*Девятнадцатый математический турнир старшеклассников*
*“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”*

*Сочи, 31 октября - 9 ноября 2015 года*

# Второй тур 05.11.15. Высшая лига.

**1.** Назовём выпуклую фигуру на плоскости *толстой*, если при некотором $r > 0$ она содержит круг радиуса $r$ и содержится в круге радиуса $1000r$. Верно ли, что любую толстую фигуру можно разрезать прямой на две толстые фигуры? (Фигура содержит свою границу.)

**2.** Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| \leq 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?

**3.** В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.

**4.** Плоскость, касающаяся описанной сферы тетраэдра $ABCD$ в точке $A$, пересекает плоскость грани $BCD$ по прямой $a$. Аналогично определяются прямые $b, c, d$. Оказалось, что прямые $a$, $b$, $c$, $d$ попарно скрещиваются. Докажите, что существует бесконечно много прямых, пересекающих каждую из этих четырех.

**5.** Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в каждом ящике есть хотя бы по шарику, в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3, и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.

**6.** На описанной окружности неравнобедренного треугольника $ABC$ отмечены точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — середины дуг $BAC$, $ABC$, $BCA$ соответственно. Обозначим через $\omega_a$, $\omega_b$, $\omega_c$ окружности, проходящие через $A$, $B$, $C$ с центрами $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что точка Нагеля треугольника $ABC$ является радикальным центром окружностей $\omega_a$, $\omega_b$, $\omega_c$. (Точка Нагеля — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками касания противоположных сторон со вневписанными окружностями.)

**7.** *Словом* назовём произвольную конечную последовательность из нулей и единиц. Для слова $w$ обозначим через $T_n(w)$ количество слов длины $n$, не содержащих $w$ в качестве подслова. Пусть $u$ и $v$ — два слова, причём длина $u$ меньше длины $v$. Докажите, что $T_n(u) \leq T_n(v)$ при всех натуральных $n$.

**8.** Докажите, что каждое натуральное $n \geq 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}$.

**9.** Даны ненулевые числа $x, y, z, w$ такие, что $x+y \neq 0$, $z+w \neq 0$ и $xy+zw \geq 0$. Докажите неравенство $\left(\frac{x+y}{z+w}+\frac{z+w}{x+y}\right)^{-1}+\frac{1}{2} \geq \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^{-1}+\left(\frac{y}{w}+\frac{w}{y}\right)^{-1}$.

**10.** Каждая клетка квадратной таблицы $100\times100$ окрашена в один из $k$ цветов. Оказалось, что для любых трёх клеток одного цвета, находящихся в одном столбце, справа от верхней из них и слева от нижней из них нет клеток этого же цвета. При каком наименьшем $k$ это возможно?

# Второй тур 05.11.15. Первая лига.

**1.** Назовём выпуклую фигуру на плоскости *толстой*, если при некотором $r > 0$ она содержит круг радиуса $r$ и содержится в круге радиуса $1000r$. Верно ли, что любую толстую фигуру можно разрезать прямой на две толстые фигуры? (Фигура содержит свою границу.)

**2.** Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| \leq 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?

**3.** У Пети есть клетчатый бумажный квадрат $2015\times2015$. Каждую его клетку он разрезал по одной из диагоналей; в результате квадрат распался на $k$ частей. При каких $k$ это возможно?

**4.** В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ длиннее стороны $AB$. Вписанная окружность с центром $I$ касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Прямая $AI$ пересекает прямые $DE$ и $DF$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. $Z$ — основание перпендикуляра, опущенного из $A$ на $BC$. Докажите, что $D$ — центр вписанной окружности треугольника $XYZ$.

**5.** Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в каждом ящике есть хотя бы по шарику, в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3, и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.

**6.** На описанной окружности неравнобедренного треугольника $ABC$ отмечены точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — середины дуг $BAC$, $ABC$, $BCA$ соответственно. Обозначим через $\omega_a$, $\omega_b$, $\omega_c$ окружности, проходящие через $A$, $B$, $C$ с центрами $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что точка Нагеля треугольника $ABC$ является радикальным центром окружностей $\omega_a$, $\omega_b$, $\omega_c$. (Точка Нагеля — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками касания противоположных сторон со вневписанными окружностями.)

**7.** *Словом* назовём произвольную конечную последовательность из нулей и единиц. Для слова $w$ обозначим через $T_n(w)$ количество слов длины $n$, не содержащих $w$ в качестве подслова. Пусть $v$ — некоторое слово, а $u$ — слово меньшей длины, состоящее из нулей. Докажите, что $T_n(u) \leq T_n(v)$ при всех натуральных $n$.

**8.** Докажите, что каждое натуральное $n \geq 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}$.

**9.** Неотрицательные вещественные числа $a_1, \ldots, a_{2n}$ таковы, что $a_i+a_{i+n} = 1$ при всех $i = 1, 2, ..., n$. Докажите, что найдутся два различных индекса $i$ и $j$, для которых $\sqrt{a_i^2 - a_j^2} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

**10.** На доске нарисован правильный 500-угольник. Саша выбирает 500 различных натуральных чисел и сообщает их Кириллу. Кирилл мысленно расставляет их в вершинах 500-угольника. Затем Саша за один вопрос может узнать сумму чисел в любой выбранной им полуплоскости, заплатив Кириллу рубль. При каком наименьшем $k$ Саша может выбрать числа так, чтобы гарантированно узнать задуманную расстановку, заплатив Кириллу не более $k$ рублей?

*Девятнадцатый математический турнир старшеклассников*
*“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”*

*Сочи, 31 октября - 9 ноября 2015 года*

# Второй тур 05.11.15. Вторая лига.

**1.** Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в каждом ящике есть хотя бы по шарику, в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3, и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.

**2.** Неотрицательные вещественные числа $a_1, \ldots, a_{2n}$ таковы, что $a_i+a_{i+n} = 1$ при всех $i = 1, 2, ..., n$. Докажите, что найдутся два различных индекса $i$ и $j$, для которых $\sqrt{a_i^2 - a_j^2} \le \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

**3.** У Пети есть клетчатый бумажный квадрат $2015\times2015$. Каждую его клетку он разрезал по одной из диагоналей; в результате квадрат распался на $k$ частей. При каких $k$ это возможно?

**4.** Все точки плоскости покрашены в 2015 цветов. Докажите, что на плоскости найдется 2015 треугольников равной площади, у которых все их вершины одноцветны.

**5.** На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника выбраны такие точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ соответственно, что $AB_1-AC_1 = CA_1-CB_1 = BC_1-BA_1$. Точки $I_A$, $I_B$ и $I_C$ — центры вписанных окружностей треугольников $AB_1C_1$, $A_1BC_1$ и $A_1B_1C$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника $ABC$.

**6.** Докажите, что каждое натуральное $n \ge 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}$.

**7.** Каждая клетка квадратной таблицы $11\times11$ окрашена в один из $k$ цветов. Оказалось, что если какие-то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней из них клеток этого цвета больше нет. При каком наименьшем $k$ это может быть?

**8.** Точка $O$ — центр описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$. Точки $D$, $E$, $F$ на отрезках $BC$, $CA$, $AB$ таковы, что $DE$ перпендикулярно $CO$ и $DF$ перпендикулярно $BO$. Точка $K$ — центр описанной окружности треугольника $AFE$. Докажите, что прямые $DK$ и $BC$ перпендикулярны.

**9.** Назовём квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| \le 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких трёхчленов?

**10.** На доске нарисован правильный 500-угольник. Саша выбирает 500 различных натуральных чисел и сообщает их Кириллу. Кирилл мысленно расставляет их в вершинах 500-угольника. Затем Саша за один вопрос может узнать сумму чисел в любой выбранной им полуплоскости, заплатив Кириллу рубль. При каком наименьшем $k$ Саша может выбрать числа так, чтобы гарантированно узнать задуманную расстановку, заплатив Кириллу не более $k$ рублей?

# Второй тур 05.11.15. Третья лига.

**1.** На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число $x$ на числа $3x+1$, $5x+2$ или $x-7$. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое никогда не появится на доске.

**2.** Точка $O$ — центр описанной окружности остроугольного треугольника $ABC$. Точки $D$, $E$, $F$ на отрезках $BC$, $CA$, $AB$ таковы, что $DE$ перпендикулярно $CO$ и $DF$ перпендикулярно $BO$. Точка $K$ — центр описанной окружности треугольника $AFE$. Докажите, что прямые $DK$ и $BC$ перпендикулярны.

**3.** Одна из высот треугольника равна среднему арифметическому двух других высот. Докажите, что отношение любых двух сторон этого треугольника больше 2/5.

**4.** Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3 и так далее. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.

**5.** Петя нарисовал границу клетчатой доски $n\times n$ и по одной диагонали в каждой клеточке. Нарисованными линиями доска разбилась на несколько областей. Найдите наименьшее возможное количество областей.

**6.** По кругу стоят 2015 чисел так, что каждое меньше суммы двух соседних на одно и то же значение. Докажите, что все числа равны между собой.

**7.** Каждый из коэффициентов квадратного трёхчлена равен значению этого трёхчлена в одной из точек 0, 1, 2. Могут ли все коэффициенты быть различными?

**8.** Все точки плоскости покрашены в 2015 цветов. Докажите, что на плоскости найдется 2015 треугольников равной площади, у которых все их вершины одноцветны.

**9.** Натуральное число называется *странным*, если его можно представить в виде $a^b+b$, где $a > 1$, $b > 1$. Докажите, что существует миллион последовательных натуральных чисел, среди которых все, кроме двух, странные.

**10.** Числовая последовательность строится по закону $a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ . Можно ли подобрать два первых члена так, чтобы первые десять членов этой последовательности были натуральными числами?

# Второй тур 05.11.15. Высшая юниорская лига.

**1.** На описанной окружности неравнобедренного треугольника $ABC$ отмечены точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — середины дуг $BAC$, $ABC$, $BCA$ соответственно. Обозначим через $\omega_a$, $\omega_b$, $\omega_c$ окружности, проходящие через $A$, $B$, $C$ с центрами $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно. Докажите, что точка Нагеля треугольника $ABC$ является радикальным центром окружностей $\omega_a$, $\omega_b$, $\omega_c$. (Точка Нагеля — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины с точками касания противоположных сторон со вневписанными окружностями.)

**2.** В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ длиннее стороны $AB$. Вписанная окружность с центром $I$ касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Прямая $AI$ пересекает прямые $DE$ и $DF$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. $Z$ — основание перпендикуляра, опущенного из $A$ на $BC$. Докажите, что $D$ — центр вписанной окружности треугольника $XYZ$.

**3.** Докажите, что каждое натуральное $n \ge 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}$.

**4.** В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.

**5.** Назовём квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| \le 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких трёхчленов?

**6.** Даны ненулевые числа $x, y, z, w$ такие, что $x+y \ne 0$, $z+w \ne 0$ и $xy+zw \ge 0$. Докажите неравенство $\left(\dfrac{x+y}{z+w}+\dfrac{z+w}{x+y}\right)^{-1}+\dfrac{1}{2} \ge \left(\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}\right)^{-1}+\left(\dfrac{y}{w}+\dfrac{w}{y}\right)^{-1}$.

**7.** На доске нарисован правильный 500-угольник. Саша выбирает 500 различных натуральных чисел и сообщает их Кириллу. Кирилл мысленно расставляет их в вершинах 500-угольника. Затем Саша за один вопрос может узнать сумму чисел в любой выбранной им полуплоскости, заплатив Кириллу рубль. При каком наименьшем $k$ Саша может выбрать числа так, чтобы гарантированно узнать задуманную расстановку, заплатив Кириллу не более $k$ рублей?

**8.** Натуральные числа $a$ и $b < a$ таковы, что $(a-b, ab+1) = 1$ и $(a+b, ab-1) = 1$. Докажите, что число $(a-b)^2+(ab+1)^2$ не является точным квадратом.

**9.** Имеется конечное число ящиков, в каждом из которых лежит несколько шариков (в разных ящиках шариков может быть разное число). В первую минуту в каждый ящик добавляется по шарику. Во вторую минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков чётно. В третью минуту по шарику добавляется во все ящики, в которых число шариков делится на 3 и т.д. Докажите, что когда-нибудь во всех ящиках шариков станет поровну.

**10.** Каждая клетка квадратной таблицы $11\times11$ окрашена в один из $k$ цветов. Оказалось, что если какие-то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней из них клеток этого цвета больше нет. При каком наименьшем $k$ это может быть?

## Второй тур 05.11.15. Первая юниорская лига.

**1.** На описанной окружности неравнобедренного треугольника $ABC$ отмечены точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — середины дуг $BAC$, $ABC$, $BCA$ соответственно. На луче $BC$ отмечена точка $X$ такая, что $AB = BX$, а на луче $CB$ — точка $Y$ такая, что $AC = CY$. Точки $O_1$ и $O_2$ — центры описанных окружностей треугольников $BB_1Y$ и $CC_1X$. Докажите, что $O_1O_2 \parallel AA_1$.

**2.** В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ длиннее стороны $AB$. Вписанная окружность с центром $I$ касается сторон $BC$, $CA$ и $AB$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Прямая $AI$ пересекает прямые $DE$ и $DF$ в точках $X$ и $Y$ соответственно. $Z$ — основание перпендикуляра, опущенного из $A$ на $BC$. Докажите, что $D$ — центр вписанной окружности треугольника $XYZ$.

**3.** Докажите, что каждое натуральное $n \geq 50$ можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, все простые делители которых не превосходят $\sqrt{n}+1$.

**4.** В некотором графе через каждое ребро проходит не более трёх простых циклов. Докажите, что вершины этого графа можно правильно окрасить в три цвета.

**5.** Назовём квадратный трёхчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| \leq 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких трёхчленов?

**6.** На окружности отмечены 12 точек. Вова добавил к ним ещё одну, поставив её невидимой краской. Дима может провести прямую и узнать у Вовы, с какой стороны от этой прямой лежит точка. Если точка оказывается на проведённой прямой, то Вова так и говорит. Сможет ли Дима менее чем за 6 вопросов узнать, лежит ли точка внутри или на границе какого-нибудь треугольника, образованного видимыми отмеченными точками?

**7.** На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число $x$ на числа $3x+1$, $5x+2$ или $x-7$. Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое никогда не появится на доске.

**8.** В нескольких коробках лежат фишки. Сначала в каждую коробку добавляют по фишке, затем, в каждую коробку с чётным числом фишек добавляют по фишке, затем в каждую коробку, где количество фишек делится на 3, добавляют по фишке, потом — в каждую коробку, где количество фишек делится на 4, и т.д. Докажите, что в какой–то момент во всех коробках фишек будет поровну.

**9.** Вещественное число $x$ назовём *любопытным*, если, стерев одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число $2x$. Найдите наибольшее любопытное число.

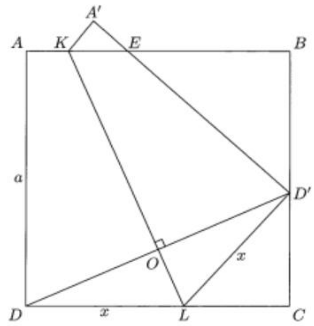
**10.** Каждая клетка квадратной таблицы $11\times11$ окрашена в один из $k$ цветов. Оказалось, что если какие–то две одноцветные клетки лежат в одном столбце, то справа от верхней и слева от нижней из них больше нет клеток этого цвета. При каком наименьшем $k$ это может быть?

# Второй тур 05.11.15. Вторая юниорская лига.

**1.** Число $X$ назовём *любопытным*, если, стерев одну из цифр в его десятичной записи, можно получить число $2X$. Найдите наибольшее любопытное число.

**2.** Какое наименьшее количество ферзей, стоящих на одной вертикали, могут побить все свободные клетки шахматной доски?

**3.** Квадрат $ABCD$ перегнули по прямой так, что вершина $D$ попала в точку $D'$, лежащую на стороне $BC$. При этом точка $A$ попала в точку $A'$, а прямая $A'D'$ пересекает прямую $AB$ в точке $E$. Докажите, что периметр треугольника $EBD'$, равен полупериметру квадрата $ABCD$.




**4.** По кругу стоят 2015 чисел так, что каждое меньше суммы двух соседних на одно и то же значение. Докажите, что все числа равны между собой.

**5.** На окружности отмечены 12 точек. Вова добавил к ним ещё одну, поставив её невидимой краской. Дима может провести прямую и узнать у Вовы, с какой стороны от этой прямой лежит точка. Если точка оказывается на проведённой прямой, то Вова так и говорит. Сможет ли Дима менее чем за 6 вопросов узнать, лежит ли точка внутри или на границе какого-нибудь треугольника, образованного видимыми отмеченными точками?

**6.** В нескольких коробках лежат фишки, пустых коробок нет. Сначала в каждую коробку добавляют по фишке, затем, в каждую коробку с чётным числом фишек добавляют по фишке, затем в каждую коробку, где количество фишек делится на 3, добавляют по фишке, потом — в каждую коробку, где количество фишек делится на 4, и т.д. Докажите, что в какой-то момент во всех коробках фишек будет поровну.

**7.** На доске написано число 1. Разрешается заменять написанное на доске число $x$ на числа $3x+1$, $5x+2$ или $x-7$. Найдите наименьшее двузначное число, которое никогда не появится на доске.

**8.** В какое наименьшее число конвертов надо разложить 300 рублей, чтобы, не вскрывая конвертов, эти деньги можно было бы раздать поровну как троим, так и четверым людям?