XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая лига, 1 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

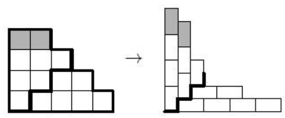
1. *Найдите в замкнутом виде значение выражения* $\sum\limits_{k=1}^{1000}\dfrac{(2^k-3^1)(2^k-3^2)\ldots(2^k-3^{1000})}{(2^k-2^1)\ldots(2^k-2^{k-1})(2^k-2^{k+1})\ldots(2^k-2^{1000})}$.

<u>Ответ</u>. $2^{1001}-2-\dfrac{3^{1001}-3}{2}$. <u>Решение</u>. Рассмотрим многочлены $p(x) = (x–3^1)\ldots(x–3^{1000}) – (x–2^1)\ldots(x–2^{1000})$ и $q(x) = \sum\limits_{k=1}^{1000}\dfrac{(x-2^1)(x-2^2)\ldots(x-2^{k-1})(x-2^{k+1})\ldots(x-2^{1000})\cdot(2^k-3^1)(2^k-3^2)\ldots(2^k-3^{1000})}{(2^k-2^1)(2^k-2^2)\ldots(2^k-2^{k-1})(2^k-2^{k+1})\ldots(2^k-2^{1000})}$. Заметим, что эти два многочлена имеют степень не выше 999-ой, и в точках 2^1, 2^2, …, 2^{1000} совпадают, следовательно, многочлен $p(x)–q(x)$ тождественный ноль. Искомое в задаче выражение — это старший коэффициент многочлена $q(x)$. При этом у $p(x)$ он, очевидно, равен $2^1+\ldots+2^{1000}–(3^1+\ldots+3^{1000}) = 2^{1001}–2–(3^{1001}–3)/2$.

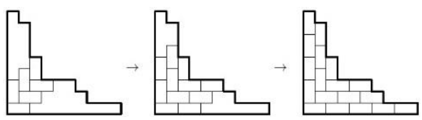
♦ Рассмотрен многочлен $p(x)$ из решения: *не меньше 2 баллов*. Интерполяционная формула Лагранжа считается известной.

2. *Пусть p(n) — количество диаграмм Юнга из n клеток. Докажите, что количество диаграмм Юнга из 2n клеток, допускающих единственное разбиение на клетчатые прямоугольники 1×2, равно 2p(n).*

<u>Решение</u>. Сопоставим каждой диаграмме Юнга из n клеток две однозначно разбиваемых диаграммы из $2n$ клеток (разным будут соответствовать разные). Проведём из угла диаграммы *лесенку* по границам клеток со ступеньками единичной длины и высоты (это можно сделать двумя способами). Каждый столбец клеток сверху от лесенки заменим на столбец из того же количества вертикальных доминошек, а каждую строчку снизу — на строку горизонтальных. Для двух возможных лесенок получим две клетчатые фигуры; нетрудно понять, что они являются диаграммами Юнга, разбитыми на доминошки. Покажем индукцией по n, что разбиение любой полученной диаграммы единственно. При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n > 1$ либо верхняя строка, либо правый столбец диаграммы лежит по одну сторону от лесенки; пусть это — строка. Этой строке соответствует ряд из доминошек, идущих по диагонали (они отмечены серым на рисунке). Рассматривая эти доминошки сверху вниз, получаем, что они должны присутствовать в любом разбиении диаграммы. После их выкидывания получится диаграмма из меньшего числа клеток, полученная тем же способом. Осталось применить к ней предположение индукции. Итак, все построенные диаграммы — требуемые; из этого следует, что они различны, так как различны полученные разбиения на домино.



Осталось показать, что полученными диаграммами исчерпываются все однозначно разбиваемые. Рассмотрим любую однозначно разбиваемую диаграмму вместе с её разбиением. Из единственности, никакие две доминошки не образуют квадрата 2×2. Пусть для определённости угловая клетка покрыта горизонтальной доминошкой. Тогда клетка над ней покрыта вертикальной, клетка справа от этой — горизонтальной, и т.д. В результате мы получаем лесенку с диагональю вертикальных доминошек над ней и диагональю горизонтальных — под ней. Рассматривая последовательно следующие диагонали вверх и вниз, получаем, что и в дальнейшем разбиении сверху от лесенки окажутся только вертикальные доминошки, а снизу — только горизонтальные. Это означает, что в каждом следующем столбце меньше вертикальных доминошек, чем в предыдущем (пока они встречаются). Из этого нетрудно понять, что после обратной замены доминошек на клетки получится диаграмма Юнга.



♦ Доказано только одно из неравенств: однозначно разбиваемых ≥ или ≤ $2p(n)$: *4 балла*.

3. *Внутри непрозрачного единичного куба находится выпуклый многогранник M, чей объём больше 1/4. Вася не знает ни формы, ни положения этого многогранника. Зато он может пронзить куб k прямолинейными лазерными лучами. При каком наименьшем k Вася может гарантировать, что хотя бы один из лучей будет иметь общую точку с M?*

Ответ. $k = 3$. Решение. Пусть Вася выбрал всего два луча. Проведём через них параллельные плоскости. Эти плоскости разобьют куб на три части, объём одной из которых не меньше 1/3. Значит, внутри неё можно разместить выпуклый многогранник объёма, большего 1/4, который лучи не заденут. Тремя лучами можно обойтись, выпустив их параллельно рёбрам куба так, чтобы они прошли через его центр. Предположим, что M не задет. Отразим его относительно всех трёх лучей; получим ещё три многогранника, не пересекающихся с M. Действительно, если M пересекается с симметричным по точке A, то симметричная ей точка A' также лежит в M, а тогда и середина отрезка AA', лежащая на луче, также находится в M. Друг с другом эти образы также не пересекаются, так как любые два из них симметричны относительно одного из лучей (композиция симметрий относительно двух есть симметрия относительно третьего). Значит, в кубе нашлись 4 попарно не пересекающихся многогранника объёма, большего 1/4, что невозможно.

♦ Доказано, что двух лучей недостаточно: *2 балла*. Приведён правильный пример трёх лучей без обоснования: *2 балла* (может складываться с предыдущим). Только пример для трёх лучей с обоснованием: *6 баллов*.

4. *Докажите, что при любом натуральном n > 1 уравнение* $x=\left(\frac{1-(1-x^2)^n}{1-(1-x)^n}\right)^2$ *имеет в интервале (0,1) единственное решение.*

Решение. Рассмотрим многочлен $p(x) = \frac{(1-(1-x)^n)^2}{x}$. Покажем, что производная этого многочлена имеет ровно один корень на (0,1). Имеем

$$p'(x)=\frac{(1-(1-x)^n)(2nx(1-x)^{n-1}+(1-x)^n-1)}{x^2}=\frac{(1-(1-x)^n)((2nx+1-x)(1-x)^{n-1}-1)}{x^2}$$

Корни производной на (0,1) будут в точности там, где $(2nx+1-x)(1-x)^{n-1} = 1$. Сделав замену $x = 1-1/y$, получаем $y^{-n+1}(2n-(2n-1)/y) = 1$, что равносильно $y^n-2ny+2n-1 = 0$. На промежутке $(1,+\infty)$ у этого уравнения ровно один корень. Действительно, у производной функции $y^n-2ny+2n-1$ единственный корень $\sqrt[n-1]{2}$, у самой функции в точке 1 корень, и она убывает до точки $\sqrt[n-1]{2}$, а затем возрастает.

Так как $p(0) = 0$, $p(x) > 0$ при $x \in (0,1)$ и у p' единственный корень, то функция p возрастает до точки максимума $x_0 \in (0,1)$, и убывает после нее до 1.

Приступим теперь к решению задачи. Уравнение из условия переписывается в виде $p(x) = p(x^2)$. Рассмотрим $h(x) = p(x)-p(x^2)$. Так как $0 < x_0^2 < x_0 < \sqrt{x_0} <1$, то $h(x_0) = p(x_0)-p(x_0^2) > 0$, а $h(\sqrt{x_0}) = p(\sqrt{x_0})-p(x_0) < 0$, значит, у $h(x)$ корень есть. Предположим, что есть два корня $x_1 > x_2$. Так как $p(x_i) = p(x_i^2)$, то $x_i^2 < x_0 < x_i$. То есть x_1 и x_2 лежат правее x_0, а x_1^2 и x_2^2 левее, но тогда $p(x_1) < p(x_2)$, а $p(x_1^2) > p(x_2^2)$. Получаем противоречие, значит, корень единственный.

♦ Уравнение сведено к уравнению $p(x) = p(x^2)$: *2 балла*. Доказано, что корень есть: *2 балла* (с предыдущими не суммируется). Доказано только, что корней не больше одного: *6 баллов*.

5. *На окружности длины 2n отмечены 2n точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых n+1 дуг с длинами 1, 2, …, n+1 и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.*

Решение. Для каждой дуги будем называть её *началом* тот конец, который идёт первым при движении по окружности по часовой стрелке, а *концом* — второй конец. Предположим, дуги удалось расположить так, что ни одна не содержится в другой. Рассмотрим дуги, имеющие длины 1 и n+1. Тогда у каждой из оставшихся дуг либо начало находится между концом дуги длины 1 и началом дуги длины n+1 (причём не может с этим началом совпадать), либо конец находится между концом дуги длины n+1 (но не может с этим концом совпадать) и началом дуги длины 1. Всего это n–2 точки деления. Тогда какие–то два начала или два конца оставшихся n–1 дуг совпадают. Но тогда одна из этих дуг содержится в другой.

6. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC\cdot MN = AN\cdot CM$.*

Решение. Пусть BL — третья высота. Поскольку $MN = AC\cos\angle B$, $AN = AC\cos\angle A$, $CM = AC\cos\angle C$, достаточно доказать, что $\cos\angle B = \cos\angle A\cdot\cos\angle C$. Поскольку $HL = AL\operatorname{ctg}\angle C = AB\cos\angle A\operatorname{ctg}\angle C$, а $BH = BM/\sin\angle C = AB\cos\angle B/\sin\angle C$, достаточно доказать, что $HL = BH$.

Пусть X и Y — точки, симметричные H относительно прямой AB и середины отрезка AB соответственно. Общеизвестно, что точки X и Y лежат на описанной окружности треугольника ABC. С другой стороны, поскольку AB делит каждый из отрезков XH, YH, KH пополам, точки X, Y и K лежат на одной прямой l, параллельной AB. Поскольку прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, точка K совпадает либо с X, либо с Y (если $X = Y$, прямая l касается окружности и $X = Y = K$). Поскольку $\angle AXH = \angle B \neq 90°$, $K \neq X$. Значит, $K = Y$, а $AKBH$ — параллелограмм и $AK = BH$. Далее, так как $AK \parallel BL$, то $AK \perp AC$, откуда, учитывая, что $AK \perp KH$, получаем, что $AKHL$ — прямоугольник и $HL = AK = BH$.

♦ Задача сведена к доказательству равенства $HL = BH$: *2 балла*. За неразбор случая $X = Y$ *баллы не снимаются*.

7. *Для натурального числа n с каноническим разложением $n = p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ определим $f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1}\ldots\alpha_k p_k^{\alpha_k-1}$ (например, $f(1) = 1$, $f(5) = 1$, $f(24) = 12$). Для натурального a зададим бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$ условиями $a_1 = a$ и $a_{i+1} = f(a_i)$. Может ли оказаться, что каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{1000000}$ встречается в этой бесконечной последовательности ровно по одному разу?*

Ответ. Да, может. Решение. Пусть $N = 1000000$. Рассмотрим последовательность g_n, определенную следующим образом: $g_1 = 1$, $g_{i+1} = f(g_i)\cdot(N+1-i)$ при $i \le N$ и $g_{i+1} = f(g_i)$ при $i > N$. Если эта последовательность не периодична, то все ее члены, начиная с g_N, различны, и в качестве a_1 можно взять g_N. Если эта последовательность периодична, то множество простых чисел, делящих ее члены, конечно. Выберем простое число p, не принадлежащее этому множеству. Положим $a_1 = p^N$. Заметим, что функция f *мультипликативная*, т.е. для любых взаимно простых натуральных чисел m и n выполнено $f(mn) = f(m)\cdot f(n)$. Из всего сказанного следует, что $a_i = g_i\cdot p^{N+1-i}$ при $i \le N$ и $a_i = g_i$ при $i > N$. Поэтому все члены последовательности с номерами 1, …, N различны (т.к. p входит в их разложения в различных степенях), и ни одно из них не равно a_k с $k > N$, поскольку a_k не делится на p при $k > N$.

♦ Доказано только, что все числа $a_1, \ldots, a_{1000}$ различны: *не более 6 баллов*.

8. *Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ — целое.*

Ответ. (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3) и перестановки этих троек. Решение. Легко видеть, что

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)=\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{b+c}{c}\right)\left(\frac{c+a}{a}\right).$$

Полученное целое число остаётся целым при домножении на любое из чисел ab, bc и ca, следовательно, $a+b$ кратно c, $b+c$ кратно a и $c+a$ кратно b. Не умаляя общности, примем $a \le b \le c$. Имеем $a+b \le 2c$, причём $a+b = 2c$ только при $a = b = c$. Последний случай в силу взаимной простоты возможен лишь при $a = b = c = 1$ (это решение мы запомним), а во всех остальных случаях $c = a+b$. Тогда $c \le 2b$, и $a+c \le 3b$. Два возможных случая $a+c = 2b$ и $a+c = 3b$ дают соответственно $b = 2a$, $c = 3a$ и $a = b$, $c = 2b$. С учётом взаимной простоты это означает, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, либо $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$.

♦ Потеря любого из ответов: *не более 6 баллов* (и возможна ситуация, когда задача будет считаться решенной — подробности на разборе).

9. *Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Гоша. Первое решение. На первом этапе он выделяет из полоски 3×2015 [2015/3] = 671 квадрат размера 3×3. Затем он делает [671/2]+1 = 336 ходов горизонтальной полоской в те квадратики 3×3, в которые еще никто не ходил. Столько ходов Гоша сделать сможет. На втором этапе Гоша делает по два хода в те квадратики 3×3, куда он ходил на первом этапе игры. Таким образом, всего Гоша сделает 336·3 = 1008 ходов. Так как общее число ходов Гоши и Вени не превосходит 2015, то Веня сможет сделать не более 2015–1008 = 1007 ходов, и тем самым проиграет. Второе решение. Гоша мысленно разбивает доску на квадраты 3×3 и прямоугольник 3×2. Первым ходом он ходит в один из квадратов (назовём его А) и разбивает оставшиеся квадраты на пары. Если Веня ходит в один из квадратов, то Гоша ходит в парный квадрат. Если же Веня ходит в прямоугольник, то Гоша ходит в квадрат А. Нетрудно заметить, что у Гоши всегда есть ход, поэтому он выиграет.

10. *Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что $\angle BLD = \angle CLN$.*

Решение. Пусть при гомотетии с центром в A, переводящей ω во вневписанную окружность Ω с центром K, точка D переходит в D'. Пусть X — середина DD', а E — точка касания Ω с BC; точка K является серединой $D'E$. Тогда KM — средняя линия в прямоугольном треугольнике $DD'E$ (так как $BD = EC$).

Пусть K_1 и N_1 — отражения точек K и N относительно серединного перпендикуляра к BC. Из вышесказанного следует, что N_1 лежит на DD', а точки K_1, D и центр I окружности ω лежат на прямой, перпендикулярной BC. Как известно, $IBKC$ — вписанный четырёхугольник; из симметрии, точка K_1 также лежит на его описанной окружности, так что $K_1D{\cdot}DI = BD{\cdot}DC$. Далее, равнобедренные треугольники DIL и DN_1K_1 подобны (как равнобедренные с равными углами при основаниях), так что $K_1D{\cdot}DI = N_1D{\cdot}DL$. Из последних двух равенств, четырёхугольник $BLCN_1$ вписан; из симметрии, точка N также лежит на его описанной окружности. Из той же симметрии, дуги AN и N_1C этой окружности равны, откуда и следует равенство требуемых углов.

♦ Теорема о симедиане считается известной.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Первая лига, 1 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

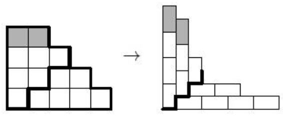
1. *Найдите в замкнутом виде значение выражения* $\sum\limits_{k=1}^{1000}\dfrac{(2^k-3^1)(2^k-3^2)\ldots(2^k-3^{1000})}{(2^k-2^1)\ldots(2^k-2^{k-1})(2^k-2^{k+1})\ldots(2^k-2^{1000})}$.

Ответ. $2^{1001}-2-\dfrac{3^{1001}-3}{2}$. Решение. Рассмотрим многочлены $p(x) = (x-3^1)\ldots(x-3^{1000}) - (x-2^1)\ldots(x-2^{1000})$ и $q(x) = \sum\limits_{k=1}^{1000}\dfrac{(x-2^1)(x-2^2)\ldots(x-2^{k-1})(x-2^{k+1})\ldots(x-2^{1000})\cdot(2^k-3^1)(2^k-3^2)\ldots(2^k-3^{1000})}{(2^k-2^1)(2^k-2^2)\ldots(2^k-2^{k-1})(2^k-2^{k+1})\ldots(2^k-2^{1000})}$. Заметим, что эти два многочлена имеют степень не выше 999-ой, и в точках 2^1, 2^2, …, 2^{1000} совпадают, следовательно, многочлен $p(x)-q(x)$ тождественный ноль. Искомое в задаче выражение — это старший коэффициент многочлена $q(x)$. При этом у $p(x)$ он, очевидно, равен $2^1+\ldots+2^{1000}-(3^1+\ldots+3^{1000}) = 2^{1001}-2-(3^{1001}-3)/2$.

♦ Рассмотрен многочлен $p(x)$ из решения: *не меньше 2 баллов*. Интерполяционная формула Лагранжа считается известной.

2. *Пусть $p(n)$ — количество диаграмм Юнга из n клеток. Докажите, что количество диаграмм Юнга из $2n$ клеток, допускающих единственное разбиение на клетчатые прямоугольники 1×2, не меньше $2p(n)$.*

Решение. Сопоставим каждой диаграмме Юнга из n клеток две однозначно разбиваемых диаграммы из $2n$ клеток (разным будут соответствовать разные). Проведём из угла диаграммы *лесенку* по границам клеток со ступеньками единичной длины и высоты (это можно сделать двумя способами). Каждый столбец клеток сверху от лесенки заменим на столбец из того же количества вертикальных доминошек, а каждую строчку снизу — на строку горизонтальных. Для двух возможных лесенок получим две клетчатые фигуры; нетрудно понять, что они являются диаграммами Юнга, разбитыми на доминошки. Покажем индукцией по n, что разбиение любой полученной диаграммы единственно. При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n > 1$ либо верхняя строка, либо правый столбец диаграммы лежит по одну сторону от лесенки; пусть это — строка. Этой строке соответствует ряд из доминошек, идущих по диагонали (они отмечены серым на рисунке). Рассматривая эти доминошки сверху вниз, получаем, что они должны присутствовать в любом разбиении диаграммы. После их выкидывания получится диаграмма из меньшего числа клеток, полученная тем же способом. Осталось применить к ней предположение индукции. Итак, все построенные диаграммы — требуемые; из этого следует, что они различны, так как различны полученные разбиения на домино, что и доказывает утверждение задачи.



♦ Конструкция без обоснования: *4 балла*.

3. *Внутри непрозрачного единичного куба находится выпуклый многогранник M, чей объём больше 1/4. Вася не знает ни формы, ни положения этого многогранника. Зато он может пронзить куб k прямолинейными лазерными лучами. При каком наименьшем k Вася может гарантировать, что хотя бы один из лучей будет иметь общую точку с M?*

Ответ. $k = 3$. Решение. Пусть Вася выбрал всего два луча. Проведём через них параллельные плоскости. Эти плоскости разобьют куб на три части, объём одной из которых не меньше 1/3. Значит, внутри неё можно разместить выпуклый многогранник объёма, большего 1/4, который лучи не заденут. Тремя лучами можно обойтись, выпустив их параллельно рёбрам куба так, чтобы они прошли через его центр. Предположим, что M не задет. Отразим его относительно всех трёх лучей; получим ещё три многогранника, не пересекающихся с M. Действительно, если M пересекается с симметричным по точке A, то симметричная ей точка A' также лежит в M, а тогда и середина отрезка AA', лежащая на луче, также находится в M. Друг с другом эти образы также не пересекаются, так как любые два из них симметричны относительно одного из лучей (композиция симметрий относительно двух есть симметрия относительно третьего). Значит, в кубе нашлись 4 попарно не пересекающихся многогранника объёма, большего 1/4, что невозможно.

♦ Доказано, что двух лучей недостаточно: *2 балла*. Приведён правильный пример трёх лучей без обоснования: *2 балла* (может складываться с предыдущим). Только пример для трёх лучей с обоснованием: *6 баллов*.

4. *Функция g: $[0,1] \to \mathbf{R}$ называется* ***загадочной****, если $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и $|g(a)-g(b)| \le 2|a-b|$ для всех $a, b \in [0,1]$. Найдите наименьшее число $\beta \in \mathbf{R}$ такое, что для всех загадочных функций g и для всех $a, b \in [0,1]$ выполнено неравенство $|g(a)-g(b)| \le \beta$.*

Ответ. $\beta = 3/2$. Решение. *Оценка*. Докажем, что всегда $|g(a)-g(b)| \le 3/2$. Если $|a-b| \le 3/4$, то это напрямую следует из условия. Если же $|a-b| > 3/4$ (для определенности пусть $b-a > 3/4$), то имеем $|g(a)-g(b)| = |g(a)-g(0)+g(b)-g(1)+1| \le |g(a)-g(0)|+|g(b)-g(1)|+1 \le 2(|a-0|+|b-1|)+1 = 2(1-(b-a))+1 < 1/2+1$.

Пример. Рассмотрим функцию g, которая на отрезке $[0, 3/4]$ задается формулой $g(x) = 2x$, а на отрезке $[3/4, 1]$ — формулой $g(x) = 3-2x$. Ясно, что эта функция удовлетворяет всем требуемым условиям. Так как $|g(3/4)-g(0)| = 3/2$, то число β не может быть меньше, чем 3/2.

♦ Только ответ (без примера): *0 баллов*. Только ответ с примером: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

5. *На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, …, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.*

Решение. Для каждой дуги будем называть её *началом* тот конец, который идёт первым при движении по окружности по часовой стрелке, а *концом* — второй конец. Предположим, дуги удалось расположить так, что ни одна не содержится в другой. Рассмотрим дуги, имеющие длины 1 и $n+1$. Тогда у каждой из оставшихся дуг либо начало находится между концом дуги длины 1 и началом дуги длины $n+1$ (причём не может с этим началом совпадать), либо конец находится между концом дуги длины $n+1$ (но не может с этим концом совпадать) и началом дуги длины 1. Всего это $n-2$ точки деления. Тогда какие–то два начала или два конца оставшихся $n-1$ дуг совпадают. Но тогда одна из этих дуг содержится в другой.

6. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC \cdot MN = AN \cdot CM$.*

Решение. Пусть BL — третья высота. Поскольку $MN = AC\cos\angle B$, $AN = AC\cos\angle A$, $CM = AC\cos\angle C$, достаточно доказать, что $\cos\angle B = \cos\angle A \cdot \cos\angle C$. Поскольку $HL = AL\operatorname{ctg}\angle C = AB\cos\angle A\operatorname{ctg}\angle C$, а $BH = BM/\sin\angle C = AB\cos\angle B/\sin\angle C$, достаточно доказать, что $HL = BH$.

Пусть X и Y — точки, симметричные H относительно прямой AB и середины отрезка AB соответственно. Общеизвестно, что точки X и Y лежат на описанной окружности треугольника ABC. С другой стороны, поскольку AB делит каждый из отрезков XH, YH, KH пополам, точки X, Y и K лежат на одной прямой l, параллельной AB. Поскольку прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, точка K совпадает либо с X, либо с Y (если $X = Y$, прямая l касается окружности и $X = Y = K$). Поскольку $\angle AXH = \angle B \ne 90°$, $K \ne X$. Значит, $K = Y$, а $AKBH$ — параллелограмм и $AK = BH$. Далее, так как $AK \parallel BL$, то $AK \perp AC$, откуда, учитывая, что $AK \perp KH$, получаем, что $AKHL$ — прямоугольник и $HL = AK = BH$.

♦ Задача сведена к доказательству равенства $HL = BH$: *2 балла*. За неразбор случая $X = Y$ *баллы не снимаются*.

7. *Для натурального числа n с каноническим разложением $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ определим $f(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1} \dots \alpha_k p_k^{\alpha_k-1}$ (например, $f(1) = 1$, $f(5) = 1$, $f(24) = 12$). Для натурального a зададим бесконечную последовательность $a_1, a_2, \dots$ условиями $a_1 = a$ и $a_{i+1} = f(a_i)$. Может ли оказаться, что все числа $a_1, a_2, \dots, a_{1000000}$ различны?*

Ответ. Да. Решение. Пусть $N = 1000000$. Рассмотрим последовательность $g_1, \dots, g_N$, определенную следующим образом: $g_1 = 1$, $g_{i+1} = f(g_i)\cdot(N+1-i)$ при $i < N$. Множество простых чисел, делящих ее члены, конечно. Выберем простое число p, не принадлежащее этому множеству. Положим $n = a_1 = p^N$, $a_{i+1} = f(a_i)$ при $i < N$. Заметим, что функция f *мультипликативная*, т.е. для любых взаимно простых натуральных чисел m и n выполнено $f(mn) = f(m)\cdot f(n)$. Из всего сказанного следует, что $a_i = g_i\cdot p^{N+1-i}$ при всех $i \le N$. Значит, все члены последовательности (a_i) с номерами $1, \ldots, N$ различны, так как p входит в их разложения в различных степенях.

8. *Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ — целое.*

Ответ. (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3) и перестановки этих троек. Решение. Легко видеть, что

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)=\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{b+c}{c}\right)\left(\frac{c+a}{a}\right).$$

Полученное целое число остаётся целым при домножении на любое из чисел ab, bc и ca, следовательно, $a+b$ кратно c, $b+c$ кратно a и $c+a$ кратно b. Не умаляя общности, примем $a \le b \le c$. Имеем $a+b \le 2c$, причём $a+b = 2c$ только при $a = b = c$. Последний случай в силу взаимной простоты возможен лишь при $a = b = c = 1$ (это решение мы запомним), а во всех остальных случаях $c = a+b$. Тогда $c \le 2b$, и $a+c \le 3b$. Два возможных случая $a+c = 2b$ и $a+c = 3b$ дают соответственно $b = 2a$, $c = 3a$ и $a = b$, $c = 2b$. С учётом взаимной простоты это означает, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, либо $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$.

♦ Потеря любого из ответов: *не более 6 баллов* (и возможна ситуация, когда задача будет считаться решенной — подробности на разборе).

9. *Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Гоша. Первое решение. На первом этапе он выделяет из полоски 3×2015 [2015/3] = 671 квадрат размера 3×3. Затем он делает [671/2]+1 = 336 ходов горизонтальной полоской в те квадратики 3×3, в которые еще никто не ходил. Столько ходов Гоша сделать сможет. На втором этапе Гоша делает по два хода в те квадратики 3×3, куда он ходил на первом этапе игры. Таким образом, всего Гоша сделает 336·3 = 1008 ходов. Так как общее число ходов Гоши и Вени не превосходит 2015, то Веня сможет сделать не более 2015–1008 = 1007 ходов, и тем самым проиграет. Второе решение. Гоша мысленно разбивает доску на квадраты 3×3 и прямоугольник 3×2. Первым ходом он ходит в один из квадратов (назовём его А) и разбивает оставшиеся квадраты на пары. Если Веня ходит в один из квадратов, то Гоша ходит в парный квадрат. Если же Веня ходит в прямоугольник, то Гоша ходит в квадрат А. Нетрудно заметить, что у Гоши всегда есть ход, поэтому он выиграет.

10. *Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \ne D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что точки B, C, N и L лежат на одной окружности.*

Решение. Пусть при гомотетии с центром в A, переводящей ω во вневписанную окружность Ω с центром K, точка D переходит в D'. Пусть X — середина DD', а E — точка касания Ω с BC; точка K является серединой $D'E$. Тогда KM — средняя линия в прямоугольном треугольнике $DD'E$ (так как $BD = E'C$).

Пусть K_1 и N_1 — отражения точек K и N относительно серединного перпендикуляра к BC. Из вышесказанного следует, что N_1 лежит на DD', а точки K_1, D и центр I окружности ω лежат на прямой, перпендикулярной BC. Как известно, $IBKC$ — вписанный четырёхугольник; из симметрии, точка K_1 также лежит на его описанной окружности, так что $K_1D\cdot DI = BD\cdot DC$. Далее, равнобедренные треугольники DIL и DN_1K_1 подобны (как равнобедренные с равными углами при основаниях), так что $K_1D\cdot DI = N_1D\cdot DL$. Из последних двух равенств, четырёхугольник $BLCN_1$ вписан; из симметрии, точка N также лежит на его описанной окружности.

♦ Теорема о симедиане считается известной.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая лига, 1 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Решите в вещественных числах систему* $x(y+z-x^3) = y(z+x-y^3) = z(x+y-z^3) = 1$.

Ответ. $x = y = z = 1$, $x = y = z = -1$. Решение. Очевидно, среди чисел x, y, z нет 0. Изменив, если нужно, знаки всех трёх чисел, мы добьёмся, чтобы среди них было не меньше двух положительных, скажем, x и y. Если при этом $z < 0$, то $z(x+y-z^3) < 0$ — противоречие. Таким образом, мы можем считать, что все три числа положительны.

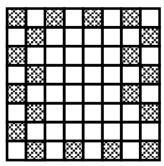
Имеем $y+z = x^3 + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x^3 \cdot \frac{1}{x}} = 2x$. Аналогично $z+x \geq 2y$, $x+y \geq 2z$. Иными словами, каждое из трёх чисел x, y, z не больше среднего арифметического двух других. Это значит, что числа равны, а тогда $x^4-2x^2+1 = 0$ и $x = y = z = 1$. Сменой всех знаков получаем второе решение.

♦ Решена только для положительных чисел: *4 балла*. Только ответ: *0 баллов*.

2. *Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Гоша. Первое решение. На первом этапе он выделяет из полоски 3×2015 [2015/3] = 671 квадрат размера 3×3. Затем он делает [671/2]+1 = 336 ходов горизонтальной полоской в те квадратики 3×3, в которые еще никто не ходил. Столько ходов Гоша сделать сможет. На втором этапе Гоша делает по два хода в те квадратики 3×3, куда он ходил на первом этапе игры. Таким образом, всего Гоша сделает 336·3 = 1008 ходов. Так как общее число ходов Гоши и Вени не превосходит 2015, то Веня сможет сделать не более 2015–1008 = 1007 ходов, и тем самым проиграет. Второе решение. Гоша мысленно разбивает доску на квадраты 3×3 и прямоугольник 3×2. Первым ходом он ходит в один из квадратов (назовём его А) и разбивает оставшиеся квадраты на пары. Если Веня ходит в один из квадратов, то Гоша ходит в парный квадрат. Если же Веня ходит в прямоугольник, то Гоша ходит в квадрат А. Нетрудно заметить, что у Гоши всегда есть ход, поэтому он выиграет.

3. *Какое наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску так, чтобы на каждой диагонали находилось не более трех фишек?*



Ответ. 38. Решение. *Пример* для 19 чернопольных слонов показан на рисунке справа, для белопольных он аналогичен. *Оценка*. Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвета. Докажем, что на черных клетках стоит не более 19 фишек. Все черные клетки являются объединением параллельных диагоналей, в которых 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 клеток. Поэтому фишек на черных полях не более 2+3+3+3+3+3+2 = 19. Аналогично доказывается, что на белых клетках стоит не более 19 фишек, откуда и вытекает оценка.

♦ Только пример или только оценка: *4 балла*.

4. *Может ли число вида 381111111…1111 быть простым?*

Ответ. Нет. Решение. Пусть в числе k единиц. Рассмотрим три случая.
1) Если $k \equiv 1 \pmod 3$, то число 3811...1 делится на 3.
2) Если $k \equiv 2 \pmod 3$, то число 3811...1 делится на 37, так как $38 \equiv 1 \pmod{37}$ и 111 делится на 37.
3) Если $k \equiv 0 \pmod 3$, то рассмотрим число

$$9 \cdot 3811...1 = 34299…9 = 343 \cdot 10^k - 1 = (7 \cdot 10^{k/3})^3 - 1 = (7 \cdot 10^{k/3} - 1)((7 \cdot 10^{k/3})^2 + 7 \cdot 10^{k/3} + 1).$$

Очевидно, что каждая из скобок больше, чем 9, откуда и вытекает решение.

♦ Только случаи 1 и 2: *не более 2 баллов*. Разобран случай 3 и не разобран хотя бы один из случаев 1 и 2: *6 баллов*.

5. *Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Окружность S_B проходит через точки A, B и касается прямой AC, окружность S_C проходит через точки A, C и касается прямой AB. Прямая, проходящая через точку A и пересекающая отрезок BC, второй раз пересекает S_B и S_C в точках X и Y соответственно. Докажите, что $OX = OY$.*

Решение. Пусть O_B и O_C — центры S_B и S_C. Заметим, что $AO_B \parallel OO_C$ (обе эти прямые перпендикулярны AC), и, аналогично, $AO_C \parallel OO_B$. Поэтому AO_BOO_C — параллелограмм. Рассмотрим перпендикуляры O_BH_B и O_CH_C, опущенные из точек O_B и O_C на данную прямую l, проходящую через точку A. Из равенства $O_BX = O_BA$ следует, что точка H_B — середина отрезка AX, аналогично точка H_C — середина отрезка AY. Точка M пересечения диагоналей параллелограмма AO_BOO_C является серединой отрезка AO, поэтому точки H_B, H_C и M получаются из точек X, Y и O гомотетией с коэффициентом 1/2 с центром в точке A. Требуемое теперь равенство $MH_B = MH_C$ равносильно равенству $PH_B = PH_C$, где MP — перпендикуляр, опущенный на прямую l из точки M. Последнее верно в силу того, что точка M — середина отрезка O_BO_C.

6. *Функция $g\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ называется **загадочной**, если $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и $|g(a)-g(b)| \le 2|a-b|$ для всех $a, b \in [0,1]$. Найдите наименьшее число $\beta \in \mathbf{R}$ такое, что для всех загадочных функций g и для всех $a, b \in [0,1]$ выполнено неравенство $|g(a)-g(b)| \le \beta$.*

Ответ. $\beta = 3/2$. Решение. *Оценка*. Докажем, что всегда $|g(a)-g(b)| \le 3/2$. Если $|a-b| \le 3/4$, то это напрямую следует из условия. Если же $|a-b| > 3/4$ (для определенности пусть $b-a > 3/4$), то имеем $|g(a)-g(b)| = |g(a)-g(0)+g(b)-g(1)+1| \le |g(a)-g(0)|+|g(b)-g(1)|+1 \le 2(|a-0|+|b-1|)+1 = 2(1-(b-a))+1 < 1/2+1$.

Пример. Рассмотрим функцию g, которая на отрезке $[0, 3/4]$ задается формулой $g(x) = 2x$, а на отрезке $[3/4, 1]$ — формулой $g(x) = 3-2x$. Ясно, что эта функция удовлетворяет всем требуемым условиям. Так как $|g(3/4)-g(0)| = 3/2$, то число β не может быть меньше, чем 3/2.

♦ Только пример: *4 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

7. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC \cdot MN = AN \cdot CM$.*

Решение. Пусть BL — третья высота. Поскольку $MN = AC\cos\angle B$, $AN = AC\cos\angle A$, $CM = AC\cos\angle C$, достаточно доказать, что $\cos\angle B = \cos\angle A \cdot \cos\angle C$. Поскольку $HL = AL\,\mathrm{ctg}\angle C = AB\cos\angle A\,\mathrm{ctg}\angle C$, а $BH = BM/\sin\angle C = AB\cos\angle B/\sin\angle C$, достаточно доказать, что $HL = BH$.

Пусть X и Y — точки, симметричные H относительно прямой AB и середины отрезка AB соответственно. Общеизвестно, что точки X и Y лежат на описанной окружности треугольника ABC. С другой стороны, поскольку AB делит каждый из отрезков XH, YH, KH пополам, точки X, Y и K лежат на одной прямой l, параллельной AB. Поскольку прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, точка K совпадает либо с X, либо с Y (если $X = Y$, прямая l касается окружности и $X = Y = K$). Поскольку $\angle AXH = \angle B \ne 90°$, $K \ne X$. Значит, $K = Y$, а $AKBH$ — параллелограмм и $AK = BH$. Далее, так как $AK \parallel BL$, то $AK \perp AC$, откуда, учитывая, что $AK \perp KH$, получаем, что $AKHL$ — прямоугольник и $HL = AK = BH$.

8. *На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n+1$ дуг с длинами 1, 2, …, $n+1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.*

Решение. Для каждой дуги будем называть её *началом* тот конец, который идёт первым при движении по окружности по часовой стрелке, а *концом* — второй конец. Предположим, дуги удалось расположить так, что ни одна не содержится в другой. Рассмотрим дуги, имеющие длины 1 и n+1. Тогда у каждой из оставшихся дуг либо начало находится между концом дуги длины 1 и началом дуги длины n+1 (причём не может с этим началом совпадать), либо конец находится между концом дуги длины n+1 (но не может с этим концом совпадать) и началом дуги длины 1. Всего это n–2 точки деления. Тогда какие–то два начала или два конца оставшихся n–1 дуг совпадают. Но тогда одна из этих дуг содержится в другой.

9. *Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число* $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ *— целое.*

Ответ. (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3) и перестановки этих троек. Решение. Легко видеть, что

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)=\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{b+c}{c}\right)\left(\frac{c+a}{a}\right).$$

Полученное целое число остаётся целым при домножении на любое из чисел ab, bc и ca, следовательно, $a+b$ кратно c, $b+c$ кратно a и $c+a$ кратно b. Не умаляя общности, примем $a \le b \le c$. Имеем $a+b \le 2c$, причём $a+b = 2c$ только при $a = b = c$. Последний случай в силу взаимной простоты возможен лишь при $a = b = c = 1$ (это решение мы запомним), а во всех остальных случаях $c = a+b$. Тогда $c \le 2b$, и $a+c \le 3b$. Два возможных случая $a+c = 2b$ и $a+c = 3b$ дают соответственно $b = 2a$, $c = 3a$ и $a = b$, $c = 2b$. С учётом взаимной простоты это означает, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, либо $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$.

♦ Только ответ: *2 балла*.

10. *Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?*

Ответ. 7. Решение. *Пример*. Вершины двух клеточек на клетчатой плоскости, граничащих по общей вершине. *Оценка*. Четыре вершины квадрата должны быть отмечены в любом случае. Чтобы получить ещё один квадрат, надо добавить хотя бы две точки. Если добавить ровно две, можно получить только один новый квадрат, и оба квадрата разрушатся, если удалить любую из их общих точек.

♦ Только пример: *2 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Третья лига, 1 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Пусть $T_n = 1+2+\ldots+n$. Докажите, что если $2T_m = T_n$, то число T_{2m-n} является квадратом натурального числа.*

Решение. Положим $k = n-m$. $2T_m = T_n \Leftrightarrow 1+\ldots+m = (m+1)+\ldots+(m+k) \Leftrightarrow m(m+1) = k(2m+k+1)$. Имеем $T_{2m-n} = (m-k)(m-k+1)/2 = (m(m+1)-k(2m+1)+k^2)/2 = (k(2m+k+1)-k(2m+1)+k^2)/2 = 2k^2/2 = k^2$.

2. *В выпуклом 2015-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до прямых, проходящих через стороны, одна и та же. Верно ли, что многоугольник — равносторонний?*

Ответ. Нет. Решение. Пример: срежем у правильного 2013-угольника две вершины двумя параллельными прямыми так, чтобы две получившиеся стороны не равнялись стороне 2013-угольника.

♦ Верный пример без обоснования: *4 балла*.

3. *Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?*

Ответ. 7. Решение. *Пример*. Вершины двух клеточек на клетчатой плоскости, граничащих по общей вершине. *Оценка*. Четыре вершины квадрата должны быть отмечены в любом случае. Чтобы получить ещё один квадрат, надо добавить хотя бы две точки. Если добавить ровно две, можно получить только один новый квадрат, и оба квадрата разрушатся, если удалить любую из их общих точек.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

4. *В треугольнике ABC отрезок AP является биссектрисой. На отрезке AP выбрана точка M. Точка N симметрична точке M относительно середины стороны BC. Прямая BN пересекает прямую AC в точке D, а прямая CN пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что $BE = CD$.*

Решение. Поскольку точка M равноудалена от прямых CD и BE, достаточно доказать, что равны площади треугольников MCD и MBE. Но четырёхугольник $MCNB$ — параллелограмм, поэтому четырёхугольники $MCDN$ и $MBEN$ — трапеции. Тогда по известному свойству трапеции $S(MCD) = S(MCN)$ и $S(MBE) = S(MBN)$, а треугольники MCN и MBN равны.

5. *Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие равенству $x^2 = y^2(x+y^4+2y^2)$.*

Ответ. $x = 12$, $y = 2$. Решение. Так как x^2 делится на y^2, x делится на y. Подставляя в уравнение из условия $x = zy$, после преобразований получаем $z^2-zy-y^4-2y^2 = 0$. Дискриминант последнего уравнения равен $4y^4+9y^2 = y^2(4y^2+9)$. Так как число z целое, $4y^2+9$ должно быть точным квадратом. $4y^2+9 = t^2 \Leftrightarrow (t-2y)(t+2y) = 9$, откуда, так как $t-2y < t+2y$, получаем $t-2y = 1$, $t+2y = 9$, то есть $y = 2$. Подставляя найденное значение y в уравнение из условия и решая полученное квадратное уравнение, получаем $x = 12$.

♦ Только ответ: *2 балла*.

6. *Около треугольника ABC описана окружность. Точка D — середина дуги ACB. Окружность, проходящая через точки C и D, пересекает отрезки AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $AM = BN$.*

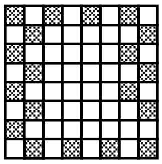
Решение. Соединим точку D с точками M и N. Так как точка D является серединой дуги, $AD = BD$. Имеем также равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу: $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle CMD = \angle CND$. Значит, равны смежные углы AMD и BND и треугольники AMD и BND, откуда и следует равенство нужных отрезков.

7. *Есть клетчатый прямоугольник, в котором 3 строки и 2015 столбцов. Петя и Вася играют в игру. Они делают ходы по очереди, начинает Петя. Каждым ходом Петя должен закрасить в черный цвет три белых клетки, образующие горизонтальную полоску. Каждым ходом Вася должен закрасить в черный цвет* *три белых клетки, образующие вертикальную полоску. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Гоша. Первое решение. На первом этапе он выделяет из полоски 3×2015 [2015/3] = 671 квадрат размера 3×3. Затем он делает [671/2]+1 = 336 ходов горизонтальной полоской в те квадратики 3×3, в которые еще никто не ходил. Столько ходов Гоша сделать сможет. На втором этапе Гоша делает по два хода в те квадратики 3×3, куда он ходил на первом этапе игры. Таким образом, всего Гоша сделает 336·3 = 1008 ходов. Так как общее число ходов Гоши и Вени не превосходит 2015, то Веня сможет сделать не более 2015–1008 = 1007 ходов, и тем самым проиграет. Второе решение. Гоша мысленно разбивает доску на квадраты 3×3 и прямоугольник 3×2. Первым ходом он ходит в один из квадратов (назовём его А) и разбивает оставшиеся квадраты на пары. Если Веня ходит в один из квадратов, то Гоша ходит в парный квадрат. Если же Веня ходит в прямоугольник, то Гоша ходит в квадрат А. Нетрудно заметить, что у Гоши всегда есть ход, поэтому он выиграет.

8. *Какое наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску так, чтобы на каждой диагонали стояло не более трех фишек?*

Ответ. 38. Решение. *Пример* для 19 чернопольных слонов показан на рисунке справа, для белопольных он аналогичен. *Оценка*. Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвета. Докажем, что на черных клетках стоит не более 19 фишек. Все черные клетки являются объединением параллельных диагоналей, в которых 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 клеток. Поэтому фишек на черных полях не более 2+3+3+3+3+3+2 = 19. Аналогично доказывается, что на белых клетках стоит не более 19 фишек, откуда и вытекает оценка.



♦ Только оценка или только пример: *6 баллов*.

9. *Может ли число вида 381111111…1111 быть простым?*

Ответ. Нет. Решение. Пусть в числе k единиц. Рассмотрим три случая.
1) Если $k \equiv 1 \pmod 3$, то число 3811...1 делится на 3.
2) Если $k \equiv 2 \pmod 3$, то число 3811...1 делится на 37, так как $38 \equiv 1 \pmod{37}$ и 111 делится на 37.
3) Если $k \equiv 0 \pmod 3$, то рассмотрим число

$$9\cdot 3811...1 = 34299…9 = 343\cdot 10^k–1 = (7\cdot 10^{k/3})^3–1 = (7\cdot 10^{k/3}–1)((7\cdot 10^{k/3})^2+7\cdot 10^{k/3}+1).$$

Очевидно, что каждая из скобок больше, чем 9, откуда и вытекает ответ.

♦ Только случаи 1 и 2: *не более 2 баллов*. Разобран случай 3 и не разобран хотя бы один из случаев 1 и 2: *6 баллов*.

10. *Сумма квадратов неотрицательных чисел a, b, c равна 48. Докажите, что* $a^2\sqrt{2b^3+16}+b^2\sqrt{2c^3+16}+c^2\sqrt{2a^3+16}\le 576$.

Решение. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $\sqrt{2b^3+16}=\sqrt{(2b+4)(b^2-2b+4)}\le\dfrac{b^2+8}{2}$ и рассматриваемая сумма $S\le\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2}+4\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 192+\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2}$. Известное неравенство $xy+xz+yz\le x^2+y^2+z^2 \Leftrightarrow xy+xz+yz\le\dfrac{(x+y+z)^2}{3}$ позволяет заключить, что $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2}\le\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{6}=384$, откуда и следует доказываемое неравенство.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая юниорская лига, 1 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел a, b, c такие, что число* $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ *—целое.*

Ответ. (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3) и перестановки этих троек. Решение. Легко видеть, что

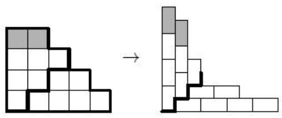
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)=\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{b+c}{c}\right)\left(\frac{c+a}{a}\right).$$

Полученное целое число остаётся целым при домножении на любое из чисел ab, bc и ca, следовательно, $a+b$ кратно c, $b+c$ кратно a и $c+a$ кратно b. Не умаляя общности, примем $a \le b \le c$. Имеем $a+b \le 2c$, причём $a+b = 2c$ только при $a = b = c$. Последний случай в силу взаимной простоты возможен лишь при $a = b = c = 1$ (это решение мы запомним), а во всех остальных случаях $c = a+b$. Тогда $c \le 2b$, и $a+c \le 3b$. Два возможных случая $a+c = 2b$ и $a+c = 3b$ дают соответственно $b = 2a$, $c = 3a$ и $a = b$, $c = 2b$. С учётом взаимной простоты это означает, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, либо $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

2. *Диаграмма Юнга — это набор клеток прямоугольной таблицы, который вместе с любой своей клеткой содержит все клетки левее и ниже её. Докажите, что количество диаграмм Юнга из 2n клеток, допускающих единственное разбиение на фигурки домино (прямоугольники из двух клеток), не меньше удвоенного количества диаграмм Юнга из n клеток.*

Решение. Сопоставим каждой диаграмме Юнга из n клеток две однозначно разбиваемых диаграммы из $2n$ клеток (разным будут соответствовать разные). Проведём из угла диаграммы *лесенку* по границам клеток со ступеньками единичной длины и высоты (это можно сделать двумя способами). Каждый столбец клеток сверху от лесенки заменим на столбец из того же количества вертикальных доминошек, а каждую строчку снизу — на строку горизонтальных. Для двух возможных лесенок получим клетчатые фигуры; нетрудно понять, что они являются диаграммами Юнга, разбитыми на доминошки. Покажем индукцией по n, что разбиение любой полученной диаграммы единственно. При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n > 1$ либо верхняя строка, либо правый столбец D лежит по одну сторону от лесенки; пусть это — строка. Этой строке соответствует ряд из доминошек, идущих по диагонали (они отмечены серым на рисунке). Рассматривая эти доминошки сверху вниз, получаем, что они должны присутствовать в любом разбиении диаграммы. После их выкидывания получится диаграмма из меньшего числа клеток, полученная тем же способом. Осталось применить к ней предположение индукции. Итак, все построенные диаграммы — требуемые; из этого следует, что они различны, так как различны полученные разбиения на домино, что и доказывает утверждение задачи.



3. *Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию a+b+c+abc = 4. Докажите, что*

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)\ge 27.$$

Решение. Применяя к условию неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для четырёх чисел, получаем $4 = a+b+c+abc \ge 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2}$, откуда $abc \le 1$. Обращаясь к исследуемому выражению, находим

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)=\frac{(a+b+abc)(b+c+abc)(c+a+abc)}{abc}=\frac{(4-a)(4-b)(4-c)}{abc}=$$

$$\frac{64-16(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-abc}{abc}=\frac{64-16(4-abc)+4(ab+bc+ca)-abc}{abc}=15+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq$$

$$15+\frac{12}{\sqrt[3]{abc}}\geq 27.$$

4. *На окружности длины 2n отмечены 2n точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых n+1 дуг с длинами 1, 2, …, n+1 и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.*

Решение. Для каждой дуги будем называть её *началом* тот конец, который идёт первым при движении по окружности по часовой стрелке, а *концом* — второй конец. Предположим, дуги удалось расположить так, что ни одна не содержится в другой. Рассмотрим дуги, имеющие длины 1 и n+1. Тогда у каждой из оставшихся дуг либо начало находится между концом дуги длины 1 и началом дуги длины n+1 (причём не может с этим началом совпадать), либо конец находится между концом дуги длины n+1 (но не может с этим концом совпадать) и началом дуги длины 1. Всего это n–2 точки деления. Тогда какие–то два начала или два конца оставшихся n–1 дуг совпадают. Но тогда одна из этих дуг содержится в другой.

5. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что $AK \perp KH$. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что $AC\cdot MN = AN\cdot CM$.*

Решение. Пусть BL — третья высота. Поскольку $MN = AC\cos\angle B$, $AN = AC\cos\angle A$, $CM = AC\cos\angle C$, достаточно доказать, что $\cos\angle B = \cos\angle A\cdot\cos\angle C$. Поскольку $HL = AL\operatorname{ctg}\angle C = AB\cos\angle A\operatorname{ctg}\angle C$, а $BH = BM/\sin\angle C = AB\cos\angle B/\sin\angle C$, достаточно доказать, что $HL = BH$.

Пусть X и Y — точки, симметричные H относительно прямой AB и середины отрезка AB соответственно. Общеизвестно, что точки X и Y лежат на описанной окружности треугольника ABC. С другой стороны, поскольку AB делит каждый из отрезков XH, YH, KH пополам, точки X, Y и K лежат на одной прямой l, параллельной AB. Поскольку прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, точка K совпадает либо с X, либо с Y (если $X = Y$, прямая l касается окружности и $X = Y = K$). Поскольку $\angle AXH = \angle B \neq 90°$, $K \neq X$. Значит, $K = Y$, а $AKBH$ — параллелограмм и $AK = BH$. Далее, так как $AK \parallel BL$, то $AK \perp AC$, откуда, учитывая, что $AK \perp KH$, получаем, что $AKHL$ — прямоугольник и $HL = AK = BH$.

6. *Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM соответственно. Докажите, что точки B, C, N и L лежат на одной окружности.*

Решение. Пусть при гомотетии с центром в A, переводящей ω во вневписанную окружность Ω с центром K, точка D переходит в D'. Пусть X — середина DD', а E — точка касания Ω с BC; точка K является серединой $D'E$. Тогда KM — средняя линия в прямоугольном треугольнике $DD'E$ (так как $BD = EC$).

Пусть K_1 и N_1 — отражения точек K и N относительно серединного перпендикуляра к BC. Из вышесказанного следует, что N_1 лежит на DD', а точки K_1, D и центр I окружности ω лежат на прямой, перпендикулярной BC. Как известно, $IBKC$ — вписанный четырёхугольник; из симметрии, точка K_1 также лежит на его описанной окружности, так что $K_1D\cdot DI = BD\cdot DC$. Далее, равнобедренные треугольники DIL и DN_1K_1 подобны (как равнобедренные с равными углами при основаниях), так что $K_1D\cdot DI = N_1D\cdot DL$. Из последних двух равенств, четырёхугольник $BLCN_1$ вписан; из симметрии, точка N также лежит на его описанной окружности.

7. *Решите в вещественных числах систему $x(y+z-x^3) = y(z+x-y^3) = z(x+y-z^3) = 1$.*

Ответ. $x = y = z = 1$, $x = y = z = -1$. Решение. Очевидно, среди чисел x, y, z нет 0. Изменив, если нужно, знаки всех трёх чисел, мы добьёмся, чтобы среди них было не меньше двух положительных, скажем, x и y. Если при этом $z < 0$, то $z(x+y-z^3) < 0$ — противоречие. Таким образом, мы можем считать, что все три числа положительны.

Имеем $y+z=x^3+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x^3\cdot\frac{1}{x}}=2x$. Аналогично $z+x \geq 2y$, $x+y \geq 2z$. Иными словами, каждое из трёх чисел x, y, z не больше среднего арифметического двух других. Это значит, что числа равны, а тогда $x^4-2x^2+1 = 0$ и $x = y = z = 1$. Сменой всех знаков получаем второе решение.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Решено только для положительных чисел: *6 баллов*.

8. *Для натурального числа n с каноническим разложением n =* $p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ *определим f(n) =* $\alpha_1 p_1^{\alpha_1-1}\dots\alpha_k p_k^{\alpha_k-1}$. *Существует ли такое n, что первые 1000000 членов последовательности n, f(n), f(f(n)), … встречаются в ней только один раз?*

Ответ. Да, может. Решение. Пусть $N = 1000000$. Рассмотрим последовательность g_n, определенную следующим образом: $g_1 = 1$, $g_{i+1} = f(g_i)\cdot(N+1-i)$ при $i \le N$ и $g_{i+1} = f(g_i)$ при $i > N$. Если эта последовательность не периодична, то все ее члены, начиная с g_N, различны, и в качестве a_1 можно взять g_N. Если эта последовательность периодична, то множество простых чисел, делящих ее члены, конечно. Выберем простое число p, не принадлежащее этому множеству. Положим $a_1 = p^N$. Заметим, что функция f *мультипликативная*, т.е. для любых взаимно простых натуральных чисел m и n выполнено $f(mn) = f(m)\cdot f(n)$. Из всего сказанного следует, что $a_i = g_i\cdot p^{N+1-i}$ при $i \le N$ и $a_i = g_i$ при $i > N$. Поэтому все члены последовательности с номерами 1, …, N различны (т.к. p входит в их разложения в различных степенях), и ни одно из них не равно a_k с $k > N$, поскольку a_k не делится на p при $k > N$.

♦ Доказано только, что первые 1000000 членов попарно различны: *2 балла*.

9. *Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Гоша. Первое решение. На первом этапе он выделяет из полоски 3×2015 [2015/3] = 671 квадрат размера 3×3. Затем он делает [671/2]+1 = 336 ходов горизонтальной полоской в те квадратики 3×3, в которые еще никто не ходил. Столько ходов Гоша сделать сможет. На втором этапе Гоша делает по два хода в те квадратики 3×3, куда он ходил на первом этапе игры. Таким образом, всего Гоша сделает 336·3 = 1008 ходов. Так как общее число ходов Гоши и Вени не превосходит 2015, то Веня сможет сделать не более 2015–1008 = 1007 ходов, и тем самым проиграет. Второе решение. Гоша мысленно разбивает доску на квадраты 3×3 и прямоугольник 3×2. Первым ходом он ходит в один из квадратов (назовём его А) и разбивает оставшиеся квадраты на пары. Если Веня ходит в один из квадратов, то Гоша ходит в парный квадрат. Если же Веня ходит в прямоугольник, то Гоша ходит в квадрат А. Нетрудно заметить, что у Гоши всегда есть ход, поэтому он выиграет.

10. *Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?*

Ответ. 7. Решение. *Пример*. Вершины двух клеточек на клетчатой плоскости, граничащих по общей вершине. *Оценка*. Четыре вершины квадрата должны быть отмечены в любом случае. Чтобы получить ещё один квадрат, надо добавить хотя бы две точки. Если добавить ровно две, можно получить только один новый квадрат, и оба квадрата разрушатся, если удалить любую из их общих точек.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *4 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Первая юниорская лига, 1 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Найдите все тройки попарно взаимно простых натуральных чисел* a, b, c *такие, что число* $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ *—целое.*

<u>Ответ</u>. (1,1,1), (1,1,2), (1,2,3) и перестановки этих троек. <u>Решение</u>. Легко видеть, что

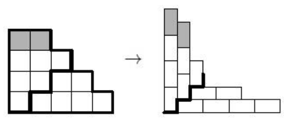
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1=\left(\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{c}{a}+1\right)=\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{b+c}{c}\right)\left(\frac{c+a}{a}\right).$$

Полученное целое число остаётся целым при домножении на любое из чисел ab, bc и ca, следовательно, $a+b$ кратно c, $b+c$ кратно a и $c+a$ кратно b. Не умаляя общности, примем $a \le b \le c$. Имеем $a+b \le 2c$, причём $a+b = 2c$ только при $a = b = c$. Последний случай в силу взаимной простоты возможен лишь при $a = b = c = 1$ (это решение мы запомним), а во всех остальных случаях $c = a+b$. Тогда $c \le 2b$, и $a+c \le 3b$. Два возможных случая $a+c = 2b$ и $a+c = 3b$ дают соответственно $b = 2a$, $c = 3a$ и $a = b$, $c = 2b$. С учётом взаимной простоты это означает, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, либо $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$.

♦ Только ответ: *2 балла*.

2. *Диаграмма Юнга — это набор клеток прямоугольной таблицы, который вместе с любой своей клеткой содержит все клетки левее и ниже её. Докажите, что количество диаграмм Юнга из 2n клеток, допускающих единственное разбиение на фигурки домино (прямоугольники из двух клеток), не меньше удвоенного количества диаграмм Юнга из n клеток.*

<u>Решение</u>. Сопоставим каждой диаграмме Юнга из n клеток две однозначно разбиваемых диаграммы из $2n$ клеток (разным будут соответствовать разные). Проведём из угла диаграммы *лесенку* по границам клеток со ступеньками единичной длины и высоты (это можно сделать двумя способами). Каждый столбец клеток сверху от лесенки заменим на столбец из того же количества вертикальных доминошек, а каждую строчку снизу — на строку горизонтальных. Для двух возможных лесенок получим две клетчатые фигуры; нетрудно понять, что они являются диаграммами Юнга, разбитыми на доминошки. Покажем индукцией по n, что разбиение любой полученной диаграммы единственно. При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n > 1$ либо верхняя строка, либо правый столбец диаграммы лежит по одну сторону от лесенки; пусть это — строка. Этой строке соответствует ряд из доминошек, идущих по диагонали (они отмечены серым на рисунке). Рассматривая эти доминошки сверху вниз, получаем, что они должны присутствовать в любом разбиении диаграммы. После их выкидывания получится диаграмма из меньшего числа клеток, полученная тем же способом. Осталось применить к ней предположение индукции. Итак, все построенные диаграммы — требуемые; из этого следует, что они различны, так как различны полученные разбиения на домино, что и доказывает утверждение задачи.



♦ Верная конструкция без обоснования: *4 балла*.

3. *Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию a+b+c+abc = 4. Докажите, что*

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)\ge 27.$$

<u>Решение</u>. Применяя к условию неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для четырёх чисел, получаем $4 = a+b+c+abc \ge 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2}$, откуда $abc \le 1$. Обращаясь к исследуемому выражению, находим

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)=\frac{(a+b+abc)(b+c+abc)(c+a+abc)}{abc}=\frac{(4-a)(4-b)(4-c)}{abc}=$$

$$\frac{64-16(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-abc}{abc}=\frac{64-16(4-abc)+4(ab+bc+ca)-abc}{abc}=15+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq$$

$$15+\frac{12}{\sqrt[3]{abc}}\geq 27.$$

♦

4. *На окружности длины 2n отмечены 2n точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых n+1 дуг с длинами 1, 2, …, n+1 и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.*

Решение. Для каждой дуги будем называть её *началом* тот конец, который идёт первым при движении по окружности по часовой стрелке, а *концом* — второй конец. Предположим, дуги удалось расположить так, что ни одна не содержится в другой. Рассмотрим дуги, имеющие длины 1 и n+1. Тогда у каждой из оставшихся дуг либо начало находится между концом дуги длины 1 и началом дуги длины n+1 (причём не может с этим началом совпадать), либо конец находится между концом дуги длины n+1 (но не может с этим концом совпадать) и началом дуги длины 1. Всего это n–2 точки деления. Тогда какие–то два начала или два конца оставшихся n–1 дуг совпадают. Но тогда одна из этих дуг содержится в другой.

♦

5. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, которые пересекаются в точке H. На описанной окружности треугольника ABC выбрана точка K такая, что AK ⊥ KH. Оказалось, что прямая AB делит отрезок KH пополам. Докажите, что KH = AM.*

Решение. Пусть X и Y — точки, симметричные H относительно прямой AB и середины отрезка AB соответственно. Общеизвестно, что точки X и Y лежат на описанной окружности треугольника ABC. С другой стороны, поскольку AB делит каждый из отрезков XH, YH, KH пополам, точки X, Y и K лежат на одной прямой M, параллельной AB. Поскольку прямая и окружность могут иметь не более двух общих точек, точка K совпадает либо с X, либо с Y (если $X = Y$, прямая M касается окружности и $X = Y = K$). Поскольку $\angle AXH = \angle B \neq 90°$, $K \neq X$. Значит, $K = Y$, а $AKBH$ — параллелограмм и $AK = BH$. Далее, так как $AK \parallel BM$, то $AK \perp AC$, откуда, учитывая, что $AK \perp KH$, получаем, что $AKHM$ — прямоугольник и $HM = AK = BH$.

♦

6. *В треугольнике ABC отрезок AP является биссектрисой. На отрезке AP выбрана точка M. Точка N симметрична точке M относительно середины стороны BC. Прямая BN пересекает прямую AC в точке D, а прямая CN пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что BE = CD.*

Решение. Поскольку точка M равноудалена от прямых CD и BE, достаточно доказать, что равны площади треугольников MCD и MBE. Но четырёхугольник $MCNB$ — параллелограмм, поэтому четырёхугольники $MCDN$ и $MBEN$ — трапеции. Тогда по известному свойству трапеции $S(MCD) = S(MCN)$ и $S(MBE) = S(MBN)$, а треугольники MCN и MBN равны.

♦

7. *Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие равенству* $x^2 = y^2(x+y^4+2y^2)$.

Ответ. $x = 12$, $y = 2$. Решение. Так как x^2 делится на y^2, x делится на y. Подставляя в уравнение из условия $x = zy$, после преобразований получаем $z^2–zy–y^4–2y^2 = 0$. Дискриминант последнего уравнения равен $4y^4+9y^2 = y^2(4y^2+9)$. Так как число z целое, $4y^2+9$ должно быть точным квадратом. $4y^2+9 = t^2 \Leftrightarrow (t–2y)(t+2y) = 9$, откуда, так как $t–2y < t+2y$, получаем $t–2y = 1$, $t+2y = 9$, то есть $y = 2$. Подставляя найденное значение y в уравнение из условия и решая полученное квадратное уравнение, получаем $x = 12$.

♦ Только ответ: *0 балла*.

8. *Может ли число вида 381111111…1111 (n единиц на конце) быть простым?*

Ответ. Нет. Решение. Рассмотрим три случая.

1) Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то число 3811...1 делится на 3.
2) Если $n \equiv 2 \pmod 3$, то число 3811...1 делится на 37, так как $38 \equiv 1 \pmod{37}$ и 111 делится на 37.
3) Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то рассмотрим число

$$9\cdot 3811...1 = 34299\ldots 9 = 343\cdot 10^n - 1 = (7\cdot 10^{n/3})^3 - 1 = (7\cdot 10^{n/3} - 1)((7\cdot 10^{n/3})^2 + 7\cdot 10^{n/3} + 1).$$

Очевидно, что каждая из скобок больше, чем 9, откуда и вытекает решение.

♦ Только случаи 1 и 2: *не более 2 баллов*. Разобран случай 3 и не разобран хотя бы один из случаев 1 и 2: *6 баллов*.

9. *Гоша и Веня по очереди делают ходы на белой доске, в которой 3 строки и 2015 столбцов. Начинает Гоша. Каждым ходом Гоша должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие горизонтальный прямоугольник 1×3, а Веня должен перекрасить в чёрный цвет три белых клетки, образующие вертикальный прямоугольник 3×1. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Гоша. Первое решение. На первом этапе он выделяет из полоски 3×2015 [2015/3] = 671 квадрат размера 3×3. Затем он делает [671/2]+1 = 336 ходов горизонтальной полоской в те квадратики 3×3, в которые еще никто не ходил. Столько ходов Гоша сделать сможет. На втором этапе Гоша делает по два хода в те квадратики 3×3, куда он ходил на первом этапе игры. Таким образом, всего Гоша сделает 336·3 = 1008 ходов. Так как общее число ходов Гоши и Вени не превосходит 2015, то Веня сможет сделать не более 2015–1008 = 1007 ходов, и тем самым проиграет. Второе решение. Гоша мысленно разбивает доску на квадраты 3×3 и прямоугольник 3×2. Первым ходом он ходит в один из квадратов (назовём его А) и разбивает оставшиеся квадраты на пары. Если Веня ходит в один из квадратов, то Гоша ходит в парный квадрат. Если же Веня ходит в прямоугольник, то Гоша ходит в квадрат А. Нетрудно заметить, что у Гоши всегда есть ход, поэтому он выиграет.

10. *Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?*

Ответ. 7. Решение. *Пример*. Вершины двух клеточек на клетчатой плоскости, граничащих по общей вершине. *Оценка*. Четыре вершины квадрата должны быть отмечены в любом случае. Чтобы получить ещё один квадрат, надо добавить хотя бы две точки. Если добавить ровно две, можно получить только один новый квадрат, и оба квадрата разрушатся, если удалить любую из их общих точек.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая юниорская лига, 1 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Является ли простым число 381111111…1111 (всего 2015 единиц)?*

Ответ. Нет. Решение. 3811...1 (2015 единиц) = 3700…0+1…1 (2016 единиц), и оба слагаемых в правой части делятся на 37, так как 1…1 (2016 единиц) делится на 111 = 37·3.

2. *Петя и Волк играют на белой горизонтальной доске 3×2015. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. За один ход Петя может закрасить три идущие подряд по горизонтали белые клетки, а Волк — три белые клетки, идущие по вертикали. Кто не может сделать очередной ход — проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?*

Ответ. Петя. Первое решение. На первом этапе он выделяет из полоски 3×2015 [2015/3] = 671 квадрат размера 3×3. Затем он делает [671/2]+1 = 336 ходов горизонтальной полоской в те квадратики 3×3, в которые еще никто не ходил. Столько ходов Петя сделать сможет. На втором этапе Петя делает по два хода в те квадратики 3×3, куда он ходил на первом этапе игры. Таким образом, всего Петя сделает 336·3 = 1008 ходов. Так как общее число ходов Пети и Волка не превосходит 2015, то Волк сможет сделать не более 2015–1008 = 1007 ходов, и тем самым проиграет. Второе решение. Петя мысленно разбивает доску на квадраты 3×3 и прямоугольник 3×2. Первым ходом он ходит в один из квадратов (назовём его А) и разбивает оставшиеся квадраты на пары. Если Волк ходит в один из квадратов, то Петя ходит в парный квадрат. Если же Волк ходит в прямоугольник, то Петя ходит в квадрат А. Нетрудно заметить, что у Пети всегда есть ход, поэтому он выиграет.

3. *Пусть $T_n = 1+2+\ldots+n$. Докажите, что если $2T_m = T_n$, то число T_{2m-n} является квадратом натурального числа.*

Решение. Положим $k = n-m$. $2T_m = T_n \Leftrightarrow 1+\ldots+m = (m+1)+\ldots+(m+k) \Leftrightarrow m(m+1) = k(2m+k+1)$. Имеем $T_{2m-n} = (m-k)(m-k+1)/2 = (m(m+1)-k(2m+1)+k^2)/2 = (k(2m+k+1)-k(2m+1)+k^2)/2 = 2k^2/2 = k^2$.

4. *В треугольнике ABC отрезок AP является биссектрисой. На отрезке AP выбрана точка M. Точка N симметрична точке M относительно середины стороны BC. Прямая BN пересекает прямую AC в точке D, а прямая CN пересекает прямую AB в точке E. Докажите, что BE = CD.*

Решение. Поскольку точка M равноудалена от прямых CD и BE, достаточно доказать, что равны площади треугольников MCD и MBE. Но четырёхугольник $MCNB$ — параллелограмм, поэтому четырёхугольники $MCDN$ и $MBEN$ — трапеции. Тогда по известному свойству трапеции $S(MCD) = S(MCN)$ и $S(MBE) = S(MBN)$, а треугольники MCN и MBN равны.

5. *Найдите все такие пары натуральных чисел x, y, что $x^2=y^2(x+y^4+2y^2)$.*

Ответ. $x = 12$, $y = 2$. Решение. Так как x^2 делится на y^2, x делится на y. Подставляя в уравнение из условия $x = zy$, после преобразований получаем $z^2-zy-y^4-2y^2 = 0$. Дискриминант последнего уравнения равен $4y^4+9y^2 = y^2(4y^2+9)$. Так как число z целое, $4y^2+9$ должно быть точным квадратом. $4y^2+9 = t^2 \Leftrightarrow (t-2y)(t+2y) = 9$, откуда, так как $t-2y < t+2y$, получаем $t-2y = 1$, $t+2y = 9$, то есть $y = 2$. Подставляя найденное значение y в уравнение из условия и решая полученное квадратное уравнение, получаем $x = 12$.

♦ Только ответ: *2 балла*.

6. *Какое наименьшее количество точек можно отметить на плоскости так, чтобы после стирания любой из отмеченных точек среди оставшихся точек можно было найти четыре вершины квадрата?*

Ответ. 7. Решение. *Пример*. Вершины двух клеточек на клетчатой плоскости, граничащих по общей вершине. *Оценка*. Четыре вершины квадрата должны быть отмечены в любом случае. Чтобы получить ещё один квадрат, надо добавить хотя бы две точки. Если добавить ровно две, можно получить только один новый квадрат, и оба квадрата разрушатся, если удалить любую из их общих точек.

♦ Только ответ (без примера): *0 баллов*. Только ответ с примером: *4 балла*. Доказано, что пяти точек недостаточно: *+2 балла*.

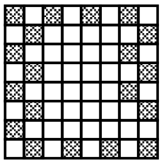
7. *В выпуклом 2015-угольнике сумма расстояний от любой внутренней точки до прямых, проходящих через стороны, одна и та же. Верно ли, что многоугольник — равносторонний?*

Ответ. Нет. Решение. Пример: срежем у правильного 2013-угольника две вершины двумя параллельными прямыми так, чтобы две получившиеся стороны не равнялись стороне 2013-угольника.

♦ Верный пример без обоснования: *6 баллов*.

8. *Какое наибольшее количество фишек можно поставить на шахматную доску так, чтобы на каждой диагонали находилось не более трех фишек?*

Ответ. 38. Решение. *Пример* для 19 чернопольных слонов показан на рисунке справа, для белопольных он аналогичен. *Оценка*. Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвета. Докажем, что на черных клетках стоит не более 19 фишек. Все черные клетки являются объединением параллельных диагоналей, в которых 2, 4, 6, 8, 6, 4, 2 клеток. Поэтому фишек на черных полях не более 2+3+3+3+3+3+2 = 19. Аналогично доказывается, что на белых клетках стоит не более 19 фишек, откуда и вытекает оценка.



♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.