число из этих прямых будет пересекать a, b, c, d в бесконечно удалённых точках. Все остальные полученные прямые нам подходят.

В свою очередь, совпадение отображений p_c и p_d достаточно проверить в трёх точках, то есть достаточно проверить, что существуют три прямые, пересекающие a, b, c, d в проективном смысле. Мы предъявим даже четыре таких прямых. Прямые b, c, d пересекают плоскость BCD по точкам пересечения прямых BC, BD, CD с касательными к окружности BCD в вершинах D, C, B соответственно. Эти три точки лежат на одной прямой t_a согласно теореме Паскаля, применённой к вырожденному шестиугольнику $BBCCDD$. Прямая t_a и является одной из требуемых; остальные три прямых строятся аналогично.

♦ Найдены три требуемых прямых: *2 балла*. Доказано, что достаточно найти такие три прямых: *6 баллов*.

5. *Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в каждом ящике есть хотя бы по шарику, в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3, и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.*

Решение. Заметим, что если на k-ом ходу в коробке лежит k шариков, то на каждом следующем ходу в нее будет добавляться по шарику. Поэтому достаточно доказать, что в каждой коробке число шариков рано или поздно сравняется с номером хода. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что *если число шариков в коробке больше, чем номер хода, то на одном из следующих ходов шарик в коробку добавлен не будет*. Пусть это не так. Тогда, если сейчас k-ый ход и в коробке $n > k$ фишек, то $k+s$ делит $n+s$ при любом натуральном s. Но такое невозможно, потому что при всех достаточно больших s выполнено неравенство $(n+s)/(k+s) = 1+(n-k)/(k+s) < 2$.

♦ Сведение к утверждению, выделенному курсивом: *2 балла*.

6. *На описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BAC, ABC, BCA соответственно. Обозначим через ω_a, ω_b, ω_c окружности, проходящие через A, B, C с центрами A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точка Нагеля треугольника ABC является радикальным центром окружностей ω_a, ω_b, ω_c. (Точка Нагеля — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками касания противоположных сторон со вневписанными окружностями.)*

Решение. *Лемма*. Пусть в треугольнике $A'B'C'$ точки A, B и C —середины сторон $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$ соответственно. Тогда точка Нагеля треугольника ABC совпадает с центром вписанной окружности треугольника $A'B'C'$. *Доказательство*. Пусть I —

центр вписанной окружности $A'B'C'$, а H_a — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Мы хотим доказать, что A, I, H_a лежат на одной прямой. Точка H_a является также и точкой касания вписанной окружности $A'BC$ с BC. При гомотетии с центром в A' и коэффициентом 2 она перейдет в точку касания вписанной окружности $A'B'C'$ с $B'C'$. Обозначим эту точку за K и сделаем гомотетию с центром в ней и коэффициентом 2. Точка H_a при этом перейдет в A', точка I — в точку на вписанной окружности $A'B'C'$, диаметрально противоположную K, а точка A — в точку касания вневписанной окружности треугольника $A'B'C'$ со стороной $B'C'$. Эти три точки лежат на одной прямой, следовательно, и их прообразы лежали. Лемма доказана.

Пусть теперь O — центр описанной окружности ABC, а $A'B'C'$ — треугольник, у которого A, B, C — середины сторон. Заметим, что прямая A_1O перпендикулярна BC, а значит, прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, будет радикальной осью описанной окружности и окружности ω_a. Следовательно, радикальный центр окружностей ω_a, ω_b и описанной окружности ABC есть точка C'. При симметрии относительно точки O отрезок A_1B_1 перейдет в параллельный ему отрезок B_2A_2, соединяющий середины дуг AC и CB. Точка B_2 равноудалена от C и I, также как и A_2, поэтому B_2A_2 — серединный перпендикуляр к CI и, следовательно, $CI \perp A_1B_1$. Но в треугольниках ABC и $A'B'C'$ биссектрисы углов $\angle C$ и $\angle C'$ параллельны поэтому биссектриса угла $A'C'B'$ перпендикулярна A_1B_1, и при этом точка C' лежит на радикальной оси окружностей ω_a и ω_b, значит, биссектриса $\angle A'B'C'$ и является их радикальной осью. То есть центр вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ является радикальным центром окружностей ω_a, ω_b и ω_c. Но по лемме этот центр совпадает с точкой Нагеля треугольника ABC. Что и требовалось доказать.

7. ***Словом*** *назовём произвольную конечную последовательность из нулей и единиц. Для слова w обозначим через $T_n(w)$ количество слов длины n, не содержащих w в качестве подслова. Пусть u и v — два слова, причём длина u меньше длины v. Докажите, что $T_n(u) \le T_n(v)$ при всех натуральных n.*

Решение. Назовём слово *w-хорошим*, если оно не содержит w в качестве подслова. Обозначим через o_k слово из k нулей. Пусть w — слово длины k. Мы докажем, что

$$T_n(o_k) \ge T_n(w) \ge T_n(o_{k-1}) \ (*);$$

отсюда, очевидно, следует требуемое.

Заметим сразу, что $T_i(o_k) = T_i(w) = 2^i \ge T_i(o_{k-1})$ при $i < k$, а также $T_k(o_k) = T_k(w) = 2^k-1 > T_k(o_{k-1})$.

Каждое o_k-хорошее слово длины хотя бы k оканчивается на 10…0, где число нулей может быть от 0 до k–1. После отбрасывания этого хвоста также получается o_k-хорошее слово. Наоборот, после приписывания любого такого хвоста к любому o_k-хорошему слову также получается o_k-хорошее. Отсюда следует, что

$$T_n(o_k) = T_{n-1}(o_k)+\ldots+T_{n-k}(o_k) \text{ при } n > k.$$

Покажем, что

$$T_{n-1}(w)+\ldots+T_{n-k}(w) \ge T_n(w) \ge T_{n-1}(w)+\ldots+T_{n-k+1}(w) \ (**)$$

при тех же n; отсюда по индукции следует (*).

Возьмём произвольное w-хорошее слово A из n букв и рассмотрим его кратчайший хвост, не являющийся хвостом w; пусть i — длина этого хвоста. Заметим, что такой хвост длины i — это обязательно хвост слова w длины i с изменённым первым символом. При отбрасывании этого хвоста от A получается w-хорошее слово длины $n–i$. Значит, w-хороших слов с таким хвостом не больше $T_{n-i}(w)$, откуда следует первое неравенство в (**).

С другой стороны, пусть $H_n(w)$ — количество n-буквенных w-хороших слов, оканчивающихся на $(k–1)$-буквенное начало слова w; тогда $H_n(w) \le T_{n-k+1}(w)$. Значит, при $n > k$ имеем

$$T_n(w) = 2T_{n-1}(w)-H_{n-1}(w) \ge 2T_{n-1}(w)-T_{n-k}(w)$$

(первое равенство следует из того, что w-хорошее слово перестаёт быть таковым после приписывания буквы, если на конце образуется w). Теперь можно доказать правое неравенство в (**) индукцией по $n \ge k$. База для $n = k$ следует из явных значений $T_i(w)$. Переход следует из цепочки неравенств

$$T_n(w) \ge 2T_{n-1}(w)-T_{n-k}(w) = T_{n-1}(w)+(T_{n-1}(k)-T_{n-k}(w)) \ge$$
$$\ge T_{n-1}(w)+(T_{n-2}(w)+T_{n-3}(w)+...+T_{n-k+1}(w)).$$

♦ Доказано только одно из двух неравенств (*), других содержательных продвижений нет: *4 балла*. Только сформулировано неравенство (*): *0 баллов*.

8. *Докажите, что каждое натуральное $n \ge 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят* $\sqrt{n}$.

Решение. Пусть $n = k^2+t$, где $2k \ge t \ge 0$. Если число $k+1$ составное, то можно поделить n с остатком на $k+1$ и получить представление $n = (k+1)q+r$, где $q, r \le k \le \sqrt{n}$ (если $r = 0$, то $n = (k+1)k = k^2+k$). Если же $k+1$ простое, то составным обязательно будет число $k+2$ и можно делить с остатком на него. Единственное представление, которое не будет удовлетворять условию, получится при $n \equiv k+1 \pmod{(k+2)}$, то есть $n = k^2+2k–1$ или $n = k^2+k–3$. Но в первом случае мы знаем, что число $k+4$ является составным, так как оно делится на 2, а, значит, можно представить n как сумму $(k–2)(k+4)+7$, а во втором случае $n = k^2+(k–3)$.

♦ Неразбор хотя бы одной бесконечной серии (например, $n = k^2$ при простом $k+1$): *не более 6 баллов*.

9. *Даны ненулевые числа x, y, z, w такие, что $x+y \ne 0$, $z+w \ne 0$ и $xy+zw \ge 0$. Докажите неравенство* $\left(\frac{x+y}{z+w}+\frac{z+w}{x+y}\right)^{-1}+\frac{1}{2} \ge \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{w}+\frac{w}{y}\right)^{-1}$.

Приведем все дроби к общему знаменателю:

$$\left(\frac{(x+y)^2+(z+w)^2}{(x+y)(z+w)}\right)^{-1}+\frac{1}{2} \ge \left(\frac{x^2+z^2}{xz}\right)^{-1}+\left(\frac{y^2+w^2}{yw}\right)^{-1}.$$

Преобразуем полученное неравенство:

$$\frac{1}{2}-\frac{xz}{x^2+z^2}+\frac{1}{2}-\frac{yw}{y^2+w^2}\geq\frac{1}{2}-\frac{(x+y)(z+w)}{(x+y)^2+(z+w)^2}$$

и снова приведем пары слагаемых к общему знаменателю:

$$\frac{(x-z)^2}{2(x^2+z^2)}+\frac{(y-w)^2}{2(y^2+w^2)}\geq\frac{(x+y-z-w)^2}{2((x+y)^2+(z+w)^2)}.$$

Далее имеем

$$\frac{(x-z)^2}{2(x^2+z^2)}+\frac{(y-w)^2}{2(y^2+w^2)}\geq\frac{(x-z+y-w)^2}{2(x^2+y^2+z^2+w^2)}\geq\frac{(x+y-z-w)^2}{2((x+y)^2+(z+w)^2)},$$

где первое неравенство вытекает из неравенства Коши–Буняковского–Шварца, а второе — из очевидного неравенства $(x+y)^2+(z+w)^2 \geq x^2+y^2+z^2+w^2$.

10. *Каждая клетка квадратной таблицы 100×100 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что для любых трёх клеток одного цвета, находящихся в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток этого же цвета. При каком наименьшем k это возможно?*

Ответ. 34. Решение. Докажем, что количество клеток каждого цвета не больше 300; отсюда будет следовать, что число цветов не меньше $100^2/300 > 33$, то есть $k \geq 34$. Рассмотрим все клетки этого цвета, и в каждом столбце отметим все такие клетки, кроме двух нижних. Справа от каждой отмеченной клетки нет клеток этого же цвета; значит, все отмеченные клетки лежат в разных строках, и их не больше 100. Неотмеченных же клеток не больше, чем по две в столбце, то есть всего не больше 200. Отсюда и следует требуемая оценка.

Для примера пронумеруем диагонали, идущие влево-вверх, последовательно числами от 1 до 199 и покрасим клетки i–й диагонали в цвет с номером $[i/3]$ (mod 34). Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце одноцветные клетки идут последовательно, и их там не больше трёх. Отсюда нетрудно получить, что пример подходит.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только ответ с примером: *4 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

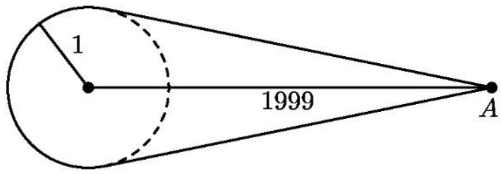
XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Первая лига, 2 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Назовём выпуклую фигуру на плоскости* ***толстой****, если при некотором $r > 0$ она содержит круг радиуса r и содержится в круге радиуса $1000r$. Верно ли, что любую толстую фигуру можно разрезать прямой на две толстые фигуры? (Фигура содержит свою границу.)*



Ответ. Неверно. Решение. Рассмотрим фигуру, изображенную на рисунке (ограниченную дугой окружности радиуса 1 и двумя отрезками касательных, проведенных из точки A на расстоянии 1999 от центра окружности). Несложно видеть, что она является толстой. Рассмотрим какой-нибудь прямолинейный разрез XY. Выберем из двух образовавшихся частей ту, которая содержит точку A; назовем ее M. Пусть радиус наибольшего круга ω, который содержится в M, равен r. Тогда центр ω — точка O — находится от точки A на расстоянии не меньше $1999r$, причем равенство достигается только в случае, когда ω касается сторон угла исходной фигуры. Пусть B — дальняя точка пересечения луча AO и ω. Тогда $AB \geq 2000r$. Значит, для того, чтобы M была толстой, необходимо, чтобы $AO = 1999r$, а ω касался сторон угла. Поскольку B лежит внутри исходной фигуры, либо точка X, либо точка Y лежит (нестрого) по другую сторону от касательной к ω в точке B, чем точка A. Пусть это точка X. Но тогда $AX > 2000r$, и не существует круга радиуса $1000r$, содержащего M.

♦ Пример без обоснования: *4 балла*.

2. *Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами* ***маленьким****, если $|f(n)| \leq 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?*

Ответ. Конечно. Решение. Пусть их бесконечное количество. Тогда, поскольку количество возможных наборов значений маленького многочлена в точках 1001, 1002, …, $1000+1000^3$ конечно, можно найти два различных маленьких многочлена $p(x)$ и $q(x)$, у которых эти наборы значений одинаковы. Пусть k — наименьшее натуральное число, для которого $p(1001+k) \neq q(1001+k)$. Очевидно, что $k \geq 1000^3$. Разность $p(x)–q(x)$ как многочлен делится на $(x–1001)(x–1002)...(x–1000–k)$. Так как $p(1001+k) \neq q(1001+k)$, то $|p(1001+k)–q(1001+k)| \geq k\cdot(k–1)\cdot...\cdot 1 = k!$, потому что левая часть как целое число делится на правую. С другой стороны, $|p(1001+k)–q(1001+k)| \leq |p(1001+k)|+|q(1001+k)| \leq 2\cdot 1000^{1001+k}$. Таким образом, $k! \leq 2\cdot 1000^{1001+k}$, что, как легко понять, неверно при $k \geq 1000^3$. Получаем противоречие.

♦ Выбор двух маленьких многочленов, совпадающих в достаточно большом количестве точек: *2 балла*.

3. *У Пети есть клетчатый бумажный квадрат 2015×2015. Каждую его клетку он разрезал по одной из диагоналей; в результате квадрат распался на k частей. При каких k это возможно?*

Ответ. Все числа от $2\cdot 2015 = 4030$ до $2016\cdot 1008 = 2032128$. Решение. Докажем, что минимальное количество таких областей равно $2\cdot 2015$. Каждая из частей состоит из равнобедренных прямоугольных треугольников, которые связаны между собой через катеты. Следовательно, у каждого треугольника не более двух соседних (из той же области), а тогда каждая область — это либо цикл из треугольников, либо путь. Заметим, что у нас $4\cdot 2015$ отрезков границы, у каждой области не более двух из них, поэтому областей не менее 4030. Эта оценка достигается, если провести все диагонали одного направления.

Докажем, что областей не более $2016\cdot 1008$. Пусть у нас есть u областей в углу, имеющих площадь 1/2, g областей площади 1 или более, имеющих два отрезка границы. Количество областей без выхода к границе обозначим через v; каждая из них имеет площадь не менее 2, так как цикл из треугольников может быть только четным (это следует, например, из шахматной раскраски) и не может состоять из двух треугольников. Число граничных областей есть $u+g \le 2\cdot 2015$, так как у каждой из них хотя бы два отрезка границы. Угловых областей $u \le 4$. Оценивая площади наших областей, получаем $2v+g+u/2 \le 2015^2$.

Оценим количество областей, используя все три полученных неравенства. Имеем $v+g+u = (2v+g+u/2)/2+(g+u)/2+u/4 \le 2015^2/2+2015+1 = 2016\cdot 1008+1/2$, откуда $v+g+u \le 2016\cdot 1008$ (количество областей целое). Эта оценка точна в силу следующего примера. Раскрасим в шахматном порядке клетки, в черных проведем один тип диагонали, в белых другой. В таком примере оценка будет точной, за исключением $u = 2$, поэтому как раз пропадет 1/2.

Осталось показать, что все промежуточные значения возможны. Заметим, что при убирании диагонали число областей может уменьшится на 1 или не измениться, а при добавлении может увеличиться на 1 или не измениться. Тогда при повороте диагонали в одной клетке количество областей меняется не более, чем на 1. Поэтому, если мы будет изменять минимальный пример по одной диагонали к максимальному, мы получим все промежуточные варианты.

♦ Решение задачи состоит из пяти частей: оценки и примеры для минимума и максимума и доказательства реализуемости всех промежуточных значений. Если в решении присутствует $1 \le k \le 4$ частей, то доклад оценивается *из 2(k–1) баллов*.

4. *В треугольнике ABC сторона AC длиннее стороны AB. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая AI пересекает прямые DE и DF в точках X и Y соответственно. Z — основание перпендикуляра, опущенного из A на BC. Докажите, что D — центр вписанной окружности треугольника XYZ.*

Решение. Пусть углы CAB и ACB равны 2α и 2γ соответственно. Тогда $\angle CIY = \alpha+\gamma = \angle FDB = \angle CDY$, откуда четырёхугольник $CYDI$ — вписанный. Поэтому $\angle DYI = \angle DCI = \gamma$ (точка Y вне треугольника ABC, так как $AC > AB$) и

$\angle CYI = \angle CDI = 90°$. Но тогда четырёхугольник $CYZA$ — вписанный и $\angle AYZ = \angle ACZ = 2\gamma$. Следовательно, YD — биссектриса угла IYZ. Аналогичным способом доказывается, что XD является биссектрисой угла YIZ, откуда и следует утверждение задачи.

5. *Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в каждом ящике есть хотя бы по шарику, в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3, и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.*

Решение. Заметим, что если на k-ом ходу в коробке лежит k шариков, то на каждом следующем ходу в нее будет добавляться по шарику. Поэтому достаточно доказать, что в каждой коробке число шариков рано или поздно сравняется с номером хода. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что *если число шариков в коробке больше, чем номер хода, то на одном из следующих ходов шарик в коробку добавлен не будет*. Пусть это не так. Тогда, если сейчас k-ый ход и в коробке $n > k$ фишек, то $k+s$ делит $n+s$ при любом натуральном s. Но такое невозможно, потому что при всех достаточно больших s выполнено неравенство $(n+s)/(k+s) = 1+(n-k)/(k+s) < 2$.

♦ Сведение к утверждению, выделенному курсивом: *2 балла*.

6. *На описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BAC, ABC, BCA соответственно. Обозначим через ω_a, ω_b, ω_c окружности, проходящие через A, B, C с центрами A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точка Нагеля треугольника ABC является радикальным центром окружностей ω_a, ω_b, ω_c. (Точка Нагеля — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками касания противоположных сторон со вневписанными окружностями.)*

Решение. *Лемма*. Пусть в треугольнике $A'B'C'$ точки A, B и C —середины сторон $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$ соответственно. Тогда точка Нагеля треугольника ABC совпадает с центром вписанной окружности треугольника $A'B'C'$. *Доказательство*. Пусть I — центр вписанной окружности $A'B'C'$, а H_a — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Мы хотим доказать, что A, I, H_a лежат на одной прямой. Точка H_a является также и точкой касания вписанной окружности $A'BC$ с BC. При гомотетии с центром в A' и коэффициентом 2 она перейдет в точку касания вписанной окружности $A'B'C'$ с $B'C'$. Обозначим эту точку за K и сделаем гомотетию с центром в ней и коэффициентом 2. Точка H_a при этом перейдет в A', точка I — в точку на вписанной окружности $A'B'C'$, диаметрально противоположную K, а точка A — в точку касания вневписанной окружности треугольника $A'B'C'$ со стороной $B'C'$. Эти три точки лежат на одной прямой, следовательно, и их прообразы лежали. Лемма доказана.

Пусть теперь O — центр описанной окружности ABC, а $A'B'C'$ — треугольник, у которого A, B, C — середины сторон. Заметим, что прямая A_1O перпендикулярна BC, а значит, прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, будет радикальной осью описанной окружности и окружности ω_a. Следовательно, радикальный центр окружностей ω_a, ω_b и описанной окружности ABC есть точка C'. При симметрии относительно точки O отрезок A_1B_1 перейдет в параллельный ему отрезок B_2A_2, соединяющий середины дуг AC и CB. Точка B_2 равноудалена от C и I, также как и A_2, поэтому B_2A_2 — серединный перпендикуляр к CI и, следовательно, $CI \perp A_1B_1$. Но в треугольниках ABC и $A'B'C'$ биссектрисы углов $\angle C$ и $\angle C'$ параллельны поэтому биссектриса угла $A'C'B'$ перпендикулярна A_1B_1, и при этом точка C' лежит на радикальной оси окружностей ω_a и ω_b, значит, биссектриса $\angle A'B'C'$ и является их радикальной осью. То есть центр вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ является радикальным центром окружностей ω_a, ω_b и ω_c. Но по лемме этот центр совпадает с точкой Нагеля треугольника ABC. Что и требовалось доказать.

7. ***Словом*** *назовём произвольную конечную последовательность из нулей и единиц. Для слова w обозначим через $T_n(w)$ количество слов длины n, не содержащих w в качестве подслова. Пусть v — некоторое слово, а u — слово меньшей длины, состоящее из нулей. Докажите, что $T_n(u) \le T_n(v)$ при всех натуральных n.*

Решение. Назовём слово w-*хорошим*, если оно не содержит w в качестве подслова. Можно считать, что v имеет длину k, а u состоит из k–1 нулей. Тогда нам достаточно доказать, что $T_n(v) \ge T_n(u)$. Заметим сразу, что $T_i(u) = T_i(v) = 2^i$ при $i < k-1$, а также $T_{k-1}(v) = 2^{k-1} > 2^{k-1}-1 = T_{k-1}(u)$.

Каждое u-хорошее слово длины хотя бы k–1 оканчивается на 10…0, где число нулей может быть от 0 до k–2. После отбрасывания этого хвоста также получается u-хорошее слово. Наоборот, после приписывания любого такого хвоста к любому u-хорошему слову также получается u-хорошее. Отсюда следует, что $T_n(u) = T_{n-1}(u)+...+T_{n-k+1}(u)$ при $n \ge k$. Покажем, что

$$T_n(v) \ge T_{n-1}(v)+...+T_{n-k+1}(v) \quad (*)$$

при тех же n; отсюда по индукции следует требуемое.

Пусть $H_n(v)$ — количество n-буквенных v-хороших слов, оканчивающихся на (k–1)-буквенное начало слова v; тогда $H_n(v) \le T_{n-k+1}(v)$. Значит, при $n \ge k$ имеем $T_n(v) = 2T_{n-1}(v)-H_{n-1}(v) \ge 2T_{n-1}(v)-T_{n-k}(v)$ (первое равенство следует из того, что v–хорошее слово перестаёт быть таковым после приписывания буквы, если на конце образуется v). Теперь можно доказать (*) индукцией по $n \ge k$. База для $n = k$ следует из явных значений $T_i(v)$. Переход следует из цепочки неравенств

$$T_n(v) \ge 2T_{n-1}(v)-T_{n-k}(v) = T_{n-1}(v)+(T_{n-1}(k)-T_{n-k}(v)) \ge$$

$$\ge T_{n-1}(v)+(T_{n-2}(v)+T_{n-3}(v)+...+T_{n-k+1}(v)).$$

♦ Выписана рекуррента на $T_n(u)$: *2 балла*.

8. *Докажите, что каждое натуральное $n \ge 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}$.*

Решение. Пусть $n = k^2+t$, где $2k \ge t \ge 0$. Если число k+1 составное, то можно поделить n с остатком на k+1 и получить представление $n = (k+1)q+r$, где $q, r \le k \le \sqrt{n}$ (если $r = 0$, то $n = (k+1)k = k^2+k$). Если же k+1 простое, то составным обязательно будет число $k+2$ и можно делить с остатком на него. Единственное представление, которое не будет удовлетворять условию, получится при $n \equiv k+1 \pmod{(k+2)}$, то есть $n = k^2+2k-1$ или $n = k^2+k-3$. Но в первом случае мы знаем, что число $k+4$ является составным, так как оно делится на 2, а, значит, можно представить n как сумму $(k-2)(k+4)+7$, а во втором случае $n = k^2+(k-3)$.

♦ Неразбор хотя бы одной бесконечной серии (например, $n = k^2$ при простом $k+1$): *не более 6 баллов*.

9. *Неотрицательные вещественные числа $a_1, \ldots, a_{2n}$ таковы, что $a_i+a_{i+n} = 1$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что найдутся два различных индекса i и j, для которых $\sqrt{a_i^2 - a_j^2} \le \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.*

Решение. Обозначим $z = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. Не умаляя общности, будем считать, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le 1/2 \le a_{2n} \le \ldots \le a_{n+1}$. Предположим, что требуемых индексов i и j не существует. Тогда $a_k^2-a_{k-1}^2 > z^2$ для $2 \le k \le n$; кроме того, $a_{2n}^2-a_n^2 > z^2$. Отсюда $a_n^2 > (n-1)z^2+a_1^2 \ge (n-1)z^2$ и $a_{2n}^2 > nz^2$. А тогда $1 = \sqrt{a_n^2} + \sqrt{a_{2n}^2} > z\sqrt{n} + z\sqrt{n-1} = 1$, получаем противоречие.

10. *На доске нарисован правильный 500-угольник. Саша выбирает 500 различных натуральных чисел и сообщает их Кириллу. Кирилл мысленно расставляет их в вершинах 500-угольника. Затем Саша за один вопрос может узнать сумму чисел в любой выбранной им полуплоскости, заплатив Кириллу рубль. При каком наименьшем k Саша может выбрать числа так, чтобы гарантированно узнать задуманную расстановку, заплатив Кириллу не более k рублей?*

Ответ. 250. Решение. Обозначим 500-угольник $A_1A_2\ldots A_{500}$. Можно считать, что ни одна из границ полуплоскостей не содержит вершины 500-угольника. Докажем, что менее чем за 250 вопросов Саша не сможет гарантированно узнать задуманную расстановку, какие бы числа он ни выбрал. Отметим на сторонах 500-угольника точки пересечения с границами полуплоскостей. Если на стороне A_iA_{i+1} не отмечено ни одной точки, то при каждом вопросе числа, написанные в A_i и A_{i+1}, одновременно входили или не входили в сумму. Значит, варианты, отличающиеся лишь перестановкой чисел в A_i и A_{i+1}, Саша различить не сможет. Таким образом, отмечено не менее 500 точек и вопросов должно быть не менее 250. Теперь приведем пример, когда Саша сможет гарантированно узнать расстановку. Для этого Саша назовет Кириллу числа 2^0, 2^1, ..., 2^{499}. Пусть Кирилл поставил в вершину A_i число a_i. Очевидно, что если Саша узнает некоторую сумму $a_x+a_y+\ldots+a_z$, то тогда он узнает и набор чисел a_x, a_y, ..., a_z. Поскольку Саша знает сумму всех чисел, то спросив суммы чисел, лежащих в одной полуплоскости относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон, Саша узнает сумму любых 250 идущих подряд чисел. Сравнивая суммы $a_1+\ldots+a_{250}$ и $a_2+\ldots+a_{251}$, Саша узнает числа a_1 и a_{251}; сравнивая $a_2+\ldots+a_{251}$ и $a_3+\ldots+a_{252}$ — узнает a_2 и a_{252}; и т.д.; сравнивая $a_{250}+a_{251}+\ldots+a_{499}$ и $a_{251}+\ldots+a_{500}$ — узнает a_{250} и a_{500}.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая лига, 2 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в каждом ящике есть хотя бы по шарику, в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3, и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.*

Решение. Заметим, что если на k-ом ходу в коробке лежит k шариков, то на каждом следующем ходу в нее будет добавляться по шарику. Поэтому достаточно доказать, что в каждой коробке число шариков рано или поздно сравняется с номером хода. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что *если число шариков в коробке больше, чем номер хода, то на одном из следующих ходов шарик в коробку добавлен не будет*. Пусть это не так. Тогда, если сейчас k-ый ход и в коробке $n > k$ фишек, то $k+s$ делит $n+s$ при любом натуральном s. Но такое невозможно, потому что при всех достаточно больших s выполнено неравенство $(n+s)/(k+s) = 1+(n-k)/(k+s) < 2$.

♦ Сведение к утверждению, выделенному курсивом: *2 балла*.

2. *Неотрицательные вещественные числа a_1, ..., a_{2n} таковы, что $a_i+a_{i+n} = 1$ при всех $i = 1, 2, ..., n$. Докажите, что найдутся два различных индекса i и j, для которых $\sqrt{a_i^2 - a_j^2} \le \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.*

Решение. Обозначим $z = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. Не умаляя общности, будем считать, что $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le 1/2 \le a_{2n} \le ... \le a_{n+1}$. Предположим, что требуемых индексов i и j не существует. Тогда $a_k^2 - a_{k-1}^2 > z^2$ для $2 \le k \le n$; кроме того, $a_{2n}^2 - a_n^2 > z^2$. Отсюда $a_n^2 > (n-1)z^2 + a_1^2 \ge (n-1)z^2$ и $a_{2n}^2 > nz^2$. А тогда $1 = \sqrt{a_n^2} + \sqrt{a_{2n}^2} > z\sqrt{n} + z\sqrt{n-1} = 1$, получаем противоречие.

3. *У Пети есть клетчатый бумажный квадрат 2015×2015. Каждую его клетку он разрезал по одной из диагоналей; в результате квадрат распался на k частей. При каких k это возможно?*

Ответ. Все числа от $2\cdot2015 = 4030$ до $2016\cdot1008 = 2032128$. Решение. Докажем, что минимальное количество таких областей равно $2\cdot2015$. Каждая из частей состоит из равнобедренных прямоугольных треугольников, которые связаны между собой через катеты. Следовательно, у каждого треугольника не более двух соседних (из той же области), а тогда каждая область — это либо цикл из треугольников, либо путь. Заметим, что у нас $4 \cdot 2015$ отрезков границы, у каждой области не более двух из них, поэтому областей не менее 4030. Эта оценка достигается, если провести все диагонали одного направления.

Докажем, что областей не более $2016 \cdot 1008$. Пусть у нас есть u областей в углу, имеющих площадь 1/2, g областей площади 1 или более, имеющих два отрезка границы. Количество областей без выхода к границе обозначим через v; каждая из них имеет площадь не менее 2, так как цикл из треугольников может быть только четным (это следует, например, из шахматной раскраски) и не может состоять из двух треугольников. Число граничных областей есть $u+g \le 2 \cdot 2015$, так как у каждой из них хотя бы два отрезка границы. Угловых областей $u \le 4$. Оценивая площади наших областей, получаем $2v+g+u/2 \le 2015^2$.

Оценим количество областей, используя все три полученных неравенства. Имеем $v+g+u = (2v+g+u/2)/2+(g+u)/2+u/4 \le 20152/2+2015+1 = 2016 \cdot 1008+1/2$, откуда $v+g+u \le 2016 \cdot 1008$ (количество областей целое). Эта оценка точна в силу следующего примера. Раскрасим в шахматном порядке клетки, в черных проведем один тип диагонали, в белых другой. В таком примере оценка будет точной, за исключением $u = 2$, поэтому как раз пропадет 1/2.

Осталось показать, что все промежуточные значения возможны. Заметим, что при убирании диагонали число областей может уменьшится на 1 или не измениться, а при добавлении может увеличиться на 1 или не измениться. Тогда при повороте диагонали в одной клетке количество областей меняется не более, чем на 1. Поэтому, если мы будет изменять минимальный пример по одной диагонали к максимальному, мы получим все промежуточные варианты.

♦ Нахождение минимума с обоснованием (первый абзац решения): *4 балла*. Нахождение максимума с обоснованием (второй абзац решения): *4 балла*. Обоснование промежуточных значений: *4 балла*. Только два пункта из перечисленных трёх: *не более 6 баллов*.

4. *Все точки плоскости покрашены в 2015 цветов. Докажите, что на плоскости найдется 2015 треугольников равной площади, у которых все их вершины одноцветны.*

Решение. Возьмём 2016 параллельных прямых. На каждой из них зафиксируем 2015 точек одного цвета. Найдутся две прямые, на которых цвета зафиксированных точек одинаковы. Возьмём точки A и B этого цвета на одной из этих двух прямых. Пусть $C_1, \ldots, C_{2015}$ — зафиксированные точки на второй прямой. Треугольники $ABC_1, \ldots, ABC_{2015}$ — искомые.

5. *На сторонах AB, BC и CA треугольника выбраны такие точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, что $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Точки I_A, I_B и I_C — центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.*

Решение. Пусть вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается его сторон AB, BC, CA в точках C_0, A_0, B_0. Из условия задачи легко можно получить, что $A_0A_1 = B_0B_1 = C_0C_1$, причем порядок точек на сторонах «сходственен»: либо точки лежат на контуре треугольника в порядке $A – C_0 – C_1 – B – A_0 – A_1 – C – B_0 – B_1 – A$, либо в порядке $A – C_1 – C_0– B – A_1 – A_0 – C – B_1 – B_0 – A$. Без ограничения общности будем рассматривать только первый случай. Прямоугольные треугольники IA_0A_1, IB_0B_1, IC_0C_1 равны по двум катетам, поэтому в них равны гипотенузы, следовательно, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной окружности S с центром I. Так как углы AB_0I и AC_0I прямые, то четырехугольник AC_0IB_0 вписан. Поскольку $\angle B_0IB_1 = \angle C_0IC_1$, то (с учетом порядка точек на сторонах треугольника) $\angle B_1IC_1 = \angle B_0IC_0$, откуда $\angle B_1IC_1 = \angle B_0IC_0 = 180°–\angle B_1AC_1$, то есть четырехугольник AC_1IB_1 вписан. Точка I является пересечением биссектрисы AI_A треугольника C_1AB_1 с его описанной окружностью, и по лемме о трезубце $II_A = IB_1 = IC_1$. Из этого и аналогичных равенств вытекает, что точки I_A, I_B, I_C лежат на окружности S (и на ней же лежат точки A_1, B_1, C_1).

6. *Докажите, что каждое натуральное $n \geq 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят* $\sqrt{n}$.

Решение. Пусть $n = k^2+t$, где $2k \geq t \geq 0$. Если число $k+1$ составное, то можно поделить n с остатком на $k+1$ и получить представление $n = (k+1)q+r$, где $q, r \leq k \leq \sqrt{n}$ (если $r = 0$, то $n = (k+1)k = k^2+k$). Если же $k+1$ простое, то составным обязательно будет число $k+2$ и можно делить с остатком на него. Единственное представление, которое не будет удовлетворять условию, получится при $n \equiv k+1 \pmod{(k+2)}$, то есть $n = k^2+2k–1$ или $n = k^2+k–3$. Но в первом случае мы знаем, что число $k+4$ является составным, так как оно делится на 2, а, значит, можно представить n как сумму $(k–2)(k+4)+7$, а во втором случае $n = k^2+(k–3)$.

♦ Потеря одного специфического случая: *дыра в 4 балла*. Потеря более чем одного случая: *не более 6 баллов*.

7. *Каждая клетка квадратной таблицы 11×11 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что если какие-то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней из них клеток этого цвета больше нет. При каком наименьшем k это может быть?*

Ответ. 6. Решение. Докажем, что количество клеток каждого цвета не больше 22; отсюда будет следовать, что число цветов не меньше $11^2/22 > 5$, то есть $k \geq 6$. Рассмотрим все клетки этого цвета и в каждом столбце отметим все такие клетки, кроме нижней. Справа от каждой отмеченной клетки нет клеток этого же цвета; значит, все отмеченные клетки лежат в разных строках, и их не больше 11. Неотмеченных же клеток не больше, чем по одной в столбце, то есть всего не больше 11. Отсюда и следует требуемая оценка.

Для примера пронумеруем диагонали, идущие влево-вверх, последовательно числами от 1 до 21 и покрасим клетки i-й диагонали в цвет с номером $[i/2] \pmod 6$. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце одноцветные клетки идут последовательно, и их там не больше двух. Отсюда легко получить, что пример подходит.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

8. *Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки D, E, F на отрезках BC, CA, AB таковы, что DE перпендикулярно CO и DF перпендикулярно BO. Точка K — центр описанной окружности треугольника AFE. Докажите, что прямые DK и BC перпендикулярны.*

Решение. Заметим, что $\angle COB = 2\angle A$, $\angle OBC = \angle BCO = 90°-\angle A$, $\angle EKF = 2\angle A$ и $\angle KFE = \angle FEK = 90°-\angle A$. Так как $DE \perp BO$, то $\angle FDB = \angle A$ и, аналогично, $\angle EDC = \angle A$, откуда $\angle FDE = 180°-2\angle A$. У четырехугольника $KFDE$ сумма противоположных углов равна 180°, поэтому он вписан, откуда $\angle KDE = \angle KFE = 90°-\angle A$. В итоге $\angle KDC = \angle KDE+\angle EDC = 90°$.

9. *Назовём квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами маленьким, если $|f(n)| \le 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких трёхчленов?*

Ответ. Конечно. Решение. По условию маленький квадратный трехчлен может принимать лишь конечное число значений в точках 1001, 1002 и 1003. Следовательно, если их бесконечно много, то найдутся два различных маленьких трехчлена, принимающие одинаковые значения во всех этих точках. Но тогда их разность является многочленом не более второй степени и имеет хотя бы три корня, то есть разность — тождественный ноль. Противоречие.

10. *На доске нарисован правильный 500-угольник. Саша выбирает 500 различных натуральных чисел и сообщает их Кириллу. Кирилл мысленно расставляет их в вершинах 500-угольника. Затем Саша за один вопрос может узнать сумму чисел в любой выбранной им полуплоскости, заплатив Кириллу рубль. При каком наименьшем k Саша может выбрать числа так, чтобы гарантированно узнать задуманную расстановку, заплатив Кириллу не более k рублей?*

Ответ. 250. Решение. Обозначим 500-угольник $A_1A_2\ldots A_{500}$. Можно считать, что ни одна из границ полуплоскостей не содержит вершины 500-угольника. Докажем, что менее чем за 250 вопросов Саша не сможет гарантированно узнать задуманную расстановку, какие бы числа он ни выбрал. Отметим на сторонах 500-угольника точки пересечения с границами полуплоскостей. Если на стороне A_iA_{i+1} не отмечено ни одной точки, то при каждом вопросе числа, написанные в A_i и A_{i+1}, одновременно входили или не входили в сумму. Значит, варианты, отличающиеся лишь перестановкой чисел в A_i и A_{i+1}, Саша различить не сможет. Таким образом, отмечено не менее 500 точек и вопросов должно быть не менее 250. Теперь приведем пример, когда Саша сможет гарантированно узнать расстановку. Для этого Саша назовет Кириллу числа 2^0, 2^1, ..., 2^{499}. Пусть Кирилл поставил в вершину A_i число a_i. Очевидно, что если Саша узнает некоторую сумму $a_x+a_y+\ldots+a_z$, то тогда он узнает и набор чисел a_x, a_y, ..., a_z. Поскольку Саша знает сумму всех чисел, то спросив суммы чисел, лежащих в одной полуплоскости относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон, Саша узнает сумму любых 250 идущих подряд чисел. Сравнивая суммы $a_1+\ldots+a_{250}$ и $a_2+\ldots+a_{251}$, Саша узнает числа a_1 и a_{251}; сравнивая $a_2+\ldots+a_{251}$ и $a_3+\ldots+a_{252}$ — узнает a_2 и a_{252}; и т.д.; сравнивая $a_{250}+a_{251}+\ldots+a_{499}$ и $a_{251}+\ldots+a_{500}$ — узнает a_{250} и a_{500}.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Третья лига, 2 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число x на числа 3x+1, 5x+2 или x–7. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое никогда не появится на доске.*

Ответ. 1004. Решение. Нарисовав граф операций $x \to 3x+1$ и $x \to 5x+2$ по модулю 7, обнаруживаем, что любой из остатков, не равных 3, может перейти в любой другой, но не может перейти в остаток 3. Кроме того, если получено число x с данным остатком от деления на 7, то повторением операции $x \to x–7$ мы можем получить все меньшие числа с тем же остатком. Так как, повторяя операции $x \to 3x+1$ и $x \to 5x+2$, мы можем получать сколь угодно большие числа, из сказанного следует, что можно получить те и только те числа, которые при делении на 7 дают остаток, не равный 3. Отсюда и получаем ответ.

♦ Только пример: *0 баллов*. Пример с обоснованием невозможности: *4 балла*.

2. *Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки D, E, F на отрезках BC, CA, AB таковы, что DE перпендикулярно CO и DF перпендикулярно BO. Точка K — центр описанной окружности треугольника AFE. Докажите, что прямые DK и BC перпендикулярны.*

Решение. Заметим, что $\angle COB = 2\angle A$, $\angle OBC = \angle BCO = 90°–\angle A$, $\angle EKF = 2\angle A$ и $\angle KFE = \angle FEK = 90°–\angle A$. Так как $DE \perp BO$, то $\angle FDB = \angle A$ и, аналогично, $\angle EDC = \angle A$, откуда $\angle FDE = 180°–2\angle A$. У четырехугольника $KFDE$ сумма противоположных углов равна 180°, поэтому он вписан, откуда $\angle KDE = \angle KFE = 90°–\angle A$. В итоге $\angle KDC = \angle KDE+\angle EDC = 90°$.

3. *Одна из высот треугольника равна среднему арифметическому двух других высот. Докажите, что отношение любых двух сторон этого треугольника больше 2/5.*

Решение. Пусть a, b, c – стороны данного треугольника, причём $a \le b \le c$, S — его площадь. Достаточно доказать, что $a/c \ge 2/5$. Тогда из формулы $h = 2S/a$ следует равенство $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow b=\frac{2ac}{a+c}$. В силу неравенства треугольника $a+\frac{2ac}{a+c} \ge c \Leftrightarrow a^2+2ac-c^2 \ge 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \ge \sqrt{2}-1 > \frac{2}{5}$.

4. *Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3 и так далее. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.*

Решение. Заметим, что если на k-ом ходу в коробке лежит k шариков, то на каждом следующем ходу в нее будет добавляться по шарику. Поэтому достаточно доказать, что в каждой коробке число шариков рано или поздно сравняется с номером хода. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что *если число шариков в коробке больше, чем номер хода, то на одном из следующих ходов шарик в коробку добавлен не будет*. Пусть это не так. Тогда, если сейчас k-ый ход и в коробке $n > k$ фишек, то $k+s$ делит $n+s$ при любом натуральном s. Но такое невозможно, потому что при всех достаточно больших s выполнено неравенство $(n+s)/(k+s) = 1+(n-k)/(k+s) < 2$.

♦ Сведение к утверждению, выделенному курсивом: *2 балла*.

5. *Петя нарисовал границу клетчатой доски $n\times n$ и по одной диагонали в каждой клеточке. Нарисованными линиями доска разбилась на несколько областей. Найдите наименьшее возможное количество областей.*

Ответ. $2n$. Решение. Каждая из частей состоит из равнобедренных прямоугольных треугольников, которые связаны между собой через катеты. Следовательно, у каждого треугольника не более двух соседних (из той же области), а тогда каждая область — это либо цикл из треугольников, либо путь. Заметим, что у нас $4n$ отрезков границы доски, у каждой области не более двух из них, поэтому областей не менее $2n$. Эта оценка достигается, если провести все диагонали одного направления.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

6. *По кругу стоят 2015 чисел так, что каждое меньше суммы двух соседних на одно и то же значение. Докажите, что все числа равны между собой.*

Решение. Пусть не все числа равны. Обозначим разницу между числом и суммой его соседей через x. Рассмотрим числа, стоящие через одно: a и b. Между ними стоит число $a+b-x$, а далее, по кругу: $-a+2x$, $-a-b+3x$, $-b+2x$, a, $a+b-x$, b, и далее всё повторяется с периодом 6. Совершив полный круг, получим, что 2016-ое (оно же первое) число равно $-b+2x$, 2017-ое (оно же второе) равно a, а 2018-ое (оно же третье) равно $a+b-x$. Получаем систему уравнений, откуда легко выводится, что $a = b = x$, что противоречит предположению.

7. *Каждый из коэффициентов квадратного трёхчлена равен значению этого трёхчлена в одной из точек 0, 1, 2. Могут ли все коэффициенты быть различными?*

Ответ. Не могут. Решение. Возьмем трёхчлен $f(x) = ax^2+bx+c$. $f(0) = c$. $f(1) = a+b+c$. Если $f(1) = a$, то $b = -c$. Тогда $-c = b = f(2) = 4a+2b+c = 4a-c$, откуда $a = 0$, что невозможно. Если $f(1) = b$, то $a = -c$. Тогда $-c = a = f(2) = 4a+2b+c = -3c+2b$, откуда $c = b$.

8. *Все точки плоскости покрашены в 2015 цветов. Докажите, что на плоскости найдется 2015 треугольников равной площади, у которых все их вершины одноцветны.*

Решение. Возьмём 2016 параллельных прямых. На каждой из них зафиксируем 2015 точек одного цвета. Найдется две прямые, на которых цвета зафиксированных точек одинаковы. Возьмём точки A и B этого цвета на одной из этих двух прямых. Пусть $C_1, \ldots, C_{2015}$ — зафиксированные точки на второй прямой. Треугольники $ABC_1, \ldots, ABC_{2015}$ — искомые.

9. *Натуральное число называется* ***странным****, если его можно представить в виде a^b+b, где $a > 1$, $b > 1$. Докажите, что существует миллион последовательных натуральных чисел, среди которых все, кроме двух, странные.*

Решение. Легко видеть, что странными являются все числа вида $a^{n!}+2$, $a^{n!}+3, \ldots$ $a^{n!}+n$. Это означает, что можно выбрать миллион последовательных натуральных чисел, каждое из которых является странным. В тоже время числа 1, 2, 3, 4, 5 странными не являются, то есть среди первого миллиона последовательных натуральных чисел странных не более 999995. Когда мы сдвигаем на 1 ряд последовательных натуральных чисел, количество странных чисел в этом ряду либо не меняется, либо меняется на 1. Это означает, что найдётся миллион натуральных чисел, среди которых странные все, кроме двух.

♦ Доказано только, что найдётся миллион последовательных странных чисел: *2 балла*.

10. *Числовая последовательность строится по закону $a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$. Можно ли подобрать два первых члена так, чтобы первые десять членов этой последовательности были натуральными числами?*

Ответ. Нельзя. Решение. Прежде всего заметим, что выполняется цепочка неравенств $a_2<a_3<a_4<\ldots$ Затем введём новую последовательность $x_n = \sqrt{a_{n+1} + a_n}$, для элементов которой выполнены неравенства $x_2 < x_3 < x_4 < \ldots$ В то же время легко получить равенство $x_n + x_{n-1} = x_{n+1}^2 - x_n^2$. Но тогда при $n \geq 3$ $1 < x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_n}{x_{n+1} + x_n} < 1$. Полученное противоречие показывает, что целым не может быть уже число x_4, а, значит, и число a_6. Таким образом, как бы мы не выбирали два первых члена исходной последовательности, целыми в ней могут быть не более пяти первых членов.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая юниорская лига, 2 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BAC, ABC, BCA соответственно. Обозначим через ω_a, ω_b, ω_c окружности, проходящие через A, B, C с центрами A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точка Нагеля треугольника ABC является радикальным центром окружностей ω_a, ω_b, ω_c. (Точка Нагеля — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками касания противоположных сторон со вневписанными окружностями.)*

Решение. *Лемма*. Пусть в треугольнике $A'B'C'$ точки A, B и C —середины сторон $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$ соответственно. Тогда точка Нагеля треугольника ABC совпадает с центром вписанной окружности треугольника $A'B'C'$. *Доказательство*. Пусть I — центр вписанной окружности $A'B'C'$, а H_a — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Мы хотим доказать, что A, I, H_a лежат на одной прямой. Точка H_a является также и точкой касания вписанной окружности $A'BC$ с BC. При гомотетии с центром в A' и коэффициентом 2 она перейдет в точку касания вписанной окружности $A'B'C'$ с $B'C'$. Обозначим эту точку за K и сделаем гомотетию с центром в ней и коэффициентом 2. Точка H_a при этом перейдет в A', точка I — в точку на вписанной окружности $A'B'C'$, диаметрально противоположную K, а точка A — в точку касания вневписанной окружности треугольника $A'B'C'$ со стороной $B'C'$. Эти три точки лежат на одной прямой, следовательно, и их прообразы лежали. Лемма доказана.

Пусть теперь O — центр описанной окружности ABC, а $A'B'C'$ — треугольник, у которого A, B, C — середины сторон. Заметим, что прямая A_1O перпендикулярна BC, а значит, прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, будет радикальной осью описанной окружности и окружности ω_a. Следовательно, радикальный центр окружностей ω_a, ω_b и описанной окружности ABC есть точка C'. При симметрии относительно точки O отрезок A_1B_1 перейдет в параллельный ему отрезок B_2A_2, соединяющий середины дуг AC и CB. Точка B_2 равноудалена от C и I, также как и A_2, поэтому B_2A_2 — серединный перпендикуляр к CI и, следовательно, $CI \perp A_1B_1$. Но в треугольниках ABC и $A'B'C'$ биссектрисы углов $\angle C$ и $\angle C'$ параллельны поэтому биссектриса угла $A'C'B'$ перпендикулярна A_1B_1, и при этом точка C' лежит на радикальной оси окружностей ω_a и ω_b, значит, биссектриса $\angle A'B'C'$ и является их радикальной осью. То есть центр вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ является радикальным центром окружностей ω_a, ω_b и ω_c. Но по лемме этот центр совпадает с точкой Нагеля треугольника ABC. Что и требовалось доказать.

2. *В треугольнике ABC сторона AC длиннее стороны AB. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая AI пересекает прямые DE и DF в точках X и Y соответственно. Z — основание перпендикуляра, опущенного из A на BC. Докажите, что D — центр вписанной окружности треугольника XYZ.*

Решение. Пусть углы CAB и ACB равны 2α и 2γ соответственно. Тогда $\angle CIY = \alpha+\gamma = \angle FDB = \angle CDY$, откуда четырёхугольник $CYDI$ — вписанный. Поэтому $\angle DYI = \angle DCI = \gamma$ (точка Y вне треугольника ABC, так как $AC > AB$) и $\angle CYI = \angle CDI = 90°$. Но тогда четырёхугольник $CYZA$ — вписанный и $\angle AYZ = \angle ACZ = 2\gamma$. Следовательно, YD — биссектриса угла IYZ. Аналогичным способом доказывается, что XD является биссектрисой угла YXZ, откуда и следует утверждение задачи.

3. *Докажите, что каждое натуральное $n \geq 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}$.*

Решение. Пусть $n = k^2+t$, где $2k \geq t \geq 0$. Если число $k+1$ составное, то можно поделить n с остатком на $k+1$ и получить представление $n = (k+1)q+r$, где $q, r \leq k \leq \sqrt{n}$ (если $r = 0$, то $n = (k+1)k = k^2+k$). Если же $k+1$ простое, то составным обязательно будет число $k+2$ и можно делить с остатком на него. Единственное представление, которое не будет удовлетворять условию, получится при $n \equiv k+1 \pmod{(k+2)}$, то есть $n = k^2+2k-1$ или $n = k^2+k-3$. Но в первом случае мы знаем, что число $k+4$ является составным, так как оно делится на 2, а, значит, можно представить n как сумму $(k-2)(k+4)+7$, а во втором случае $n = k^2+(k-3)$.

4. *В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.*

Решение. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по количеству вершин графа. База для графа с не более чем тремя вершинами очевидна.

Пусть наш граф H имеет точку сочленения a, тогда его можно разбить на два индуцированных подграфа H_1 и H_2 с единственной общей вершиной a. Покрасим их по индукционному предположению, сделав так, чтобы цвет a в обеих раскрасках был одинаковым и склеим раскраски, получив в результате раскраску H.

Пусть наш граф H имеет две вершины x, y такие, что $G-\{x, y\}$ несвязен. Тогда H можно разбить на два индуцированных подграфа H'_1 и H'_2 с двумя общими вершинами x, y. Соединим вершины x и y ребром в новых графах, если его не было и получим новые графы H_1 и H_2. Если в каком-то из них (например, в H_1) есть 4 цикла, проходящие по одному ребру, то, поскольку этих циклов нет в H, некоторые из них должны содержать ребро xy. Но это ребро можно заменить путем по вершинам из H_2, что приводит к противоречию. Значит, H_1 и H_2 удовлетворяют условию задачи, покрасим их по индукционному предположению. Цвета x и y в обеих раскрасках различны, можно считать, что x покрашена в цвет 1, а y — в цвет 2. Теперь склеим раскраски, получив в результате раскраску H.

Остается случай, когда граф H не имеет ни точек сочленения, ни разделяющих множеств, состоящих из двух вершин. Значит, все вершины имеют степень хотя бы три, тогда есть цикл длины хотя бы 4. Пусть a и b — две его несмежные вершины, тогда в $H-\{a, b\}$ существует путь P между двумя дугами, на которые a и b делят цикл (пусть внутренние вершины пути не лежат на цикле, а c и d — концы пути). Так как c и d — не соседние в цикле, существует и путь Q между двумя дугами, на которые цикл делят c и d (внутренние вершины этого пути не лежат на цикле, пусть u, v — концы пути). Если пути P и Q не пересекаются, получилось подразбиение графа K_4 (некоторые рёбра заменены путями) на вершинах u, v, c, d. Если же пути пересекаются, пусть z — первая по Q от вершины u точка пересечения с P. В этом случае мы получили подразбиение K_4 на вершинах u, z, c, d. Остается заметить, что любое ребро K_4 входит в 4 разных простых цикла.

5. *Назовём квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами* ***маленьким****, если $|f(n)| \le 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких трёхчленов?*

Ответ. Конечно. Решение. По условию маленький квадратный трехчлен может принимать лишь конечное число значений в точках 1001, 1002 и 1003. Следовательно, если их бесконечно много, то найдутся два различных маленьких трехчлена, принимающие одинаковые значения во всех этих точках. Но тогда их разность является многочленом не более второй степени и имеет хотя бы три корня, то есть разность — тождественный ноль. Противоречие.

6. *Даны ненулевые числа x, y, z, w такие, что $x+y \ne 0$, $z+w \ne 0$ и $xy+zw \ge 0$. Докажите неравенство* $\left(\frac{x+y}{z+w}+\frac{z+w}{x+y}\right)^{-1}+\frac{1}{2} \ge \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{w}+\frac{w}{y}\right)^{-1}$.

Приведем все дроби к общему знаменателю:

$$\left(\frac{(x+y)^2+(z+w)^2}{(x+y)(z+w)}\right)^{-1}+\frac{1}{2} \ge \left(\frac{x^2+z^2}{xz}\right)^{-1}+\left(\frac{y^2+w^2}{yw}\right)^{-1}.$$

Преобразуем полученное неравенство:

$$\frac{1}{2}-\frac{xz}{x^2+z^2}+\frac{1}{2}-\frac{yw}{y^2+w^2} \ge \frac{1}{2}-\frac{(x+y)(z+w)}{(x+y)^2+(z+w)^2}$$

и снова приведем пары слагаемых к общему знаменателю:

$$\frac{(x-z)^2}{2(x^2+z^2)}+\frac{(y-w)^2}{2(y^2+w^2)} \ge \frac{(x+y-z-w)^2}{2((x+y)^2+(z+w)^2)}.$$

Далее имеем

$$\frac{(x-z)^2}{2(x^2+z^2)}+\frac{(y-w)^2}{2(y^2+w^2)} \ge \frac{(x-z+y-w)^2}{2(x^2+y^2+z^2+w^2)} \ge \frac{(x+y-z-w)^2}{2((x+y)^2+(z+w)^2)},$$

где первое неравенство вытекает из неравенства Коши–Буняковского–Шварца, а второе — из очевидного неравенства $(x+y)^2+(z+w)^2 \ge x^2+y^2+z^2+w^2$.

7. *На доске нарисован правильный 500-угольник. Саша выбирает 500 различных натуральных чисел и сообщает их Кириллу. Кирилл мысленно расставляет их в вершинах 500-угольника. Затем Саша за один вопрос может узнать сумму чисел в любой выбранной им полуплоскости, заплатив Кириллу рубль. При каком наименьшем k Саша может выбрать числа так, чтобы гарантированно узнать задуманную расстановку, заплатив Кириллу не более k рублей?*

Ответ. 250. Решение. Обозначим 500-угольник $A_1A_2\ldots A_{500}$. Можно считать, что ни одна из границ полуплоскостей не содержит вершины 500-угольника. Докажем, что менее чем за 250 вопросов Саша не сможет гарантированно узнать задуманную расстановку, какие бы числа он ни выбрал. Отметим на сторонах 500-угольника точки пересечения с границами полуплоскостей. Если на стороне A_iA_{i+1} не отмечено ни одной точки, то при каждом вопросе числа, написанные в A_i и A_{i+1}, одновременно входили или не входили в сумму. Значит, варианты, отличающиеся лишь перестановкой чисел в A_i и A_{i+1}, Саша различить не сможет. Таким образом, отмечено не менее 500 точек и вопросов должно быть не менее 250. Теперь приведем пример, когда Саша сможет гарантированно узнать расстановку. Для этого Саша назовет Кириллу числа 2^0, 2^1, ..., 2^{499}. Пусть Кирилл поставил в вершину A_i число a_i. Очевидно, что если Саша узнает некоторую сумму $a_x+a_y+...+a_z$, то тогда он узнает и набор чисел a_x, a_y, ..., a_z. Поскольку Саша знает сумму всех чисел, то спросив суммы чисел, лежащих в одной полуплоскости относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон, Саша узнает сумму любых 250 идущих подряд чисел. Сравнивая суммы $a_1+...+a_{250}$ и $a_2+...+a_{251}$, Саша узнает числа a_1 и a_{251}; сравнивая $a_2+...+a_{251}$ и $a_3+...+a_{252}$ — узнает a_2 и a_{252}; и т.д.; сравнивая $a_{250}+a_{251}+...+a_{499}$ и $a_{251}+...+a_{500}$ — узнает a_{250} и a_{500}.

♦ Только оценка: *4 балла*. Только пример: *2 балла*.

8. *Натуральные числа a и b < a таковы, что (a–b, ab+1) = 1 и (a+b, ab–1) = 1. Докажите, что число* $(a-b)^2+(ab+1)^2$ *не является точным квадратом.*

Предположим, что у чисел a^2+1 и b^2+1 есть общий простой делитель p. Тогда $(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$ делится на p, то есть либо $a \equiv b \pmod p$, либо $a \equiv -b \pmod p$. В первом случае $a^2+1 \equiv ab+1 \equiv 0 \pmod p$, и у чисел $a-b$ и $ab+1$ есть общий делитель p. Во втором $a^2+1 \equiv -ab+1 \equiv b \pmod p$, и у чисел $a+b$ и $ab-1$ есть общий делитель p. Оба варианта невозможны, значит числа a^2+1 и b^2+1 взаимно просты. Но быть полными квадратами они не могут, поэтому и $(a^2+1)(b^2+1) = (a-b)^2+(ab+1)^2$ не является полным квадратом.

9. *Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3 и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.*

Решение. Заметим, что если на k-ом ходу в коробке лежит k шариков, то на каждом следующем ходу в нее будет добавляться по шарику. Поэтому достаточно доказать, что в каждой коробке число шариков рано или поздно сравняется с номером хода. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что *если число шариков в коробке* *больше, чем номер хода, то на одном из следующих ходов шарик в коробку добавлен не будет*. Пусть это не так. Тогда, если сейчас k-ый ход и в коробке $n > k$ фишек, то $k+s$ делит $n+s$ при любом натуральном s. Но такое невозможно, потому что при всех достаточно больших s выполнено неравенство $(n+s)/(k+s) = 1+(n-k)/(k+s) < 2$.

♦ Сведение к утверждению, выделенному курсивом: *2 балла*.

10. *Каждая клетка квадратной таблицы 11×11 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что если какие-то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней из них клеток этого цвета больше нет. При каком наименьшем k это может быть?*

Ответ. 6. Решение. Докажем, что количество клеток каждого цвета не больше 22; отсюда будет следовать, что число цветов не меньше $11^2/22 > 5$, то есть $k \geq 6$. Рассмотрим все клетки этого цвета и в каждом столбце отметим все такие клетки, кроме нижней. Справа от каждой отмеченной клетки нет клеток этого же цвета; значит, все отмеченные клетки лежат в разных строках, и их не больше 11. Неотмеченных же клеток не больше, чем по одной в столбце, то есть всего не больше 11. Отсюда и следует требуемая оценка.

Для примера пронумеруем диагонали, идущие влево-вверх, последовательно числами от 1 до 21 и покрасим клетки i-й диагонали в цвет с номером $[i/2] \pmod 6$. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце одноцветные клетки идут последовательно, и их там не больше двух. Отсюда легко получить, что пример подходит.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

Первая юниорская лига, 2 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 — середины дуг BAC, ABC, BCA соответственно. На луче BC отмечена точка X такая, что $AB = BX$, а на луче CB — точка Y такая, что $AC = CY$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников BB_1Y и CC_1X. Докажите, что $O_1O_2 \parallel AA_1$.*

Решение. Обозначим через S_1 и S_2 описанные окружности треугольников BB_1Y и CC_1X, а через S — описанную окружность треугольника ABC. Заметим, что прямая BB_1 является радикальной осью окружностей S и S_1, а прямая CC_1 — радикальной осью окружностей S и S_2. Следовательно, точка пересечения этих прямых является их радикальным центром. Отметим, что BB_1 и CC_1 — биссектрисы внешних углов треугольника ABC, следовательно, они пересекаются в точке I_a — центре вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC. Таким образом, I_a имеет одинаковые степени относительно окружностей S_1 и S_2. Пусть L — основание биссектрисы угла A треугольника ABC. Докажем, что точка L также имеет одинаковые степени относительно S_1 и S_2. Действительно $LB = ac/(b+c)$, $LC = ab/(b+c)$, $LY = b–ab/(b+c) = b(b+c–a)/(b+c)$, $LX = c–ac/(b+c) = c(b+c–a)/(b+c)$, откуда $LB\cdot LY = abc(b+c–a)/(b+c) = LC\cdot LX$. Таким образом, биссектриса угла A является радикальной осью окружностей S_1 и S_2, следовательно, она перпендикулярна их линии центров O_1O_2. Кроме того, биссектриса перпендикулярна также и внешней биссектрисе AA_1, откуда и получаем требуемое.

2. *В треугольнике ABC сторона AC длиннее стороны AB. Вписанная окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Прямая AI пересекает прямые DE и DF в точках X и Y соответственно. Z — основание перпендикуляра, опущенного из A на BC. Докажите, что D — центр вписанной окружности треугольника XYZ.*

Решение. Пусть углы CAB и ACB равны 2α и 2γ соответственно. Тогда $\angle CIY = \alpha+\gamma = \angle FDB = \angle CDY$, откуда четырёхугольник $CYDI$ — вписанный. Поэтому $\angle DYI = \angle DCI = \gamma$ (точка Y вне треугольника ABC, так как $AC > AB$) и $\angle CYI = \angle CDI = 90°$. Но тогда четырёхугольник $CYZA$ — вписанный и $\angle AYZ = \angle ACZ = 2\gamma$. Следовательно, YD — биссектриса угла IYZ. Аналогичным способом доказывается, что XD является биссектрисой угла YXZ, откуда и следует утверждение задачи.

3. *Докажите, что каждое натуральное $n \geq 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}+1$.*

<u>Решение</u>. Пусть $n = k^2+t$, где $2k \geq t \geq 0$. Поделим n с остатком на $k+1$ и получим представление $n = (k+1)q+r$, где $q, r \leq k \leq \sqrt{n}$ и $k+1 \leq \sqrt{n}+1$. Если $r = 0$, то $n = (k+1)k = k^2+k$.

4. *В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.*

<u>Решение</u>. Будем доказывать утверждение задачи индукцией по количеству вершин графа. База для графа с не более чем тремя вершинами очевидна.

Пусть наш граф H имеет точку сочленения a, тогда его можно разбить на два индуцированных подграфа H_1 и H_2 с единственной общей вершиной a. Покрасим их по индукционному предположению, сделав так, чтобы цвет a в обеих раскрасках был одинаковым и склеим раскраски, получив в результате раскраску H.

Пусть наш граф H имеет две вершины x, y такие, что $G-\{x, y\}$ несвязен. Тогда H можно разбить на два индуцированных подграфа H'_1 и H'_2 с двумя общими вершинами x, y. Соединим вершины x и y ребром в новых графах, если его не было и получим новые графы H_1 и H_2. Если в каком-то из них (например, в H_1) есть 4 цикла, проходящие по одному ребру, то, поскольку этих циклов нет в H, некоторые из них должны содержать ребро xy. Но это ребро можно заменить путем по вершинам из H_2, что приводит к противоречию. Значит, H_1 и H_2 удовлетворяют условию задачи, покрасим их по индукционному предположению. Цвета x и y в обеих раскрасках различны, можно считать, что x покрашена в цвет 1, а y — в цвет 2. Теперь склеим раскраски, получив в результате раскраску H.

Остается случай, когда граф H не имеет ни точек сочленения, ни разделяющих множеств, состоящих из двух вершин. Значит, все вершины имеют степень хотя бы три, тогда есть цикл длины хотя бы 4. Пусть a и b — две его несмежные вершины, тогда в $H-\{a, b\}$ существует путь P между двумя дугами, на которые a и b делят цикл (пусть внутренние вершины пути не лежат на цикле, а c и d — концы пути). Так как c и d — не соседние в цикле, существует и путь Q между двумя дугами, на которые цикл делят c и d (внутренние вершины этого пути не лежат на цикле, пусть u, v — концы пути). Если пути P и Q не пересекаются, получилось подразбиение графа K_4 (некоторые рёбра заменены путями) на вершинах u, v, c, d. Если же пути пересекаются, пусть z — первая по Q от вершины u точка пересечения с P. В этом случае мы получили подразбиение K_4 на вершинах u, z, c, d. Остается заметить, что любое ребро K_4 входит в 4 разных простых цикла.

5. *Назовём квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами* ***маленьким****, если $|f(n)| \leq 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких трёхчленов?*

<u>Ответ</u>. Конечно. <u>Решение</u>. По условию маленький квадратный трехчлен может принимать лишь конечное число значений в точках 1001, 1002 и 1003. Следовательно, если их бесконечно много, то найдутся два различных маленьких трехчлена, принимающие одинаковые значения во всех этих точках. Но тогда их

разность является многочленом не более второй степени и имеет хотя бы три корня, то есть разность — тождественный ноль. Противоречие.

6. *На окружности отмечены 12 точек. Вова добавил к ним ещё одну, поставив её невидимой краской. Дима может провести прямую и узнать у Вовы, с какой стороны от этой прямой лежит точка. Если точка оказывается на проведённой прямой, то Вова так и говорит. Сможет ли Дима менее чем за 6 вопросов узнать, лежит ли точка внутри или на границе какого-нибудь треугольника, образованного видимыми отмеченными точками?*

Ответ. Сможет. Решение. Пронумеруем точки по часовой стрелке: 1, 2, …, 12. Проведем прямую 1-7. Не умаляя общности можно считать, что невидимая точка оказалась в одной полуплоскости (включая саму прямую) с точкой 2. Далее проведём прямую 1-4. Пусть невидимая точка оказалась в одной полуплоскости с точкой 2. Проведя прямые 1-2 и 1-3, мы либо убедимся, что искомая точка не лежит ни в одном из треугольников, либо загоним ее в один из углов 213 или 314, после чего достаточно провести прямую 23 или 34 соответственно. Случай, когда искомая точка оказалась в одной полуплоскости с точкой 5, разбирается аналогично.

7. *На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число x на числа 3x+1, 5x+2 или x–7. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое никогда не появится на доске.*

Ответ. 1004. Решение. Нарисовав граф операций $x \to 3x+1$ и $x \to 5x+2$ по модулю 7, обнаруживаем, что любой из остатков, не равных 3, может перейти в любой другой, но не может перейти в остаток 3. Кроме того, если получено число x с данным остатком от деления на 7, то повторением операции $x \to x-7$ мы можем получить все меньшие числа с тем же остатком. Так как, повторяя операции $x \to 3x+1$ и $x \to 5x+2$, мы можем получать сколь угодно большие числа, из сказанного следует, что можно получить те и только те числа, которые при делении на 7 дают остаток, не равный 3. Отсюда и получаем ответ.

8. *В нескольких коробках лежат фишки. Сначала в каждую коробку добавляют по фишке, затем, в каждую коробку с чётным числом фишек добавляют по фишке, затем в каждую коробку, где количество фишек делится на 3, добавляют по фишке, потом — в каждую коробку, где количество фишек делится на 4, и т.д. Докажите, что в какой–то момент во всех коробках фишек будет поровну.*

Решение. Заметим, что если на k-ом ходу в коробке лежит k фишек, то на каждом следующем ходу в нее будет добавляться по фишке. Поэтому достаточно доказать, что в каждой коробке число фишек рано или поздно сравняется с номером хода. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что если число фишек в коробке больше, чем номер хода, то на одном из следующих ходов фишка в коробку добавлена не будет. Пусть это не так. Тогда если сейчас k-ый ход и в коробке $n \geq k$ фишек, то $k+s$ делит $n+s$ при любом натуральном s. Но такое невозможно, потому что при всех достаточно больших s выполнено неравенство $(n+s)/(k+s) = 1+(n-k)/(k+s) < 2$.

9. *Вещественное число x назовём* ***любопытным****, если, стерев одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число 2x. Найдите наибольшее любопытное число.*

Ответ. 0,375. Решение. Понятно, что искомое число x должно быть меньше 1, и если его первая цифра после запятой не равна 0, то стирать надо её. Пусть эта первая цифра равна y, а $x – 0,y = z$. Тогда после стирания цифры y получится число $10z$, откуда $10z = 2(y/10+z)$ или $40z = y$. Так как $z < 0,1$ имеем $y \le 3$. Подставляя $y = 3$, находим $z = 0,075$, откуда и следует ответ.

♦ Только ответ: *2 балла*.

10. *Каждая клетка квадратной таблицы 11×11 окрашена в один из k цветов. Оказалось, что если какие–то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней и слева от нижней из них больше нет клеток этого цвета. При каком наименьшем k это может быть?*

Ответ. 6. Решение. Докажем, что количество клеток каждого цвета не больше 22; отсюда будет следовать, что число цветов не меньше $11^2/22 > 5$, то есть $k \ge 6$. Рассмотрим все клетки этого цвета и в каждом столбце отметим все такие клетки, кроме нижней. Справа от каждой отмеченной клетки нет клеток этого же цвета; значит, все отмеченные клетки лежат в разных строках, и их не больше 11. Неотмеченных же клеток не больше, чем по одной в столбце, то есть всего не больше 11. Отсюда и следует требуемая оценка.

Для примера пронумеруем диагонали, идущие влево-вверх, последовательно числами от 1 до 21 и покрасим клетки i-й диагонали в цвет с номером $[i/2] \pmod 6$. Нетрудно видеть, что в каждой строке и в каждом столбце одноцветные клетки идут последовательно, и их там не больше двух. Отсюда легко получить, что пример подходит.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Ответ с примером: *4 балла*. Только оценка: *4 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая юниорская лига, 2 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Число X назовём **любопытным**, если, стерев одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число 2X. Найдите наибольшее любопытное число.*

Ответ. 0,375. Решение. Понятно, что искомое число x должно быть меньше 1, и если его первая цифра после запятой не равна 0, то стирать надо её. Пусть эта первая цифра равна y, а x–0,y = z. Тогда после стирания цифры y получится число $10z$, откуда $10z = 2(y/10+z)$ или $40z = y$. Так как $z < 0{,}1$ имеем $y \le 3$. Подставляя $y = 3$, находим $z = 0{,}075$, откуда и следует ответ.

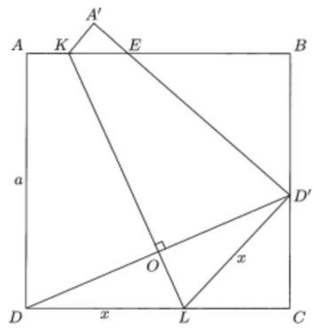
♦ Только ответ: *2 балла*.

2. *Какое наименьшее количество ферзей, стоящих на одной вертикали, могут побить все свободные клетки шахматной доски?*

Ответ. 5. Решение. *Пример*. Поставим ферзей в четвёртой вертикали на второй, третьей, четвёртой, пятой и восьмой клетках. *Оценка*. Один из ферзей обязательно должен стоять на одной из двух последних горизонталей, другой — на одной из двух первых, иначе не будут пробиты клетки крайних горизонталей, соседние с вертикалью ферзей. Далее, не умаляя общности можем считать, что вертикаль ферзей — одна из четырёх первых. Тогда, чтобы побить четвёртую и пятую клетки восьмой вертикали, два оставшихся ферзя должны стоять в четвёртой и пятой горизонталях. Но тогда для того, чтобы побить третью и шестую клетки восьмой вертикали, два первых ферзя должны стоять в крайних горизонталях, причём вертикаль должна быть четвёртой. Но в этом случае останется не побитой, например, третья клетка первой вертикали.

♦ Только пример или только оценка: *4 балла*.

3. *Квадрат ABCD перегнули по прямой так, что вершина D попала в точку D′, лежащую на стороне BC. При этом точка A попала в точку A′, а прямая A′D′ пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что периметр треугольника EBD′, равен полупериметру квадрата ABCD.*



Решение. Расстояние от точки D до прямой $A'D'$ равно расстоянию от D' до AD (симметрия). Итак, прямые, на которых лежат стороны треугольника BED' касаются окружности радиуса a (сторона квадрата) с центром D. Отрезки касательных, проведённых из точки к окружности, равны. Применим это свойство к касательным, проведённым к указанной окружности, из точек E, B и D', и получим требуемое.

4. *По кругу стоят 2015 чисел так, что каждое меньше суммы двух соседних на одно и то же значение. Докажите, что все числа равны между собой.*

Решение. Пусть не все числа равны. Обозначим разницу между числом и суммой его соседей через x. Рассмотрим числа, стоящие через одно: a и b. Между ними стоит число $a+b-x$, а далее, по кругу: $-a+2x$, $-a-b+3x$, $-b+2x$, a, $a+b-x$, b, и далее всё повторяется с периодом 6. Совершив полный круг, получим, что 2016-ое (оно же первое) число равно $-b+2x$, 2017-ое (оно же второе) равно a, а 2018-ое (оно же третье) равно $a+b-x$. Получаем систему уравнений, откуда легко выводится, что $a = b = x$, что противоречит предположению.

♦ Установлена периодичность без дальнейшего содержательного продвижения: *2 балла*.

5. *На окружности отмечены 12 точек. Вова добавил к ним ещё одну, поставив её невидимой краской. Дима может провести прямую и узнать у Вовы, с какой стороны от этой прямой лежит точка. Если точка оказывается на проведённой прямой, то Вова так и говорит. Сможет ли Дима менее чем за 6 вопросов узнать, лежит ли точка внутри или на границе какого-нибудь треугольника, образованного видимыми отмеченными точками?*

Ответ. Сможет. Решение. Пронумеруем точки по часовой стрелке: 1, 2, …, 12. Проведем прямую 1-7. Не умаляя общности можно считать, что невидимая точка оказалась в одной полуплоскости (включая саму прямую) с точкой 2. Далее проведём прямую 1-4. Пусть невидимая точка оказалась в одной полуплоскости с точкой 2. Проведя прямые 1-2 и 1-3, мы либо убедимся, что искомая точка не лежит ни в одном из треугольников, либо загоним ее в один из углов 213 или 314, после чего достаточно провести прямую 23 или 34 соответственно. Случай, когда искомая точка оказалась в одной полуплоскости с точкой 5, разбирается аналогично.

6. *В нескольких коробках лежат фишки, пустых коробок нет. Сначала в каждую коробку добавляют по фишке, затем, в каждую коробку с чётным числом фишек добавляют по фишке, затем в каждую коробку, где количество фишек делится на 3, добавляют по фишке, потом — в каждую коробку, где количество фишек делится на 4, и т.д. Докажите, что в какой-то момент во всех коробках фишек будет поровну.*

Решение. Заметим, что если на k-ом ходу в коробке лежит k фишек, то на каждом следующем ходу в нее будет добавляться по фишке. Поэтому достаточно доказать, что в каждой коробке число фишек рано или поздно сравняется с номером хода. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что если число фишек в коробке больше, чем номер хода, то на одном из следующих ходов фишка в коробку добавлена не будет. Пусть это не так. Тогда если сейчас k-ый ход и в коробке $n \geq k$ фишек, то $k+s$ делит $n+s$ при любом натуральном s. Но такое невозможно, потому что при всех достаточно больших s выполнено неравенство $(n+s)/(k+s) = 1+(n-k)/(k+s) < 2$.

7. *На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число x на числа 3x+1, 5x+2 или x–7. Найдите наименьшее двузначное число, которое никогда не появится на доске.*

Ответ. 10. Решение. Нарисовав граф указанных операций по модулю 7, обнаруживаем, что остаток 1 не может перейти в остаток 3, откуда и следует ответ.

8. *В какое наименьшее число конвертов надо разложить 300 рублей, чтобы, не вскрывая конвертов, эти деньги можно было бы раздать поровну как троим, так и четверым людям?*

Ответ. В 6 конвертов. Решение. *Пример*. В трёх конвертах по 75 рублей, в трёх — по 25 рублей. *Оценка*. Поскольку конверты можно раздать поровну четверым, в каждом конверте не больше 75 рублей. Значит, при раздаче троим каждый должен получить не меньше двух конвертов.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. Только оценка: *4 балла*.