XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая лига, 3 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Дан белый бумажный прямоугольный треугольник с углом 30° площади 2016. Медведь и Крокодил по очереди закрашивают в нём по треугольнику площади 1; закрашенные треугольники не должны иметь общих внутренних точек. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Медведь. Решение. Поскольку отношение площадей не меняется при аффинном преобразовании, можно считать, что исходный треугольник ABC правильный, а его площадь равна 2016. Первым ходом Медведь закрашивает равнобедренный треугольник площади 1, симметричный относительно высоты из точки A, вершина которого совпадает с точкой A, а основание лежит на стороне BC. Все последующие ходы Медведь закрашивает треугольник, симметричный тому, который закрасил Крокодил на предыдущем ходе, относительно высоты из точки A.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

2. *Докажите, что при всех положительных p и q, меньших единицы, верно неравенство* $2(p+q) > \left(\frac{1-q}{p}\right)^p \left(\frac{q}{1-p}\right)^{1-p}$.

Решение. $\left(\frac{1-q}{p}\right)^p \left(\frac{q}{1-p}\right)^{1-p} = ((1-q)^p q^{1-p}) \cdot \left(\left(\frac{1}{p}\right)^p \left(\frac{1}{1-p}\right)^{1-p}\right) \le$

$$\le (p(1-q)+(1-p)q) \cdot \left(p\frac{1}{p} + (1-p)\frac{1}{1-p}\right) = 2(p+q) - 4pq < 2(p+q).$$

Первое неравенство является произведением двух неравенств между средним арифметическим и средним геометрическим с весами p и $1-p$.

3. *Определим последовательность многочленов $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ соотношениями $Q_0(x) = 0$, $Q_1(x) = 1$, $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) - Q_{n-1}(x)$. Докажите, что при любом нечётном простом p многочлен $Q_p(x)$ раскладывается в произведение двух неконстантных многочленов с целыми коэффициентами, но не раскладывается в произведение трёх таких многочленов.*

Решение. Заметим, что $\deg Q_n = n - 1$. Докажем индукцией по $k \ge 0$, что $Q_{n+k} = Q_nQ_{k+1} - Q_{n-1}Q_k$. При $k = 0$ это тривиально, при $k = 1$ — следует из условия. При $k \ge 2$ имеем

$$Q_{n+k} = xQ_{n+k-1} - Q_{n+k-2} = x(Q_nQ_k - Q_{n-1}Q_{k-1}) - (Q_nQ_{k-1} - Q_{n-1}Q_{k-2}) =$$
$$= Q_n(xQ_k - Q_{k-1}) - Q_{n-1}(xQ_{k-1} - Q_{k-2}) = Q_nQ_{k+1} - Q_{n-1}Q_k,$$

что и требовалось. Из доказанного следует, что $Q_{2m+1} = Q_{m+1}^2 - Q_m^2$, то есть Q_{2m+1} раскладывается в произведение двух неконстантных многочленов $N_m = Q_{m+1} - Q_m$ и $P_m = Q_{m+1} + Q_m$. Осталось доказать, что P_m и N_m неприводимы, если $2m + 1$ простое. Заметим сразу, что Q_{2n} — нечётный многочлен, а Q_{2n+1} — чётный при любом n, так что $N_m(x) = \pm P_m(-x)$, и достаточно доказать неприводимость P_m. Для этого сделаем естественную подстановку $x = y + 1/y$. Из рекуррентного соотношения $Q_{n+1}(y + 1/y) = (y + 1/y)Q_n(y + 1/y) - Q_{n-1}(y + 1/y)$ вкупе с начальными условиями непосредственной индукцией получается, что $Q_m(y + 1/y) = 1/y^{m-1} + 1/y^{m-3} + \ldots + y^{m-1}$. Значит, $P_m(y + 1/y) = y^{-m}(1 + y + \ldots + y^{2m})$ В скобках стоит круговой многочлен $\Phi_{2m+1}(y)$; он, как известно, неприводим (это можно доказать, например, применив признак Эйзенштейна к $\Phi_{2m+1}(y + 1)$). Значит, и $P_m(x)$ также неприводим.

♦ Доказана только приводимость: *2 балла*. Доказано только, что число сомножителей не больше двух: *6 баллов*.

4. *Даны нечётное простое p и целое x такие, что x^3-1 делится на p, а $x-1$ не делится на p. Пусть m и n — целые числа такие, что* $\frac{m}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{p-1}}{p-1}$. *Докажите, что m делится на p.*

<u>Решение</u>. Мы работаем с целыми числами и рациональными дробями, чьи знаменатели не делятся на p, как с остатками по модулю p (деление на a — это умножение на обратный к a остаток). Из условия, $x^2 + x + 1 = 0$; поскольку мультипликативный порядок x равен 3, имеем $p = 6k + 1$. Выражение из условия имеет вид $a_2x^2 + a_1x + a_0$, где каждое a_i есть сумма $2k$ коэффициентов в нашем выражении при x^n, где $n \equiv i \pmod 3$. Если мы покажем, что $a_2 = a_1 = a_0$, наша сумма будет иметь вид $a_0(x^2 + x + 1) = 0$, что и требовалось.

При $i = 1, 2, 3$ обозначим $S_i = 1/i + 1/(i + 3) + \ldots + 1/(i + 3k - 3)$. Тогда, используя равенство $1/n = -1/(p - n)$ (*), нетрудно получить, что $a_0 = (S_3 - S_1) - S_3$, $a_1 = (S_1 - S_3) - S_2$, $a_2 = (S_2 - S_2) - S_1$ (здесь мы записали каждую знакочередующуюся сумму как разность соответствующей знакопостоянной суммы и удвоенной суммы вычитаемых членов). Значит, $a_0 = a_2$. Осталось доказать равенство $a_1 = a_0$, эквивалентное равенству $S_1 - S_3 = S_2/2 - S_3/2$. Это равенство получается применением к правой части, расписанной как знакопеременная сумма обратных, того же равенства (*).

♦ Доказано только, что $a_0 = a_2$: *2 балла*. Доказано только, что a_1 равно одному из a_0 и a_2: *6 баллов*.

5. *Существует ли на координатной плоскости бесконечная последовательность точек $P_i = (x_i, y_i)$ с натуральными координатами такая, что для любых индексов $i > j$ выполнено хотя бы одно из неравенств $0 < |x_i-x_j| < 10\sqrt{i-j}$ или $0 < |y_i-y_j| < 10\sqrt{i-j}$?*

<u>Ответ</u>. Существует. <u>Решение</u>. Мы построим последовательность с неотрицательными целыми координатами. Сдвинув всё на вектор (1, 1), получим требуемое. Для построения P_n, рассмотрим двоичное представление $n = \ldots n_5n_4n_3n_2n_1n_0$ и скажем, что двоичные представления x_n и y_n есть $x_n = \ldots n_4n_2n_0$ и $y_n = \ldots n_5n_3n_1$. Рассмотрим два индекса $i > j$. Пусть s — наименьшее число такое, что

$2^{2s} \geq i - j$. Обрежем из двоичных записей i и j последние $2s$ знаков, получив числа u и v; тогда $u \geq v \geq u - 1$. Пусть $u = v$. Заметим, что $x_i \neq x_j$ или $y_i \neq y_j$; для определённости, пусть выполняется первое неравенство. Тогда, обрезав последние s символов из x_i и x_j, получаем равные числа; значит, $0 < |x_i - x_j| \leq 2^s < 2\sqrt{i-j}$. Осталось разобрать случай $u = v + 1$ В зависимости от чётности числа единиц на конце двоичного представления v, получаем, что, обрезав s последних символов либо из x_i и x_j, либо из y_i и y_j, мы получим два последовательных числа. В первом случае это означает, что $|x_i - x_j| < 2^{s+1} < 4\sqrt{i-j}$, во втором получается аналогичное неравенство для ординат.

♦ Пример без обоснования: *не более 6 баллов*.

6. *В выпуклом четырёхугольнике ABCD прямые CB и DA являются внешними биссектрисами углов DCA и CDB соответственно. Точки E и F выбраны на лучах AC и BD соответственно таким образом, что четырёхугольник CEFD — вписанный. Точка P выбрана на отрезке AB таким образом, что DA и CB являются внешними биссектрисами углов PDE и PCF соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых AD и BC лежит на прямой EF.*

Решение. Через $S(l)$ будем обозначать расстояние от точки S до прямой l.

Лемма. Пусть O — одна из областей, на которые разбивают плоскость прямые, содержащие стороны треугольника ABC. Пусть для точек G и H в области O выполняются соотношения

$$c_1G(AC) + c_2G(AB) + c_3G(BC) = c_4 = c_1H(AC) + c_2H(AB) + c_3H(BC)$$

для некоторых констант c_1, c_2, c_3, c_4, не все из которых равны нулю. Тогда аналогичное соотношение выполняется и для всех точек отрезка прямой GH, лежащего в области O. Кроме того, если это соотношение выполняется ещё в какой-то точке области, то оно выполняется во всех точках области O.

Доказательство. Введём на прямой GH ось координат. Тогда сумма данных расстояний с данными коэффициентами будет линейной функцией от этой координаты в области O. Но эта функция в двух точках G и H принимает значение, равное c_4, а, следовательно, она принимает это значение на всём отрезке. Если она принимает это значение ещё в какой-то точке, то аналогично легко доказать, что она принимает этозначение во всей области O, поскольку по любым двум точкам можно построить отрезок, на котором это соотношение выполняется. Лемма доказана.

Перейдём к решению. Пусть $Q = AC \cap BD$, $J = AD \cap BC$ (тогда J — центр вневписанной окружности треугольника QCD). Заметим, что $A(QC)+A(QD)-A(CD) = 0 = B(QC)+B(QD)-B(CD)$; по леммt получаем $P(OC)+P(OD)-P(CD) = 0$. Положим $t = P(OC)/P(CD)$; тогда $1 - t = P(OD)/P(CD)$. Далее, имеем

$$t = P(OC)/P(CD) = \sin\angle PCO/\sin\angle PCD = \sin\angle FCD/\sin\angle FCO = F(CD)/F(CO).$$

Аналогично, $E(CD)/E(DO) = 1 - t$. Значит,

$$tF(CO)+(1-t)F(DO)-F(CD) = 0 = tE(CO)+(1-t)E(DO)-E(CD),$$

но $tC(CO)+(1–t)C(DO)–C(CD) \neq 0$. Для решения теперь достаточно заметить, что $tJ(CO)+(1–t)J(DO)–J(CD) = 0$ (поскольку J — центр вневписанной окружности) и опять применить лемму. Вписанность четырёхугольника $CEFD$ не пригодилась.

7. *В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 знакомых.*

Решение. Предположим, что нужного человека нет. Тогда все люди в компании делятся на маленьких (у которых не более 20 знакомых) и больших (не менее 70 знакомых). Пусть есть k больших людей, a ребер между ними, b ребер из больших в маленькие, c ребер между маленькими. Тогда $2a+b \geq 70k$, $a+b \leq 2015$, то есть $70k \leq 2a+b \leq 2015+a \leq 2015+k(k–1)/2$, откуда $k^2–140k+4030 \geq 0$, то есть $(k–70)^2 \geq 870 > 29^2$, $|k–70| \geq 30$. Так как $k = 100$ не подходит в условие, то $k < 41$. С другой стороны $20(100–k) \geq b+c=2015–a \geq 2015–k(k–1)/2$, откуда $k^2–41k \geq 30$, что невозможно, так как $0 \leq k \leq 41$. Получаем противоречие, то есть найдется искомый человек.

♦ Не рассмотрено хотя бы одно из нетривиальных значений k: *не более 6 баллов*.

8. *Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 10^{10} натуральных чисел, каждое из которых — палиндром?*

Ответ. Нет. Решение. Предположим, что такая прогрессия существует. Выберем из нее подпрогрессию с одинаковой последней цифрой (достаточно взять каждый десятый член последовательности). Пусть нашлись 11 последовательных членов подпрогрессии с одинаковым количеством цифр: A, $A+d$, …, $A+10d$. У них одинаковые последние цифры, следовательно, одинаковые первые цифры. Пусть последние k цифр у A и $A+d$ одинаковы, а цифра перед ними меняется. Тогда у всех выбранных чисел первые и последние k цифр одинаковы. Уберем первые и последние k цифр. Получим 11 палиндромов (некоторые из них могут начинаться с 0), образующих арифметическую прогрессию. У любых двух соседних из них разные последние цифры, а, значит, и разные первые цифры. Таким образом, у каждого следующего первая цифра больше, чем у предыдущего, но их 11, чего быть не может. Получаем противоречие, значит, таких палиндромов нет. Осталось разобраться со случаем, когда нет 11 последовательных членов с одинаковым количество цифр. Если их нет, то у $A+10d$ цифр больше чем у A, у $A+20d$ цифр больше чем у $A+10d$. Тогда у $A+20d$ и $10A$ количество цифр отличается хотя бы на одну, откуда $A+20d > 10A$. Следовательно, $3d > A$. Но тогда $A+30d$ и $A+50d$ не могут отличаться более чем в 10 раз.

9. *На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \neq B$ и сторону AC в точке $Q \neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.*

Решение. Пусть S – вторая точка пересечения описанной окружности треугольника PQR и Ω. Тогда $\angle(BA, AS) = \angle(BP, PS) = \angle(QP, PS) = \angle(QR, RS) = \angle(AR, RS)$. Пусть P_1 и Q_1 — другие точки, удовлетворяющие условию. Тогда

$\angle(Q_1P_1, P_1S) = \angle(BP_1, P_1S) = \angle(BA, AS) = \angle(AR, RS) = \angle(Q_1R, RS)$ и описанная окружность треугольника P_1Q_1R проходит через точку S.

♦ Неразбор случаев: *дыра не более 2 баллов*.

10. *Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник. Известно, что отрезок между любыми двумя точками его периметра, делящими периметр на две части, длины которых отличаются не более чем в два раза, целиком лежит в многоугольнике. Докажите, что внутри многоугольника найдётся точка такая, что отрезок, соединяющий её с любой точкой периметра, целиком лежит в многоугольнике.*

Решение. Для каждой стороны a многоугольника, рассмотрим полуплоскость p_a, граница m_a которой содержит a, и в окрестности середины a эта полуплоскость содержит внутренность многоугольника. Предположим, что *любые три такие полуплоскости пересекаются*. Тогда по теореме Хелли все такие полуплоскости пересекаются. Докажем, что точка O, лежащая в их пересечении, подходит. Действительно, если точка A периметра из неё не видна, то отрезок OA выходит из многоугольника, а затем входит в него через сторону b. Но тогда O не лежит в полуплоскости p_b — противоречие.

Осталось доказать утверждение, выделенное курсивом. Обозначим периметр нашего многоугольника через $3P$. Пусть полуплоскости p_z, p_b, p_c не пересекаются. Если любые две из сторон a, b, c целиком находятся на части периметра длины не больше P, то и все три лежат на такой части периметра. В этом случае найдётся точка периметра, которая по условию должна быть видна из некоторых точек всех трех сторон, что противоречит условию на p_z, p_b, p_c. Значит, можно считать, что некоторые точки A и B на a и b видны друг из друга и делят периметр в отношении не более 2:1. Тогда точки A и B лежат в $p_a \cap p_b$. Рассмотрим дугу AB нашего периметра, не содержащую c; она не меньше P, поэтому на ней есть точка X, видная из некоторой точки Y стороны c. В этом случае точки A, X, B, Y лежат на периметре многоугольника именно в таком порядке, а тогда отрезки XY и AB лежат внутри многоугольника и поэтому пересекаются. Но тогда окрестность точки Y этого отрезка лежит вне многоугольника. Противоречие.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Первая лига, 3 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Дан белый бумажный прямоугольный треугольник с углом 30° площади 2016. Медведь и Крокодил по очереди закрашивают в нём по треугольнику площади 1; закрашенные треугольники не должны иметь общих внутренних точек. Начинает Медведь. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Медведь. Решение. Поскольку отношение площадей не меняется при аффинном преобразовании, можно считать, что исходный треугольник ABC правильный, а его площадь равна 2016. Первым ходом Медведь закрашивает равнобедренный треугольник площади 1, симметричный относительно высоты из точки A, вершина которого совпадает с точкой A, а основание лежит на стороне BC. Все последующие ходы Медведь закрашивает треугольник, симметричный тому, который закрасил Крокодил на предыдущем ходе, относительно высоты из точки A.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

2. *Докажите, что при всех положительных p и q, меньших единицы, верно неравенство* $2(p+q)>\left(\frac{1-q}{p}\right)^p\left(\frac{q}{1-p}\right)^{1-p}$.

Решение. $\left(\frac{1-q}{p}\right)^p\left(\frac{q}{1-p}\right)^{1-p}=\left((1-q)^p q^{1-p}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{p}\right)^p\left(\frac{1}{1-p}\right)^{1-p}\right)\le$

$$\le(p(1-q)+(1-p)q)\cdot\left(p\frac{1}{p}+(1-p)\frac{1}{1-p}\right)=2(p+q)-4pq<2(p+q).$$

Первое неравенство является произведением двух неравенств между средним арифметическим и средним геометрическим с весами p и $1-p$.

3. *Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n$.*

Ответ. $[n/2]+1$. Решение. Обозначим искомое количество через $F(n)$. Заметим, что $F(n)$ есть число представлений n в виде суммы степеней 2, каждая из которых используется не более 3 раз (потому что если i-ая степень не используется, это означает, что $a_i = 0$, а степень с показателем, большим n, использоваться не может, так как $2^{n+1} > n$. Если $n = 2k+1$ — нечётное число, то a_0 равно 1 или 3. Заменяя его соответственно на 0 или 2, мы установим взаимно–однозначное соответствие между разбиениями n и n–1. Поэтому $F(2k+1) = F(2k)$.

Если $n = 2k$, то a_0 равно 0 или 2. Удаляя из разбиения n все слагаемые, равные 2^0, мы получим в первом случае все разбиения $2k$, в которых нет единиц, а во втором — все такие разбиения $2k–2$. Деля их на 2, получаем все разбиения k и $k–1$ соответственно. Таким образом, $F(2k) = F(k)+F(k–1)$.

Теперь можно доказать, что $F(n) = [n/2]+1$, индукцией по n. База $n = 1$ и $n = 2$ очевидна. Пусть $F(m) = [m/2]+1$ при всех $m < n$. Если $n = 2k$, то $F(n) = F(k)+F(k–1) = [k/2]+1+[(k–1)/2]+1 = k–1+2 = k+1 = [2k/2]+1$. Если $n = 2k+1$, то $F(n) = F(2k) = k+1 = [n/2]+1$. Утверждение доказано.

♦ Ответ неверен: *не более 6 баллов*.

4. *Даны нечётное простое p и целое x такие, что $x^3–1$ делится на p, а $x–1$ не делится на p. Пусть m и n — целые числа такие, что* $\frac{m}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{p-1}}{p-1}$. *Докажите, что m делится на p.*

<u>Решение</u>. Мы работаем с целыми числами и рациональными дробями, чьи знаменатели не делятся на p, как с остатками по модулю p (деление на a — это умножение на обратный к a остаток). Из условия, $x^2 + x + 1 = 0$; поскольку мультипликативный порядок x равен 3, имеем $p = 6k + 1$. Выражение из условия имеет вид $a_2x^2 + a_1x + a_0$, где каждое a_i есть сумма $2k$ коэффициентов в нашем выражении при x^n, где $n \equiv i \pmod 3$. Если мы покажем, что $a_2 = a_1 = a_0$, наша сумма будет иметь вид $a_0(x^2 + x + 1) = 0$, что и требовалось.

При $i = 1, 2, 3$ обозначим $S_i = 1/i + 1/(i + 3) + \ldots + 1/(i + 3k - 3)$. Тогда, используя равенство $1/n = -1/(p - n)$ (*), нетрудно получить, что $a_0 = (S_3 - S_1) - S_3$, $a_1 = (S_1 - S_3) - S_2$, $a_2 = (S_2 - S_2) - S_1$ (здесь мы записали каждую знакочередующуюся сумму как разность соответствующей знакопостоянной суммы и удвоенной суммы вычитаемых членов). Значит, $a_0 = a_2$. Осталось доказать равенство $a_1 = a_0$, эквивалентное равенству $S_1 - S_3 = S_2/2 - S_3/2$. Это равенство получается применением к правой части, расписанной как знакопеременная сумма обратных, того же равенства (*).

♦ Доказано только, что $a_0 = a_2$: *2 балла*. Доказано только, что a_1 равно одному из a_0 и a_2: *6 баллов*.

5. *По кругу расположено 1000 лунок. Одна лунка пустая, а во всех остальных лежит по камешку. Разрешается вынуть из лунки камешек и перенести его в пустую лунку, если между ними расположена ровно одна лунка, и она непуста. При этом камешек из промежуточной лунки вынимается. Можно ли, действуя таким образом, добиться того, чтобы в одной лунке лежал один камешек, а остальные лунки были пустыми?*

<u>Ответ</u>. Можно. <u>Решение</u>. Будем обозначать знаком + наличие камешка в лунке и знаком – пустую лунку. Пусть у нас есть + + – + получим – – + + откуда получаем – + – –. Легко видеть, что такими последовательностями из двух действий можно уменьшать количество + на 2, при этом в любой момент будет четное число + подряд, за ними один – и один +, далее минусы. Очевидно, что в конце мы получим единственный +.

6. *В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ прямые CB и DA являются внешними биссектрисами углов DCA и CDB соответственно. Точки E и F выбраны на лучах AC и BD соответственно таким образом, что четырёхугольник $CEFD$ — вписанный. Точка P выбрана на отрезке AB таким образом, что DA и CB являются внешними биссектрисами углов PDE и PCF соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых AD и BC лежит на прямой EF.*

Решение. Через $S(l)$ будем обозначать расстояние от точки S до прямой l.

Лемма. Пусть O — одна из областей, на которые разбивают плоскость прямые, содержащие стороны треугольника ABC. Пусть для точек G и H в области O выполняются соотношения

$$c_1G(AC) + c_2G(AB) + c_3G(BC) = c_4 = c_1H(AC) + c_2H(AB) + c_3H(BC)$$

для некоторых констант c_1, c_2, c_3, c_4, не все из которых равны нулю. Тогда аналогичное соотношение выполняется и для всех точек отрезка прямой GH, лежащего в области O. Кроме того, если это соотношение выполняется ещё в какой-то точке области, то оно выполняется во всех точках области O.

Доказательство. Введём на прямой GH ось координат. Тогда сумма данных расстояний с данными коэффициентами будет линейной функцией от этой координаты в области O. Но эта функция в двух точках G и H принимает значение, равное c_4, а, следовательно, она принимает это значение на всём отрезке. Если она принимает это значение ещё в какой-то точке, то аналогично легко доказать, что она принимает этозначение во всей области O, поскольку по любым двум точкам можно построить отрезок, на котором это соотношение выполняется. Лемма доказана.

Перейдём к решению. Пусть $Q = AC \cap BD$, $J = AD \cap BC$ (тогда J — центр вневписанной окружности треугольника QCD). Заметим, что $A(QC)+A(QD)–A(CD) = 0 = B(QC)+B(QD)–B(CD)$; по леммt получаем $P(OC)+P(OD)–P(CD) = 0$. Положим $t = P(OC)/P(CD)$; тогда $1 – t = P(OD)/P(CD)$. Далее, имеем

$$t = P(OC)/P(CD) = \sin\angle PCO/\sin\angle PCD = \sin\angle FCD/\sin\angle FCO = F(CD)/F(CO).$$

Аналогично, $E(CD)/E(DO) = 1 – t$. Значит,

$$tF(CO)+(1–t)F(DO)–F(CD) = 0 = tE(CO)+(1–t)E(DO)–E(CD),$$

но $tC(CO)+(1–t)C(DO)–C(CD) \neq 0$. Для решения теперь достаточно заметить, что $tJ(CO)+(1–t)J(DO)–J(CD) = 0$ (поскольку J — центр вневписанной окружности) и опять применить лемму. Вписанность четырёхугольника $CEFD$ не пригодилась. ♦

7. *В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 знакомых.*

Решение. Предположим, что нужного человека нет. Тогда все люди в компании делятся на маленьких (у которых не более 20 знакомых) и больших (не менее 70 знакомых). Пусть есть k больших людей, a ребер между ними, b ребер из больших в маленькие, c ребер между маленькими. Тогда $2a+b \geq 70k$, $a+b \leq 2015$, то есть $70k \leq 2a+b \leq 2015+a \leq 2015+k(k–1)/2$, откуда $k^2–140k+4030 \geq 0$, то есть $(k–70)^2 \geq 870 > 29^2$, $|k–70| \geq 30$. Так как $k = 100$ не подходит в условие, то $k < 41$. С другой стороны $20(100–k) \geq b+c=2015–a \geq 2015–k(k–1)/2$, откуда $k^2–41k \geq 30$, что невозможно, так как $0 \le k \le 41$. Получаем противоречие, то есть найдется искомый человек.

♦ Не рассмотрено хотя бы одно из нетривиальных значений k: *не более 6 баллов*.

8. *Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия из 10^{10} натуральных чисел, каждое из которых — палиндром?*

Ответ. Нет. Решение. Предположим, что такая прогрессия существует. Выберем из нее подпрогрессию с одинаковой последней цифрой (достаточно взять каждый десятый член последовательности). Пусть нашлись 11 последовательных членов подпрогрессии с одинаковым количеством цифр: A, $A+d$, …, $A+10d$. У них одинаковые последние цифры, следовательно, одинаковые первые цифры. Пусть последние k цифр у A и $A+d$ одинаковы, а цифра перед ними меняется. Тогда у всех выбранных чисел первые и последние k цифр одинаковы. Уберем первые и последние k цифр. Получим 11 палиндромов (некоторые из них могут начинаться с 0), образующих арифметическую прогрессию. У любых двух соседних из них разные последние цифры, а, значит, и разные первые цифры. Таким образом, у каждого следующего первая цифра больше, чем у предыдущего, но их 11, чего быть не может. Получаем противоречие, значит, таких палиндромов нет. Осталось разобраться со случаем, когда нет 11 последовательных членов с одинаковым количество цифр. Если их нет, то у $A+10d$ цифр больше чем у A, у $A+20d$ цифр больше чем у $A+10d$. Тогда у $A+20d$ и $10A$ количество цифр отличается хотя бы на одну, откуда $A+20d > 10A$. Следовательно, $3d > A$. Но тогда $A+30d$ и $A+50d$ не могут отличаться более чем в 10 раз.

9. *На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \neq B$ и сторону AC в точке $Q \neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.*

Решение. Пусть S – вторая точка пересечения описанной окружности треугольника PQR и Ω. Тогда $\angle(BA, AS) = \angle(BP, PS) = \angle(QP, PS) = \angle(QR, RS) = \angle(AR, RS)$. Пусть P_1 и Q_1 — другие точки, удовлетворяющие условию. Тогда $\angle(Q_1P_1, P_1S) = \angle(BP_1, P_1S) = \angle(BA, AS) = \angle(AR, RS) = \angle(Q_1R, RS)$ и описанная окружность треугольника P_1Q_1R проходит через точку S.

♦ Неразбор случаев: *дыра не более 2 баллов*.

10. *Дан (не обязательно выпуклый) многоугольник. Известно, что отрезок между любыми двумя точками его периметра, делящими периметр на две части, длины которых отличаются не более чем в два раза, целиком лежит в многоугольнике. Докажите, что внутри многоугольника найдётся точка такая, что отрезок, соединяющий её с любой точкой периметра, целиком лежит в многоугольнике.*

Решение. Для каждой стороны a многоугольника, рассмотрим полуплоскость p_a, граница m_a которой содержит a, и в окрестности середины a эта полуплоскость содержит внутренность многоугольника. Предположим, что *любые три такие* *полуплоскости пересекаются*. Тогда по теореме Хелли все такие полуплоскости пересекаются. Докажем, что точка O, лежащая в их пересечении, подходит. Действительно, если точка A периметра из неё не видна, то отрезок OA выходит из многоугольника, а затем входит в него через сторону b. Но тогда O не лежит в полуплоскости p_b — противоречие.

Осталось доказать утверждение, выделенное курсивом. Обозначим периметр нашего многоугольника через $3P$. Пусть полуплоскости p_z, p_b, p_c не пересекаются. Если любые две из сторон a, b, c целиком находятся на части периметра длины не больше P, то и все три лежат на такой части периметра. В этом случае найдётся точка периметра, которая по условию должна быть видна из некоторых точек всех трех сторон, что противоречит условию на p_z, p_b, p_c. Значит, можно считать, что некоторые точки A и B на a и b видны друг из друга и делят периметр в отношении не более 2:1. Тогда точки A и B лежат в $p_a \cap p_b$. Рассмотрим дугу AB нашего периметра, не содержащую c; она не меньше P, поэтому на ней есть точка X, видная из некоторой точки Y стороны c. В этом случае точки A, X, B, Y лежат на периметре многоугольника именно в таком порядке, а тогда отрезки XY и AB лежат внутри многоугольника и поэтому пересекаются. Но тогда окрестность точки Y этого отрезка лежит вне многоугольника. Противоречие.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая лига, 3 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Точки A_1, ..., A_n в первой координатной четверти и точки B_1, ..., B_n во второй координатной четверти таковы, что для некоторых чисел a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n и для любых j и k площадь треугольника OA_jB_k равна $a_j \cdot b_k$ (O — начало координат). Докажите, что или все точки A_1, ..., A_n лежат на одной прямой, или все точки B_1, ..., B_n лежат на одной прямой.*

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что для любых точек A_i, A_j и B_k, B_l или точки O, A_i, A_j лежат на одной прямой, или точки O, B_k, B_l лежат на одной прямой. Для упрощения обозначений будем доказывать это для точек A_1, A_2 и B_1, B_2. Обозначим через α_1, α_2, β_1, β_2 углы между положительным направлением оси абсцисс и лучами OA_1, OA_2, OB_1, OB_2 соответственно. Так как $S(OA_1B_1)\cdot S(OA_2B_2) = S(OA_1B_2)\cdot S(OA_2B_1) = a_1b_1a_2b_2$, то

$$\sin(\beta_1-\alpha_1)\cdot\sin(\beta_2-\alpha_2) = \sin(\beta_2-\alpha_1)\cdot\sin(\beta_1-\alpha_2).$$

Применяя формулу $\sin x\cdot\sin y = 1/2(\cos(x-y)-\cos(x+y))$, и обозначая $\alpha_2-\alpha_1 = x$, $\beta_2-\beta_1 = y$, получаем $\cos(x-y) = \cos(y+x)$. Отсюда $\sin(x)\cdot\sin(y) = 0$. С учетом того, что $0 \le x, y \le 90°$, получаем: или $x = 0$, то есть $\alpha_1 = \alpha_2$, или $y = 0$, то есть $\beta_1 = \beta_2$, что и требовалось доказать.

2. *Найдите все натуральные числа n, при которых число 5^n-1 является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.*

Ответ. $n = 2$. Решение. Так как произведение пяти и более последовательных натуральных чисел делится на 5, а число 5^n-1 не делится на 5, то 5^n-1 является произведением двух или четырех последовательных натуральных чисел. Пусть $5^n-1 = k(k+1)$. Перебирая остатки по модулю 5, получаем, что $k(k+1)$ не может быть сравнимо с -1 по модулю 5. Пусть $5^n-1 = k(k+1)(k+2)(k+3)$. Тогда $5^n = k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+3k+1)^2$. Отсюда $n = 2m$ — четно, и $5^m = k^2+3k+1$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно k. Его дискриминант $D = 5+4\cdot5^m = 5(1+4\cdot5^{m-1})$ при $m > 1$ делится на 5, но не делится на 25 и потому не является полным квадратом. При $m = 1$ $D = 9$, и мы получаем ответ.

♦ Не разобран случай 4 сомножителей: *не более 2 баллов*.

3. *Квадратный пирог со стороной 30 см. разрезали на прямоугольные куски. Общая длина разрезов 240 см. Докажите, что найдется прямоугольный кусок площади не менее 36 см*^{2}.

Решение. Из неравенства $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ вытекает, что для прямоугольника площади S и периметра P выполнено неравенство $\sqrt{S} \le \dfrac{P}{4}$. Заметим, что сумма периметров всех треугольников равна $2{\cdot}240+4{\cdot}30 = 600$. Поэтому если P_1, P_2,…, P_n — периметры прямоугольников, а S_1, S_2,…, S_n — их площади, причем S_1 — наибольшая площадь, то

$$900 = S_1+S_2+\ldots+S_n \le \sqrt{S_1}\left(\sqrt{S_1}+\ldots+\sqrt{S_n}\right) \le \frac{1}{4}\sqrt{S_1}\left(P_1+\ldots P_n\right) = \sqrt{S_1}\cdot 150\,.$$

Отсюда $\sqrt{S_1} \ge 6$, что и требовалось доказать.

4. *Точка K — середина стороны BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через K, пересекает отрезок AB в точке M и продолжение отрезка AC за точку C в точке L. Точка N — середина отрезка ML. Прямая AN пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке S, примем точка N лежит между точками A и S. Докажите, что описанная окружность треугольника KNS касается стороны BC.*

Решение. Пусть P — точка, симметричная A относительно N, тогда $ALPM$ — параллелограмм. Имеем: $\angle CBS = \angle CAS = \angle APM$, $\angle BCS = \angle BAS$. Следовательно, треугольники BCS и PAM подобны. SK и MN — медианы в подобных треугольниках, поэтому $\angle KNP = \angle SKB$. Из этого вытекает, что прямая BK касается описанной окружности треугольника KNS. Написанное выше решение содержит пробел: в нем неявно предполагалось, что точки N и S лежат по одну сторону от прямой BK, то есть что точка N лежит на отрезке KL. Это можно доказать, например, дважды применив теорему Менелая. Действительно, обозначим $BM = a$, $MA = b$, $AC = c$, $CN = d$, $NK = e$, $KM = f$. По теореме Менелая для треугольника ABC и прямой MN получаем $(a/b)\cdot(c+d)/d\cdot 1/1 = 1$. По теореме Менелая для треугольника MAN и прямой BC получаем $a/(a+b)\cdot c/d\cdot e/f = 1$. Из этих двух равенств $e/f = (a+b)/b\cdot(c+d)/c > 1$, то есть $MK < KN$.

5. *Найдется ли на плоскости такое множество различных точек ...,* A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, *..., что точки* A_k, A_l, A_m *лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда* $k+l+m = 2015$?

Решение. Для каждого целого k возьмём в качестве A_k точку с координатами $(k–2015/3, (k–2015/3)^3)$. Все эти точки лежат на параболе $y = x^3$. Три такие точки с абсциссами $u = a–2015/3$, $v = b–2015/3$, $w = c–2015/3$ лежат на одной прямой $y = kx+l$ тогда и только тогда, когда числа u, v, w являются решениями уравнения $x^3–kx–l = 0$, то есть — когда $u+v+w = 0$. А это последнее условие эквивалентно тому, что $a+b+c = 2015$.

6. *Докажите, что любая арифметическая прогрессия* $a_n = a+nb$, *где a и b — натуральные числа и b взаимно просто с 10, содержит бесконечно много палиндромов.*

Решение. Так как $(b,10) = 1$, то по теореме Эйлера для каждого k выполнено $10^{k\varphi(b)} \equiv 1 \pmod b$. Значит, $N_t = 1+10^{\varphi(b)}+10^{2\varphi(b)}+\ldots+10^{(t-1)\varphi(b)} \equiv t \pmod b$. При t, кратном a, число N_t принадлежит данной в условии арифметической прогрессии. Осталось заметить, что число N_t при всех t является палиндромом.

7. *На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \neq B$ и сторону AC в точке $Q \neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.*

Решение. Пусть S — вторая точка пересечения описанной окружности треугольника PQR и Ω. Тогда $\angle(BA, AS) = \angle(BP, PS) = \angle(QP, PS) = \angle(QR, RS) = \angle(AR, RS)$. Пусть P_1 и Q_1 — другие точки, удовлетворяющие условию. Тогда $\angle(Q_1P_1, P_1S) = \angle(BP_1, P_1S) = \angle(BA, AS) = \angle(AR, RS) = \angle(Q_1R, RS)$ и описанная окружность треугольника P_1Q_1R проходит через точку S.

8. *Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n$.*

Ответ. $[n/2]+1$. Решение. Обозначим искомое количество $F(n)$. Заметим, что $F(n)$ есть просто число представлений n в виде суммы степеней 2, каждая из которых используется не более 3 раз (потому что если i-ая степень не используется, это означает, что $a_i = 0$, а степень с показателем, большим n, использоваться не может, так как $2^{n+1} > n$. Если $n = 2k+1$ — нечётное число, то a_0 равно 1 или 3. Заменяя его соответственно на 0 или 2, мы установим взаимно–однозначное соответствие между разбиениями n и $n-1$. Поэтому $F(2k+1) = F(2k)$.

Если $n = 2k$, то a_0 равно 0 или 2. Удаляя из разбиения n все слагаемые, равные 2^0, мы получим в первом случае все разбиения $2k$, в которых нет единиц, а во втором — все такие разбиения $2k-2$. Деля их на 2, получаем все разбиения k и $k-1$ соответственно. Таким образом, $F(2k) = F(k)+F(k-1)$.

Теперь можно доказать, что $F(n) = [n/2]+1$, индукцией по n. База $n = 1$ и $n = 2$ очевидна. Пусть $F(m) = [m/2]+1$ при всех $m < n$. Если $n = 2k$, то $F(n) = F(k)+F(k-1) = [k/2]+1+[(k-1)/2]+1 = k-1+2 = k+1 = [2k/2]+1$. Если $n = 2k+1$, то $F(n) = F(2k) = k+1 = [n/2]+1$. Утверждение доказано.

9. *В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей (дружба взаимна). Докажите, что в компании найдётся человек, у которого больше 20, но меньше 70 знакомых.*

Решение. Предположим, что нужного человека нет. Тогда все люди в компании делятся на маленьких (у которых не более 20 знакомых) и больших (не менее 70 знакомых). Пусть есть k больших людей, a ребер между ними, b ребер из больших в маленькие, c ребер между маленькими. Тогда $2a+b \geq 70k$, $a+b \leq 2015$, то есть $70k \leq 2a+b \leq 2015+a \leq 2015+k(k-1)/2$, откуда $k^2-140k+4030 \geq 0$, то есть $(k-70)^2 \geq 870 > 29^2$, $|k-70| \geq 30$. Так как $k = 100$ не подходит в условие, то $k < 41$. С другой стороны $20\cdot(100-k) \geq b+c=2015-a \geq 2015-k(k-1)/2$, откуда $k^2-41k \geq 30$, следовательно $k = 0$, что невозможно. Получаем противоречие, то есть найдется искомый человек.

10. *Пусть M — конечное множество натуральных чисел и A — непустое подмножество множества M. Докажите, что существует такое подмножество B множества M, что A совпадает с множеством всех элементов множества M, которые делят нечетное число элементов из B.*

Решение. Будем конструировать множество B последовательно, обрабатывая элементы множества M по порядку от наибольшего к наименьшему. Изначально положим $B = \varnothing$. На очередном шаге для обрабатываемого элемента $x \in M$ смотрим следующее: если $x \in A$, то верно ли, что x делит нечетное число элементов из B; если $x \notin A$, то верно ли, что x делит четное число элементов из B. Если это так, то обработка элемента x закончена, а если это не так, то добавляем элемент x в множество B. В частности, первый добавленный в B элемент — это наибольший элемент из A. Нетрудно понять, что полученное после обработки всех элементов X множество B будет искомым. В самом деле, при обработке очередного элемента x для каждого $y > x$ условие четности для y не меняется, а для x оно оказывается точно таким, как нужно.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Третья лига, 3 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек ..., P_{-2} P_{-1}, P_0 , P_1, P_2, ... так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c коллинеарны тогда и только тогда, когда $a+b+c = 2015$.*

Решение. Для каждого целого k возьмём в качестве P_k точку с координатами (k–2015/3, $(k–2015/3)^3$). Все эти точки лежат на параболе $y = x^3$. Три такие точки с абсциссами $u = a–2015/3$, $v = b–2015/3$, $w = c–2015/3$ лежат на одной прямой $y = kx+l$ тогда и только тогда, когда числа u, v, w являются решениями уравнения $x^3–kx–l = 0$, то есть — когда $u+v+w = 0$. А это последнее условие эквивалентно тому, что $a+b+c = 2015$.

♦ Доказательство только в одну сторону: *4 балла*.

2. *На доске написано число 1. Каждую минуту имеющееся на доске выражение либо умножается на переменную x, либо складывается с переменной x. Через 2015 минут на доске появился многочлен f(x) степени 1000, график которого проходит через точку A с абсциссой 1. Какие значения может принимать ордината этой точки? Найдите все возможные варианты ответа, и докажите, что других быть не может*

Ответ. Либо 1015, либо 1016. Решение. После первой операции получается один из многочленов 1-й степени: x или $x+1$. Далее каждое применение 1-й операции увеличивает степень многочлена на 1 и не меняет его значение в точке 1. А каждое применение 2-й операции, наоборот, увеличивает на 1 его значение в точке 1 и не меняет его степень. Так как после применения 2014 операций степень многочлена из первой превратилась в тысячную, значит операция первого типа применялась 999 раз. Тогда операция 2-го типа применялась 2014–999 = 1015 раз, и ровно на столько же увеличилось значение многочлена в точке $x = 1$. Но после 1-й операции оно было равно либо 0, либо 1.

♦ Только дан ответ с объяснением: *4 балла*.

3. *Дан картонный правильный треугольник площади 1000. Петров и Волков по очереди закрашивают в нём по треугольнику площади 1; закрашенные треугольники не должны иметь общих внутренних точек. Начинает Петров. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петров. Решение. Пусть дан треугольник ABC. Первым ходом Петров закрашивает равнобедренный треугольник площади 1, симметричный относительно высоты из точки A, вершина которого совпадает с точкой A, а основание лежит на стороне BC. Все последующие ходы Петров закрашивает треугольник, симметричный тому, который закрасил Волков на предыдущем ходе, относительно высоты из точки A.

4. *Положительные числа a, b, c, x, y подобраны так, что выполнены неравенства $ax+by \le bx+cy \le cx+ay$. Докажите, что $b \le c$.*

Решение. Пусть $b > c$. Тогда в силу первого неравенства $x(b–a) \ge y(b–c)$ (*), откуда имеем $b–a > 0$, то есть $b > a$. В силу второго неравенства $x(b–c) \le y(a–c)$ (**), откуда $a–c > 0$, то есть $a > c$. Получается, что $b > a > c$. Но тогда $b–a < b–c$, и из (*) следует, что $x > y$. С другой стороны, $a–c < b–c$, и из (**) следует, что $x < y$. Противоречие.

5. *Квадратный пирог со стороной 30 см. разрезали на прямоугольные куски. Общая длина разрезов 240 см. Докажите, что найдется прямоугольный кусок площади не менее 36 см^2.*

Решение. Из неравенства $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ вытекает, что для прямоугольника площади S и периметра P выполнено неравенство $\sqrt{S} \le \dfrac{P}{4}$. Заметим, что сумма периметров всех треугольников равна $2\cdot 240+4\cdot 30 = 600$. Поэтому если P_1, P_2,…, P_n — периметры прямоугольников, а S_1, S_2,…, S_n — их площади, причем S_1 — наибольшая площадь, то

$$900 = S_1+S_2+\ldots+S_n \le \sqrt{S_1}\left(\sqrt{S_1}+\ldots+\sqrt{S_n}\right) \le \frac{1}{4}\sqrt{S_1}\left(P_1+\ldots P_n\right) = \sqrt{S_1}\cdot 150.$$

Отсюда $\sqrt{S} \le 6$, что и требовалось доказать.

6. *В какое наименьшее число цветов нужно покрасить все натуральные числа от 1 до 2015 так, чтобы не нашлось трёх чисел одного цвета a, b, c таких, что a делится на b, и b делится на c?*

Ответ. В 6 цветов. Решение. Раскрашивать можно, например, так. Цвет 1: числа 1, 2, 3. Цвет 2: числа от 4 до 15 включительно. Цвет 3: числа от 16 до 63 включительно. Цвет 4: числа от 64 до 255 включительно. Цвет 5: числа от 256 до 1023 включительно. Цвет 6: числа от 1024 до 2015 включительно. Если мы раскрасим в 5 цветов, то три числа из набора 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 будут окрашены в один цвет, что противоречит условию задачи.

♦ Только пример или только оценка: *4 балла*.

7. *Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n–1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.*

Ответ. $n = 2$. Решение. Так как произведение пяти и более последовательных натуральных чисел делится на 5, а число $5^n–1$ не делится на 5, то $5^n–1$ является произведением двух или четырех последовательных натуральных чисел. Пусть 5^n–

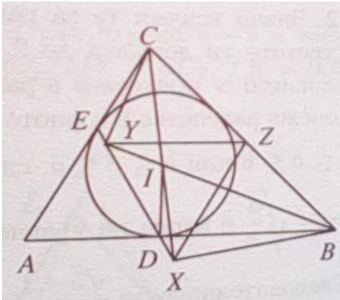
$1 = k(k+1)$. Перебирая остатки по модулю 5, получаем, что $k(k+1)$ не может быть сравнимо с -1 по модулю 5. Пусть $5^n-1 = k(k+1)(k+2)(k+3)$. Тогда $5^n = k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+3k+1)^2$. Отсюда $n = 2m$ — четно, и $5^m = k^2+3k+1$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно k. Его дискриминант $D = 5+4\cdot5^m = 5(1+4\cdot5^{m-1})$ при $m > 1$ делится на 5, но не делится на 25 и потому не является полным квадратом. При $m = 1$ $D = 9$, и мы получаем ответ.

♦ Не разобран случай 4 сомножителей: *не более 2 баллов*.

8. *Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. X и Y — точки пересечения прямой DE соответственно с биссектрисами углов ACB и ABC. Z — середина стороны BC. Докажите, что $XZ = YZ$.*

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности. $\angle BIC = 90°+\angle A/2$. Но

$$\angle BDE = \angle A+\angle AED = \angle A+(180°-\angle A)/2 = 90°+\angle A/2, \text{ т.е. } \angle BIC = \angle BDE.$$



Отсюда $\angle BIX = \angle ADE°$. Но $\angle ADE = \angle BDX$, значит, $\angle BID = \angle BDX$, т.е. точки B, I, D, X лежат на одной окружности. $\angle IDB = 90°$, значит BI — диаметр этой окружности, а $\angle BXC = 90°$. Аналогично, $\angle BYC = 90°$. Отрезки YZ и XZ — медианы в прямоугольных треугольниках с гипотенузой BC, значит, оба равны её половине.

9. *Точка K — середина стороны BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку K, пересекает отрезок AB в точке M, а продолжение отрезка AC за точку C в точке L. Точка N — середина отрезка ML. Прямая AN пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке S, причём точка N лежит между точками A и S. Докажите, что описанная окружность треугольника KNS касается стороны BC.*

Решение. Пусть P — точка, симметричная A относительно N, тогда $ALPM$ — параллелограмм. Имеем: $\angle CBS = \angle CAS = \angle APM$, $\angle BCS = \angle BAS$. Следовательно, треугольники BCS и PAM подобны. SK и MN — медианы в подобных треугольниках, поэтому $\angle KNP = \angle SKB$. Из этого вытекает, что прямая BK касается описанной окружности треугольника KNS. Написанное выше решение содержит пробел: в нем неявно предполагалось, что точки N и S лежат по одну сторону от прямой BK, то есть что точка N лежит на отрезке KL. Это можно доказать, например, дважды применив теорему Менелая. Действительно, обозначим $BM = a$, $MA = b$, $AC = c$, $CN = d$, $NK = e$, $KM = f$. По теореме Менелая для треугольника ABC и прямой MN получаем $(a/b)\cdot(c+d)/d\cdot1/1 = 1$. По теореме Менелая для треугольника MAN и прямой BC получаем $a/(a+b)\cdot c/d\cdot e/f = 1$. Из этих двух равенств $e/f = (a+b)/b\cdot(c+d)/c > 1$, то есть $MK < KN$.

10. *У Вовы и Димы есть два одинаковых прямоугольника 2×13. Вова замостил свой прямоугольник 13 доминошками. Дима может положить доминошку в свой* *прямоугольник и узнать, лежит ли на этом месте доминошка у Вовы. Сможет ли Дима за 9 вопросов узнать, как именно лежат все Вовины доминошки?*

Ответ. Сможет. Решение. Сначала покажем, как за три вопроса решить задачу на прямоугольнике 2×5. Сначала спросим про среднюю вертикальную доминошку. При ответе «да» остаётся по одному вопросу на каждый из оставшихся квадратов 2×2. Ясно, что этого достаточно. При ответе «нет» спрашиваем про горизонтальную доминошку из третьей и четвертой клеток верхней строки. При положительном ответе остается задать вопрос про квадрат 2×2 из первой и второй вертикалей, при отрицательном — про квадрат 2×2 из четвёртой и пятой вертикалей. Очевидно, что трёх вопросов хватает и для решения задачи на прямоугольнике 2×4. Для решения задачи на прямоугольнике 2×6 достаточно четырёх вопросов (спрашиваем про крайний вертикальный столбик и сводим к рассмотренным случаям).

Вернёмся к прямоугольнику 2×13. Первый вопрос — про среднюю вертикальную доминошку. При ответе «нет» задаём второй вопрос: про горизонтальную доминошку из седьмой и восьмой клеток верхней строки. При любом ответе остаётся решить задачу на прямоугольниках 2×5 и 2×6. В каждом случае требуется не более 9 вопросов.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая юниорская лига, 3 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Дано натуральное число k. Докажите, что существует лишь конечное количество натуральных чисел n, обладающих следующим свойством: все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы, разность произведений чисел в которых равна k.*

Решение. Мы будем исследовать разбиения только чисел от 2 до n, к каждому из которых число 1 может быть добавлено двумя способами. Заметим, что $k \le 2^k < 3^k$, поэтому простые числа 2 и 3 входят в разложение k на простые множители в степенях, не превосходящих k. Если в каждую группу попадёт больше k чисел, кратных 2, то разность произведений чисел в группах будет кратна 2^{k+1} и, следовательно, отлична от k. Поэтому в одной из групп при любом n находится не более k чисел, кратных 2 (эту группу мы назовём *второй*), а все остальные — в другой (которую мы назовём *первой*). Точно так же в одной из групп содержится не более k чисел, кратных 3. Поскольку при $n > 6(2k+1)$ среди чисел от 2 до n имеется более $2k$ чисел, кратных одновременно 2 и 3, в другой группе больше k чисел, кратных 2, следовательно, не более k чисел, кратных 3, во второй группе, а все остальные — в первой. Докажем, что при больших n произведение всех чисел в первой группе более, чем в 2 раза превосходит произведение чисел в первой. Отсюда, следует, что при больших n разность произведений в группах больше k (иначе $n! < k\cdot 2k$).

Получим наше разбиение на группы последовательным образом. Сначала разобьём все числа от 1 до n на шестёрки последовательных чисел, начиная с числа 2 (последняя шестёрка может оказаться неполной). Затем в каждой шестёрке четыре числа, кратных 2 или 3, положим в первую группу, а два оставшихся — во вторую. В каждой шестёрке произведение чисел, попавших в первую группу, будет хотя бы в 2 раза больше произведения чисел, попавших во вторую (на самом деле в полных шестёрках отношение будет не меньше $2\cdot 3\cdot 4\cdot 6/5\cdot 7 = 144/35$, а в неполных не меньше 24/5. Всего шестёрок не меньше $n/6–1$, и отношение произведений в группах не меньше $2^{n/6–1}$. Теперь числа, попавшие не в те группы, в которые они должны были попасть, положим на место. Числа, ошибочно записанные во вторую группу, при перемещении в первую только увеличат наше отношение, а числа, переезжающие из первой во вторую — уменьшат его не более, чем в n^{4k} раз (так как каждое такое число не больше n, и произведение в первой группе делится на это число, а во второй — умножается на него же). Таким образом, для нашего разбиения отношение произведения чисел в первой группе к произведению чисел во второй не меньше, чем $2^{n/6}/2n^{4k}$, и нам нужно, чтобы $2^{n/6}$ было больше $4n^{4k}$. Поскольку первая функция — показательная, а вторая степенная, при достаточно больших n это будет верно.

2. *Пусть I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC. Прямые BI_a и CI_a пересекают лучи AC и AB в точках P и Q соответственно. На продолжениях лучей AB и AC за точки B и C выбраны точки X и Y соответственно таким образом, что отрезок XY проходит через I_a. Прямые, симметричные прямым CX и BY относительно прямых CI_a и BI_a соответственно, пересекаются в точке Z. Докажите, что точки P, Z, Q лежат на одной прямой.*

Решение. Через $S(l)$ будем обозначать расстояние от точки S до прямой l.

Лемма. Пусть для точек G и H внутри угла CAB и вне треугольника ABC (назовём эту область O) выполняются соотношения

$$c_1G(AC)+c_2G(AB)+c_3G(BC)=c_4=c_1H(AC)+c_2H(AB)+c_3H(BC)$$

для некоторых констант c_1, c_2, c_3, c_4, не все из которых равны нулю. Тогда аналогичное соотношение выполняется и для всех точек отрезка прямой GH, лежащей в области O. Кроме того, если это соотношение выполняется ещё в какой-то точке, то оно выполняется во всех точках области O.

Доказательство. Введём на прямой GH ось координат. Тогда сумма данных расстояний с данными коэффициентами будет линейной функцией от этой координаты в области O. Но эта функция в двух точках G и H принимает значение, равное c_4, а, следовательно, она принимает это значение на всём отрезке. Если она принимает это значение ещё в какой-то точке, то аналогично легко доказать, что она принимает это значение во всей области O, поскольку по любым двум точкам можно построить отрезок, на котором это соотношение выполняется. Лемма доказана.

Заметим, что $P(AB)+P(AC)–P(BC) = 0 = (AB)+(AC)–(BC)$, но $C(AB)+C(AC)–C(BC) \neq 0$, поэтому достаточно доказать, что $Z(AB)+Z(AC)–Z(BC) = 0$. Имеем

$$Z(AC)/Z(BC) = \sin\angle PCZ/\sin\angle ZCB = \sin\angle XCB/\sin\angle XCP = X(BC)/X(AC) = t.$$

Аналогично, $Z(AB)/Z(BC) = Y(BC)/Y(AB)$, поэтому достаточно доказать, что $Y(BC)/Y(AB) = 1–t$. Заметим, что $tX(AC)+(1–t)X(AB)–X(BC) = 0 = tI_a(AC)+(1–t)I_a(AB)–I_a(BC)$, откуда по лемме $tY(AC)+(1–t)Y(AB)–Y(BC)$, поэтому $Y(BC)/Y(AB) = 1–t$, что и требовалось.

3. *Последовательность a_1, a_2, ... задана условием $a_n = n(n+1)+11$. Найдите все n, для которых число a_n составное, но взаимно просто с a_k при всех $0 < k < n$.*

Ответ. $n = 10$. Решение. Если a_n делится на некоторое простое $p < n$, то $a_n–p = (n–p)(n–p+1)+11$ также кратно p, и n не удовлетворяет условию задачи. Если p равно одному из чисел n и $n+1$, а a_n делится на p, то на p должно делиться 11, то есть n равно 10 или 11. Первое из этих значений удовлетворяет условию задачи ($a_{10} = 11^2$), а второе уже нет ($a_{11} = 11\cdot13$). Поэтому, если n удовлетворяет условию задачи и не равно 10, все простые делители a_n должны быть не меньше $n+2$. Так как a_n составное, $a_n = n(n+1)+11 \geq (n+2)^2$, откуда $3n \leq 7$ и $n \leq 2$. Однако числа a_1 и a_2 простые, и этот вариант тоже исключается.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

4. *Сумма положительных чисел a, b, и c равна 3. Докажите, что* $\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\geq\frac{3}{2}$.

Решение. Заметим, что $\frac{a^2}{a+b^2}=a-\frac{ab^2}{a+b^2}$. Поэтому достаточно доказать, что $\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}\leq\frac{3}{2}$. Применив неравенство о средних к знаменателям, получим

$$\frac{ab^2}{a+b^2}+\frac{bc^2}{b+c^2}+\frac{ca^2}{c+a^2}\leq\frac{ab^2}{2b\sqrt{a}}+\frac{bc^2}{2c\sqrt{b}}+\frac{ca^2}{2a\sqrt{c}}=\frac{1}{2}\left(2b\sqrt{a}+c\sqrt{b}+a\sqrt{c}\right)\leq$$
$$\leq\frac{1}{2}\left(\frac{ab+b}{2}+\frac{bc+c}{2}+\frac{ca+a}{2}\right)$$

Осталось заметить, что $9=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geq 3(ab+bc+ca)$, откуда $\frac{1}{2}\left(\frac{ab+b}{2}+\frac{bc+c}{2}+\frac{ca+a}{2}\right)\leq\frac{3}{2}$.

5. *На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P\neq B$ и сторону AC в точке $Q\neq R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.*

Решение. Пусть S – вторая точка пересечения описанной окружности треугольника PQR и Ω. Тогда $\angle(BA,AS)=\angle(BP,PS)=\angle(QP,PS)=\angle(QR,RS)=\angle(AR,RS)$. Пусть P_1 и Q_1 — другие точки, удовлетворяющие условию. Тогда $\angle(Q_1P_1,P_1S)=\angle(BP_1,P_1S)=\angle(BA,AS)=\angle(AR,RS)=\angle(Q_1R,RS)$ и описанная окружность треугольника P_1Q_1R проходит через точку S.

6. *Вершины выпуклого 2015-угольника пусты. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) ставят фишки в незанятые вершины. Нельзя ставить фишку в вершину, если хотя бы в одну из соседних вершин фишку уже поставил противник. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Опишем выигрышную стратегию Пети. Первым ходом он ставит фишку в любую вершину, а затем на оставшихся 2014 вершинах играет центрально симметрично (каждым ходом ставит фишку в противоположную Васиному ходу на этом 2014-угольнике вершину). Пусть Вася смог сделать ход. Тогда соседями к вершине, симметричной той, куда он сходил, могут быть либо пустые вершины, либо вершина с фишкой, поставленной Петей на первом ходу, либо фишки, симметричные соседям Васиной фишки. Последние обязательно ставил Петя, иначе на предыдущем ходу у Васи была бы соседняя фишка, поставленная Петей. Значит, Петя всегда сможет сделать ход.

7. *В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей. Докажите, что в компании найдётся человек, у которого не меньше 20, но меньше 70 знакомых.*

Решение. Предположим, что нужного человека нет. Тогда все люди в компании делятся на маленьких (у которых не более 20 знакомых) и больших (не менее 70 знакомых). Пусть есть k больших людей, a ребер между ними, b ребер из больших в маленькие, c ребер между маленькими. Тогда $2a+b \geq 70k$, $a+b \leq 2015$, то есть $70k \leq 2a+b \leq 2015+a \leq 2015+k(k–1)/2$, откуда $k^2–140k+4030 \geq 0$, то есть $(k–70)^2 \geq 870 > 29^2$, $|k–70| \geq 30$. Так как $k = 100$ не подходит в условие, то $k < 41$. С другой стороны $20(100–k) \geq b+c=2015–a \geq 2015–k(k–1)/2$, откуда $k^2–41k \geq 30$, следовательно $k = 0$, что невозможно. Получаем противоречие, то есть найдется искомый человек.

8. *Дано натуральное n. Найдите количество последовательностей a_0, a_1, a_2, ..., a_n, все члены которых равны 0, 1, 2 или 3, таких, что $n = a_0+2a_1+2^2a_2+...+2^na_n$.*

Ответ. $[n/2]+1$. Решение. Обозначим искомое количество $F(n)$. Заметим, что $F(n)$ есть просто число представлений n в виде суммы степеней 2, каждая из которых используется не более 3 раз (потому что если i-ая степень не используется, это означает, что $a_i = 0$, а степень с показателем, большим n, использоваться не может, так как $2^{n+1} > n$. Если $n = 2k+1$ — нечётное число, то a_0 равно 1 или 3. Заменяя его соответственно на 0 или 2, мы установим взаимно–однозначное соответствие между разбиениями n и $n–1$. Поэтому $F(2k+1) = F(2k)$.

Если $n = 2k$, то a_0 равно 0 или 2. Удаляя из разбиения n все слагаемые, равные 2^0, мы получим в первом случае все разбиения $2k$, в которых нет единиц, а во втором — все такие разбиения $2k–2$. Деля их на 2, получаем все разбиения k и $k–1$ соответственно. Таким образом, $F(2k) = F(k)+F(k–1)$.

Теперь можно доказать, что $F(n) = [n/2]+1$, индукцией по n. База $n = 1$ и $n = 2$ очевидна. Пусть $F(m) = [m/2]+1$ при всех $m < n$. Если $n = 2k$, то $F(n) = F(k)+F(k–1) = [k/2]+1+[(k–1)/2]+1 = k–1+2 = k+1 = [2k/2]+1$. Если $n = 2k+1$, то $F(n) = F(2k) = k+1 = [n/2]+1$. Утверждение доказано.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

9. *Натуральные числа a, b, c, d, e таковы, что $a^4+b^4 = c^4+d^4 = e^5$. Докажите, что число $ac+bd$ — составное.*

Решение. Предположим, что $ac+bd = p$ — простое число. Очевидно, $p > 2$. Число $p = ac+bd$, очевидно, делит $a^4c^4–b^4d^4 = a^4(e^5–d^4)–(e^5–a^4)d^4 = e^5(a^4–d^4) = e^5(a+d)(a–d)(a^2+d^2)$. Ясно, что $p = ac+bd > a+d > a–d$, то есть ни одно из чисел $a+d$ и $a–d$ не кратно p. Если же e кратно p, то $e^5 = a^4+b^4 \geq p^5 > 2p^4$, откуда хотя бы одно из чисел a и b должно быть больше $p = ac+bd$ — противоречие. Таким образом, a^2+d^2 делится на p. Аналогично b^2+c^2 делится на p. Из известного тождества $(a^2+d^2)(b^2+c^2) = (ac+bd)^2+(ab–cd)^2$ получаем, что $ab–cd$ кратно $p = ac+bd$. Принимая без ограничения общности, что $ab \geq cd$, получаем $ac+bd \leq ab–cd$, то есть $a(b–c) \geq d(b+c)$. Отсюда следует, что $b > c$ и $a > d$, но это противоречит тому, что $a^4+b^4 = c^4+d^4$.

10. *Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек ..., P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, ... так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c коллинеарны тогда и только тогда, когда $a+b+c = 2015$.*

Решение. Для каждого целого k возьмём в качестве P_k точку с координатами $(k–2015/3, (k–2015/3)^3)$. Все эти точки лежат на параболе $y = x^3$. Три такие точки с абсциссами $u = a–2015/3$, $v = b–2015/3$, $w = c–2015/3$ лежат на одной прямой $y = kx+l$ тогда и только тогда, когда числа u, v, w являются решениями уравнения $x^3–kx–l = 0$, то есть — когда $u+v+w = 0$. А это последнее условие эквивалентно тому, что $a+b+c = 2015$.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Первая юниорская лига, 3 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Докажите, что существует лишь конечное число натуральных чисел n, обладающих следующим свойством: все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы, разность произведений чисел в которых равна 20152015.*

Решение. Отметим, что 20152015 не делится ни на 2, ни на 3. Следовательно, все числа, кратные двум, должны быть в одной группе и все числа кратные трём должны быть в одной группе. Если n достаточно большое, то, рассмотрев числа, кратные 6, получим, что все числа, делящиеся на 2 или на 3 лежат в одной группе. Если $n = 2k$, то в одной группе лежат числа 2, 4,..., $2k$, произведение которых больше произведения всех остальных. Но в этой же группе есть число 3, поэтому произведение чисел в ней хотя бы на $2\cdot4\cdot\ldots\cdot2k$ больше произведения чисел в другой группе, а это больше 20152015 при достаточно большом k. Пусть $n = 2k+1$. Тогда числа 2, 4,..., $2k$ в одной группе. Также в этой группе есть два самых больших нечетных числа, делящихся на три (они не менее, чем $2k-3$ и $2k-9$). Нетрудно понять, что произведение перечисленных чисел больше произведения всех оставшихся. Добавив к этой группе число 3, получим, что произведение чисел в этой группе хотя бы на $2\cdot4\cdot\ldots\cdot2k$ превосходит произведение оставшихся, что при достаточно большом k больше 20152015.

2. *Точка K — середина стороны BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через K, пересекает отрезок AB в точке M и продолжение отрезка AC за точку C в точке L. Точка N — середина отрезка ML. Прямая AN пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке S, примем точка N лежит между точками A и S. Докажите, что описанная окружность треугольника KNS касается стороны BC.*

Решение. Пусть P — точка, симметричная A относительно N, тогда $ALPM$ — параллелограмм. Имеем: $\angle CBS = \angle CAS = \angle APM$, $\angle BCS = \angle BAS$. Следовательно, треугольники BCS и PAM подобны. SK и MN — медианы в подобных треугольниках, поэтому $\angle KNP = \angle SKB$. Из этого вытекает, что прямая BK касается описанной окружности треугольника KNS. Написанное выше решение содержит пробел: в нем неявно предполагалось, что точки N и S лежат по одну сторону от прямой BK, то есть что точка N лежит на отрезке KL. Это можно доказать, например, дважды применив теорему Менелая. Действительно, обозначим $BM = a$, $MA = b$, $AC = c$, $CN = d$, $NK = e$, $KM = f$. По теореме Менелая для треугольника ABC и прямой MN получаем $(a/b)\cdot(c+d)/d\cdot1/1 = 1$. По теореме Менелая для треугольника MAN и прямой BC

получаем $a/(a+b)\cdot c/d\cdot e/f = 1$. Из этих двух равенств $e/f = (a+b)/b\cdot(c+d)/c > 1$, то есть $MK < KN$.

3. *Последовательность a_1, a_2, ... задана условием $a_n = n(n+1)–19$. Для каждого $n > 4$ докажите следующее утверждение: если a_n взаимно просто с a_k при всех $0 \le k < n$, то a_n простое.*

Решение. Пусть число a_n при $n > 4$ не простое. Докажем, что оно не может быть взаимно просто со всеми a_k, где $0 \le k < n$. Поскольку при $n > 4$ выполнены неравенства $1 < a_n <(n+1)^2$, у a_n есть делитель d такой, что $1 < d \le n$. Рассмотрим тогда число $a_{n–d}$. Поскольку $a_n–a_{n–d} = n(n+1)–(n–d)(n–d+1) = (2n–d+1)d$, числа a_n и $a_{n–d}$ имеют общий делитель d и не являются взаимно простыми.

4. *У Вовы и Димы есть два одинаковых прямоугольника 2×13. Вова замостил свой прямоугольник 13 доминошками. Дима может положить доминошку в свой прямоугольник и узнать, лежит ли на этом месте доминошка у Вовы. За какое наименьшее число таких вопросов Дима сможет узнать, как именно лежат все Вовины доминошки?*

Ответ. 9. Решение. Обозначим за t_n количество разбиений прямоугольника $2\times n$ на доминошки. Рассмотрев доминошки, накрывающие угловые клетки, нетрудно убедиться в том, что $t_{n+2} = t_{n+1}+t_n$. Так как $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, получаем, что $t_n = F_{n+1}$ (число Фибоначчи).

Обозначим через q_n число воспросов из условия задачи для прямоугольника $2\times n$. Докажем, что если $t_n > 2^k$, то $q_n > k$. Предположим, что алгоритм из k вопросов все–таки существует. Результатом его работы будет последовательность из k ответов, которых всего 2^k штук. Значит, двум разным разбиениям соответствуют одинаковые последовательности ответов. Докажем, что и последовательности вопросов в этих случаях одинаковые. Если это не так, пусть первые l вопросов совпадают, а l+1 — нет. Но ответы на первые l вопросов также одинаковы, поэтому совпадут и (l+1)-ые вопросы. Доказанное означает, что мы не различим разбиения, которым соответствуют одинаковые последовательности ответов, противоречие.

Так как $t_{12} = 377$, из доказанного следует $q_{12} \ge 9$. Осталовь привести алгоритм для 9 вопросов. Сразу же отметим очевидное свойство $q_{n+1} \ge q_n$ (разбиение $2\times n$ можно дополнить слева вертикальной доминошкой). Несложно понять, что $q_2 = 1$.

Докажем несколько фактов. Верхний ряд клеток мы будем обозначать через $a_1,\dots, a_n$, а нижний — через $b_1,\dots, b_n$ (слева направо).

Лемма 1. $q_{n+1} \le q_n+1$. *Доказательство*. Спросим про доминошку a_1b_1. Если она есть, то остается прямоугольник $2\times n$, для которого достаточно q_n вопросов. Если такой доминошки нет, то левый край покрыт двумя горизонтальными доминошками и остается прямоугольник $2\times(n–1)$, для которого достаточно $q_{n–1} \le q_n$ вопросов.

Лемма 2. $q_5 = 3$. *Доказательство*. Первый вопрос — про доминошку a_3b_3. В случае, если она есть, остаются два прямоугольника 2×2, для которых нужно $2q_2 = 2$ вопросов, итого 3 вопроса. Пусть доминошки a_3b_3 нет, спросим про a_2a_3. Если эта доминошка есть, то несложно понять, что также есть b_2b_3 и a_1b_1. Справа остается прямоугольник 2×2, на который нужен 1 вопрос, итого 3 вопроса. Наконец, пусть и доминошки a_2a_3 нет. Тогда клетка a_3 покрыта доминошкой a_3a_4 и легко видеть, что есть доминошки b_3b_4 и a_5b_5, хватает еще одного вопроса. *Следствие*. $q_6 \le 4$.

Вернемся к алгоритму для 2×13. Спросим про доминошку a_7b_7 Если она есть, остаются два прямоугольника 2×6, хватает еще $2q_6 \le 8$ вопросов, итого не более 9 вопросов. Если a_7b_7 нет, спросим про a_6a_7. Если она есть, то есть и b_6b_7, остаются прямоугольники 2×5 и 2×6, хватает $q_5+q_6 \le 7$ вопросов, всего не более 9 вопросов. Если доминошки a_6a_7 также нет, то клетка a_7 накрыта доминошкой a_7a_8, получаем симметричный случай.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

5. *На стороне AC треугольника ABC дана точка R. Через вершину B проводятся всевозможные прямые l, пересекающие описанную окружность треугольника в точке $P \ne B$ и сторону AC в точке $Q \ne R$. Докажите, что описанные окружности всех полученных таким образом треугольников PQR имеют общую точку, отличную от R.*

Решение. Пусть S – вторая точка пересечения описанной окружности треугольника PQR и Ω. Тогда $\angle(BA,AS) = \angle(BP,PS) = \angle(QP,PS) = \angle(QR,RS) = \angle(AR,RS)$. Пусть P_1 и Q_1 — другие точки, удовлетворяющие условию. Тогда $\angle(Q_1P_1,P_1S) = \angle(BP_1,P_1S) = \angle(BA,AS) = \angle(AR,RS) = \angle(Q_1R,RS)$ и описанная окружность треугольника P_1Q_1R проходит через точку S.

6. *Вершины выпуклого n-угольника пусты. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) ставят фишки в незанятые вершины. Нельзя ставить фишку в вершину, если хотя бы в одну из соседних вершин фишку уже поставил противник. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя при нечётном n, Вася — при чётном. Решение. Выигрышная стратегия Васи при четном n — центрально симметричная. Опишем выигрышную стратегию Пети. Первым ходом он ставит фишку в любую вершину, а затем на оставшихся 2014 вершинах играет центрально симметрично (каждым ходом ставит фишку в противоположную Васиному ходу на этом 2014-угольнике вершину). Пусть Вася смог сделать ход. Тогда соседями к вершине, симметричной той, куда он сходил, могут быть либо пустые вершины, либо вершина с фишкой, поставленной Петей на первом ходу, либо фишки, симметричные соседям Васиной фишки. Последние обязательно ставил Петя, иначе на предыдущем ходу у Васи была бы соседняя фишка, поставленная Петей. Значит, Петя всегда сможет сделать ход.

7. *В компании из 100 людей есть ровно 2015 пар друзей. Докажите, что в компании найдётся человек, у которого не меньше 20, но меньше 70 знакомых.*

Решение. Предположим, что нужного человека нет. Тогда все люди в компании делятся на маленьких (у которых не более 20 знакомых) и больших (не менее 70 знакомых). Пусть есть k больших людей, a ребер между ними, b ребер из больших в маленькие, c ребер между маленькими. Тогда $2a+b \ge 70k$, $a+b \le 2015$, то есть $70k \le 2a+b \le 2015+a \le 2015+k(k-1)/2$, откуда $k^2-140k+4030 \ge 0$, то есть $(k-70)^2 \ge 870 > 29^2$, $|k-70| \ge 30$. Так как k = 100 не подходит в условие, то $k < 41$. С другой стороны $20(100–k) \ge b+c=2015–a \ge 2015–k(k–1)/2$, откуда $k^2–41k \ge 30$, следовательно $k = 0$, что невозможно. Получаем противоречие, то есть найдется искомый человек.

8. *Положительные числа a, b, c, x, y подобраны так, что выполнены неравенства $ax+by \le bx+cy \le cx+ay$. Докажите, что $b \le c$.*

Решение. Пусть $b > c$. Тогда в силу первого неравенства $x(b–a) \ge y(b–c)$ (*), откуда имеем $b–a >0$, то есть $b > a$. В силу второго неравенства $x(b–c) \le y(a–c)$ (**), откуда $a–c > 0$, то есть $a > c$. Получается, что $b > a > c$. Но тогда $b–a < b–c$, и из (*) следует, что $x > y$. С другой стороны, $a–c < b–c$, и из (**) следует, что $x < y$. Противоречие.

9. *Найдите все натуральные числа n, при которых число $5^n–1$ является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.*

Ответ. $n = 2$. Решение. Так как произведение пяти и более последовательных натуральных чисел делится на 5, а число $5^n–1$ не делится на 5, то $5^n–1$ является произведением двух или четырех последовательных натуральных чисел. Пусть $5^n–1 = k(k+1)$. Перебирая остатки по модулю 5, получаем, что $k(k+1)$ не может быть сравнимо с $–1$ по модулю 5. Пусть $5^n–1 = k(k+1)(k+2)(k+3)$. Тогда $5^n = k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+3k+1)^2$. Отсюда $n = 2m$ — четно, и $5^m = k^2+3k+1$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно k. Его дискриминант $D = 5+4\cdot 5^m = 5(1+4\cdot 5^{m–1})$ при $m > 1$ делится на 5, но не делится на 25 и потому не является полным квадратом. При $m = 1$ $D = 9$, и мы получаем ответ.

♦ Не разобран случай 4 сомножителей: *не более 2 баллов*.

10. *Докажите, что на плоскости можно выбрать бесконечно много точек ..., $P_{–2}$, $P_{–1}$, P_0, P_1, P_2, ... так, чтобы выполнялось следующее условие: точки P_a, P_b, P_c лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $a+b+c = 2015$.*

Решение. Для каждого целого k возьмём в качестве P_k точку с координатами $(k–2015/3, (k–2015/3)^3)$. Все эти точки лежат на параболе $y = x^3$. Три такие точки с абсциссами $u = a–2015/3$, $v = b–2015/3$, $w = c–2015/3$ лежат на одной прямой $y = kx+l$ тогда и только тогда, когда числа u, v, w являются решениями уравнения $x^3–kx–l = 0$, то есть — когда $u+v+w = 0$. А это последнее условие эквивалентно тому, что $a+b+c = 2015$.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

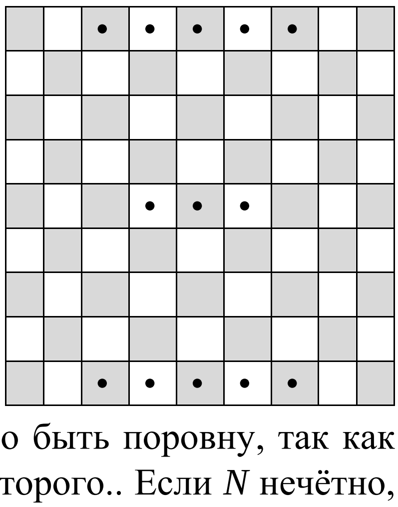
Вторая юниорская лига, 3 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *В лодке, вмещающей только двух человек, через реку переправилась группа миссионеров и каннибалов, где миссионеров было на одного больше. Каждый раз туда плыли двое, а обратно — один. Ни на каком берегу миссионеры не оказывались в компании большего числа каннибалов, а каннибалы не оставались без присмотра миссионеров. Могло ли случиться, что каждые двое пересекавших реку вместе в одной лодке совершили в итоге одинаковое число рейсов?*

<u>Ответ</u>. Не могло. <u>Решение</u>. Заметим, что по условию на каждом берегу в любой момент миссионеров не меньше, чем каннибалов. Значит, в лодке не может быть двух миссионеров, иначе всего миссионеров больше как минимум на 2. С другой стороны, когда в лодке никого нет, на каждом берегу может быть не более одного лишнего миссионера (иначе на другом миссионеров меньше). Но тогда нельзя переправить сразу двух каннибалов – приплыв на другой берег, они окажутся в большинстве. Итак, вдвоем могут плыть только миссионер с каннибалом. Заметим, что если персонажи совершили одинаковое число рейсов, то и число рейсов «туда» у них одинаково. Объявим персонажей вершинами, а рейсы «туда» — рёбрами графа. Этот граф будет двудольным и, возможно, с кратными ребрами. По условию, в каждой компоненте связности степени вершин одинаковы. При этом в каждой компоненте есть хотя бы одно ребро. Суммы степеней вершин каждого цвета одинаковы (они равны числу рёбер) и кратны числу вершин этого цвета. Но тогда в каждой компоненте миссионеров и каннибалов поровну, значит, и всего поровну — противоречие.



2. *Назовём шахматную диагональ* ***полноценной****, если на ней не менее трёх клеток. При каких N на доске $N\times N$ можно расположить несколько слонов, чтобы на каждой полноценной диагонали стоял ровно один слон, а на неполноценных диагоналях слонов не было?*

<u>Ответ</u>. При нечётных N. <u>Решение</u>. Пусть нижняя левая клетка доски — чёрная. Если N чётно, то чёрных полноценных диагоналей, идущих снизу-слева вверх-вправо будет N–3, а чёрных полноценных диагоналей, идущих снизу-справа вверх-влево будет N–2. Но их должно быть поровну, так как каждый слон бьёт одну диагональ первого типа и одну — второго.. Если N нечётно, то поставим слонов во всех клетках, кроме двух крайних слева и справа, вдоль

верхней и нижней сторон доски, а трёх слонов — в трёх горизонтальных клетках средней горизонтали. См. рис. справа, соответствующий доске 9×9.

♦ Только пример для нечетных N: *4 балла*. Только невозможность при четных n: *4 балла*.

3. *У Вовы и Димы есть два одинаковых прямоугольника 2×13. Вова замостил свой прямоугольник 13 доминошками. Дима может положить доминошку в свой прямоугольник и узнать, лежит ли на этом месте доминошка у Вовы. Сможет ли Дима за 9 вопросов узнать, как именно лежат все Вовины доминошки?*

Ответ. Сможет. Решение. Сначала покажем, как за три вопроса решить задачу на прямоугольнике 2×5. Сначала спросим про среднюю вертикальную доминошку. При ответе «да» остаётся по одному вопросу на каждый из оставшихся квадратов 2×2. Ясно, что этого достаточно. При ответе «нет» спрашиваем про горизонтальную доминошку из третьей и четвертой клеток верхней строки. При положительном ответе остается задать вопрос про квадрат 2×2 из первой и второй вертикалей, при отрицательном — про квадрат 2×2 из четвёртой и пятой вертикалей. Очевидно, что трёх вопросов хватает и для решения задачи на прямоугольнике 2×4. Для решения задачи на прямоугольнике 2×6 достаточно четырёх вопросов (спрашиваем про крайний вертикальный столбик и сводим к рассмотренным случаям).

Вернёмся к прямоугольнику 2×13. Первый вопрос — про среднюю вертикальную доминошку. При ответе «нет» задаём второй вопрос: про горизонтальную доминошку из седьмой и восьмой клеток верхней строки. При любом ответе остаётся решить задачу на прямоугольниках 2×5 и 2×6. В каждом случае требуется не более 9 вопросов.

4. *Сколькими способами можно провести диагонали на гранях куба, разбив каждую грань на два треугольника, чтобы в каждой вершине куба сходилось нечётное число треугольников?*

Ответ. Четырьмя. Решение. Чтобы к вершине сходилось нечётное число треугольников, надо, чтобы из неё выходило чётное число диагоналей, т.е. 0 или 2. Всего диагоналей 6, и они образуют либо один цикл длины 6, либо два цикла длины 3. Цикл длины 3 определяется тремя смежными гранями куба. При этом три противоположные грани тоже определят цикл длины 3. Таких пар циклов всего 4, по количеству различных пар противоположных вершин куба. Цикла длины 6 быть не может, т.к. каждая диагональ соединяет две вершины одного цвета при шахматной раскраске вершин куба, а вершин одного цвета всего 4.

5. *Натуральные числа от 1 до 2015 надо раскрасить так, чтобы не было трёх одноцветных чисел A, B, C таких, что A делится на B, а B делится на C. Каким наименьшим количеством цветов можно обойтись?*

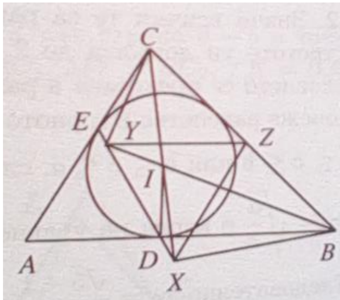
Ответ. 6 цветами. Решение. Раскрашивать можно, например, так. Цвет 1: числа 1, 2, 3. Цвет 2: числа от 4 до 15 включительно. Цвет 3: числа от 16 до 63 включительно. Цвет 4: числа от 64 до 255 включительно. Цвет 5: числа от 256 до 1023 включительно. Цвет 6: числа от 1024 до 2015 включительно. Если мы раскрасим в 5 цветов, то три числа из набора 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 будут окрашены в один цвет, что противоречит условию задачи.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

6. *Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. X и Y — точки пересечения прямой DE соответственно с биссектрисами углов ACB и ABC. Z — середина стороны BC. Докажите, что XZ = YZ.*

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности. $\angle BIC = 90°+\angle A/2$. Но

$$\angle BDE = \angle A+\angle AED = \angle A+(180°-\angle A)/2 = 90°+\angle A/2, \text{ т.е. } \angle BIC = \angle BDE.$$



Отсюда $\angle BIX = \angle ADE°$. Но $\angle ADE = \angle BDX$, значит, $\angle BID = \angle BDX$, т.е. точки B, I, D, X лежат на одной окружности. $\angle IDB = 90°$, значит BI — диаметр этой окружности, а $\angle BXC = 90°$. Аналогично, $\angle BYC = 90°$. Отрезки YZ и XZ — медианы в прямоугольных треугольниках с гипотенузой BC, значит, оба равны её половине.

7. *Положительные числа a, b, c, x, y подобраны так, что выполнены неравенства $ax+by \le bx+cy \le cx+ay$. Докажите, что $b \le c$.*

Решение. Пусть $b > c$. Тогда в силу первого неравенства $x(b-a) \ge y(b-c)$ (*), откуда имеем $b-a > 0$, то есть $b > a$. В силу второго неравенства $x(b-c) \le y(a-c)$ (**), откуда $a-c > 0$, то есть $a > c$. Получается, что $b > a > c$. Но тогда $b-a < b-c$, и из (*) следует, что $x > y$. С другой стороны, $a-c < b-c$, и из (**) следует, что $x < y$. Противоречие.

8. *Найдите все натуральные числа n, при которых число 5^n-1 является произведением четного количества последовательных натуральных чисел.*

Ответ. $n = 2$. Решение. Так как произведение пяти и более последовательных натуральных чисел делится на 5, а число 5^n-1 не делится на 5, то 5^n-1 является произведением двух или четырех последовательных натуральных чисел. Пусть $5^n-1 = k(k+1)$. Перебирая остатки по модулю 5, получаем, что $k(k+1)$ не может быть сравнимо с -1 по модулю 5. Пусть $5^n-1 = k(k+1)(k+2)(k+3)$. Тогда $5^n = k(k+1)(k+2)(k+3)+1 = (k^2+3k+1)^2$. Отсюда $n = 2m$ — четно, и $5^m = k^2+3k+1$. Рассмотрим это равенство как квадратное уравнение относительно k. Его дискриминант $D = 5+4\cdot 5^m = 5(1+4\cdot 5^{m-1})$ при $m > 1$ делится на 5, но не делится на 25 и потому не является полным квадратом. При $m = 1$ $D = 9$, и мы получаем ответ.

♦ Не разобран случай 4 сомножителей: *не более 2 баллов*.