Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Четвёртый тур 08.11.15. Высшая лига, бои за 1-4 места.

1. Дан треугольник ABC. На луче AB отложили отрезок $AB_1 = CA$, на луче BC отложили отрезок $BC_1 = AB$, на луче CA отложили отрезок $CA_1 = BC$. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не больше периметра треугольника ABC.

2. Пусть $n = 2^k$, где k натуральное. Из всевозможных подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ выделены $2^{n-1}+1$ подмножеств. Вася хочет выбрать $k+1$ выделенных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_{k+1}$ так, чтобы по ответам на вопросы вида: «Лежит ли число в A_i?» однозначно определялось число от 1 до n. Докажите, что у Васи всё получится.

3. Последовательности действительных чисел $0 < x_1 < x_2 < x_3 < ...$ и $y_1, y_2, y_3, ...$ таковы, что для любого многочлена $f(x)$ степени, не большей 2, найдётся индекс i, при котором $|f(x_i)–y_i| \le 1$. Докажите, что при некотором N верно неравенство $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_N^2} > 2015^{2015}$.

4. Даны натуральные $a_1, ..., a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.

5. Даны шесть точек в пространстве; никакие четыре из них не лежат в одной плоскости, никакие пять не лежат на одной сфере. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что описанные окружности этих троек зацеплены.

6. В некоторой стране есть несколько шпионов, некоторые пары из них имеют секретные каналы связи. Непустая группа шпионов A называется *опергруппой*, если любой шпион из A может передать сообщение любому другому шпиону из A — возможно, через посредников из этой же группы (в частности, любой шпион образует отдельную опергруппу). Две опергруппы *связаны*, если они не пересекаются, а их объединение — также опергруппа. Резидент составил схему связей между опергруппами, но в этой схеме отсутствуют указания на составы опергрупп. Докажите, что, получив эту схему, контрразведка может восстановить схему связей между шпионами.

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a(b+c)^2}{1+a}+\frac{b(c+a)^2}{1+b}+\frac{c(a+b)^2}{1+c} \ge 4\frac{a^2\sqrt{bc}}{1+a}+4\frac{b^2\sqrt{ca}}{1+b}+4\frac{c^2\sqrt{ab}}{1+c}.$$

8. Петя красит все клетки квадрата A размера 444×444 в чёрный и белый цвета. Затем в другом квадрате B размера 150×150 он отмечает 150 клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке. После этого Вася пытается удалить из A некоторые 294 строки и 294 столбца и сдвинуть оставшиеся части (не меняя порядка строк и столбцов) так, чтобы после наложения (без поворотов) квадрата B на полученный квадрат 150×150 все 150 отмеченных в B клеток наложились бы на одноцветные. Обязательно ли Вася сможет это сделать?

9. CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

10. Решите уравнение $x^3–x+9 = 5y^2$ в целых числах.

Четвёртый тур 08.11.15.
Высшая лига, бои за 5-8 места, первая лига, бои за 1-4 места

1. Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \neq A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2–bc$ — квадрат целого числа. Докажите, что число $2a+b+c$ — составное.

3. Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?

4. Даны натуральные $a_1, ..., a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.

5. Даны шесть точек в пространстве; никакие четыре из них не лежат в одной плоскости, никакие пять не лежат на одной сфере. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что описанные окружности этих троек зацеплены.

6. В некоторой стране есть несколько шпионов, некоторые пары из них имеют секретные каналы связи. Непустая группа шпионов A называется *опергруппой*, если любой шпион из A может передать сообщение любому другому шпиону из A — возможно, через посредников из этой же группы (в частности, любой шпион образует отдельную опергруппу). Две опергруппы *связаны,* если они не пересекаются, а их объединение — также опергруппа. Резидент составил схему связей между опергруппами, но в этой схеме отсутствуют указания на составы опергрупп. Докажите, что, получив эту схему, контрразведка может восстановить схему связей между шпионами.

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a(b+c)^2}{1+a}+\frac{b(c+a)^2}{1+b}+\frac{c(a+b)^2}{1+c} \geq 4\frac{a^2\sqrt{bc}}{1+a}+4\frac{b^2\sqrt{ca}}{1+b}+4\frac{c^2\sqrt{ab}}{1+c}.$$

8. Петя красит все клетки квадрата A размера 444×444 в чёрный и белый цвета. Затем в другом квадрате B размера 150×150 он отмечает 150 клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке. После этого Вася пытается удалить из A некоторые 294 строки и 294 столбца и сдвинуть оставшиеся части (не меняя порядка строк и столбцов) так, чтобы после наложения (без поворотов) квадрата B на полученный квадрат 150×150 все 150 отмеченных в B клеток наложились бы на одноцветные. Обязательно ли Вася сможет это сделать?

9. CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

10. Решите уравнение $x^3–x+9 = 5y^2$ в целых числах.

Четвёртый тур 08.11.15. Первая лига, бои за 5-8 места.

1. Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \neq A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.

2. Из всевозможных подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ выделены $2^{n-1}+1$ подмножеств. Вася хочет выбрать $n-1$ выделенных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ так, чтобы по ответам на вопросы вида: «Лежит ли число в A_i?» однозначно определялось число от 1 до n. Докажите, что у Васи всё получится.

3. Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?

4. Даны натуральные $a_1, ..., a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.

5. Даны шесть точек в пространстве; никакие четыре из них не лежат в одной плоскости, никакие пять не лежат на одной сфере. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что описанные окружности этих троек зацеплены.

6. Даны две бесконечные последовательности вещественных чисел $a_0, a_1, ...$ и $b_0, b_1, ...$ такие, что $a_0 > 1/2$, $a_{n+1} \geq a_n$ и $b_{n+1} = a_n(b_n+b_{n+2})$ при всех целых неотрицательных n. Докажите, что последовательность (b_n) ограничена.

7. Сумма положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ не превосходит n. Докажите, что $\dfrac{a_1+1}{a_1(a_1+n-1)}+\dfrac{a_2+1}{a_2(a_2+n-1)}+\ldots+\dfrac{a_n+1}{a_n(a_n+n-1)} \geq 2$.

8. Петя красит все клетки квадрата A размера 444×444 в чёрный и белый цвета. Затем в другом квадрате B размера 150×150 он отмечает 150 клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке. После этого Вася пытается удалить из A некоторые 294 строки и 294 столбца и сдвинуть оставшиеся части (не меняя порядка строк и столбцов) так, чтобы после наложения (без поворотов) квадрата B на полученный квадрат 150×150 все 150 отмеченных в B клеток наложились бы на одноцветные. Обязательно ли Вася сможет это сделать?

9. CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

10. Натуральные числа a, b, c таковы, что a^2-bc — квадрат целого числа. Докажите, что число $2a+b+c$ — составное.

Четвёртый тур 08.11.15. Вторая лига, бои за 1-4 места.

1. Докажите, что для каждого натурального числа a найдется такое натуральное число $b > a$, что $1+2^b+3^b$ делится на $1+2^a+3^a$.

2. Физик-экспериментатор загнал в магнитную ловушку 2015 атомов. У каждого из этих атомов 0 или 1 электронов. У физика нет прибора, который мог бы узнавать количество электронов. Зато он в результате некоторой процедуры может делать следующее: брать два атома A и B, и если у A есть электрон, а у B нет электрона, то электрон обязательно переходит из A в B. В противном случае (в т.ч., когда у A нет электрона, а у B есть) ничего не меняется. К сожалению, физик не узнаёт при этом, случился переход электрона или нет. Может ли физик, многократно применив эту процедуру, точно указать, вне зависимости от начального распределения электронов, на два атома с одинаковым (в тот момент, когда он на них указывает) числом электронов?

3. CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

4. Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?

5. На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых — в синий цвет. Докажите, что найдутся хотя бы две области, у которых границы полностью красные.

6. Даны натуральные $a_1, \ldots, a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.

7. Из всевозможных подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ выделены $2^{n-1}+1$ подмножеств. Вася хочет выбрать $n-1$ выделенных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ так, чтобы по ответам на вопросы вида: «Лежит ли число в A_i?» однозначно определялось число от 1 до n. Докажите, что у Васи всё получится.

8. Докажите, что для вещественных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ выполняется неравенство $a_1a_2(a_1-a_2)+a_2a_3(a_2-a_3)+\ldots+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n) \geq a_1a_n(a_1-a_n)$.

9. Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \neq A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.

10. Дано натуральное число a. Докажите, что каждое натуральное число N представимо в виде $N = ax+(a, x)+[a, x]$ (x — натуральное число) не более чем одним способом. Напомним, что (a, b) и $[a, b]$ — это, соответственно, НОД и НОК чисел a и b.

Четвёртый тур 08.11.15. Вторая лига, бои за 5-8 места.

1. Последовательность натуральных чисел такова, что $a_{n-1}a_{n+1}$ делится на a_n^2 для всех $n \ge 1$. Докажите, что если некоторое число a_k взаимно просто с a_1, то a_0 делится на a_1.

2. Физик-экспериментатор загнал в магнитную ловушку 2015 атомов. У каждого из этих атомов 0 или 1 электронов. У физика нет прибора, который мог бы узнавать количество электронов. Зато он в результате некоторой процедуры может делать следующее: брать два атома A и B, и если у A есть электрон, а у B нет электрона, то электрон обязательно переходит из A в B. В противном случае (в т.ч., когда у A нет электрона, а у B есть) ничего не меняется. К сожалению, физик не узнаёт при этом, случился переход электрона или нет. Может ли физик, многократно применив эту процедуру, точно указать, вне зависимости от начального распределения электронов, на два атома с одинаковым (в тот момент, когда он на них указывает) числом электронов?

3. Точка M — середина дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC, не содержащей точки A. Высота из вершины A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке N. Через центр описанной окружности проведены прямые, параллельные MB и MC, пересекающие отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что $NK = NL$.

4. Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?

5. На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых — в синий цвет. Докажите, что найдется область, у которой граница полностью красные.

6. Даны натуральные $a_1, \ldots, a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.

7. На доске в один ряд записаны по порядку числа 1, ..., 200. Юра должен поставить перед каждым числом знак плюс или минус таким образом, чтобы для каждого положительного целого числа $n \le 100$ перед числом n и перед каким–либо из его кратных стояли различные знаки. Как Юра должен поставить знаки, чтобы значение полученного выражения оказалось как можно больше?

8. Назовем два числа $u,v \in \boldsymbol{R}$ *дружащими*, если $|u-v| = 10^k$ для некоторого целого числа k. Линейная функция $g(x) = ax+b$ обладает тем свойством, что для некоторых дружащих чисел u и v числа $g(u)$ и $g(v)$ — дружащие. Докажите, что тогда для любых дружащих чисел u и v числа $g(u)$ и $g(v)$ — дружащие.

9. Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \ne A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.

10. Дано натуральное число a. Докажите, что каждое натуральное число N представимо в виде $N = ax+(a, x)+[a, x]$ (x — натуральное число) не более чем одним способом. Напомним, что (a, b) и $[a, b]$ — это, соответственно, НОД и НОК чисел a и b.

Четвёртый тур 08.11.15. Третья лига, бои за 1-6 места.

1. На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых в синий цвет. Докажите, что найдётся не менее двух областей, у которых вся граница красная.

2. На доске написано число 2. Петя и Вася играют в такую игру. Петя записывает на доску число, делящееся на 2, затем Вася выписывает число, делящееся на 3, затем Петя – число, делящееся на 4 и т.д. При этом новое число нужно получить из предыдущего либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив цифры предыдущего числа (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. В треугольнике ABC центр вписанной окружности I равноудалён от вершины C и середины M стороны AB. Найдите наибольшее возможное значение угла CIM.

4. Какие натуральные числа можно представить в виде суммы нескольких (не обязательно всех) своих различных делителей, образующих арифметическую прогрессию?

5. Найдите все тройки простых чисел, a, b, c, для которых можно подобрать натуральное число k так, что выполняется равенство $a^2+b^2+16c^2 = 9k^2+1$.

6. Изначально дано 16 одноэлементных множеств. За один ход можно взять два множества и добавить к имеющимся множествам их объединение. Можно ли получить все 15-элементные множества менее чем за 64 хода?

7. Последовательность чисел строится по следующему правилу:

$$a_0 = 1, a_1 = 2015, a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Найдите величину $\dfrac{a_1}{a_2} - \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_4} - \dfrac{a_4}{a_5} + \ldots + \dfrac{a_{2013}}{a_{2014}} - \dfrac{a_{2014}}{a_{2015}}.$

8. Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке T. Докажите, что T лежит на прямой AM.

9. Математик Сидоров хочет подобрать два иррациональных числа A и B так, чтоб каждое из трех чисел A^2+B, B^2+A и $A+B$ было рационально, а сумма $A+B$ была равна s. Найдите все значения s, при которых это возможно.

10. Хромой слон ходит как обычный, но на одну клетку. Какое наибольшее число ходов он может сделать, выйдя из угла доски $(2N+1)\times(2N+1)$, если ему запрещено становиться на клетку, на которой он уже был?

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Четвёртый тур 08.11.15. Третья лига, бои за 7-12 места.

1. На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых в синий цвет. Докажите, что найдётся область на плоскости, у которых вся граница красная.

2. На доске написано число 2. Петя и Вася играют в такую игру. Петя записывает на доску число, делящееся на 2, затем Вася выписывает число, делящееся на 3, затем Петя – число, делящееся на 4 и т.д. При этом новое число нужно получить из предыдущего либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив цифры предыдущего числа (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. В треугольнике ABC центр вписанной окружности I равноудалён от вершины C и середины M стороны AB. Найдите наибольшее возможное значение угла CIM.

4. Парабола на координатной плоскости называется *красивой*, если её вершина и две точки пересечения с осью абсцисс образуют равносторонний треугольник. Можно ли подобрать два квадратных трёхчлена с красивыми графиками и различными дискриминантами?

5. Найдите все тройки простых чисел, a, b, c, для которых можно подобрать натуральное число k так, что выполняется равенство $a^2+b^2+16c^2 = 9k^2+1$.

6. Надо сделать набор из пяти гирь, с помощью которых можно уравновесить любой *целый* вес от 5 г до 10 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую, веса гирь не обязательно целые). Одна гиря делается из золота, каждая из остальных не тяжелее золотой. Каким наименьшим количеством золота можно обойтись?

7. Последовательность чисел строится по следующему правилу:

$$a_0 = 1, a_1 = 2015, a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Найдите величину $\dfrac{a_1}{a_2} - \dfrac{a_2}{a_3} + \dfrac{a_3}{a_4} - \dfrac{a_4}{a_5} + \ldots + \dfrac{a_{2013}}{a_{2014}} - \dfrac{a_{2014}}{a_{2015}}$.

8. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 70°$. На отрезке AB взята точка M, а на продолжении AB за точку A – точка X. Прямая, проходящая через точку X под углом 25 градусов к прямой AB, пересекает стороны AC и BC в точках K и P соответственно. Найдите угол между прямыми CM и AB, если известно, что MK – биссектриса угла CMA, а MP – биссектриса угла CMB.

9. Математик Сидоров хочет подобрать два иррациональных числа A и B так, чтоб каждое из трех чисел A^2+B, B^2+A и $A+B$ было рационально, а сумма $A+B$ была равна s. Найдите все значения s, при которых это возможно.

10. Хромой слон ходит как обычный, но на одну клетку. Какое наибольшее число ходов он может сделать, выйдя из угла доски $(2N+1)\times(2N+1)$, если ему запрещено становиться на клетку, на которой он уже был?

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Четвёртый тур 08.11.15. Высшая юниорская лига.

1. На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, есть не менее n, ограниченных только красными прямыми.

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2–bc$ — квадрат целого числа. Докажите, что число $2a+b+c$ — составное.

3. Сумма положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n ($n \geq 2$) не превосходит n. Докажите, что $\frac{a_1+1}{a_1(a_1+n-1)}+\frac{a_2+1}{a_2(a_2+n-1)}+\ldots+\frac{a_n+1}{a_n(a_n+n-1)} \geq 2$.

4. Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?

5. Даны две бесконечные последовательности вещественных чисел a_0, a_1, ... и b_0, b_1, ... такие, что $a_0 > 1/2$, $a_{n+1} \geq a_n$ и $b_{n+1} = a_n(b_n+b_{n+2})$ при всех целых неотрицательных n. Докажите, что последовательность (b_n) ограничена.

6. Даны натуральное $m > 1$ и несколько k-элементных множеств натуральных чисел. У любых двух из них можно найти два общих элемента a и b такие, что количества элементов этих множеств, больших a и меньших b, не сравнимы по модулю m. Докажите, что количество множеств не больше m^{k-1}.

7. Точки L, M, N — середины сторон BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC соответственно. Внутри этого треугольника выбрана такая точка P, что $PL/BC = PM/CA = PN/AB$. Продолжения лучей AP, BP, CP пересекают описанную окружность ABC в точках D, E, F соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE лежат на одной окружности.

8. CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1). Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

9. Для простых чисел p и q нашлись такие m и n, что $1+p+p^2+...+p^m$ — степень q с натуральным показателем, а $1+q+q^2+...+q^n$ — степень p с натуральным показателем. Докажите, что одно из чисел p и q равно 2.

10. Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Четвёртый тур 08.11.15. Первая юниорская лига.

1. На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, есть не менее n, ограниченных только красными прямыми.

2. Физик-экспериментатор загнал в магнитную ловушку 2015 атомов. У каждого из этих атомов 0 или 1 электронов. У физика нет прибора, который мог бы узнавать количество электронов. Зато он в результате некоторой процедуры может делать следующее: брать два атома A и B, и если у A есть электрон, а у B нет электрона, то электрон обязательно переходит из A в B. В противном случае (в т.ч., когда у A нет электрона, а у B есть) ничего не меняется. К сожалению, физик не узнаёт при этом, случился переход электрона или нет. Может ли физик, многократно применив эту процедуру, точно указать, вне зависимости от начального распределения электронов, на два атома с одинаковым (в тот момент, когда он на них указывает) числом электронов?

3. Докажите, что для каждого натурального числа a найдется такое натуральное число $b > a$, что $1+2^b+3^b$ делится на $1+2^a+3^a$.

4. Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?

5. Даны натуральные $a_1, ..., a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.

6. Докажите, что для вещественных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ выполняется неравенство $a_1a_2(a_1-a_2)+a_2a_3(a_2-a_3)+\ldots+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n) \geq a_1a_n(a_1-a_n)$.

7. Точка M — середина дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC, не содержащей точки A. Высота из вершины A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке N. Через центр описанной окружности проведены прямые, параллельные MB и MC, пересекающие отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что $NK = NL$.

8. CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1). Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

9. Дано натуральное число a. Докажите, что каждое натуральное число N представимо в виде $N = ax+(a, x)+[a, x]$ (x — натуральное число) не более чем одним способом. Напомним, что (a, b) и $[a, b]$ — это, соответственно, НОД и НОК чисел a и b.

10. Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября – 9 ноября 2015 года

Четвёртый тур 08.11.15. Вторая юниорская лига.

1. На плоскости проведены $3n$ красных и n синих прямых общего положения ($n > 1$; никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что найдётся многоугольник, на сторонах которого все точки красные.

2. Изначально дано 16 одноэлементных множеств. За один ход можно взять два множества и добавить к имеющимся множествам их объединение. Можно ли получить все 15-элементные множества менее чем за 64 хода?

3. В треугольнике ABC центр вписанной окружности с центром I равноудалён от вершины С и середины M стороны AB. Найдите наибольшее возможное значение угла CIM.

4. Хромой слон ходит как обычный, но на одну клетку. Какое наибольшее число ходов он может сделать, выйдя из угла доски $(2N+1)\times(2N+1)$, если ему запрещено становиться на клетку, на которой он уже был?

5. От пристани А вниз по течению реки отправились одновременно два катера и плот. Один катер шёл с собственной скоростью 50 км/ч; дойдя до пристани Б, он сразу повернул назад и на расстоянии 4 км от А встретил плот. Другой катер имел собственную скорость 30 км/ч; дойдя до Б, он также сразу повернул назад, а его встреча с плотом произошла в 6,5 км от А. Найдите расстояние между А и Б.

6. Найдите все тройки простых чисел, a, b, c, для которых можно подобрать натуральное число k так, что выполняется равенство $a^2+b^2+16c^2 = 9k^2+1$.

7. Последовательность чисел строится по следующему правилу:

$$a_0 = 1, a_1 = 2015, a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Найдите величину $\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \ldots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}$.

8. На доске написано число 2. Петя и Волк играют в такую игру. Петя записывает на доску число, делящееся на 2, затем Волк выписывает число, делящееся на 3, затем Петя – число, делящееся на 4 и т.д. При этом новое число можно получить из написанного на доске либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив цифры предыдущего числа (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?