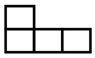
Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
Сочи, 31 октября - 9 ноября 2015 года

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 2.11.15. ЮНИОРЫ.

Довывод

1. В трапеции $ABCD$ точки E и F — середины оснований BC и AD соответственно. Оказалось, что $AB = BC$, а биссектриса угла B проходит через точку F. Найдите BD/EF.

2. Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше, чем среднее арифметическое их среднего геометрического и среднего квадратичного (то есть $a+b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ при любых неотрицательных a и b).

3. При каких натуральных n клетчатый квадрат $n \times n$ можно покрыть в несколько слоёв фигурками вида  ? (Фигурки можно располагать по клеткам любым способом, каждая клетка должна быть покрыта одним и тем же количеством фигурок, фигурки не должны выходить за границы квадрата.)

4. Последовательность (a_n) задана условиями $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}}+2$ при всех $n \geq 2$. Докажите, что a_n делится на a_{n-1} при всех $n \geq 2$.

Вывод

5. Две фиксированные окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке T. Переменные точки A и B выбираются на S_1 и S_2 соответственно таким образом, что $\angle ATB$ имеет фиксированную величину $\alpha < 90°$. Докажите, что середины всевозможных отрезков AB лежат на одной окружности.

6. Найдите все пары (n, p) натуральных чисел n и простых чисел p, удовлетворяющих равенству $p(p-1) = 2(n^3+1)$.

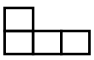
7. На балу присутствуют 2015 пар, составленных из мальчика и девочки. Каждый участник бала знаком со своим партнёром и ещё хотя бы с одним участником противоположного пола. Докажите, что всех участников можно покрасить в три цвета так, чтобы у каждого было хотя бы два разноцветных знакомых.

Девятнадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
Сочи, 31 октября - 9 ноября 2015 года

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 2.11.15. СЕНЬОРЫ.

Довывод

1. Найдите количество пар натуральных чисел (a, b) таких, что $a < b < 2015$, а число $\dfrac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}$ является квадратом целого числа.

2. При каких натуральных n клетчатый квадрат $n\times n$ можно покрыть в несколько слоёв фигурками вида  ? (Фигурки можно располагать по клеткам любым способом, каждая клетка должна быть покрыта одним и тем же количеством фигурок, фигурки не должны выходить за границы квадрата.)

3. Две фиксированные окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке T. Переменные точки A и B выбираются на S_1 и S_2 соответственно таким образом, что $\angle ATB$ имеет фиксированную величину $\alpha < 90°$. Докажите, что середины всевозможных отрезков AB лежат на одной окружности.

4. Дано натуральное число a, большее 10. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $an!+1$ составное.

Вывод

5. Дан квадратный торт размера 1×1 и веса 1, однако вес в нём не обязательно распределён равномерно. Известно, что вес любого прямоугольного куска не более, чем в 1000 раз превосходит площадь этого куска. Малыш вырезает из торта два квадратных куска со сторонами, параллельными сторонам торта, больший по весу отдаёт Карлсону, а меньший забирает себе (если веса равны, Малыш получает любой из кусков). Остаток торта достаётся собаке. Какой максимальный вес Малыш заведомо может получить из любого торта?

6. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, вписанный в окружность Ω с центром O. Прямая BO пересекает AC в точке D. Серединный перпендикуляр к отрезку BD пересекает стороны AB, BC и прямую AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезок BR вторично пересекает Ω в точке T. Докажите, что точки O, P, Q и T лежат на одной окружности.

7. Назовём *ценой* последовательности действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ наибольший модуль суммы нескольких её первых членов. Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ с нулевой суммой такова, что любая перестановка её членов не уменьшает её цены. У некоторых членов этой последовательности сменили знак. Докажите, что её цена не уменьшилась.

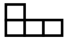
Решения задач личной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *В трапеции ABCD точки E и F — середины оснований BC и AD соответственно. Оказалось, что AB = BC, а биссектриса угла B проходит через точку F. Найдите BD/EF.*

Ответ. $BD/EF = 2$. Решение. Так как $\angle ABF = \angle FBC$ и $AB = BC$, середина K отрезка AB симметрична середине E отрезка BC относительно прямой BF, откуда $EF = KF$. С другой стороны, $KF = BD/2$ как средняя линия треугольника ABD, откуда и получаем ответ.

Задача 2. *Докажите, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше, чем среднее арифметическое их среднего геометрического и среднего квадратичного (то есть* $a+b \geq \sqrt{ab}+\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ *при любых неотрицательных a и b).*

Решение. Положим $u = (a+b)/2$, $v = (a-b)/2$. Тогда $a = u+v$, $b = u-v$. Подставляя эти равенства в неравенство из условия, после преобразований получаем равносильное неравенство $2u \geq \sqrt{u^2-v^2}+\sqrt{u^2+v^2}$. Возводя его в квадрат, получаем очевидное неравенство $4u^2 \geq 2u^2+2\sqrt{u^4-v^4}$.

Задача 3. *При каких натуральных n клетчатый квадрат n×n можно покрыть в несколько слоёв фигурками вида*  *? (Фигурки можно располагать по клеткам любым способом, каждая клетка должна быть покрыта одним и тем же количеством фигурок, фигурки не должны выходить за границы квадрата.)*

Ответ. При всех чётных $n \geq 4$. Решение. Если n нечётно, то в шахматной раскраске квадрата $n\times n$ разное количество чёрных и белых клеток. Поскольку каждая клетка должна быть покрыта одно и то же число раз, суммарное количество чёрных и белых клеток во всех фигурках тоже должно быть различно. Это противоречит тому, что каждая фигурка покрывает одинаковое количество чёрных и белых клеток.

В квадрат 2×2 ни одна фигурка просто не влезет. Для покрытия остальных квадратов заметим, что нашими фигурками можно в два слоя покрыть прямоугольник 2×6 и 2×4 (второй — даже в один, но мы хотим в два). Если $n = 4k$, то квадрат $n\times n$ разбивается на $2k^2$ прямоугольников 2×4. Если $n = 4k+2$, то квадрат $n\times n$ разбивается на прямоугольник $4k\times(4k+2)$ и полосу $2\times(4k+2)$. Прямоугольник $4k\times(4k+2)$ разбивается на прямоугольники 2×4, а полоса $2\times(4k+2)$ — на $k-1$ прямоугольников 2×4 и один прямоугольник 2×6. Поскольку все прямоугольники разбиения покрываются нашими фигурками в два слоя, получается и покрытие исходного квадрата.

Задача 4. *Последовательность* (a_n) *задана условиями* $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}}+2$ *при всех* $n \geq 2$. *Докажите, что* a_n *делится на* a_{n-1} *при всех* $n \geq 2$.

Решение. Заметим сначала, что все a_n дают остаток 2 при делении на 4. Поэтому, если a_n делится на a_{n-1}, то их отношение нечётно. Нам понадобится также тот факт, что если k кратно l и их отношение нечётно, то 2^k+1 кратно 2^l+1. Действительно, пусть $k = lm$ с нечётным m. Тогда $2^k+1 = (2^l)^m+1^m$ делится на 2^l+1.

Теперь докажем утверждение индукцией по n. Так как $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 66$, при $n = 2$ и $n = 3$ утверждение верно. Перейдём от $n-1$ к $n+1$. Требуемое утверждение о том, что a_{n+1} делится на a_n, то есть $2^{a_n}+2$ делится на $2^{a_{n-1}}+2$, эквивалентно тому, что $2^{a_n-1}+1$ делится на $2^{a_{n-1}-1}+1$. Таким образом, достаточно показать, что a_n-1 кратно $a_{n-1}-1$ (то, что в этом случае их отношение нечётно, следует из того, что оба эти числа нечётны). Но $a_n-1 = 2^{a_{n-1}}+1$, а $a_{n-1}-1 = 2^{a_{n-2}}+1$. Первое из этих чисел делится на второе, поскольку (по индукционному предположению) a_{n-1} делится на a_{n-2} и их отношение нечётно.

Задача 5. *Две фиксированные окружности* S_1 *и* S_2 *касаются внешним образом в точке T. Переменные точки A и B выбираются на* S_1 *и* S_2 *соответственно таким образом, что* $\angle ATB$ *имеет фиксированную величину* $\alpha < 90°$. *Докажите, что середины всевозможных отрезков AB лежат на одной окружности.*

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, N — середина отрезка O_1O_2, M — середина отрезка AB, B_1 и M_1 — точки, симметричные точкам B и M относительно точки N. Заметим, что M_1B_1MB — параллелограмм, а MB и M_1B_1 равны и параллельны. Так как MB — половина отрезка AB, то и AM и M_1B_1 равны и параллельны. Значит, AMM_1B_1 — параллелограмм и $AB_1 = MM_1 = 2MN$. Далее, поскольку при симметрии относительно точки N точка O_2 переходит в O_1, $\angle B_1O_1N = \angle BO_2N$. Отсюда $\angle AO_1B_1 = \angle AO_1T+\angle TO_1B_1 = \angle AO_1T+\angle TO_2B$. Из равнобедренности треугольников AO_1T и BO_2T имеем $\angle AO_1T = 180°-2\angle ATO_1$, $\angle TO_2B = 180°-2\angle BTO_2$. Складывая эти два равенства, получаем $\angle AO_1T+\angle TO_2B = 2(180°-\angle ATO_1-\angle BTO_2) = 2\angle ATB = 2\alpha$.

Таким образом, в треугольнике AO_1B_1 стороны AO_1 и B_1O_1 равны радиусам окружностей S_1 и S_2 соответственно, а $\angle AO_1B_1 = 2\alpha$. Значит, длина $AB_1 = 2MN = 2R$ не зависит от выбора точек A и B. Значит, точка M лежит на окружности с центром в точке N и радиусом R.

Задача 6. *Найдите все пары (n, p) натуральных чисел n и простых чисел p, удовлетворяющих равенству* $p(p-1) = 2(n^3+1)$.

Ответ. $n = 20$, $p = 127$. Решение. Правая часть всегда не меньше 4, поэтому $p > 2$ и, следовательно, нечётно. Разложим правую часть на множители:

$p(p–1) = 2(n+1)(n^2–n+1)$. Один из сомножителей правой части должен делиться на p. Это не 2, так как $p > 2$, и не $n+1$, так как иначе $p–1 \geq 2(n^2–n+1) > n+1 \geq p$. Следовательно, $p–1$ делится на $2(n+1)$. Пусть $p–1 = 2k(n+1)$. Подставляя это в уравнение и сокращая на $2(n+1)$, получаем $k(2k(n+1)+1) = n^2–n+1$. Переходя к сравнениям по модулю $n+1$, находим $k \equiv k(2k(n+1)+1) = n^2–n+1 \equiv 3 \pmod{n+1}$. Следовательно, $k = 3$ или $k \geq n+4$. Второе невозможно, ибо тогда $p–1 \geq 2(n+1)(n+4) > n^2–n+1 \geq p$. Следовательно, $k = 3$ и $18(n+1)+3 = n^2–n+1$. Единственное натуральное решение последнего уравнения есть $n = 20$, в этом случае $p = 127$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что такие числа подходят.

Задача 7. *На балу присутствуют 2015 пар, составленных из мальчика и девочки. Каждый участник бала знаком со своим партнёром и ещё хотя бы с одним участником противоположного пола. Докажите, что всех участников можно покрасить в три цвета так, чтобы у каждого было хотя бы два разноцветных знакомых.*

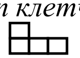
Решение. Пусть $M_1D_1, ..., M_{2015}D_{2015}$ — наши пары. Каждую девочку D_i соединим с другой девочкой, знакомой с M_i. В результате получится граф на вершинах $D_1, ..., D_{2015}$ с 2015 рёбрами. Нам нужно покрасить этот граф правильным образом в три цвета, это и будет искомая покраска девочек. Рассмотрим компоненту связности построенного графа, пусть в ней n вершин, тогда и рёбер в ней тоже n (Мы провели по одному ребру из каждой вершины этой компоненты связности, из вершин вне компоненты рёбра в нее не входят). Если есть вершина степени 1, удалим ее, эту вершину можно будет легко докрасить после покраски остальных вершин компоненты. После серии таких операций наша компонента связности будет иметь минимальную степень вершины 2, а значит, это будет простой цикл, который мы легко покрасим в три цвета.

Решения задач личной олимпиады старшей группы.

Задача 1. *Найдите количество пар натуральных чисел (a, b) таких, что $a < b < 2015$, а число* $\dfrac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}$ *является квадратом целого числа.*

Ответ. $22{\cdot}21 = 462$. Решение. $\dfrac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$. Поэтому задача равносильна подсчету количества таких пар натуральных чисел $a < b < 2015$, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — четное натуральное число. Это, в свою очередь, равносильно тому, что a и b — точные квадраты одной чётности. В самом деле, если число $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — натуральное, то, возводя эту сумму в квадрат, убеждаемся, что натуральным должно быть и число $2\sqrt{ab}$. Но тогда в разложения чисел a и b на простые множители в нечетных степенях должны входить одни и те же простые числа. Поэтому $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c\sqrt{d}$, где d — произведение всех таких простых чисел, а $c\sqrt{d}$ — не целое число, если $d > 1$. Значит, $d = 1$, откуда и следует, что a и b — точные квадраты.

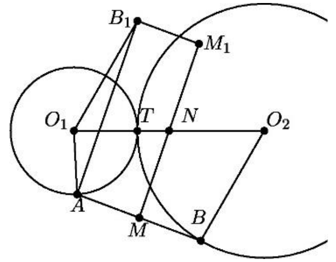
Осталось заметить, что имеется 44 точных квадрата, меньших 2015, среди которых по 22 четных и нечетных, откуда и получаем ответ.

Задача 2. *При каких натуральных n клетчатый квадрат n×n можно покрыть в несколько слоёв фигурками вида*  *? (Фигурки можно располагать по клеткам любым способом, каждая клетка должна быть покрыта одним и тем же количеством фигурок, фигурки не должны выходить за границы квадрата.)*

Ответ. При всех чётных $n \geq 4$. Решение. Если n нечётно, то в шахматной раскраске квадрата $n{\times}n$ разное количество чёрных и белых клеток. Поскольку каждая клетка должна быть покрыта одно и то же число раз, суммарное количество чёрных и белых клеток во всех фигурках тоже должно быть различно. Это противоречит тому, что каждая фигурка покрывает одинаковое количество чёрных и белых клеток.

В квадрат 2×2 ни одна фигурка просто не влезет. Для покрытия остальных квадратов заметим, что нашими фигурками можно в два слоя покрыть прямоугольник 2×6 и 2×4 (второй — даже в один, но мы хотим в два). Если $n = 4k$, то квадрат $n{\times}n$ разбивается на $2k^2$ прямоугольников 2×4. Если $n = 4k+2$, то квадрат $n{\times}n$ разбивается на прямоугольник $4k{\times}(4k+2)$ и полосу $2{\times}(4k+2)$. Прямоугольник $4k{\times}(4k+2)$ разбивается на прямоугольники 2×4, а полоса $2{\times}(4k+2)$ — на $k-1$ прямоугольников 2×4 и один прямоугольник 2×6. Поскольку все прямоугольники разбиения покрываются нашими фигурками в два слоя, получается и покрытие исходного квадрата.

Задача 3. *Две фиксированные окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке T. Переменные точки A и B выбираются на S_1 и S_2 соответственно таким образом, что $\angle ATB$ имеет фиксированную величину $\alpha < 90°$. Докажите, что середины всевозможных отрезков AB лежат на одной окружности.*



Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2 соответственно, N — середина отрезка O_1O_2, M — середина отрезка AB, B_1 и M_1 — точки, симметричные точкам B и M относительно точки N. Заметим, что M_1B_1MB — параллелограмм, а MB и M_1B_1 равны и параллельны. Так как MB — половина отрезка AB, то и AM и M_1B_1 равны и параллельны. Значит, AMM_1B_1 — параллелограмм и $AB_1 = MM_1 = 2MN$. Далее, поскольку при симметрии относительно точки N точка O_2 переходит в O_1, $\angle B_1O_1N = \angle BO_2N$. Отсюда $\angle AO_1B_1 = \angle AO_1T+\angle TO_1B_1 = \angle AO_1T+\angle TO_2B$. Из равнобедренности треугольников AO_1T и BO_2T имеем $\angle AO_1T = 180°-2\angle ATO_1$, $\angle TO_2B = 180°-2\angle BTO_2$. Складывая эти два равенства, получаем $\angle AO_1T+\angle TO_2B = 2(180°-\angle ATO_1-\angle BTO_2) = 2\angle ATB = 2\alpha$.

Таким образом, в треугольнике AO_1B_1 стороны AO_1 и B_1O_1 равны радиусам окружностей S_1 и S_2 соответственно, а $\angle AO_1B_1 = 2\alpha$. Значит, длина $AB_1 = 2MN = 2R$ не зависит от выбора точек A и B. Значит, точка M лежит на окружности с центром в точке N и радиусом R.

Задача 4. *Дано натуральное число a, большее 10. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число an!+1 составное.*

Решение. Возьмем такое четное число $k > 2a$, что число $k+1$ — составное и взаимно просто с a: подойдет, например, любое из чисел вида $(2a+1)^m-1$, где m натуральное (*). Рассмотрим число $k!/a-1$. Оно дает остаток $a-1$ при делении на a, следовательно, хотя бы один из его простых делителей дает при делении на a остаток, не равный 1 (**). Назовем этот делитель p. Заметим, что p не является делителем чисел a и $k+1$, так как $k!/a$ делится на a и на $k+1$ (последнее потому, что число $k+1$ составное и взаимно просто с a). Тогда число $k!-a$ делится на p, а $k!$ на p не делится, следовательно $p > k+1$. Пусть $n = p-k-1$. Тогда по модулю p число $an!+1$ сравнимо с $k!n!+1$. Заметим, что $k!$ сравнимо с $(p-1)(p-2)\ldots(p-k)$ по модулю p, а потому $k!n!+1 \equiv (p-1)(p-2)\ldots(p-k)\cdot(p-k-1)!+1 = (p-1)!+1 \equiv 0 \pmod p$ по теореме Вильсона. Итак, $an!+1$ делится на p. Если $an!+1 = p$, то $p-1$ делится на a, что противоречит условию (**). Следовательно, число $an!+1$ составное.

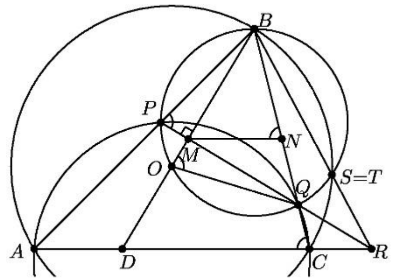
Заметим теперь, что число k, а, значит, и число $p > k+1$ мы можем (например, в силу (*)) выбрать сколь угодно большим. Значит, у составных чисел вида $an!+1$ бывают сколь угодно большие простые делители. Но это значит, что и сами эти числа — а вместе с ними и число n — могут быть сколь угодно большими, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 5. *Дан квадратный торт размера 1×1 и веса 1, однако вес в нём не обязательно распределён равномерно. Известно, что вес любого прямоугольного куска не более, чем в 1000 раз превосходит площадь этого куска. Малыш вырезает из торта два квадратных куска со сторонами, параллельными сторонам торта, больший по весу отдаёт Карлсону, а меньший забирает себе (если веса равны, Малыш получает любой из кусков). Остаток торта достаётся собаке. Какой максимальный вес Малыш заведомо может получить из любого торта?*

Ответ. 1/4. Решение. Докажем, что Малыш не может заведомо получить больше 1/4. Предположим, что торт равномерный, то есть вес куска равен площади. Тогда, чтобы получить больше 1/4, надо из квадрата со стороной 1 вырезать два непересекающихся квадрата со стороной 1/2. Но любые два таких квадрата пересекаются.

Докажем, что из произвольного торта всегда можно вырезать два неперекрывающихся квадратных куска с весами 1/4, из этого будет следовать, что Малыш может заведомо получить 1/4. Впишем в каждый угол торта по квадрату веса 1/4. Предположим, что любые два из них перекрываются. Тогда вершина квадрата с наименьшей стороной будет покрыта всеми четырьмя квадратами, следовательно, весь торт покрыт квадратами, причем они перекрываются. А тогда вес торта меньше 1, противоречие.

Задача 6. *Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, вписанный в окружность Ω с центром O. Прямая BO пересекает AC в точке D. Серединный перпендикуляр к отрезку BD пересекает стороны AB, BC и прямую AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезок BR вторично пересекает Ω в точке T. Докажите, что точки O, P, Q и T лежат на одной окружности.*



Решение. Не умаляя общности, будем считать, что $AB > BC$. Обозначим $\angle ACB$ через γ. Тогда $\angle ABO = 90°-\gamma$, а $\angle QPB = \gamma$. Пусть M и N — середины отрезков BD и BC соответственно. Тогда $\angle OMQ = \angle ONQ = 90°$, поэтому четырехугольник $OMNQ$ вписанный. Значит, $\angle BOQ = \angle BNM = \angle BCD = \gamma$. Из равенства углов BOQ, BPQ и QCA получаем, что четырехугольники $BPOQ$ и $APQC$ — вписанные. Пусть они вписаны в окружности Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Пусть Ω_1 пересекается с Ω в точках B и S. Докажем, что $S = T$, откуда будет следовать утверждение задачи. Для этого заметим, что $R = AC \cap PQ$ является радикальным центром окружностей Ω, Ω_1 и Ω_2. Значит, BS — радикальная ось окружностей Ω и Ω_1 — проходит через точку R, т.е. точки B, S, R лежат на одной прямой, и $S = T$.

Задача 7. *Назовём **ценой** последовательности действительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ наибольший модуль суммы нескольких её первых членов. Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ с нулевой суммой такова, что любая перестановка её членов не уменьшает её цены. У некоторых членов этой последовательности сменили знак. Докажите, что её цена не уменьшилась.*

Решение. Пусть P — цена исходной последовательности. Заметим сразу, что цена последовательности с нулевой суммой равна также наибольшему модулю суммы нескольких её *последних* членов. Пронумеруем члены, у которых знак не изменился, слева направо как $b_1, \ldots, b_k$, а члены, знак которых изменился — как $c_1, \ldots, c_{n-k}$. По условию, цена последовательности $b_1, \ldots, b_k, c_{n-k}, \ldots, c_1$ не меньше P. Это значит, что при некотором d сумма d её первых членов (а также сумма $n-d$ оставшихся) по модулю не меньше P.

Предположим, что $d \le k$. Рассмотрим начало последовательности (a_i), последний член которого есть b_d; пусть в нём также присутствуют члены $c_1, \ldots, c_h$. Обозначим через B и C суммы чисел $b_1, \ldots, b_d$ и $c_1, \ldots, c_h$ соответственно. Тогда $|B+C| \le P$, $|B| \ge P$, откуда $|B-C| = |2B-(B+C)| \ge 2|B|-|B+C| \ge 2P-P = P$. Это и означает, что цена последовательности после изменения знаков не меньше P. Если же $d > k$, то можно провести аналогичное рассуждение для чисел $c_1, \ldots, c_{n-d}$ (модуль суммы которых не меньше P).