ЮНИОРЫ

	Теория чисел	Комбинаторика	Теория вероятности	Геометрия	Алгебра	Комбигеометрия
10	(10) Найдите все такие простые p, что число $p^2–7$ простое	(10) Вася заметил, что среди его учителей нет трех человек с одной фамилией, нет трех человек с одинаковым именем и нет трех человек с одинаковым отчеством. Зато у каждых двух совпадает или имя, или фамилия, или отчество. Какое наибольшее количество учителей могло быть?	(10) Из мешка с набором доминошек достают две доминошки. Какова вероятность того, что их можно приложить друг к другу по правилам домино?	(10) Даны две окружности радиуса 1 с центрами O_1 и O_2. Центры находятся на расстоянии 2015. Какую максимальную площадь может иметь треугольник O_1MO_2, если точка M лежит на одной из окружностей?	(10) Число b – среднее арифметическое пяти последовательных целых чисел, наименьшее из которых равно 2015. Чему равно среднее арифметическое пяти последовательных чисел, наименьшее из которых равно b?	(10) Назовём квартетом четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Какое наибольшее количество непересекающихся квартетов можно разместить на доске 5×5?
20	(20) При каком наибольшем n число 12^{501}-2^{1002} делится на 2^n?	(20) Чтобы отвести на завтрак, 100 детей построили парами. На обратном пути из столовой их снова построили парами, возможно, составленными по-другому. При каком наибольшем n наверняка можно выбрать n детей, никакие два из них не были в одной паре?	(20) В классе 10 учеников. Для дежурства наугад выбирают двоих. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна 1/3. Какова вероятность того, что это будут две девочки?	(20) Длины медиан треугольника равны 12 и 9 и эти медианы перпендикулярны. Чему равна длина третей медианы?	(20) Числа x и y удовлетворяют условию $\|x\|+\|y\|$=6. Какое наименьшее значение может иметь выражение $x^2+6x–2y+y^2$?	(20) Какое наименьшее количество точек надо взять на плоскости так, чтобы среди их попарных расстояний были числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 47?
30	(30) Сколько решений в целых числах имеет уравнение $xy = 4(y^2+x)$?	(30) К Серёже на день рождения пришли 18 мальчиков. Таня хочет раздать им 100 конфет по такому правилу: она по своему усмотрению разбивает гостей на группы и распределяет все 100 конфет между этими группами. В каждой группе она выдаёт всем мальчикам по максимально возможному одинаковому количеству конфет. Все оставшиеся конфеты она отдаёт Серёже. Какое наибольшее количество конфет может получить Серёжа?	(30) На плоскости отмечены все точки (x,y) с целыми координатами $0 ≤ x ≤ 3$,$0 ≤ y ≤ 4$. Вася случайно выбирает две различные точки. Какова вероятность того, что середина отрезка с концами в выбранных точках тоже отмечена?	(30) Дан правильный 4000-угольник $A_1A_2\ldots A_{4000}$. Точка X – основание перпендикуляра, опущенного из A_{1985} на $A_{1000}A_{3000}$, а точка Y – основание перпендикуляра, опущенного из A_{2015} на $A_{2000}A_{4000}$. Известно, что XY=1. Найдите площадь квадрата $A_{500}A_{1500}A_{2500}A_{3500}$.	(30) Последовательность Фибоначчи задана условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. $F_n = F_{n–1}+F_{n–2}$ при $n≥2$. В последовательности $G_n = F_{3n}$ входит каждый третий член последовательности Фибоначчи. При каких a и b равенство $G_n = aG_{n–1}+bG_{n–2}$ верно для всех натуральных $n≥2$?	(30) Точку P внутри треугольника ABC назовем хорошей, если существуют ровно 27 лучей, исходящих из точки P и делящих ABC на 27 равновеликих треугольников. Найдите количество хороших точек в треугольнике.
40	(40) У числа $(2n)!$ на конце ровно втрое больше нулей, чем у числа $n!$. Найдите наибольшее такое n.	(40) 14 друзей пришли на вечеринку, один из них Ганс, хотел уйти с нее пораньше. Он попрощался с 10 друзьями, а с 3-мя забыл и ушел спать. Через некоторое время он вновь вернулся на вечеринку и попрощался с 10 друзьями (не обязательно с теми же самыми, с кем прощался до этого). Так продолжалось до тех пор, пока он не попрощался с каждым из друзей. После этого Ганс наконец-то окончательно лег спать. Утром он осознал, что с каждым из друзей попрощался разное количество раз. Какое минимальное число раз должен был возвращаться Ганс, чтобы это было верно?	(40) В семье Ивановых два ребенка, один из них мальчик. Пусть p_1 – вероятность того, что другой ребенок в семье Ивановых – девочка. (Считаем, что в любой семье мальчик и девочка рождаются равновероятно). А еще во время рождения каждого ребенка с вероятностью 1/2 каркает ворона. В семье Петровых два ребенка, один из которых – мальчик, во время рождения которого ворона каркнула. Пусть p_2 – вероятность того, что другой ребенок в семье Петровых – девочка. Найдите отношение p_1/p_2.	(40) В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, G – точка пересечения медиан. Известно, что $AC > AB$, IG параллельно BC, $BC = 2$ и $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{5}}{8}$. Найдите длину стороны AB.	(40) На листе написаны 11 натуральных чисел. Известно, что их среднее арифметическое равно 10; если упорядочить их по неубыванию, то шестое число будет равно 9, и число 8 встречается среди них чаще, чем любое другое число. Какое наибольшее число может встретиться среди написанных?	(40) На какое наименьшее число прямоугольных треугольников можно разрезать правильный пятиугольник?
50	(50) Целые числа $0 ≤ a < 2^{2012}$ и $0 ≤ b < 8$ удовлетворяют условию $7(a+2^{2012}b) ≡ 1$ $(mod\ 2^{2015})$. Найдите b.	(50) На белом столе лежит стопка из 2015 монет. Кроме того, есть два пустых чёрных стола. Каждым ходом можно переложить верхнюю монету с любого стола на верхнюю монету другого стола (или на сам другой стол, если он пуст). За какое наименьшее число ходов можно переложить все монеты на белом столе в порядке, противоположном исходному?	(50) В корзине 5 пар носков пяти разных цветов, носки в паре одного цвета. Вася сортирует носки: выбирает 4 носка, находит среди них пару одного цвета, ее складывает в шкаф, и достает из корзины два новых носка. Процесс продолжается до тех пор, пока корзина не опустеет (сортировка удалась), или пока среди четырех выбранных носков все не будут разноцветными (сортировка не удалась). Какова вероятность того, что Васе не удастся справится с сортировкой носков?	(50) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки D и E соответственно, что $AD = DE = EB = AC$. Каким может быть угол при вершине B?	(50) Последовательность $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ удовлетворяет условиям $0 ≤ x_0 < 1$, $x_n = \begin{cases} 2x_{n-1}, & \text{если } 2x_{n-1} < 1 \\ 2x_{n-1} - 1, & \text{если } 2x_{n-1} \geq 1 \end{cases}$. Для скольких значений x_0 выполнено равенство $x_0 = x_5$?	(50) Какое наибольшее количество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно взять на плоскости и раскрасить в два цвета так, чтобы внутри любого треугольника с одноцветными вершинами, лежала точка другого цвета?
60	(60) Найдите сумму цифр периода десятичной записи числа $\frac{1}{99^2}$.	(60) 2016 ламп соединены по кругу (каждая соединена с двумя другими). Изначально все лампы выключены. При нажатии на выключатель одной лампы, тут же меняется ее состояние и состояние соединенных с ней ламп. Найдите количество положений всех ламп, достижимых некоторой последовательностью нажатий на выключатели.	(60) В однокруговом турнире по волейболу участвовало 7 команд равной силы (каждая команда играла с каждой один раз, ничьих не было, каждая команда побеждает с вероятностью 50%). За победу начисляется 1 очко, за поражение – 0. В первой игре встретились команды A и B, A выиграла у B. Какова вероятность того, что по окончанию турнира у A будет больше очков, чем у B?	(60) Дан параллелограмм $ABCD$, $AB≠BC$. Прямая, симметричная прямой AB относительно диагонали AC, пересекает в точке Q прямую, симметричную прямой DC относительно диагонали DB. Найдите $QA:QD$, если $AC:BD = 3:2$.	(60) Неотрицательные действительные числа a, b, c, d, e, не все равные 0, удовлетворяют условиям $a+c=tb$, $b+d=tc$, $c+e=td$. При каком наименьшем t это возможно?	(60) Каждую сторону треугольника поделили на 15 равных частей. После чего соединили каждую вершину с концами отрезочков на противоположной стороне. На сколько частей разрежется треугольник?

СЕНЬОРЫ

	Теория чисел	Комбинаторика	Теория вероятности	Геометрия	Алгебра	Комбигеометрия
10	(10) Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $(p+1)(q+2)$ делится на pq.	(10) Сколькими способами можно вырезать прямоугольник из квадрата 12 ×12, который содержит клетку, стоящую на пересечении третьей строки и четвертого столбца?	(10) Из мешка с набором доминошек достают две доминошки. Какова вероятность того, что их можно приложить друг к другу по правилам домино?	(10) Даны две окружности радиуса 1 с центрами O_1 и O_2, находящимися на расстоянии 2015. Какую максимальную площадь может иметь треугольник O_1MO_2, если точка M лежит на одной из окружностей?	(10) Найдите сумму всех действительных корней уравнения $(2+(2+x)^2)^2 = 2000$.	(10) Какую наименьшую длину должна иметь проволока, чтобы из неё, не ломая, можно было сложить каркас тетраэдра с ребром 1?
20	(20) Сколько решений в целых числах имеет уравнение $xy= 4(y^2 + x)$?	(20) К Серёже на день рождения пришли 18 мальчиков. Таня хочет раздать им 100 конфет по такому правилу: она по своему усмотрению разбивает гостей на группы и распределяет все 100 конфет между этими группами. В каждой группе она выдаёт всем мальчикам по максимально возможному одинаковому количеству конфет. Все оставшиеся конфеты она отдаёт Серёже. Какое наибольшее количество конфет может получить Серёжа?	(20) В классе 10 учеников. Для дежурства наугад выбирают двоих. Вероятность того, что оба дежурных окажутся мальчиками, равна 1/3. Какова вероятность того, что это будут две девочки?	(20) Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 разбит на две части плоскостью, проходящей через вершину D и середины рёбер AB и CC_1. Найдите объём большей из этих двух частей.	(20) Последовательность Фибоначчи задана условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. $F_n = F_{n-1}+F_{n-2}$ при $n\geq 2$. В последовательность $G_n = F_{3n}$ входит каждый третий член последовательности Фибоначчи. При каких a и b равенство $G_n = aG_{n-1}+bG_{n-2}$ верно для всех натуральных $n\geq 2$?	(20) На какое наименьшее число прямоугольных треугольников можно разрезать правильный пятиугольник?
30	(30) У числа $(2n)!$ на конце ровно втрое больше нулей, чем у числа $n!$. Найдите наибольшее такое n.	(30) На гирях весом 1, 2, …, 2015 г написаны числа 1, 2, …, 2015 (каждое на одной гире). Эксперт, желающий доказать, что все надписи правильные, располагает весами, показывающими разность весов, положенных на левую и правую чашки. Какого наименьшего количества взвешиваний ему заведомо хватит? (Набор весов сомнений не вызывает; весы показывают, какая чашка тяжелее; визуально сравнить гири не получается.)	(30) В семье Ивановых два ребенка, один из них мальчик. Пусть p_1 – вероятность того, что другой ребенок в семье Ивановых – девочка. (Считаем, что в любой семье мальчик и девочка рождаются равновероятно). А еще во время рождения каждого ребенка с вероятностью 1/2 каркает ворона. В семье Петровых два ребенка, один из которых – мальчик, во время рождения которого ворона каркнула. Пусть p_2 – вероятность того, что другой ребенок в семье Петровых – девочка. Найдите отношение p_1/p_2.	(30) Дан треугольник ABC такой, что $AB = AC = 26$, $BC = 20$. Из вершин A и B опущены высоты AD и BE. Найдите радиус окружности, касающейся AC в точке E и проходящей через точку D.	(30) На листе написаны 11 натуральных чисел. Известно, что их среднее арифметическое равно 10; если упорядочить их по неубыванию, то шестое число будет равно 9, и число 8 встречается среди них чаще, чем любое другое число. Какое наибольшее число может встретиться среди написанных?	(30) Точку P внутри треугольника ABC назовем хорошей, если существуют ровно 27 лучей, исходящих из точки P и делящих ABC на 27 равновеликих треугольников. Найдите количество хороших точек в треугольнике.
40	(40) Сколько существует упорядоченных троек (x,y,z) натуральных чисел, не превосходящих 31, таких что $x+y+z$ и $xy+yz+zx$ кратны 31?	(40) Сколько существует последовательностей из букв A и B длины 14, в которых все блоки из подряд идущих букв A имеют чётную длину, а все блоки из подряд идущих букв B – нечётную?	(40) В круглом коридоре 9 лампочек. Каждый день одна из горящих лампочек перегорает (с равной вероятностью) Если перегорели две соседние лампочки, то электрик меняет сразу все перегоревшие. Найдите вероятность того, что электрик при замене заменил ровно 4 лампочки.	(40) Дан треугольник ABC такой, что $\frac{BC}{AB-BC} = \frac{AB+BC}{AC}$. Найдите отношение углов BAC и BCA.	(40) Последовательность x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 удовлетворяет условиям $0 \leq x_0 < 1$, $x_n = \begin{cases} 2x_{n-1}, & \text{если } 2x_{n-1} < 1 \\ 2x_{n-1} - 1, & \text{если } 2x_{n-1} \geq 1 \end{cases}$. Для скольких значений x_0 выполнено равенство $x_0 = x_5$?	(40) На плоскости расположено 6 точек. Назовём разбиение этих точек на две тройки разрезом, если одну тройку можно отделить от другой, проведя прямую. Какое наибольшее число разрезов может быть у шестёрки точек?
50	(50) Число 5^{868} заключено между 2^{2015} и 2^{2016}. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) таких, что $1 \leq m \leq 2013$ и $5^n < 2^m < 2^{m+2} < 5^{n+1}$?	(50) 2016 ламп соединены по кругу (каждая соединена с двумя другими). Изначально все лампы выключены. При нажатии на выключатель одной лампы, тут же меняется ее состояние и состояние соединенных с ней ламп. Найдите количество положений всех ламп, достижимых некоторой последовательностью нажатий на выключатели.	(50) В однокруговом турнире по волейболу участвовало 7 команд равной силы (каждая команда играла с каждой один раз, ничьих не было, каждая команда побеждает с вероятностью 50%). За победу начисляется 1 очко, за поражение – 0. В первой игре встретились команды A и B, A выиграла у B. Какова вероятность того, что по окончанию турнира у A будет больше очков, чем у B?	(50) Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой AB относительно диагонали AC, пересекает в точке Q прямую, симметричную прямой DC относительно диагонали DB. Найдите отношение $QA : QD$, если известно, что $AC : BD = 3 : 2$.	(50) Неотрицательные вещественные числа a, b, c, d, e, не все равные 0, удовлетворяют условиям $a+c=tb$, $b+d=tc$, $c+e=td$. При каком наименьшем t это возможно?	(50) Каждую сторону треугольника поделили на 15 равных частей. После чего соединили каждую вершину с концами отрезочков на противоположной стороне. На сколько частей разрежется треугольник?
60	(60) Найдите сумму цифр периода десятичной записи числа $\frac{1}{99^2}$.	(60) Тест состоит из 5 вопросов с 4мя вариантами ответа. 2000 школьников пишут тест, каждый отвечает на каждый вопрос, выбирая один вариант ответа. Для какого наименьшего n могло так оказаться, что из любых n работ можно выбрать 4 так, чтобы любые две имели не более 3 общих ответов?	(60) В команде на матбой 6 человек. Они случайно разбились на две непересекающиеся бригады: одна решает задачи с четными номерами, другая – с нечетными (возможно, одна из бригад пуста). В время решения задач несколько человек (от 0 до 6) заболело. Какова вероятность того, что все они из одной бригады? Каждый заболевает с вероятностью ½.	(60) Из квадрата 100×100 из каждого угла квадрата вырезают четырёхугольники, у которых две стороны идут по сторонам квадрата и равны $\sqrt{17}$, а противоположный угол 60° и его вершина лежит на диагонали квадрата. Затем у каждого четырёхугольника склеивают стороны, образующие угол 60°. Получившийся поднос ставят на стол. Какова высота его верхнего края над столом?	(60) Последовательность (x_n) задана условиями $x_1 = -1$, $x_{n+1} = \left(1+\frac{2}{n}\right)x_n + \frac{4}{n}$ при всех натуральных n. Найдите x_{2000}.	(60) В квадрате со стороной 1 отсекают углы – треугольники, у которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют 1/3 длины стороны. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждого угла отрезают треугольник, две стороны которого составляют по 1/3 соответствующих сторон 8-угольника, и т. д. Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников.