Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября - 9 ноября 2015 года

Третий тур 06.11.15. Высшая лига.

1. Дан белый бумажный прямоугольный треугольник с углом 30° площади 2016. Медведь и Крокодил по очереди закрашивают в нём по треугольнику площади 1; закрашенные треугольники не должны иметь общих внутренних точек. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

2. Докажите, что при всех положительных p и q, меньших единицы, верно неравенство

$$2(p+q) > \left(\frac{1-q}{p}\right)^{p}\left(\frac{q}{1-p}\right)^{1-p}.$$

3. Определим последовательность многочленов $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ соотношениями $Q_0(x) = 0$, $Q_1(x) = 1$, $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - Q_{n-1}(x)$. Докажите, что при любом нечётном простом p многочлен $Q_p(x)$ раскладывается в произведение двух неконстантных многочленов с целыми коэффициентами, но не раскладывается в произведение трёх таких многочленов.

4. Даны нечётное простое p и целое x такие, что x^3-1 делится на p, а $x-1$ не делится на p. Пусть m и n — целые числа такие, что $\frac{m}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{p-1}}{p-1}$. Докажите, что m делится на p.

5. Существует ли на координатной плоскости бесконечная последовательность точек $P_i = (x_i, y_i)$ с натуральными координатами такая, что для любых индексов $i > j$ выполнено хотя бы одно из неравенств $0 < |x_i - x_j| < 10\sqrt{i-j}$ или $0 < |y_i - y_j| < 10\sqrt{i-j}$?

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые CB и DA являются внешними биссектрисами углов DCA и CDB соответственно. Точки E и F выбраны на лучах AC и BD соответственно таким образом, что четырёхугольник $CEFD$ — вписанный. Точка P выбрана на отрезке AB таким образом, что DA и CB являются внешними биссектрисами углов PDE и PCF соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых AD и BC лежит на прямой EF.

7. В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 знакомых.

8. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 10^{10} натуральных чисел, каждое из которых — палиндром?

9. На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \neq B$ и сторону AC в точке $Q \neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.

10. Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник. Известно, что отрезок между любыми двумя точками его периметра, делящими периметр на две части, длины которых отличаются не более чем в два раза, целиком лежит в многоугольнике. Докажите, что внутри многоугольника найдётся точка такая, что отрезок, соединяющий её с любой точкой периметра, целиком лежит в многоугольнике.

Третий тур 06.11.15. Первая лига.

1. Дан белый бумажный прямоугольный треугольник с углом 30° площади 2016. Медведь и Крокодил по очереди закрашивают в нём по треугольнику площади 1; закрашенные треугольники не должны иметь общих внутренних точек. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

2. Докажите, что при всех положительных p и q, меньших единицы, верно неравенство

$$2(p+q) > \left(\frac{1-q}{p}\right)^p \left(\frac{q}{1-p}\right)^{1-p}.$$

3. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0+2a_1+2^2a_2+...+2^na_n$.

4. Даны нечётное простое p и целое x такие, что $x^3–1$ делится на p, а $x–1$ не делится на p. Пусть m и n — целые числа такие, что $\frac{m}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{p-1}}{p-1}$. Докажите, что m делится на p.

5. По кругу расположено 1000 лунок. Одна лунка пустая, а во всех остальных лежит по камешку. Разрешается вынуть из лунки камешек и перенести его в пустую лунку, если между ними расположена ровно одна лунка, и она непуста. При этом камешек из промежуточной лунки вынимается. Можно ли, действуя таким образом, добиться того, чтобы в одной лунке лежал один камешек, а остальные лунки были пустыми?

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые CB и DA являются внешними биссектрисами углов DCA и CDB соответственно. Точки E и F выбраны на лучах AC и BD соответственно таким образом, что четырёхугольник $CEFD$ — вписанный. Точка P выбрана на отрезке AB таким образом, что DA и CB являются внешними биссектрисами углов PDE и PCF соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых AD и BC лежит на прямой EF.

7. В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 знакомых.

8. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 10^{10} натуральных чисел, каждое из которых — палиндром?

9. На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \neq B$ и сторону AC в точке $Q \neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.

10. Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник. Известно, что отрезок между любыми двумя точками его периметра, делящими периметр на две части, длины которых отличаются не более чем в два раза, целиком лежит в многоугольнике. Докажите, что внутри многоугольника найдётся точка такая, что отрезок, соединяющий её с любой точкой периметра, целиком лежит в многоугольнике.

Третий тур 06.11.15. Вторая лига.

1. Точки A_1, ..., A_n в первой координатной четверти и точки B_1, ..., B_n во второй координатной четверти таковы, что для некоторых чисел a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n и для любых j и k площадь треугольника OA_jB_k равна $a_j \cdot b_k$ (O — начало координат). Докажите, что или все точки A_1, ..., A_n лежат на одной прямой, или все точки B_1, ..., B_n лежат на одной прямой.

2. Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n–1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.

3. Квадратный пирог со стороной 30 см. разрезали на прямоугольные куски. Общая длина разрезов 240 см. Докажите, что найдется прямоугольный кусок площади не менее 36 см^2.

4. Точка K — середина стороны BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через K, пересекает отрезок AB в точке M и продолжение отрезка AC за точку C в точке L. Точка N — середина отрезка ML. Прямая AN пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке S, примем точка N лежит между точками A и S. Докажите, что описанная окружность треугольника KNS касается стороны BC.

5. Найдется ли на плоскости такое множество различных точек ..., $A_{–2}$, $A_{–1}$, A_0, A_1, A_2, ..., что точки A_k, A_l, A_m лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $k+l+m = 2015$?

6. Докажите, что любая арифметическая прогрессия $a_n = a+nb$, где a и b — натуральные числа и b взаимно просто с 10, содержит бесконечно много палиндромов.

7. На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \neq B$ и сторону AC в точке $Q \neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.

8. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей a_0, a_1, a_2, ..., a_n, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0+2a_1+2^2a_2+...+2^na_n$.

9. В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 знакомых.

10. Пусть M — конечное множество натуральных чисел и A — непустое подмножество множества M. Докажите, что существует такое подмножество B множества M, что A совпадает с множеством всех элементов множества M, которые делят нечетное число элементов из B.

Третий тур 06.11.15. Третья лига.

1. Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек $\ldots, P_{-2}\ P_{-1}, P_0$, P_1, $P_2, \ldots$ так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c коллинеарны тогда и только тогда, когда $a+b+c = 2015$.

2. На доске написано число 1. Каждую минуту имеющееся на доске выражение либо умножается на переменную x, либо складывается с переменной x. Через 2015 минут на доске появился многочлен $f(x)$ степени 1000, график которого проходит через точку A с абсциссой 1. Какие значения может принимать ордината этой точки? Найдите все возможные варианты ответа, и докажите, что других быть не может.

3. Дан картонный правильный треугольник площади 1000. Петров и Волков по очереди закрашивают в нём по треугольнику площади 1; закрашенные треугольники не должны иметь общих внутренних точек. Начинает Петров. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

4. Положительные числа a, b, c, x, y подобраны так, что выполнены неравенства $ax+by \leq bx+cy \leq cx+ay$. Докажите, что $b \leq c$.

5. Квадратный пирог со стороной 30 см. разрезали на прямоугольные куски. Общая длина разрезов 240 см. Докажите, что найдется прямоугольный кусок площади не менее 36 см^2.

6. В какое наименьшее число цветов нужно покрасить все натуральные числа от 1 до 2015 так, чтобы не нашлось трёх чисел одного цвета a, b, c таких, что a делится на b, и b делится на c?

7. Найдите все натуральные числа n, при которых число 5^n-1 является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.

8. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. X и Y — точки пересечения прямой DE соответственно с биссектрисами углов ACB и ABC. Z — середина стороны BC. Докажите, что $XZ = YZ$.

9. Точка K — середина стороны BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку K, пересекает отрезок AB в точке M, а продолжение отрезка AC за точку C в точке L. Точка N — середина отрезка ML. Прямая AN пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке S, причём точка N лежит между точками A и S. Докажите, что описанная окружность треугольника KNS касается стороны BC.

10. У Вовы и Димы есть два одинаковых прямоугольника 2×13. Вова замостил свой прямоугольник 13 доминошками. Дима может положить доминошку в свой прямоугольник и узнать, лежит ли на этом месте доминошка у Вовы. Сможет ли Дима за 9 вопросов узнать, как именно лежат все Вовины доминошки?

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября - 9 ноября 2015 года

Третий тур 06.11.15. Высшая юниорская лига.

1. Дано натуральное число k. Докажите, что существует лишь конечное количество натуральных чисел n, обладающих следующим свойством: все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы, разность произведений чисел в которых равна k.

2. Пусть I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC. Прямые BI_a и CI_a пересекают лучи AC и AB в точках P и Q соответственно. На продолжениях лучей AB и AC за точки B и C выбраны точки X и Y соответственно таким образом, что отрезок XY проходит через I_a. Прямые, симметричные прямым CX и BY относительно прямых CI_a и BI_a соответственно, пересекаются в точке Z. Докажите, что точки P, Z, Q лежат на одной прямой.

3. Последовательность a_1, a_2, ... задана условием $a_n = n(n+1)+11$. Найдите все n, для которых число a_n составное, но взаимно просто с a_k при всех $0 < k < n$.

4. Сумма положительных чисел a, b, и c равна 3. Докажите, что $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

5. На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \neq B$ и сторону AC в точке $Q \neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.

6. Вершины выпуклого 2015-угольника пусты. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) ставят фишки в незанятые вершины. Нельзя ставить фишку в вершину, если хотя бы в одну из соседних вершин фишку уже поставил противник. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

7. В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей. Докажите, что в компании найдётся человек, у которого не меньше 20, но меньше 70 знакомых.

8. Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей a_0, a_1, a_2, ..., a_n, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0+2a_1+2^2a_2+...+2^na_n$.

9. Натуральные числа a, b, c, d, e таковы, что $a^4+b^4 = c^4+d^4 = e^5$. Докажите, что число $ac+bd$ — составное.

10. Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек ..., P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, ... так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c коллинеарны тогда и только тогда, когда $a+b+c = 2015$.

Третий тур 06.11.15. Первая юниорская лига.

1. Докажите, что существует лишь конечное число натуральных чисел n, обладающих следующим свойством: все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы, разность произведений чисел в которых равна 20152015.

2. Точка K — середина стороны BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через K, пересекает отрезок AB в точке M и продолжение отрезка AC за точку C в точке L. Точка N — середина отрезка ML. Прямая AN пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке S, примем точка N лежит между точками A и S. Докажите, что описанная окружность треугольника KNS касается стороны BC.

3. Последовательность a_1, a_2, ... задана условием $a_n = n(n+1)–19$. Для каждого $n > 4$ докажите следующее утверждение: если a_n взаимно просто с a_k при всех $0 \le k < n$, то a_n простое.

4. У Вовы и Димы есть два одинаковых прямоугольника 2×13. Вова замостил свой прямоугольник 13 доминошками. Дима может положить доминошку в свой прямоугольник и узнать, лежит ли на этом месте доминошка у Вовы. За какое наименьшее число таких вопросов Дима сможет узнать, как именно лежат все Вовины доминошки?

5. На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \ne B$ и сторону AC в точке $Q \ne R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.

6. Вершины выпуклого n-угольника пусты. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) ставят фишки в незанятые вершины. Нельзя ставить фишку в вершину, если хотя бы в одну из соседних вершин фишку уже поставил противник. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

7. В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей. Докажите, что в компании найдётся человек, у которого не меньше 20, но меньше 70 знакомых.

8. Положительные числа a, b, c, x, y подобраны так, что выполнены неравенства $ax+by \le bx+cy \le cx+ay$. Докажите, что $b \le c$.

9. Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n–1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.

10. Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек ..., $P_{–2}$, $P_{–1}$, P_0, P_1, P_2, ... так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $a+b+c = 2015$.

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Сочи, 31 октября - 9 ноября 2015 года

Третий тур 06.11.15. Вторая юниорская лига.

1. В лодке, вмещающей только двух человек, через реку переправилась группа миссионеров и каннибалов, где миссионеров было на одного больше. Каждый раз туда плыли двое, а обратно — один. Ни на каком берегу миссионеры не оказывались в компании большего числа каннибалов, а каннибалы не оставались без присмотра миссионеров. Могло ли случиться, что каждые двое пересекавших реку вместе в одной лодке совершили в итоге одинаковое число рейсов?

2. Назовём шахматную диагональ *полноценной*, если на ней не менее трёх клеток. При каких N на доске $N\times N$ можно расположить несколько слонов, чтобы на каждой полноценной диагонали стоял ровно один слон, а на неполноценных диагоналях слонов не было?

3. У Вовы и Димы есть два одинаковых прямоугольника 2×13. Вова замостил свой прямоугольник 13 доминошками. Дима может положить доминошку в свой прямоугольник и узнать, лежит ли на этом месте доминошка у Вовы. Сможет ли Дима за 9 вопросов узнать, как именно лежат все Вовины доминошки?

4. Сколькими способами можно провести диагонали на гранях куба, разбив каждую грань на два треугольника, чтобы в каждой вершине куба сходилось нечётное число треугольников?

5. Натуральные числа от 1 до 2015 надо раскрасить так, чтобы не было трёх одноцветных чисел A, B, C таких, что A делится на B, а B делится на C. Каким наименьшим количеством цветов можно обойтись?

6. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. X и Y — точки пересечения прямой DE соответственно с биссектрисами углов ACB и ABC. Z — середина стороны BC. Докажите, что $XZ = YZ$.

7. Положительные числа a, b, c, x, y подобраны так, что выполнены неравенства $ax+by \le bx+cy \le cx+ay$. Докажите, что $b \le c$.

8. Найдите все натуральные числа n, при которых число 5^n-1 является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.