XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая лига, 4 тур, бои за 1-4 места, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Дан треугольник ABC. На луче AB отложили отрезок $AB_1 = CA$, на луче BC отложили отрезок $BC_1 = AB$, на луче CA отложили отрезок $CA_1 = BC$. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не больше периметра треугольника ABC.*

Решение. *Лемма*. Пусть a, b, c — положительные числа, X — некоторая точка на плоскости. Среди всевозможных треугольников ABC таких, что $XA = a$, $XB = b$ и $XC = c$, наибольший периметр имеет тот единственный, для которого X является центром вписанной окружности.

Прежде, чем доказывать лемму, покажем, как из нее следует утверждение задачи. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда $IA = IC_1$, $IB = IA_1$ и $IC = IB_1$. Применяя лемму для чисел IA, IB, IC и точки I, получаем требуемое.

Доказательство леммы. Пусть A, B, C — точки, удовлетворяющие условию, для которых периметр достигает максимума. Максимум достигается в силу компактности. (Точки A, B, C лежат на окружностях с центром в точке X и радиусами a, b, c соответственно.) Заметим, что X не может оказаться вне треугольника ABC. Действительно, пусть точка A оказалась внутри угла BXC. Поворачивая точку C вокруг точки X так, чтобы угол BXC увеличивался, по теореме косинусов получаем, что отрезки BC и AC увеличиваются. Значит, точка X лежит внутри или на границе треугольника ABC. Пусть ω — окружность с центром в точке X и радиусом a, а n и k — соответственно внутренняя и внешняя биссектрисы угла BAC. Если k касается ω, то перпендикулярная k прямая n проходит через центр ω — точку X. Тогда X лежит на биссектрисе угла A. Пусть k не касается ω. Тогда существует точка $S \in k$, лежащая внутри ω, такая, что X лежит внутри треугольника SBC. Поскольку BA и CA образуют равные углы с k, то в точке A достигается минимум сумм расстояний от точки прямой k до точек B и C. Значит, $SB+SC > AB+BC$. Пусть луч XS пересекает ω в точке T. Тогда треугольник SBC лежит внутри треугольника TBC, и $TB+TC > SB+SC > AB+AC$, противоречие с максимальностью периметра ABC. Значит, X лежит на биссектрисе угла BAC. Аналогично, X лежит на биссектрисе углов ABC и ACB, что и требовалось. Осталось заметить, что если в треугольнике заданы расстояния от вершин до центра вписанной окружности, то он определяется однозначно; это следует, например, из того, что синусы половинных углов треугольника обратно пропорциональны указанным расстояниям.

♦ Сведение к лемме: *4 балла*. <u>При доказательстве леммы.</u> Не обосновано существование и/или единственность максимума: *дыра в 2 балла*. За отсутствие обоснования того, что X лежит внутри треугольника ABC, баллы не снимаются.

2. *Пусть $n = 2^k$, где k натуральное. Из всевозможных подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ выделены $2^{n-1}+1$ подмножеств. Вася хочет выбрать $k+1$ выделенных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_{k+1}$ так, чтобы по ответам на вопросы вида: «Лежит ли число в A_i?» однозначно определялось число от 1 до n. Докажите, что у Васи всё получится.*

<u>Решение</u>. Сдвинув все числа на единицу, можем считать. что выбираются подмножества множества $S = \{0,1,\dots,n-1\}$. Мы отождествляем каждый элемент S с его k-разрядным двоичным представлением; через $i\oplus j$ и $i\wedge j$ будем обозначать поразрядную сумму mod 2 и поразрядное произведение чисел i и j, соответственно. Скажем, что система подмножеств $A_1, ..., A_d$ *разделяющая*, если она удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что система разделяющая тогда и только тогда, когда для любых различных $i, j \in S$ найдётся элемент системы, содержащий ровно один из i и j.

Каждому $i \in S$ сопоставим подмножество $U_i \subset S$, состоящее из чисел $a \in S$, для которых $a\wedge i$ содержит нечётное число единиц (таким образом, $U_0 = \varnothing$). Заметим, что $U_i \Delta U_j = U_{i\oplus j}$. Пусть $U = \{U_0, U_1, ..., U_{n-1}\}$.

Лемма. Если W — $(n/2+1)$-элементная подсистема в U, то в W существует k-элементная разделяющая система. *Доказательство*. Для каждой подсистемы $W' \subset W$ обозначим через (W') множество всех симметрических разностей нескольких элементов из W'. Тогда нетрудно проверить, что, если $A \in (W')$, то $(W' \cup \{A\}) = (W')$, а в противном случае в $(W' \cup \{A\})$ вдвое больше элементов, чем в (W'). Будем теперь выбирать последовательно элементы $B_1, B_2, ..., B_k \in W$ так, чтобы $B_{i+1} \notin (\{B_1, ..., B_i\})$; из условия на мощность W, это сделать можно. Тогда $(\{B_1, ..., B_k\})$ содержит $2^k = n$ элементов, то есть все элементы U. Значит, полученная система — требуемая. Лемма доказана.

Перейдём к решению. Обозначим через X систему всех выделенных подмножеств. Для каждого $A \subseteq S$ обозначим $K_A = \{U_i \Delta A\colon i \in S\}$. Заметим, что $K_B = K_A$ при $B \in K_A$. Значит, система подмножеств S разбивается на $2^n/n$ подсистем вида K_A. По принципу Дирихле одна из таких подсистем содержит хотя бы $n/2+1$ элементов из X; можно считать. что это — система K_A при $A \in X$. Пусть $W = \{A\Delta K\colon K \in K_A\}$. По лемме, в W есть разделяющая система $\{B_1, ..., B_k\}$. Тогда система $\{A, A\Delta B_1, ..., A\Delta B_k\} \subset X$ также разделяющая. Действительно, любые элементы i и j разделяются некоторым B_s; тогда они разделяются либо A, либо $A\Delta B_s$.

3. *Последовательности действительных чисел $0 < x_1 < x_2 < x_3 < ...$ и $y_1, y_2, y_3, ...$ таковы, что для любого многочлена $f(x)$ степени, не большей 2, найдётся индекс i, при котором $|f(x_i)-y_i| \le 1$. Докажите, что при некотором N верно неравенство* $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_N^2} > 2015^{2015}$.

Решение. Подставим вместо $f(x)$ трехчлен ax^2. Тогда существует такой индекс i, что $|ax_i^2-y_i| \le 1$, т.е. $(y_i-1)/x_i^2 \le a \le (y_i+1)/x_i^2$. Расположим на числовой прямой всевозможные отрезки вида $[(y_i-1)/x_i^2, (y_i+1)/x_i^2]$. Тогда, учитывая условие, вся прямая (кроме, возможно, точки 0) покрыта этими отрезками.

Пусть $C = 2015^{2015}$. Возьмем теперь какой-нибудь отрезок I на числовой прямой длины больше $4C$, не содержащий точки 0. Вложим каждый отрезок $[(y_i-1)/x_i^2, (y_i+1)/x_i^2]$ в интервал $J_i = ((y_i-2)/x_i^2, (y_i+2)/x_i^2)$, $|J_i| = 4/x_i^2$. Поскольку исходная система отрезков покрывала I, то и система интервалов $\{J_i\}$ будет покрывать I. По лемме Гейне-Бореля из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\left\{J_{i_k}\right\}$.

Пусть наибольший из индексов i_k равен N. Тогда $\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_N^2} \ge \frac{1}{x_{i_1}^2}+\frac{1}{x_{i_2}^2}+\ldots+\frac{1}{x_N^2} = \frac{1}{4}\left(\left|J_{i_1}\right|+\left|J_{i_2}\right|+\ldots+\left|J_N\right|\right) > \frac{1}{4}\cdot 4C = C$ что и требовалось.

Окончание решение можно было изложить по–другому. Пусть для любого N выполнено $\frac{4}{x_1^2}+\ldots+\frac{4}{x_N^2} \le 4C$. Тогда для любого N существует точка $x_N \in I$, не принадлежащая объединению $J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_N$. Получим ограниченную последовательность точек (x_N), из которой по теореме Больцано-Вейерштрасса можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; пусть она сходится к x. Тогда $x \in J_N$ для некоторого N. Тогда все члены подпоследовательности, начиная с некоторого номера, должны попасть в J_N, что, очевидно, невозможно.

♦ Не доказано, что бесконечное число отрезков с конечной суммой длин не может покрыть прямую — *не более 6 баллов*.

4. *Даны натуральные $a_1, \ldots, a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.*

Решение. Если при сложении двух чисел получилось k переносов, то сумма цифр суммы меньше суммы сумм цифр слагаемых на $9k$. Таким образом, если мы рассмотрим сумму цифр всех слагаемых и сравним с суммой цифр итоговой суммы, первая будет на $9n$ больше, где n — количество переносов, которые происходили в процессе сложения. Отсюда следует утверждение задачи.

♦ Доказано только, что количество переносов в последнем разряде не зависит от порядка сложений — *4 балла*. Неразбор хотя бы одного существенного случая — *не более 6 баллов*.

5. *Даны шесть точек в пространстве; никакие четыре из них не лежат в одной плоскости, никакие пять не лежат на одной сфере. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что описанные окружности этих троек зацеплены.*

Решение. Совершим инверсию с центром в одной из наших точек O. Нам достаточно доказать, что прямая, проходящая через два образа A, E, пересекает внутренность круга, описанного около трёх оставшихся образов BCD. Действительно, тогда любая полуплоскость с границей AE пересекает окружность (BCD) в одной точке, не лежащей на границе полуплоскости. При обратной инверсии получаем, что окружность, содержащая прообразы B, C, D, пересекает описанный круг остальных трёх исходных точек ровно в одной точке не на границе, что и требовалось.

Рассмотрим выпуклую оболочку пяти образов. Если у неё 4 вершины, то это тетраэдр $ABCD$, а пятый образ E лежит внутри него. Тогда прямая AE пересекает даже треугольник BCD. Пусть вершин пять. Поскольку все грани треугольные, этих граней 6 (из формулы Эйлера). Кроме того, в каждой грани есть максимум одна вершина степени 3. Отсюда вытекает, что наш многогранник — это объединение двух тетраэдров $ABCD$ и $EBCD$. Тогда опять прямая AE пересекает треугольник BCD.

♦ Не доказано, что инверсия сохраняет свойство зацепленности — *дыра в 6 баллов, задача решена*. Неразбор хотя бы одного существенного случая расположения точек: *не более 6 баллов*.

6. *В некоторой стране есть несколько шпионов, некоторые пары из них имеют секретные каналы связи. Непустая группа шпионов А называется* ***опергруппой****, если любой шпион из А может передать сообщение любому другому шпиону из А — возможно, через посредников из этой же группы (в частности, любой шпион образует отдельную опергруппу). Две опергруппы связаны, если они не пересекаются, а их объединение — также опергруппа. Резидент составил схему связей между опергруппами, но в этой схеме отсутствуют указания на составы опергрупп. Докажите, что, получив эту схему, контрразведка может восстановить схему связей между шпионами.*

Решение. Пусть G — граф связей между шпионами, а H — граф связей между опергруппами. Изолированными в H являются вершины, соответствующие компонентам связности. Остальные компоненты связности в H соответствуют неодноэлементным компонентам в G. По этим данным мы восстанавливаем число компонент связности и изолированных вершин в G. Осталось по компоненте связности H' в H восстановить компоненту G' в G, то есть решить задачу для связного графа G. Этим мы и займёмся. Мы отождествляем вершины H с соответствующими подмножествами вершин в G.

Граф G — индуцированный подграф в H (опергруппы из одного шпиона связаны так же, как и сами шпионы); назовём соответствующие вершины *уникумами*. Значит, достаточно восстановить, какие вершины H являются уникумами. Для этого, в свою очередь, достаточно найти одного уникума v и определить, какие вершины в H соответствуют опергруппам, содержащим v (переходя к той же задаче для графа $G–\{v\}$, который, кстати, окажется связным).

Пусть X — вершина степени 1 в H. Если в G есть хотя бы две вершины, не лежащие в X, то вне X есть вершина u, соединённая с X, и ещё одна вершина v. Тогда множество $\{u\}$ и множество вершин пути из v в X соединены с X в H, то есть степень X в H не меньше 2, что не так. Итак, X содержит все вершины G, кроме некоторой вершины v, при этом v не является точкой сочленения. Наоборот, если v — не точка сочленения в G (как известно, такая вершина есть), то $G–\{v\}$ есть вершина степени 1 в H. Значит, вершина степени 1 в H есть, и мы нашли вершину H, соответствующую $\{v\}$.

Пусть N — множество всех соседей v в G. Разделим все вершины H, кроме $\{v\}$ и G, на пять множеств: A — содержащие $N \cup \{v\}$; M — содержащие N, но не v; U — содержащие v, но не содержащие N; S — не содержащие v, не содержащие N, но пересекающие N; Q — не пересекающие N (и, как следствие. не содержащие v). Нетрудно понять, что вершины, не соединённые с $\{v\}$ путём длины ровно 2 в H, образуют множество $U \cup S \cup Q$, отсюда находится множество $A \cup M$. При этом вершины M — соседние с $\{v\}$, а вершины A — нет. Таким образом, определены множества M и A. Осталось различить U, S и Q. Q есть множество оставшихся вершин H, соединённых с какой–то вершиной из A. Разделить S и U можно по признаку, соединена ли вершина с $\{v\}$ в графе H или нет.

♦ Решение задачи для связного графа: *не менее 10 баллов*. Сведение к этому разбору *не оценивается*. Нахождение в графе опергрупп вершины, соответствующей одноэлементному множеству: *2 балла*.

7. *Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство*

$$\frac{a(b+c)^2}{1+a}+\frac{b(c+a)^2}{1+b}+\frac{c(a+b)^2}{1+c}\geq 4\frac{a^2\sqrt{bc}}{1+a}+4\frac{b^2\sqrt{ca}}{1+b}+4\frac{c^2\sqrt{ab}}{1+c}$$

<u>Решение</u>. Перепишем каждое слагаемое из левой части как

$$\frac{a(b+c)^2}{1+a}=\frac{a(3-a)(b+c)}{1+a}=3a(b+c)-\frac{4a^2(b+c)}{1+a}.$$

Перенося вычитаемые в правую часть и деля на 2, получаем, что требуемое неравенство равносильно неравенству

$$3(ab+bc+ca)\geq 2\sum\frac{a^2\left(b+\sqrt{bc}+c\right)}{1+a}.$$

Применяя сначала неравенство о средних к знаменателям правой части, а затем неравенство Коши–Буняковского–Шварца к полученному, имеем

.

Поскольку $a + b + c = 3$, осталось доказать, что

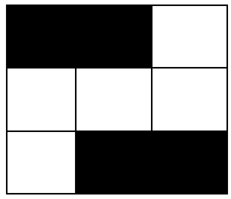
$$\sum a^2\left(b+\sqrt{bc}+c\right)^2\leqslant 3(ab+bc+ca)^2.$$

Это проверяется, например, раскрытием скобок: разность правой и левой частей есть $\left(ab+bc+ca-a\sqrt{bc}-b\sqrt{ca}-c\sqrt{ab}\right)^2$ (для облегчения вычислений здесь полезно перейти к переменным $1/a$, $1/b$, $1/c$).

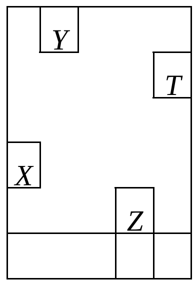
8. *Петя красит все клетки квадрата А размера 444×444 в чёрный и белый цвета. Затем в другом квадрате В размера 150×150 он отмечает 150 клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке. После этого Вася пытается удалить из А некоторые 294 строки и 294 столбца и сдвинуть оставшиеся части (не меняя порядка строк и столбцов) так, чтобы после наложения (без поворотов) квадрата В на полученный квадрат 150×150 все 150 отмеченных в В клеток наложились бы на одноцветные. Обязательно ли Вася сможет это сделать?*

Ответ. Не обязательно. Решение. Будем считать, что столбцы пронумерованы слева направо, а строки — сверху вниз.

Разделим A на 9 квадратов 148×148, и полученные три строки и три столбца будем называть *жирными* строками и столбцами соответственно. Раскрасим в первой жирной строке первые два квадрата в черный, а в третьей жирной строке последние два в черный, остальные клетки оставим белыми (см. рис. справа). В квадрате B закрасим четыре клетки, образующие квадрат: в первом столбце 149-ю клетку X, во втором —первую клетку Y, в 149-м — 150-ю клетку Z, а в 150-м — вторую клетку T (см. рис. слева). В остальных столбцах отметим клетки произвольным образом. Докажем, что из A нельзя удалить 294 строки и 294 столбца так, чтобы клетки X, Y, Z и T накладывались на одноцветные.



A



B

Предположим, что клетка X оказалась белой. Клетка Y не может лежать в третьей жирной строке и в третьей жирном столбце, следовательно, клетка Y будет лежать во второй жирной строке, а тогда клетка Z окажется черной, противоречие.

Предположим, что клетка X черная, тогда X лежит в последней жирной строке и во втором или третьем столбце. Клетка T не может лежать в третьей жирной строке и в первом жирном столбце. Следовательно, T лежит во втором жирном столбце, что невозможно.

♦ Пример только одного из квадратов A или B *не оценивается*. Пример обоих квадратов без обоснования: *6 баллов*.

9. *CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.*

Решение. Обозначим через T, M, N центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и середины сторон AC и AB соответственно. Тогда точки C, A_1, A, C_1 будут лежать на окружности с центром в точке M, поэтому TM — серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Точки B, C_1, C, B_1 лежат на одной окружности, поэтому $2\angle MNA = 2\angle CBA = 2\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1TC_1 = 2\angle MTC_1$, поэтому точки C_1, N, M, T лежат на одной окружности. Но поскольку эта окружность проходит через две середины сторон и основание высоты треугольника ABC, то она является окружностью девяти точек этого треугольника.

10. *Решите уравнение $x^3 – x+9 = 5y^2$ в целых числах.*

Ответ. Корней нет. Решение. Заметим, что левая часть всегда делится на 3, откуда $y = 3z$ и уравнение приобретает вид $x^3–x+9 = 45z^2$ или $(x–1)x(x+1) = 9(5z^2–1)$. Поскольку в левой части стоит три последовательных целых числа, ровно одно из них делится на 3. Также заметим, что правая часть дает остаток 1 при делении на 5, откуда x дает остаток 2 при делении на 5.

Пусть $5z^2–1$ делится на некоторое простое p. Тогда 5 является квадратичным вычетом по модулю p. Откуда, согласно квадратичному закону взаимности, либо $p = 2$, либо p имеет вид $5k\pm1$. В частности, $5z^2–1$ не делится на 3. Выберем из чисел x и $x+1$ нечетное. Тогда в его разложение на простые множители могут войти только 9 и простые вида $5k\pm1$ в натуральных степенях, т.е. либо x, либо $x+1$ имеет вид $5k\pm1$. Это не так, поскольку x имеет вид $5k+2$.

♦ Доказано только, что y делится на 3, а $x–2$ делится на 5: *2 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

4 тур: высшая лига, бои за 5-8 места, первая лига, бои за 1-4 места, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \neq A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.*

Решение. Из теоремы Чевы для треугольника ABC и точки P получаем, что $AE/EB = AD/DC$, откуда вытекает, что $ED \parallel AC$. Так как четырехугольник $BCXY$ вписан, то $\angle BXY = \angle BCY = \angle ED$, следовательно, четырехугольник $EDXY$ вписан, откуда $PD \cdot PX = PE \cdot PY$. Это означает, что точка P лежит на радикальной оси AT окружностей AXD и AYE, что и требовалось доказать.

2. *Натуральные числа a, b, c таковы, что a^2–bc — квадрат целого числа. Докажите, что число $2a+b+c$ — составное.*

Решение. Решение. Пусть $a^2-bc = k^2$, то есть $(a-k)(a+k) = bc$. Как известно, тогда сумма четырёх сомножителей в двух равных произведениях $(a-k)+(a+k)+b+c$ — составное число, что и требовалось доказать.

♦ Сведение к факту, названному в решении известным: *6 баллов*.

3. *Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?*

Ответ. 4. Решение. Докажем сначала, что сумма зеленых чисел четна. Пусть на окружности по часовой стрелке записаны красные числа n_1, n_2, ... , n_{100}. Тогда сумма $|n_2-n_1|+...+|n_{99}-n_{100}|+|n_{100}-n_1|$ имеет ту же четность, что и сумма $(n_2-n_1)+...+(n_{99}-n_{100})+(n_{100}-n_1)$, которая четна, так как равна нулю. Пусть соседями синей единицы являются числа m и n. Тогда на втором шаге они заменятся на красные числа $m-1$ и $n-1$, а на третьем на $|(m-1)-(n-1)| = |m-n| \geq 1$. И аналогично с соседями синего числа 100. То есть сумма зеленых чисел хотя бы 2. Если она равна 2, то при движении по любой дуге от синей 1 до синей 100 мы должны получать арифметическую прогрессию. Очевидно, что ее разность не может быть равна 2, а если она равна 1, то сумма зеленых чисел будет равна 196. Значит, она хотя бы 3, и на любой дуге от 1 до 100 стоит не более 33 чисел. Тогда изначально синих чисел было не больше 68. Противоречие. Пример для суммы 4: 2, 4, ..., 98, 100, 99, 97, ... , 1.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*. Доказано только, что сумма зелёных чисел чётна: *2 балла*. Доказано только, что эта сумма больше двух: *2 балла*. Доказтельство того, что эта сумма ненулевая, *не оценивается*.

4. *Даны натуральные a_1, ..., a_n. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.*

<u>Решение</u>. Если при сложении двух чисел получилось k переносов, то сумма цифр суммы меньше суммы сумм цифр слагаемых на $9k$. Таким образом, если мы рассмотрим сумму цифр всех слагаемых и сравним с суммой цифр итоговой суммы, первая будет на $9n$ больше, где n — количество переносов, которые происходили в процессе сложения. Отсюда следует утверждение задачи.

♦ Доказано только, что количество переносов в последнем разряде не зависит от порядка сложений — *4 балла*. Неразбор хотя бы одного существенного случая — *не более 6 баллов*.

5. *Даны шесть точек в пространстве; никакие четыре из них не лежат в одной плоскости, никакие пять не лежат на одной сфере. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что описанные окружности этих троек зацеплены.*

<u>Решение</u>. Совершим инверсию с центром в одной из наших точек O. Нам достаточно доказать, что прямая, проходящая через два образа A, E, пересекает внутренность круга, описанного около трёх оставшихся образов BCD. Действительно, тогда любая полуплоскость с границей AE пересекает окружность (BCD) в одной точке, не лежащей на границе полуплоскости. При обратной инверсии получаем, что окружность, содержащая прообразы B, C, D, пересекает описанный круг остальных трёх исходных точек ровно в одной точке не на границе, что и требовалось.

Рассмотрим выпуклую оболочку пяти образов. Если у неё 4 вершины, то это тетраэдр $ABCD$, а пятый образ E лежит внутри него. Тогда прямая AE пересекает даже треугольник BCD. Пусть вершин пять. Поскольку все грани треугольные, этих граней 6 (из формулы Эйлера). Кроме того, в каждой грани есть максимум одна вершина степени 3. Отсюда вытекает, что наш многогранник — это объединение двух тетраэдров $ABCD$ и $EBCD$. Тогда опять прямая AE пересекает треугольник BCD.

♦ Не доказано, что инверсия сохраняет свойство зацепленности — *дыра в 6 баллов, задача решена*. Неразбор хотя бы одного существенного случая расположения точек: *не более 6 баллов*.

6. *В некоторой стране есть несколько шпионов, некоторые пары из них имеют секретные каналы связи. Непустая группа шпионов А называется* ***опергруппой****, если любой шпион из А может передать сообщение любому другому шпиону из А —*

возможно, через посредников из этой же группы (в частности, любой шпион образует отдельную опергруппу). Две опергруппы связаны, если они не пересекаются, а их объединение — также опергруппа. Резидент составил схему связей между опергруппами, но в этой схеме отсутствуют указания на составы опергрупп. Докажите, что, получив эту схему, контрразведка может восстановить схему связей между шпионами.

Решение. Пусть G — граф связей между шпионами, а H — граф связей между опергруппами. Изолированными в H являются вершины, соответствующие компонентам связности. Остальные компоненты связности в H соответствуют неодноэлементным компонентам в G. По этим данным мы восстанавливаем число компонент связности и изолированных вершин в G. Осталось по компоненте связности H' в H восстановить компоненту G' в G, то есть решить задачу для связного графа G. Этим мы и займёмся. Мы отождествляем вершины H с соответствующими подмножествами вершин в G.

Граф G — индуцированный подграф в H (опергруппы из одного шпиона связаны так же, как и сами шпионы); назовём соответствующие вершины *уникумами*. Значит, достаточно восстановить, какие вершины H являются уникумами. Для этого, в свою очередь, достаточно найти одного уникума v и определить, какие вершины в H соответствуют опергруппам, содержащим v (переходя к той же задаче для графа G–$\{v\}$, который, кстати, окажется связным).

Пусть X — вершина степени 1 в H. Если в G есть хотя бы две вершины, не лежащие в X, то вне X есть вершина u, соединённая с X, и ещё одна вершина v. Тогда множество $\{u\}$ и множество вершин пути из v в X соединены с X в H, то есть степень X в H не меньше 2, что не так. Итак, X содержит все вершины G, кроме некоторой вершины v, при этом v не является точкой сочленения. Наоборот, если v — не точка сочленения в G (как известно, такая вершина есть), то G–$\{v\}$ есть вершина степени 1 в H. Значит, вершина степени 1 в H есть, и мы нашли вершину H, соответствующую $\{v\}$.

Пусть N — множество всех соседей v в G. Разделим все вершины H, кроме $\{v\}$ и G, на пять множеств: A — содержащие $N \cup \{v\}$; M — содержащие N, но не v; U — содержащие v, но не содержащие N; S — не содержащие v, не содержащие N, но пересекающие N; Q — не пересекающие N (и, как следствие. не содержащие v). Нетрудно понять, что вершины, не соединённые с $\{v\}$ путём длины ровно 2 в H, образуют множество $U \cup S \cup Q$, отсюда находится множество $A \cup M$. При этом вершины M — соседние с $\{v\}$, а вершины A — нет. Таким образом, определены множества M и A. Осталось различить U, S и Q. Q есть множество оставшихся вершин H, соединённых с какой–то вершиной из A. Разделить S и U можно по признаку, соединена ли вершина с $\{v\}$ в графе H или нет.

♦ Решение задачи для связного графа: *не менее 10 баллов*. Сведение к этому разбору *не оценивается*. Нахождение в графе опергрупп вершины, соответствующей одноэлементному множеству: *2 балла*.

7. *Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство*

$$\frac{a(b+c)^2}{1+a}+\frac{b(c+a)^2}{1+b}+\frac{c(a+b)^2}{1+c} \geq 4\frac{a^2\sqrt{bc}}{1+a}+4\frac{b^2\sqrt{ca}}{1+b}+4\frac{c^2\sqrt{ab}}{1+c}$$

Решение. Перепишем каждое слагаемое из левой части как

$$\frac{a(b+c)^2}{1+a}=\frac{a(3-a)(b+c)}{1+a}=3a(b+c)-\frac{4a^2(b+c)}{1+a}.$$

Перенося вычитаемые в правую часть и деля на 2, получаем, что требуемое неравенство равносильно неравенству

$$3(ab+bc+ca)\geq 2\sum\frac{a^2\left(b+\sqrt{bc}+c\right)}{1+a}.$$

Применяя сначала неравенство о средних к знаменателям правой части, а затем неравенство Коши–Буняковского–Шварца к полученному, имеем

.

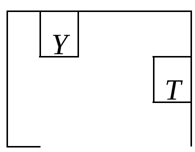
Поскольку $a+b+c=3$, осталось доказать, что

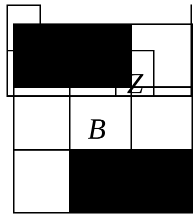
$$\sum a^2\left(b+\sqrt{bc}+c\right)^2\leqslant 3(ab+bc+ca)^2.$$

Это проверяется, например, раскрытием скобок: разность правой и левой частей есть $\left(ab+bc+ca-a\sqrt{bc}-b\sqrt{ca}-c\sqrt{ab}\right)^2$ (для облегчения вычислений здесь полезно перейти к переменным $1/a$, $1/b$, $1/c$).

8. *Петя красит все клетки квадрата A размера 444×444 в чёрный и белый цвета. Затем в другом квадрате B размера 150×150 он отмечает 150 клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке. После этого Вася пытается удалить из A некоторые 294 строки и 294 столбца и сдвинуть оставшиеся части (не меняя порядка строк и столбцов) так, чтобы после наложения (без поворотов) квадрата B на полученный квадрат 150×150 все 150 отмеченных в B клеток наложились бы на одноцветные. Обязательно ли Вася сможет это сделать?*

Ответ. Не обязательно. Решение. Будем считать, что столбцы пронумерованы слева направо, а строки — сверху вниз.





A

Разделим A на 9 квадратов 148×148, и полученные три строки и три столбца будем называть *жирными* строками и столбцами соответственно. Раскрасим в первой жирной строке первые два квадрата в черный, а в третьей жирной строке последние два в черный, остальные клетки оставим белыми (см. рис. справа). В квадрате B закрасим четыре клетки, образующие квадрат: в первом столбце 149-ю клетку X, во втором — первую клетку Y, в 149-м — 150-ю клетку Z, а в 150-м — вторую клетку T (см. рис. слева). В остальных столбцах отметим клетки произвольным образом. Докажем, что из A нельзя удалить 294 строки и 294 столбца так, чтобы клетки X, Y, Z и T накладывались на одноцветные.

Предположим, что клетка X оказалась белой. Клетка Y не может лежать в третьей жирной строке и в третьей жирном столбце, следовательно, клетка Y будет лежать во второй жирной строке, а тогда клетка Z окажется черной, противоречие.

Предположим, что клетка X черная, тогда X лежит в последней жирной строке и во втором или третьем столбце. Клетка T не может лежать в третьей жирной строке и в первом жирном столбце. Следовательно, T лежит во втором жирном столбце, что невозможно.

♦ Пример только одного из квадратов A или B *не оценивается*. Пример обоих квадратов без обоснования: *6 баллов*.

9. *CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.*

Решение. Обозначим через T, M, N центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и середины сторон AC и AB соответственно. Тогда точки C, A_1, A, C_1 будут лежать на окружности с центром в точке M, поэтому TM — серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Точки B, C_1, C, B_1 лежат на одной окружности, поэтому $2\angle MNA = 2\angle CBA = 2\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1TC_1 = 2\angle MTC_1$, поэтому точки C_1, N, M, T лежат на одной окружности. Но поскольку эта окружность проходит через две середины сторон и основание высоты треугольника ABC, то она является окружностью девяти точек этого треугольника.

10. *Решите уравнение $x^3–x+9 = 5y^2$ в целых числах.*

Ответ. Корней нет. Решение. Заметим, что левая часть всегда делится на 3, откуда $y = 3z$ и уравнение приобретает вид $x^3–x+9 = 45z^2$ или $(x–1)x(x+1) = 9(5z^2–1)$. Поскольку в левой части стоит три последовательных целых числа, ровно одно из них делится на 3. Также заметим, что правая часть дает остаток 1 при делении на 5, откуда x дает остаток 2 при делении на 5.

Пусть $5z^2–1$ делится на некоторое простое p. Тогда 5 является квадратичным вычетом по модулю p. Откуда, согласно квадратичному закону взаимности, либо $p = 2$, либо p имеет вид $5k±1$. В частности, $5z^2–1$ не делится на 3. Выберем из чисел x и $x+1$ нечетное. Тогда в его разложение на простые множители могут войти только 9 и простые вида $5k±1$ в натуральных степенях, т.е. либо x, либо $x+1$ имеет вид $5k±1$. Это не так, поскольку x имеет вид $5k+2$.

♦ Доказано только, что y делится на 3, а x–2 делится на 5: *2 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Первая лига, 4 тур, бои за 5-8 места, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \neq A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.*

Решение. Из теоремы Чевы для треугольника ABC и точки P получаем, что $AE/EB = AD/DC$, откуда вытекает, что $ED \parallel AC$. Так как четырехугольник $BCXY$ вписан, то $\angle BXY = \angle BCY = \angle ED$, следовательно, четырехугольник $EDXY$ вписан, откуда $PD\cdot PX = PE\cdot PY$. Это означает, что точка P лежит на радикальной оси AT окружностей AXD и AYE, что и требовалось доказать.

2. *Из всевозможных подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ выделены $2^{n-1}+1$ подмножеств. Вася хочет выбрать $n-1$ выделенных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ так, чтобы по ответам на вопросы вида: «Лежит ли число в A_i?» однозначно определялось число от 1 до n. Докажите, что у Васи всё получится.*

Решение. Скажем, что система подмножеств $A_1, ..., A_d$ *разделяющая*, если она удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что система разделяющая тогда и только тогда, когда для любых различных $i, j \in S$ найдётся элемент системы, содержащий ровно один из i и j. Так как количество выделенных подмножеств больше, чем 2^{n-1}, система из всех выделенных подмножеств — разделяющая.

Выберем произвольное непустое выделенное подмножество A_1; оно делит всё множество $S = \{1, 2, \dots, n\}$ на два класса: A_1 и $S \setminus A_1$, которые уже различены между собой. На k-м шаге, если один из полученных классов имеет хотя бы два элемента i и j, мы выбираем A_k, различающее эти два элемента. Это A_k делит наш класс на два (и, возможно, ещё какие-то классы тоже делятся). Максимум за n–1 шаг мы придём к ситуации, когда все классы одноэлементны, что и требовалось.

♦ Доказан критерий (из решения) того, что система разделяющая: *2 балла*.

3. *Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число,* *равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?*

Ответ. 4. Решение. Докажем сначала, что сумма зеленых чисел четна. Пусть на окружности по часовой стрелке записаны красные числа n_1, n_2, ... , n_{100}. Тогда сумма $|n_2-n_1|+...+|n_{99}-n_{100}|+|n_{100}-n_1|$ имеет ту же четность, что и сумма $(n_2-n_1)+...+(n_{99}-n_{100})+(n_{100}-n_1)$, которая четна, так как равна нулю. Пусть соседями синей единицы являются числа m и n. Тогда на втором шаге они заменятся на красные числа $m-1$ и $n-1$, а на третьем на $|(m-1)-(n-1)| = |m-n| \geq 1$. И аналогично с соседями синего числа 100. То есть сумма зеленых чисел хотя бы 2. Если она равна 2, то при движении по любой дуге от синей 1 до синей 100 мы должны получать арифметическую прогрессию. Очевидно, что ее разность не может быть равна 2, а если она равна 1, то сумма зеленых чисел будет равна 196. Значит, она хотя бы 3, и на любой дуге от 1 до 100 стоит не более 33 чисел. Тогда изначально синих чисел было не больше 68. Противоречие. Пример для суммы 4: 2, 4, ..., 98, 100, 99, 97, ... , 1.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*. Доказано только, что сумма зелёных чисел чётна: *2 балла*. Доказано только, что эта сумма больше двух: *2 балла*. Доказтельство того, что эта сумма ненулевая, *не оценивается*.

4. *Даны натуральные a_1, ..., a_n. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.*

Решение. Если при сложении двух чисел получилось k переносов, то сумма цифр суммы меньше суммы сумм цифр слагаемых на $9k$. Таким образом, если мы рассмотрим сумму цифр всех слагаемых и сравним с суммой цифр итоговой суммы, первая будет на $9n$ больше, где n — количество переносов, которые происходили в процессе сложения. Отсюда следует утверждение задачи.

♦ Доказано только, что количество переносов в последнем разряде не зависит от порядка сложений — *4 балла*. Неразбор хотя бы одного существенного случая — *не более 6 баллов*.

5. *Даны шесть точек в пространстве; никакие четыре из них не лежат в одной плоскости, никакие пять не лежат на одной сфере. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что описанные окружности этих троек зацеплены.*

Решение. Совершим инверсию с центром в одной из наших точек O. Нам достаточно доказать, что прямая, проходящая через два образа A, E, пересекает внутренность круга, описанного около трёх оставшихся образов BCD. Действительно, тогда любая полуплоскость с границей AE пересекает окружность (BCD) в одной точке, не лежащей на границе полуплоскости. При обратной инверсии получаем, что окружность, содержащая прообразы B, C, D, пересекает описанный круг остальных трёх исходных точек ровно в одной точке не на границе, что и требовалось.

Рассмотрим выпуклую оболочку пяти образов. Если у неё 4 вершины, то это тетраэдр $ABCD$, а пятый образ E лежит внутри него. Тогда прямая AE пересекает даже треугольник BCD. Пусть вершин пять. Поскольку все грани треугольные, этих граней 6 (из формулы Эйлера). Кроме того, в каждой грани есть максимум одна вершина степени 3. Отсюда вытекает, что наш многогранник — это объединение двух тетраэдров $ABCD$ и $EBCD$. Тогда опять прямая AE пересекает треугольник BCD.

♦ Не доказано, что инверсия сохраняет свойство зацепленности — *дыра в 6 баллов, задача решена*. Неразбор хотя бы одного существенного случая расположения точек: *не более 6 баллов*.

6. *Даны две бесконечные последовательности вещественных чисел $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ такие, что $a_0 > 1/2$, $a_{n+1} \geq a_n$ и $b_{n+1} = a_n(b_n+b_{n+2})$ при всех целых неотрицательных n. Докажите, что последовательность (b_n) ограничена.*

Решение. Так как $a_k > 1/2$ для любого натурального k, верно равенство

$$b_{k+2}^2 - b_k^2 = \frac{(b_{k+1}-b_k)^2 - (b_{k+2}-b_{k+1})^2}{2a_k - 1}$$

Просуммировав эти равенства для k от 0 до n–2, получим

$$b_n^2 + b_{n-1}^2 - b_1^2 - b_0^2 = \frac{(b_1-b_0)^2}{2a_0-1} - \sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{1}{2a_k-1} - \frac{1}{2a_{k+1}-1}\right)(b_{k+2}-b_{k+1})^2 - \frac{(b_n-b_{n-1})^2}{2a_{n-2}-1} \leq \frac{(b_1-b_0)^2}{2a_0-1}$$

Здесь последнее неравенство следует из того, что a_k не убывают и больше 1/2.

Тогда $b_n^2 \leq b_n^2 + b_{n-1}^2 \leq \dfrac{b_1^2 + b_0^2 + (b_1-b_0)^2}{2a_0-1}$, из чего и следует утверждение задачи.

7. *Сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geq 2$) не превосходит n. Докажите, что*

$$\frac{a_1+1}{a_1(a_1+n-1)} + \frac{a_2+1}{a_2(a_2+n-1)} + \ldots + \frac{a_n+1}{a_n(a_n+n-1)} \geq 2.$$

Решение. Левая часть неравенства, как легко проверить, равна

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) + \frac{n-2}{n-1}\left(\frac{1}{a_1+n-1} + \ldots + \frac{1}{a_n+n-1}\right),$$

что не меньше, чем

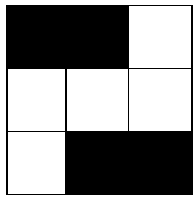
$$\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n^2}{a_1+\ldots+a_n} + \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n^2}{a_1+\ldots+a_n+n(n-1)} \geq \frac{1}{n-1}\cdot\frac{n^2}{n} + \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n^2}{n+n(n-1)} = 2.$$

♦ Левая часть разложена в сумму элементарных дробей: *4 балла*.

8. *Петя красит все клетки квадрата A размера 444×444 в чёрный и белый цвета. Затем в другом квадрате B размера 150×150 он отмечает 150 клеток, никакие две из которых не лежат в одном столбце или в одной строке. После этого Вася пытается удалить из A некоторые 294 строки и 294 столбца и сдвинуть оставшиеся части (не меняя порядка строк и столбцов) так, чтобы после наложения (без поворотов) квадрата B на полученный квадрат 150×150 все 150 отмеченных в B клеток наложились бы на одноцветные. Обязательно ли Вася сможет это сделать?*

Ответ. Не обязательно. Решение. Будем считать, что столбцы пронумерованы слева направо, а строки — сверху вниз.

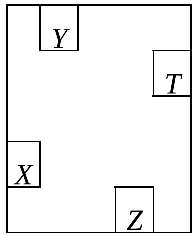
Разделим A на 9 квадратов 148×148, и полученные три строки и три столбца будем называть *жирными* строками и столбцами соответственно. Раскрасим в первой жирной строке первые два квадрата в черный, а в третьей жирной строке последние два в черный, остальные клетки оставим белыми (см. рис. справа). В квадрате B закрасим четыре клетки, образующие квадрат: в первом столбце 149-ю клетку X, во втором — первую клетку Y, в 149-м — 150-ю клетку Z, а в 150-м — вторую клетку T (см. рис. слева). В остальных столбцах отметим клетки произвольным образом. Докажем, что из A нельзя удалить 294 строки и 294 столбца так, чтобы клетки X, Y, Z и T накладывались на одноцветные.



A

Предположим, что клетка X оказалась белой. Клетка Y не может лежать в третьей жирной строке и в третьей жирном столбце, следовательно, клетка Y будет лежать во второй жирной строке, а тогда клетка Z окажется черной, противоречие.

Предположим, что клетка X черная, тогда X лежит в последней жирной строке и во втором или третьем столбце. Клетка T не может лежать в третьей жирной строке и в первом жирном столбце. Следовательно, T лежит во втором жирном столбце, что невозможно.



B

♦ Пример только одного из квадратов A или B *не оценивается*. Пример обоих квадратов без обоснования: *6 баллов*.

9. *CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.*

Решение. Обозначим через T, M, N центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и середины сторон AC и AB соответственно. Тогда точки C, A_1, A, C_1 будут лежать на окружности с центром в точке M, поэтому TM — серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Точки B, C_1, C, B_1 лежат на одной окружности, поэтому $2\angle MNA = 2\angle CBA = 2\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1TC_1 = 2\angle MTC_1$, поэтому точки C_1, N, M, T лежат на одной окружности. Но поскольку эта окружность проходит через две середины сторон и основание высоты треугольника ABC, то она является окружностью девяти точек этого треугольника.

10. *Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2–bc$ — квадрат целого числа. Докажите, что число $2a+b+c$ — составное.*

Решение. Решение. Пусть $a^2–bc = k^2$, то есть $(a–k)(a+k) = bc$. Как известно, тогда сумма четырёх сомножителей в двух равных произведениях $(a–k)+(a+k)+b+c$ — составное число, что и требовалось доказать.

♦ Сведение к факту, названному в решении известным: *6 баллов*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая лига, 4 тур, бои за 1-4 места, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Докажите, что для каждого натурального числа a найдется такое натуральное число $b > a$, что $1+2^b+3^b$ делится на $1+2^a+3^a$.*

Решение. Пусть $1+2^a+3^a = 2^r3^sm$, где m не делится ни на 2, ни на 3. Нужно, чтобы число $N = 1+2^b+3^b-(1+2^a+3^a) = 2^a(2^{b-a}-1)+3^a(3^{b-a}-1)$ по отдельности делилось на 2^r, на 3^s и на m. Положим $b-a = k$. Делимость на m мы обеспечим, если выберем k делящимся на $\varphi(m)$ (теорема Эйлера). Далее, так как 3^a по модулю 8 дает остатки 1 и 3, то $1+2^a+3^a$ при $a > 2$ сравнимо с 2 или 4 по модулю 8, то есть $r = 1$ или $r = 2$. При $a = 2$ $r = 2$. Если выбрать k четным, то 3^k-1 будет делиться на 4, 2^a при $a > 1$ делится на 4, поэтому N будет делиться на 4. Наконец, $s \le a$ (так как иначе $2^r3^sm > 1+2^a+3^a$), и, так как 3^s делит $1+2^a+3^a$ и 3^a, то 3^s делит $1+2^a$. Значит, если выбрать k делящимся на $2a$, пусть $k = 2az$, то $2^k-1 = (2^{2a})^z-1 = (2^a-1)(2^a+1)(...)$ будет делиться на 3^s. Поэтому и число N будет делиться на 3^s. В итоге, если выбрать $k = 2a\varphi(m)$, то число N будет делится на 2^r3^sm, за исключением $a = 1$. Но при $a = 1$ подходит $b = 3$.

2. *Физик-экспериментатор загнал в магнитную ловушку 2015 атомов. У каждого из этих атомов 0 или 1 электронов. У физика нет прибора, который мог бы узнавать количество электронов. Зато он в результате некоторой процедуры может делать следующее: брать два атома A и B, и если у A есть электрон, а у B нет электрона, то электрон обязательно переходит из A в B. В противном случае (в т.ч., когда у A нет электрона, а у B есть) ничего не меняется. К сожалению, физик не узнаёт при этом, случился переход электрона или нет. Может ли физик, многократно применив эту процедуру, точно указать, вне зависимости от начального распределения электронов, на два атома с одинаковым (в тот момент, когда он на них указывает) числом электронов?*

Ответ. Не может. Решение. Пусть Судьба играет против физика следующим образом. Судьба нумерует атомы числами 1, 2, ..., 2015 и заводит 2014 списков, как потенциально могут быть распределены электроны: в списке №k атомы 1, 2, ..., k имеют 0 электронов, а остальные атомы — 1 электрон. Это количество электронов никак не соотносится с реальным числом электронов в атомах. Когда физик применяет процедуру к двум атомам A и B, то Судьба модифицирует каждый из этих 2013 списков в соответствии с тем, как переходит электрон. Более подробно, если в списке №k у A есть электрон, а у B нет электрона, то происходит переход электрона; иначе список №k не меняется. После этого списки №1, ..., №2014 снова оказываются «согласованными»: можно так обозначить атомы символами b_1, ..., b_{2015}, что в списке №k у атомов b_1, ..., b_k будет 0 электронов, у остальных атомов 1 электрон.

Основное свойство наших списков состоит в том, что для любых двух атомов в любой момент времени найдется такой список №k, в котором эти атомы имеют разное число электронов. Когда физик заканчивает применять процедуру и указывает на 2 атома с якобы одинаковым числом электронов, Судьба находит именно тот список №k, в котором эти атомы имеют разное число электронов, и предъявляет физику конкретный пример, показывающий, что физик не прав: изначально электроны могли быть распределены так, что после применения всех процедур как раз и получится список №k. А в нем у атомов A и B разное число электронов.

3. *CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1) Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.*

Решение. Обозначим через T, M, N центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и середины сторон AC и AB соответственно. Тогда точки C, A_1, A, C_1 будут лежать на окружности с центром в точке M, поэтому TM — серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Точки B, C_1, C, B_1 лежат на одной окружности, поэтому $2\angle MNA = 2\angle CBA = 2\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1TC_1 = 2\angle MTC_1$, поэтому точки C_1, N, M, T лежат на одной окружности. Но поскольку эта окружность проходит через две середины сторон и основание высоты треугольника ABC, то она является окружностью девяти точек этого треугольника.

4. *Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?*

Ответ. При $k = 895$. Решение. Пронумеруем строки и столбцы квадрата числами от 1 до 15. Рассмотрим клетки таблицы, которые стоят на пересечении строк и столбцов с номерами, делящимися на 4. Очевидно, каждый квадратик 4×4 содержит ровно одну из них, поэтому после 2015 ходов сумма чисел в них будет равна 2015. Выделим квадрат 3×3, состоящий из этих клеток. В нем посчитаем один раз сумму чисел в четырех квадратах 2×2, три раза сумму в квадрате с вершинами в центрах угловых клеток и два раза в квадрате с вершинами в центрах клеток, являющихся серединами сторон. В итоге число в каждой клетке мы посчитаем 4 раза, поэтому хотя бы в одном квадрате сумма должна быть больше, чем $[4*2015/9] = 895$. Построим пример для $k = 896$ и 2016 ходов (для 2015 тогда тоже получится). Произвольный квадрат 12×12 разбиваем на 9 квадратов 4×4 и к каждому 224 раза применяем операцию прибавления 1. В любом квадрате числа в вершинах на превосходят 224, поэтому сумма их не превосходит 896.

♦ Только пример: *4 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

5. *На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а* *остальные n прямых — в синий цвет. Докажите, что найдутся хотя бы две области, у которых границы полностью красные.*

Решение. Известно, что $2n$ красных прямых общего положение делят плоскость на $n(2n+1)+1$ частей. При этом каждая синяя прямая пересекает не более $2n+1$ из этих областей. Кроме того, если взять две прямые, то вместе они пересекают не более $4n+1$ областей, так как область, в которой лежит точка пересечения этих прямых, они пересекают обе. Это значит, что все синие прямые вместе пересекают не больше $n(2n+1)-1$ областей, и хотя бы две из этих областей не пересекаются синими прямыми, то есть имеют красную границу.

♦ Доказано, что есть хотя бы одна красная область: *2 балла*.

6. *Даны натуральные $a_1, \ldots, a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.*

Решение. Если при сложении двух чисел получилось k переносов, то сумма цифр суммы меньше суммы сумм цифр слагаемых на $9k$. Таким образом, если мы рассмотрим сумму цифр всех слагаемых и сравним с суммой цифр итоговой суммы, первая будет на $9n$ больше, где n — количество переносов, которые происходили в процессе сложения. Отсюда следует утверждение задачи.

7. *Из всевозможных подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ выделены $2^{n-1}+1$ подмножеств. Вася хочет выбрать $n-1$ выделенных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ так, чтобы по ответам на вопросы вида: «Лежит ли число в A_i?» однозначно определялось число от 1 до n. Докажите, что у Васи всё получится.*

Решение. Скажем, что система подмножеств $A_1, ..., A_d$ *разделяющая*, если она удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что система разделяющая тогда и только тогда, когда для любых различных $i, j \in S$ найдётся элемент системы, содержащий ровно один из i и j. Так как количество выделенных подмножеств больше, чем 2^{n-1}, система из всех выделенных подмножеств — разделяющая.

Выберем произвольное непустое выделенное подмножество A_1; оно делит всё множество $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ на два класса: A_1 и $S \setminus A_1$, которые уже различены между собой. На k-м шаге, если один из полученных классов имеет хотя бы два элемента i и j, мы выбираем A_k, различающее эти два элемента. Это A_k делит наш класс на два (и, возможно, ещё какие-то классы тоже делятся). Максимум за n–1 шаг мы придём к ситуации, когда все классы одноэлементны, что и требовалось.

8. *Докажите, что для вещественных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ выполняется неравенство $a_1a_2(a_1-a_2)+a_2a_3(a_2-a_3)+\ldots+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n) \geq a_1a_n(a_1-a_n)$.*

Решение. Докажем неравенство индукцией по n. При $n = 2$ неравенство обращается в равенство. Пусть неравенство верно при некотором $n > 2$. Тогда

$$a_1a_2(a_1-a_2)+a_2a_3(a_2-a_3)+\ldots+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n)+a_na_{n+1}(a_n-a_{n+1}) \geq$$
$$a_1a_n(a_1-a_n)+a_na_{n+1}(a_n-a_{n+1}) \geq a_1a_{n+1}(a_1-a_{n+1}),$$

так как разность

$$a_1 a_n(a_1 - a_n) + a_n a_{n+1}(a_n - a_{n+1}) - a_1 a_{n+1}(a_1 - a_{n+1}) = (a_n - a_{n+1})(a_1 - a_n)(a_1 - a_{n+1})$$

раскладывается на множители, каждый из которых неотрицателен.

9. *Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \neq A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.*

Решение. Из теоремы Чевы для треугольника ABC и точки P получаем, что $AE/EB = AD/DC$, откуда вытекает, что $ED \parallel AC$. Так как четырехугольник $BCXY$ вписан, то $\angle BXY = \angle BCY = \angle ED$, следовательно, четырехугольник $EDXY$ вписан, откуда $PD{\cdot}PX = PE{\cdot}PY$. Это означает, что точка P лежит на радикальной оси AT окружностей AXD и AYE, что и требовалось доказать.

10. *Дано натуральное число a. Докажите, что каждое натуральное число N представимо в виде $N = ax+(a, x)+[a, x]$ (x — натуральное число) не более чем одним способом. Напомним, что (a, b) и $[a, b]$ — это, соответственно, НОД и НОК чисел a и b.*

Решение. Пусть для некоторого натурального N выполняется равенство $N = ax+(a, x)+[a, x] = ay+(a, y)+[a, y]$, где x и y — натуральные числа. Из определения НОК и НОД следует, что $(a, N) = (a, ax+(a, x)+[a, x]) = (a, (a, x)) = (a, x)$. Аналогично, $(a, N) = (a, y)$. Обозначим (a, N) через d. Тогда из равенства $(a, b)[a, b] = ab$ следует, что $[a, x]) = ax/d$, и поэтому $N = ax+(a, x)+[a, x] = ax+d+ax/d$. Аналогично $N = ay+d+ay/d$. Приравнивая эти выражения, получаем: $ax(1+1/d) = ay(1+1/d\ )$, то есть $x = y$, что и требовалось доказать.

♦ Доказано, что $(a, x) = (a, y)$: *4 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая лига, 4 тур, бои за 5-8 места, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Последовательность натуральных чисел такова, что $a_{n-1}a_{n+1}$ делится на a_n^2 для всех $n \geq 1$. Докажите, что если некоторое число a_k взаимно просто с a_1, то a_0 делится на a_1.*

Решение. Для простого числа p обозанчим через $v_p(n)$ наибольшее число m, для которого n делится на p^m. Предположим противное, пусть a_0 не делится на a_1. Тогда найдется простое число p, для которого $vp(a_0) < vp(a_1)$. Так как $2v_p(a_1)$\leqsl*an*t $vp(a_0)+vp(a_2) < vp(a_1)+vp(a_2)$, то $vp(a_1) < vp(a_2)$. Рассуждая аналогично, получаем, что $vp(a_m) < vp(a_{m+1})$. Но тогда $0 < v_p(a_1) < v_p(a_k)$, то есть a_1 и a_k оба делятся на p — противоречие с их взаимной простотой.

2. *Физик-экспериментатор загнал в магнитную ловушку 2015 атомов. У каждого из этих атомов 0 или 1 электронов. У физика нет прибора, который мог бы узнавать количество электронов. Зато он в результате некоторой процедуры может делать следующее: брать два атома A и B, и если у A есть электрон, а у B нет электрона, то электрон обязательно переходит из A в B. В противном случае (в т.ч., когда у A нет электрона, а у B есть) ничего не меняется. К сожалению, физик не узнаёт при этом, случился переход электрона или нет. Может ли физик, многократно применив эту процедуру, точно указать, вне зависимости от начального распределения электронов, на два атома с одинаковым (в тот момент, когда он на них указывает) числом электронов?*

Ответ. Не может. Решение. Пусть Судьба играет против физика следующим образом. Судьба нумерует атомы числами 1, 2, ..., 2015 и заводит 2014 списков, как потенциально могут быть распределены электроны: в списке №k атомы 1, 2, ..., k имеют 0 электронов, а остальные атомы — 1 электрон. Это количество электронов никак не соотносится с реальным числом электронов в атомах. Когда физик применяет процедуру к двум атомам A и B, то Судьба модифицирует каждый из этих 2013 списков в соответствии с тем, как переходит электрон. Более подробно, если в списке №k у A есть электрон, а у B нет электрона, то происходит переход электрона; иначе список №k не меняется. После этого списки №1, ..., №2014 снова оказываются «согласованными»: можно так обозначить атомы символами b_1, ..., b_{2015}, что в списке №k у атомов b_1, ..., b_k будет 0 электронов, у остальных атомов 1 электрон.

Основное свойство наших списков состоит в том, что для любых двух атомов в любой момент времени найдется такой список №k, в котором эти атомы имеют разное число электронов. Когда физик заканчивает применять процедуру и указывает на 2 атома с якобы одинаковым числом электронов, Судьба находит именно тот список №k, в котором эти атомы имеют разное число электронов, и предъявляет физику конкретный пример, показывающий, что физик не прав: изначально электроны могли быть распределены так, что после применения всех процедур как раз и получится список №*k*. А в нем у атомов *A* и *B* разное число электронов.

3. *Точка M — середина дуги BC описанной окружности треугольника остроугольного ABC, не содержащей точки A. Высота из вершины A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке N. Через центр описанной окружности проведены прямые, параллельные MB и MC, пересекающие отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что NK = NL.*

Из параллельности *OK* и *MB*, *OL* и *MC* имеем $\angle OKA + \angle OLA = \angle MBA + \angle MCA = \pi$. Значит, четырехугольник *OKAL* — вписанный. Пусть ω — описанная около него окружность и *S* — точка пересечения *AN* и ω. Из равенства $\angle OAB = \frac{1}{2}(\pi - \angle BOA) = \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \angle NAC$ следует, что дуги *KO* и *SL* окружности ω равны и, значит, *OSKL* — равнобедренная трапеция. Поэтому серединные перпендикуляры к сторонам *OS* и *LK* совпадают. Рассмотрим случай, когда точка *N* лежит на дуге *MB* (случай, когда точка *N* лежит на дуге *MC*, разбирается аналогично) Из равенства $\angle OSA = \angle OKA = \angle MBA = \angle MNA$ следует параллельность *MN* и *OS*. Но *OM* и *SN* — перпендикуляры к стороне *BC*, поэтому *OMNS* — параллелограмм. Поэтому *SN* = *OM* = *ON*, то есть точка *N* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *OS*, а, значит, и к *LK*.

4. *Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?*

Ответ. При *k* = 895. Решение. Пронумеруем строки и столбцы квадрата числами от 1 до 15. Рассмотрим клетки таблицы, которые стоят на пересечении строк и столбцов с номерами, делящимися на 4. Очевидно, каждый квадратик 4×4 содержит ровно одну из них, поэтому после 2015 ходов сумма чисел в них будет равна 2015. Выделим квадрат 3×3, состоящий из этих клеток. В нем посчитаем один раз сумму чисел в четырех квадратах 2×2, три раза сумму в квадрате с вершинами в центрах угловых клеток и два раза в квадрате с вершинами в центрах клеток, являющихся серединами сторон. В итоге число в каждой клетке мы посчитаем 4 раза, поэтому хотя бы в одном квадрате сумма должна быть больше, чем [4*2015/9] = 895. Построим пример для *k* = 896 и 2016 ходов (для 2015 тогда тоже получится). Произвольный квадрат 12×12 разбиваем на 9 квадратов 4×4 и к каждому 224 раза применяем операцию прибавления 1. В любом квадрате числа в вершинах на превосходят 224, поэтому сумма их не превосходит 896.

♦ Только пример: *4 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

5. *На плоскости проведено 3n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. 2n прямых покрашены в красный цвет, а остальные*

n прямых — в синий цвет. Докажите, что найдется область, у которой граница полностью красная.

<u>Решение</u>. Хорошо известно, что $2n$ красных прямых общего положение делят плоскость на $n(2n+1)+1$ частей. При этом каждая синяя прямая пересекает $2n+1$ из этих областей. Это значит, что вместе они пересекают не больше $n(2n+1)$ областей, и одна из областей не пересекается синими прямыми, то есть имеет красную границу.

6. *Даны натуральные $a_1, \ldots, a_n$. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.*

<u>Решение</u>. Если при сложении двух чисел получилось k переносов, то сумма цифр суммы меньше суммы сумм цифр слагаемых на $9k$. Таким образом, если мы рассмотрим сумму цифр всех слагаемых и сравним с суммой цифр итоговой суммы, первая будет на $9n$ больше, где n — количество переносов, которые происходили в процессе сложения. Отсюда следует утверждение задачи.

7. *На доске в один ряд записаны по порядку числа 1, ..., 200. Юра должен поставить перед каждым числом знак плюс или минус таким образом, чтобы для каждого положительного целого числа $n \le 100$ перед числом n и перед каким–либо из его кратных стояли различные знаки. Как Юра должен поставить знаки, чтобы значение полученного выражения оказалось как можно больше?*

<u>Ответ</u>. Минусы перед всеми числами от 51 до 100 и плюсы перед всеми остальными. <u>Решение</u>. Докажем, что для получения наибольшей суммы Юра должен поставить минусы перед числами 51, 52,..., 100, а перед всеми остальными числами поставить плюсы. Прежде всего заметим, что этот пример удовлетворяет условию. Рассмотрим произвольную расстановку знаков. Пусть перед числами $a_1,\ldots, a_m \in \{51,\ldots, 100\}$ стоят минусы, а перед остальными числами из множества $\{51,\ldots, 100\}$ стоят плюсы. Заметим, что для каждого a_k или перед $2a_k$, или перед $3a_k$ (возможно, одновременно) стоит минус. Все такие числа $2a_k$ и $3a_k$, перед которыми стоит минус, назовем отмеченными. Теперь изменим знаки у всех чисел $a_1,\ldots, a_m$, а перед всеми числами 101,..., 200 поставим плюсы (очевидно, что при этом получится допустимая по условию расстановка знаков). В самом деле, перед любым отмеченным числом u был знак минус, а стал плюс. При этом это число u могло быть отмечено только исходя из чисел $u/2$ и $u/3$. Но $u > u/2+u/3$. То есть за счет изменения знаков в тройке чисел u, $u/2$, $u/3$ сумма чисел в этой тройке возросла. Заметим, что некоторые числа от 51 до 100 могли входит в несколько таких троек, это только усиливает наши рассуждения. Что касается неотмеченных чисел от 101 до 200, то изменение знака у какого-то из них с минуса на плюс тоже увеличивает сумму. Наконец, все минусы у чисел от 1 до 50 превратим в плюсы. Сумма от этого увеличится, а расстановка знаков получится допустимой по условию.

♦ Только пример: *2 балла*.

8. *Назовем два числа $u,v \in$ **R дружащими**, если $|u–v| = 10^k$ для некоторого целого числа k. Линейная функция $g(x) = ax+b$ обладает тем свойством, что для некоторых дружащих* *чисел u и v числа g(u) и g(v) — дружащие. Докажите, что тогда для любых дружащих чисел u и v числа g(u) и g(v) — дружащие.*

Решение. Если u и v — те дружащие числа, для которых $g(u)$ и $g(v)$ дружащие, то $|g(u)–g(v)| = |a||u–v| = |a||u–v| = |a|10^k = 10^l$. Тем самым $|a| = 10^{l–k}$. Но тогда если s и t — дружащие числа, $|s–t| = 10^m$, то $|g(s)–g(t)| = |a||s–t| = 10^{l–k+m}$, и числа $g(s)$ и $g(t)$ оказываются дружащими.

9. *Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке $T \neq A$. Докажите, что T лежит на прямой AM.*

Решение. Из теоремы Чевы для треугольника ABC и точки P получаем, что $AE/EB = AD/DC$, откуда вытекает, что $ED \parallel AC$. Так как четырехугольник $BCXY$ вписан, то $\angle BXY = \angle BCY = \angle ED$, следовательно, четырехугольник $EDXY$ вписан, откуда $PD{\cdot}PX = PE{\cdot}PY$. Это означает, что точка P лежит на радикальной оси AT окружностей AXD и AYE, что и требовалось доказать.

10. *Дано натуральное число a. Докажите, что каждое натуральное число N представимо в виде $N = ax+(a, x)+[a, x]$ (x — натуральное число) не более чем одним способом. Напомним, что (a, b) и $[a, b]$ — это, соответственно, НОД и НОК чисел a и b.*

Решение. Пусть для некоторого натурального N выполняется равенство $N = ax+(a, x)+[a, x] = ay+(a, y)+[a, y]$, где x и y — натуральные числа. Из определения НОК и НОД следует, что $(a, N) = (a, ax+(a, x)+[a, x]) = (a, (a, x)) = (a, x)$. Аналогично, $(a, N) = (a, y)$. Обозначим (a, N) через d. Тогда из равенства $(a, b)[a, b] = ab$ следует, что $[a, x] = ax/d$, и поэтому $N = ax+(a, x)+[a, x] = ax+d+ax/d$. Аналогично $N = ay+d+ay/d$. Приравнивая эти выражения, получаем: $ax(1+1/d) = ay(1+1/d)$, то есть $x = y$, что и требовалось доказать.

♦ Доказано, что $(a, x) = (a, y)$: *4 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Третья лига, 4 тур, бои за 1-6 места, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На плоскости проведено $3n$ прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. $2n$ прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых в синий цвет. Докажите, что найдётся не менее двух областей, у которых вся граница красная.*

Решение. Хорошо известно, что $2n$ красных прямых общего положение делят плоскость на $n(2n+1)+1$ частей. При этом каждая синяя прямая пересекает $2n+1$ из этих областей, причём найдётся область, которую пересекут две такие прямые (область, содержащая их точку пересечения). Это значит, что вместе они пересекают не больше $n(2n+1)$ областей, и одна из областей не пересекается синими прямыми, то есть имеет красную границу.

♦ Доказано только наличие одной красной области: *2 балла*.

2. *На доске написано число 2. Петя и Вася играют в такую игру. Петя записывает на доску число, делящееся на 2, затем Вася выписывает число, делящееся на 3, затем Петя – число, делящееся на 4 и т.д. При этом новое число нужно получить из предыдущего либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив цифры предыдущего числа (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Второе число Петя получает, дописав в конце 4. Теперь на доске записано 24. Далее, если Вася своим ходом превратил число A в число B, Петя снова превращает B в A. Это не противоречит правилам, поскольку число 24 делится на 4, 6, 8. Чтобы число Васи делилось на 9, он должен дописать 3. Затем Петя добавляет 0. После этого Вася должен превратить 2430 в число, делящееся на 11. Признак делимости на 11 показывает, что перестановкой цифр или зачёркиванием этого добиться невозможно. Но добавлением цифры этого тоже не сделаешь, поскольку число 24300 при делении на 11 даёт остаток 1, и прибавлением цифры остаток 0 не получается.

3. *В треугольнике ABC центр вписанной окружности I равноудалён от вершины C и середины M стороны AB. Найдите наибольшее возможное значение угла CIM.*

Ответ. 150°. Решение. Пусть K, N, L – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно. Тогда треугольники KIM и CIN равны по катету и гипотенузе. Из этого следует: $\angle CIN = \angle KIM$ и $\angle CIM = \angle KIN = 180°-\angle B$. Поэтому угол CIM максимален, когда угол B минимален. Кроме того, используя традиционные обозначения для сторон треугольника и полагая $KM = x = CN$, получаем $\frac{c}{2} = x + b - x = b$. Но легко доказать, что, если в треугольнике одна из сторон в два раза меньше другой, то угол, противолежащий меньшей из этих сторон, не превосходит 30°. Прямоугольный треугольник с острым углом 30° даёт нужный пример.

4. *Какие натуральные числа можно представить в виде суммы нескольких (не обязательно всех) своих различных делителей, образующих арифметическую прогрессию?*

Ответ. Те и только те числа, которые делятся на 6. Решение. Пусть $n = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$ — нужное представление, в котором слагаемые упорядочены по возрастанию. Достаточно рассмотреть случай, когда эти делители в совокупности взаимно просты: искомыми будут все кратные найденных чисел. Тогда в силу условия справедливо равенство $НОД(d_1, d_2) = НОД(d_2, d_3) = \ldots = НОД(d_{k-1}, d_k) = 1$, и число n делится на произведение $d_{k-1}d_k$, что приводит к неравенству $kd_k > n \geq (k-1)d_k \Rightarrow n = (k-1)d_k \Rightarrow d_i = i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Но, поскольку слагаемые образуют арифметическую прогрессию, $d_k = k \Rightarrow n = \frac{k(k+1)}{2} = k(k-1) \Rightarrow k = 3, n = 6$, откуда и следует ответ.

♦ Только полный ответ с объяснением: *2 балла*.

5. *Найдите все тройки простых чисел, a, b, c, для которых можно подобрать натуральное число k так, что выполняется равенство* $a^2+b^2+16c^2 = 9k^2+1$.

Ответ. (3, 3, 2), (3, 17, 3), (3, 37, 3). Решение. По модулю 3 показываем, что два слагаемых в левой части должны делиться на 3. Значит, они равны 3. Далее несложный перебор приводит к ответам.

♦ Потеря одного ответа: *не более 4 баллов*.

6. *Изначально дано 16 одноэлементных множеств. За один ход можно взять два множества и добавить к имеющимся множествам их объединение. Можно ли получить все 15-элементные множества менее чем за 64 хода?*

Ответ. Можно. Решение. Расположим одноэлементные множества в ряд. Первыми 8 ходами объединим первое множество со вторым, третье — с четвёртым, …, 15-е с 16-м. следующими 4 ходами получим четырёхэлементные множества {1, 2, 3, 4}, …, {13, 14, 15, 16}. Затем двумя ходами получим восьмиэлементные множества 1-8 и 9-16. Теперь любое 15-элементное множество равно объединению каких-то восьмиэлементного, четырёхэлементного, двухэлементного и одноэлементного множеств из числа имеющихся. Стало быть, оно может быть получено за три хода, и всего нам понадобится 8+4+2+16·3 = 62 хода.

7. *Последовательность чисел строится по следующему правилу:*

$$a_0=1, a_1=2015, a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n-\frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Найдите величину $\dfrac{a_1}{a_2}-\dfrac{a_2}{a_3}+\dfrac{a_3}{a_4}-\dfrac{a_4}{a_5}+\ldots+\dfrac{a_{2013}}{a_{2014}}-\dfrac{a_{2014}}{a_{2015}}.$

Ответ. –1007. Решение. По индукции легко доказывается равенство $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}a_n$. Поэтому искомая величина равна 2–3+4–5+…+2014–2015 = –1007.

8. *Точка P лежит на медиане AM остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а стороны AC и AB в точках D и E соответственно. Описанные окружности треугольников AXD и AYE пересекаются в точке T. Докажите, что T лежит на прямой AM.*

Решение. Из теоремы Чевы для треугольника ABC и точки P получаем, что $AE/EB = AD/DC$, откуда вытекает, что $ED \parallel AC$. Так как четырехугольник $BCXY$ вписан, то $\angle BXY = \angle BCY = \angle ED$, следовательно, четырехугольник $EDXY$ вписан, откуда $PD\cdot PX = PE\cdot PY$. Это означает, что точка P лежит на радикальной оси AT окружностей AXD и AYE, что и требовалось доказать.

9. *Математик Сидоров хочет подобрать два иррациональных числа A и B так, чтоб каждое из трех чисел A^2+B, B^2+A и $A+B$ было рационально, а сумма $A+B$ была равна s. Найдите все значения s, при которых это возможно.*

Ответ. $s = 1$. Решение. *Оценка.* $A^2+B-(B^2+A) = (A-B)(A+B-1)$. Если $A+B \neq 1$, число $A-B$ равно $(A^2+B-(B^2+A))/(A+B-1)$, и потому рационально, а вместе с ним рационально и число $A = ((A-B)+(A+B))/2$ — противоречие. *Пример.* $A = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $B = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

♦ Показано только, что $A+B$ не может быть отлично от 1: *6 баллов*. Только пример: *2 балла*.

10. *Хромой слон ходит как обычный, но на одну клетку. Какое наибольшее число ходов он может сделать, выйдя из угла доски (2N+1)×(2N+1), если ему запрещено становиться на клетку, на которой он уже был?*

Ответ. N^2+1. Решение. Пусть клетки, по которым ходит слон — чёрные. Выделим черные клетки через одну. На рис. они отмечены точками. Ясно, что хромой слон каждый нечётный ход должен сделать в отмеченную клетку, а их всего N^2, т.е. он не может сделать более N^2+1 ходов. Пример обхода из левого нижнего угла: сначала «зигзагом» по первым двум вертикалям поднимаемся до верхней отмеченной клетке, переходим в верхнюю клетку третей вертикали, по третьей и четвёртой вертикалям «зигзагом опускаемся до нижней отмеченной клети, переходим на следующую вертикаль и т.д. Так будут обойдены все отмеченные клетки, после чего делаем ещё один ход в угол.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Третья лига, 4 тур, бои за 7-12 места, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На плоскости проведено 3n прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. 2n прямых покрашены в красный цвет, а остальные n прямых в синий цвет. Докажите, что найдётся область на плоскости, у которых вся граница красная.*

<u>Решение</u>. Хорошо известно, что $2n$ красных прямых общего положение делят плоскость на $n(2n+1)+1$ частей. При этом каждая синяя прямая пересекает $2n+1$ из этих областей. Это значит, что вместе они пересекают не больше $n(2n+1)$ областей, и одна из областей не пересекается синими прямыми, то есть имеет красную границу.

2. *На доске написано число 2. Петя и Вася играют в такую игру. Петя записывает на доску число, делящееся на 2, затем Вася выписывает число, делящееся на 3, затем Петя – число, делящееся на 4 и т.д. При этом новое число нужно получить из предыдущего либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив цифры предыдущего числа (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?*

<u>Ответ</u>. Петя. <u>Решение</u>. Второе число Петя получает, дописав в конце 4. Теперь на доске записано 24. Далее, если Вася своим ходом превратил число A в число B, Петя снова превращает B в A. Это не противоречит правилам, поскольку число 24 делится на 4, 6, 8. Чтобы число Васи делилось на 9, он должен дописать 3. Затем Петя добавляет 0. После этого Вася должен превратить 2430 в число, делящееся на 11. Признак делимости на 11 показывает, что перестановкой цифр или зачёркиванием этого добиться невозможно. Но добавлением цифры этого тоже не сделаешь, поскольку число 24300 при делении на 11 даёт остаток 1, и прибавлением цифры остаток 0 не получается.

3. *В треугольнике ABC центр вписанной окружности I равноудалён от вершины C и середины M стороны AB. Найдите наибольшее возможное значение угла CIM.*

<u>Ответ</u>. 150°. <u>Решение</u>. Пусть K, N, L — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно. Тогда треугольники KIM и CIN равны по катету и гипотенузе. Из этого следует: $\angle CIN = \angle KIM$ и $\angle CIM = \angle KIN = 180°-\angle B$. Поэтому угол CIM максимален, когда угол B минимален. Кроме того, используя традиционные обозначения для сторон треугольника и полагая $KM = x = CN$, получаем

$\frac{c}{2} = x + b - x = b$. Но легко доказать, что, если в треугольнике одна из сторон в два раза меньше другой, то угол, противолежащий меньшей из этих сторон, не превосходит 30°. Прямоугольный треугольник с острым углом 30° даёт нужный пример.

4. *Парабола на координатной плоскости называется* ***красивой****, если её вершина и две точки пересечения с осью абсцисс образуют равносторонний треугольник. Можно ли подобрать два квадратных трёхчлена с красивыми графиками и различными дискриминантами?*

Ответ. Нельзя. Решение. Покажем, что любой квадратный трёхчлен с красивым графиком имеет дискриминант 12. В самом деле, пусть график квадратного трёхчлена $y = ax^2+bx+c$ есть красивая парабола, а x_1 и x_2 — его больший и меньший корни. Тогда сторона соответствующего правильного треугольника есть $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$, а его высота есть $\left|y\left(\frac{-b}{2a}\right)\right| = \left|\frac{D}{4a}\right|$. Из равенства $\left|\frac{D}{4a}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ находим $D = 12$.

5. *Найдите все тройки простых чисел, a, b, c, для которых можно подобрать натуральное число k так, что выполняется равенство $a^2+b^2+16c^2 = 9k^2+1$.*

Ответ. (3, 3, 2), (3, 17, 3), (3, 37, 3). Решение. По модулю 3 показываем, что два слагаемых в левой части должны делиться на 3. Значит, они равны 3. Далее несложный перебор приводит к ответам.

♦ Потеряно одно решение: *не более 4 баллов.*

6. *Надо сделать набор из пяти гирь, с помощью которых можно уравновесить любой целый вес от 5 г до 10 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую, веса гирь не обязательно целые). Одна гиря делается из золота, каждая из остальных не тяжелее золотой. Каким наименьшим количеством золота можно обойтись?*

Ответ. 2,5 г. Решение. *Пример:* 1, 2, 2, 2,5, 2,5. *Оценка.* Общий вес гирь — 10 г. Есть набор гирь весом 5 г. Тогда набор остальных гирь весит не меньше 5 г. В каком-то из двух наборов не больше двух гирь, поэтому самая тяжелая из них весит не менее 2,5 г.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов.*

7. *Последовательность чисел строится по следующему правилу:*

$$a_0 = 1, a_1 = 2015, a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Найдите величину $\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \ldots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$

Ответ. –1007. Решение. По индукции легко доказывается равенство $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$.

Поэтому искомая величина равна 2–3+4–5+…+2014–2015 = –1007.

8. *В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 70°$. На отрезке AB взята точка M, а на продолжении AB за точку A – точка X. Прямая, проходящая через точку X под углом 25 градусов к прямой AB, пересекает стороны AC и BC в точках K и P соответственно. Найдите угол между прямыми CM и AB, если известно, что MK – биссектриса угла CMA, а MP – биссектриса угла CMB.*

Решение. Т.к. MK и MP — биссектрисы, то $\angle KMP = 90°$, а значит четырехугольник $KCPM$ можно вписать в окружность. $\angle CAB = 70°$ — внешний угол треугольника XKA, тогда $\angle CAB = \angle KXA + \angle AKX$, а, значит, $\angle AKX = \angle CKP = \angle CMP = 70° – 25° = 45°$. Откуда следует, что угол между прямыми CM и AB равен 90°.

9. *Два иррациональных числа A и B подобраны так, что каждое из трех чисел A^2+B, B^2+A и $A+B$ рационально. Какие значения может принимать сумма $A+B$?*

Ответ. $s = 1$. Решение. *Оценка.* $A^2+B–(B^2+A) = (A–B)(A+B–1)$. Если $A+B \neq 1$, число $A–B$ равно $(A^2+B–(B^2+A))/(A+B–1)$, и потому рационально, а вместе с ним рационально и число $A = ((A–B)+(A+B))/2$ — противоречие.

♦ Отсутствие примера оценки не снижает.

10. *Хромой слон ходит как обычный, но на одну клетку. Какое наибольшее число ходов он может сделать, выйдя из угла доски $(2N+1)\times(2N+1)$, если ему запрещено становиться на клетку, на которой он уже был?*

Ответ. N^2+1. Решение. Пусть клетки, по которым ходит слон — чёрные. Выделим черные клетки через одну. На рис. они отмечены точками. Ясно, что хромой слон каждый нечётный ход должен сделать в отмеченную клетку, а их всего N^2, т.е. он не может сделать более N^2+1 ходов. Пример обхода из левого нижнего угла: сначала «зигзагом» по первым двум вертикалям поднимаемся до верхней отмеченной клетке, переходим в верхнюю клетку третей вертикали, по третьей и четвёртой вертикалям «зигзагом опускаемся до нижней отмеченной клети, переходим на следующую вертикаль и т.д. Так будут обойдены все отмеченные клетки, после чего делаем ещё один ход в угол.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Высшая юниорская лига, 4 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, есть не менее n, ограниченных только красными прямыми.*

Решение. По индукции легко доказать, что $2n$ прямых общего положения делят плоскость на $n(2n+1)+1$ частей. Каждая синяя прямая пересекает не более $2n+1$ областей с красными границами. Итого, суммарно синие прямые пересекают не более $n(2n+1)$ таких областей. Но заметим ещё, что, последовательно проводя синие прямые, мы обнаружим, что для каждой из таких прямых будет область, которую уже посчитали (а именно, та область, в которой лежит точка пересечения этой прямой с самой первой из проведённых синих прямых). Следовательно, каждая прямая, начиная со второй, разрезает не более $2n$ красных областей. Следовательно, не менее n красных областей останутся нетронутыми и будут ограничены только красными прямыми.

♦ Показано, что существует красная область: *2 балла*.

2. *Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2–bc$ —квадрат целого числа. Докажите, что число $2a+b+c$ — составное.*

Решение. Решение. Пусть $a^2–bc = k^2$, то есть $(a–k)(a+k) = bc$. Как известно, тогда сумма четырёх сомножителей в двух равных произведениях $(a–k)+(a+k)+b+c$ — составное число, что и требовалось доказать.

3. *Сумма положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \geq 2$) не превосходит n. Докажите, что*

$$\frac{a_1+1}{a_1(a_1+n-1)}+\frac{a_2+1}{a_2(a_2+n-1)}+\ldots+\frac{a_n+1}{a_n(a_n+n-1)} \geq 2.$$

Решение. Левая часть неравенства, как легко проверить, равна

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{n-2}{n-1}\left(\frac{1}{a_1+n-1}+\ldots+\frac{1}{a_n+n-1}\right),$$

что не меньше, чем

$$\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n^2}{a_1+\ldots+a_n}+\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n^2}{a_1+\ldots+a_n+n(n-1)} \geq \frac{1}{n-1}\cdot\frac{n^2}{n}+\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n^2}{n+n(n-1)}=2.$$

4. *Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?*

<u>Ответ</u>. 4. <u>Решение</u>. Докажем сначала, что сумма зеленых чисел четна. Пусть на окружности по часовой стрелке записаны красные числа n_1, n_2, ... , n_{100}. Тогда сумма $|n_2–n_1|+...+|n_{99}–n_{100}|+|n_{100}–n_1|$ имеет ту же четность, что и сумма $(n_2–n_1)+...+(n_{99}–n_{100})+(n_{100}–n_1)$, которая четна, так как равна нулю. Пусть соседями синей единицы являются числа m и n. Тогда на втором шаге они заменятся на красные числа $m–1$ и $n–1$, а на третьем на $|(m–1)–(n–1)| = |m–n| \geq 1$. И аналогично с соседями синего числа 100. То есть сумма зеленых чисел хотя бы 2. Если она равна 2, то при движении по любой дуге от синей 1 до синей 100 мы должны получать арифметическую прогрессию. Очевидно, что ее разность не может быть равна 2, а если она равна 1, то сумма зеленых чисел будет равна 196. Значит, она хотя бы 3, и на любой дуге от 1 до 100 стоит не более 33 чисел. Тогда изначально синих чисел было не больше 68. Противоречие. Пример для суммы 4: 2, 4, ..., 98, 100, 99, 97, ... , 1.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

5. *Даны две бесконечные последовательности вещественных чисел a_0, a_1, ... и b_0, b_1, ... такие, что $a_0 > 1/2$, $a_{n+1} \geq a_n$ и $b_{n+1} = a_n(b_n+b_{n+2})$ при всех целых неотрицательных n. Докажите, что последовательность (b_n) ограничена.*

<u>Решение</u>. Так как $a_k > 1/2$ для любого натурального k, верно равенство

$$b_{k+2}^2 - b_k^2 = \frac{(b_{k+1}-b_k)^2-(b_{k+2}-b_{k+1})^2}{2a_k-1}$$

Просуммировав эти равенства для k от 0 до $n–2$, получим

$$b_n^2+b_{n-1}^2-b_1^2-b_0^2=\frac{(b_1-b_0)^2}{2a_0-1}-\sum_{k=0}^{n-3}\left(\frac{1}{2a_k-1}-\frac{1}{2a_{k+1}-1}\right)(b_{k+2}-b_{k+1})^2-\frac{(b_n-b_{n-1})^2}{2a_{n-2}-1}\leq\frac{(b_1-b_0)^2}{2a_0-1}$$

Здесь последнее неравенство следует из того, что a_k не убывают и больше 1/2.

Тогда $b_n^2 \leq b_n^2+b_{n-1}^2 \leq \dfrac{b_1^2+b_0^2+(b_1-b_0)^2}{2a_0-1}$, из чего и следует утверждение задачи.

6. *Даны натуральное $m > 1$ и несколько k-элементных множеств натуральных чисел. У любых двух из них можно найти два общих элемента a и b такие, что количества элементов этих множеств, больших a и меньших b, не сравнимы по модулю m. Докажите, что количество множеств не больше $m^{k–1}$.*

<u>Решение</u>. Пусть $T = \{a_1, a_2, ..., a_l\}$ — объединение всех k-элементных множеств. Раскрасим все элементы множества T в m цветов (1, 2, ..., m). Назовем раскраску k-элементного множества *хорошей*, если при расстановке всех его элементов в порядке возрастания, они для некоторого a окажутся покрашены в цвета a, $a+1$, ..., $a+k – 1$,

взятые по модулю m. Заметим, что при хорошей раскраске k-элементного множества A для любых двух элементов $a, b \in A$ увеличенное на 1 количество элементов, больших a и меньших b, сравнимо по модулю m с разностью номеров цветов a и b. Поэтому любая раскраска множества T может быть хорошей максимум для одного k-элементного множества. Всего для данного k-элементного множества существует m^{l-k+1} хороших раскрасок множества T. Поэтому, если множеств больше, чем m^{k-1} при какой-нибудь раскраске появится два хороших множества.

7. *Точки L, M, N — середины сторон BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC соответственно. Внутри этого треугольника выбрана такая точка P, что $PL/BC = PM/CA = PN/AB$. Продолжения лучей AP, BP, CP пересекают описанную окружность ABC в точках D, E, F соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE лежат на одной окружности.*

Решение. Обозначим через T центр описанной окружности треугольника APF, через O — центр описанной окружности треугольника ABC, через X, Y и Z середины отрезков AP AO и OP соответственно. Кроме того, обозначим PL/BC через k и можно считать, что $OA = 1$. Заметим, что треугольник ATP подобен треугольнику AOC, поскольку оба они равнобедренные, а $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle AFC = \angle ATP$. Тогда треугольники ATO и APC тоже подобны. Следовательно, $k = PL/AC = TY/OA = TY$. Заметим, что поскольку $TX \perp ZY$, то $TZ^2 - TY^2 = XZ^2 - XY^2 = (AO^2 - OP^2)/4$, откуда $ZT^2 = (1 - OP^2)/4 + k^2$. Следовательно, расстояния от точки Z до всех данных центров описанных окружностей равны, тогда они все лежат на окружности с центром Z.

8. *CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (C лежит на отрезке A_1B_1). Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.*

Решение. Обозначим через T, M, N центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и середины сторон AC и AB соответственно. Тогда точки C, A_1, A, C_1 будут лежать на окружности с центром в точке M, поэтому TM — серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Точки B, C_1, C, B_1 лежат на одной окружности, поэтому $2\angle MNA = 2\angle CBA = 2\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1TC_1 = 2\angle MTC_1$, поэтому точки C_1, N, M, T лежат на одной окружности. Но поскольку эта окружность проходит через две середины сторон и основание высоты треугольника ABC, то она является окружностью девяти точек этого треугольника.

9. *Для простых чисел p и q нашлись такие m и n, что $1+p+p^2+\ldots+p^m$ — степень q с натуральным показателем, а $1+q+q^2+\ldots+q^n$ — степень p с натуральным показателем. Докажите, что одно из чисел p и q равно 2.*

Решение. Для данных p и q выберем наименьшие m и n, при которых выполнено условие задачи. При этом числа $m+1$ и $n+1$ будут просты. Действительно, если $m+1 = kl$, то $1+p+p^2+\ldots+p^m = 1+p+p^2+\ldots+p^{kl-1}$ делится на $1+p+p^2+\ldots+p^{k-1}$, и это число, как делитель степени q, само должно быть степенью q.

Будем считать, что $p < q$. Пусть $1+p+p^2+...+p^m = q^r$ и $1+q+q^2+...+q^n = p^s$. Тогда $q^r < p^{m+1}$ и $p^s < q^{n+1}$, откуда $p^s q^r < p^{m+1}q^{n+1}$. Так как p^{m+1}–1 делится на q, p^s–1 делится на q и m+1 простое, либо p–1 кратно q (что, очевидно, невозможно), либо s делится на m+1. Аналогичным образом q^{n+1}–1 делится на p и q^r–1 делится на p, поэтому либо q–1 кратно p, либо r делится на n+1. В этом случае, однако, невозможен второй вариант: в нём $r \geq n+1$, то есть $p^s q^r \geq p^{m+1}q^{n+1}$, в противоречии с ранее доказанным неравенством. Итак, q–1 кратно p. Значит, $p^s = 1+q+q^2+...+q^n \equiv n+1 \pmod p$, то есть n+1 кратно p, а поскольку n+1 простое, то $n+1 = p$. С другой стороны, $p^{m+1}-1 = (p-1)(1+p+p^2+...+p^m)+1 = (p-1)q^r+1 \equiv 1 \pmod{q^r}$. Полагая $s = k(m+1)$, получаем $p^s = (p^{m+1})k \equiv 1 \pmod{q^r}$, откуда $r = 1$ и $q = 1+p+p^2+...+p^m$.

Предположим, что p нечётно. Число $q^{n+1}-1 = q^p-1 = (1+p+...+p^m)^p-1 \equiv p^2 \pmod{p^3}$ делится на p^s, откуда $s = 2$ и $m = 1$. Это, однако, означает, что $q = p+1$ — противоречие.

10. *Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?*

Ответ. При $k = 895$. Решение. Пронумеруем строки и столбцы квадрата числами от 1 до 15. Рассмотрим клетки таблицы, которые стоят на пересечении строк и столбцов с номерами, делящимися на 4. Очевидно, каждый квадратик 4×4 содержит ровно одну из них, поэтому после 2015 ходов сумма чисел в них будет равна 2015. Выделим квадрат 3×3, состоящий из этих клеток. В нем посчитаем один раз сумму чисел в четырех квадратах 2×2, три раза сумму в квадрате с вершинами в центрах угловых клеток и два раза в квадрате с вершинами в центрах клеток, являющихся серединами сторон. В итоге число в каждой клетке мы посчитаем 4 раза, поэтому хотя бы в одном квадрате сумма должна быть больше, чем [4*2015/9] = 895. Построим пример для $k = 896$ и 2016 ходов (для 2015 тогда тоже получится). Произвольный квадрат 12×12 разбиваем на 9 квадратов 4×4 и к каждому 224 раза применяем операцию прибавления 1. В любом квадрате числа в вершинах на превосходят 224, поэтому сумма их не превосходит 896.

♦ Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
"КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА". СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Первая юниорская лига, 4 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На плоскости проведены $2n$ красных и n синих прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Докажите, что среди частей, на которые они разбивают плоскость, есть не менее n, ограниченных только красными прямыми.*

Решение. По индукции легко доказать, что $2n$ прямых общего положения делят плоскость на $n(2n+1)+1$ частей. Каждая синяя прямая пересекает не более $2n+1$ областей с красными границами. Итого, суммарно синие прямые пересекают не более $n(2n+1)$ таких областей. Но заметим ещё, что, последовательно проводя синие прямые, мы обнаружим, что для каждой из таких прямых будет область, которую уже посчитали (а именно, та область, в которой лежит точка пересечения этой прямой с самой первой из проведённых синих прямых). Следовательно, каждая прямая, начиная со второй, разрезает не более $2n$ красных областей. Следовательно, не менее n красных областей останутся нетронутыми и будут ограничены только красными прямыми.

♦ Доказано, что есть хотя бы одна красная часть: *2 балла*.

2. *Физик-экспериментатор загнал в магнитную ловушку 2015 атомов. У каждого из этих атомов 0 или 1 электронов. У физика нет прибора, который мог бы узнавать количество электронов. Зато он в результате некоторой процедуры может делать следующее: брать два атома A и B, и если у A есть электрон, а у B нет электрона, то электрон обязательно переходит из A в B. В противном случае (в т.ч., когда у A нет электрона, а у B есть) ничего не меняется. К сожалению, физик не узнаёт при этом, случился переход электрона или нет. Может ли физик, многократно применив эту процедуру, точно указать, вне зависимости от начального распределения электронов, на два атома с одинаковым (в тот момент, когда он на них указывает) числом электронов?*

Ответ. Не может. Решение. Пусть Судьба играет против физика следующим образом. Судьба нумерует атомы числами 1, 2, ..., 2015 и заводит 2014 списков, как потенциально могут быть распределены электроны: в списке №k атомы 1, 2, ..., k имеют 0 электронов, а остальные атомы — 1 электрон. Это количество электронов никак не соотносится с реальным числом электронов в атомах. Когда физик применяет процедуру к двум атомам A и B, то Судьба модифицирует каждый из этих 2013 списков в соответствии с тем, как переходит электрон. Более подробно, если в списке №k у A есть электрон, а у B нет электрона, то происходит переход электрона; иначе список №k не меняется. После этого списки №1, ..., №2014 снова оказываются «согласованными»: можно так обозначить атомы символами b_1, ..., b_{2015}, что в списке №k у атомов b_1, ..., b_k будет 0 электронов, у остальных атомов 1 электрон.

Основное свойство наших списков состоит в том, что для любых двух атомов в любой момент времени найдется такой список №k, в котором эти атомы имеют разное число электронов. Когда физик заканчивает применять процедуру и указывает на 2 атома с якобы одинаковым числом электронов, Судьба находит именно тот список №k, в котором эти атомы имеют разное число электронов, и предъявляет физику конкретный пример, показывающий, что физик не прав: изначально электроны могли быть распределены так, что после применения всех процедур как раз и получится список №k. А в нем у атомов A и B разное число электронов.

3. *Докажите, что для каждого натурального числа a найдется такое натуральное число $b > a$, что $1+2^b+3^b$ делится на $1+2^a+3^a$.*

Решение. Пусть $1+2^a+3^a = 2^r3^sm$, где m не делится ни на 2, ни на 3. Нужно, чтобы число $N = 1+2^b+3^b-(1+2^a+3^a) = 2^a(2^{b-a}-1)+3^a(3^{b-a}-1)$ по отдельности делилось на 2^r, на 3^s и на m. Положим $b-a = k$. Делимость на m мы обеспечим, если выберем k делящимся на $\varphi(m)$ (теорема Эйлера). Далее, так как 3^a по модулю 8 дает остатки 1 и 3, то $1+2^a+3^a$ при $a > 2$ сравнимо с 2 или 4 по модулю 8, то есть $r = 1$ или $r = 2$. При $a = 2$ $r = 2$. Если выбрать k четным, то 3^k-1 будет делиться на 4, 2^a при $a > 1$ делится на 4, поэтому N будет делиться на 4. Наконец, $s \le a$ (так как иначе $2^r3^sm > 1+2^a+3^a$), и, так как 3^s делит $1+2^a+3^a$ и 3^a, то 3^s делит $1+2^a$. Значит, если выбрать k делящимся на $2a$, пусть $k = 2az$, то $2^k-1 = (2^{2a})^z-1 = (2^a-1)(2^a+1)(...)$ будет делиться на 3^s. Поэтому и число N будет делиться на 3^s. В итоге, если выбрать $k = 2a\varphi(m)$, то число N будет делится на 2^r3^sm, за исключением $a = 1$. Но при $a = 1$ подходит $b = 3$.

4. *Петя записал на листке синим фломастером натуральные числа от 1 до 100 по кругу в каком-то порядке (каждое число записано им по разу). Затем он между каждыми двумя соседними из синих чисел записал красным фломастером число, равное модулю их разности, и стёр все синие числа. После этого Петя между каждыми двумя соседними из красных чисел записал зелёным фломастером число, равное модулю их разности. Какое наименьшее значение может принимать сумма зелёных чисел?*

Ответ. 4. Решение. Докажем сначала, что сумма зеленых чисел четна. Пусть на окружности по часовой стрелке записаны красные числа n_1, n_2, ... , n_{100}. Тогда сумма $|n_2-n_1|+...+|n_{99}-n_{100}|+|n_{100}-n_1|$ имеет ту же четность, что и сумма $(n_2-n_1)+...+(n_{99}-n_{100})+(n_{100}-n_1)$, которая четна, так как равна нулю. Пусть соседями синей единицы являются числа m и n. Тогда на втором шаге они заменятся на красные числа $m-1$ и $n-1$, а на третьем на $|(m-1)-(n-1)| = |m-n| \ge 1$. И аналогично с соседями синего числа 100. То есть сумма зеленых чисел хотя бы 2. Если она равна 2, то при движении по любой дуге от синей 1 до синей 100 мы должны получать арифметическую прогрессию. Очевидно, что ее разность не может быть равна 2, а если она равна 1, то сумма зеленых чисел будет равна 196. Значит, она хотя бы 3, и на любой дуге от 1 до 100 стоит не более 33 чисел. Тогда изначально синих чисел было не больше 68. Противоречие. Пример для суммы 4: 2, 4, ..., 98, 100, 99, 97, ... , 1.

♦ Только ответ с примером: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

5. *Даны натуральные a_1, ..., a_n. Кирилл сложил два из них, к сумме добавил третье, и т.д., пока не получил сумму всех. Илья сделал то же, но в другом порядке. Докажите, что они совершили поровну переносов в процессе сложений.*

Решение. Если при сложении двух чисел получилось k переносов, то сумма цифр суммы меньше суммы сумм цифр слагаемых на $9k$. Таким образом, если мы рассмотрим сумму цифр всех слагаемых и сравним с суммой цифр итоговой суммы, первая будет на $9n$ больше, где n — количество переносов, которые происходили в процессе сложения. Отсюда следует утверждение задачи.

6. *Докажите, что для вещественных чисел $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ выполняется неравенство $a_1a_2(a_1-a_2)+a_2a_3(a_2-a_3)+\ldots+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n) \geq a_1a_n(a_1-a_n)$.*

Решение. Докажем неравенство индукцией по n. При $n = 2$ неравенство обращается в равенство. Пусть неравенство верно при некотором $n > 2$. Тогда

$$a_1a_2(a_1-a_2)+a_2a_3(a_2-a_3)+\ldots+a_{n-1}a_n(a_{n-1}-a_n)+a_na_{n+1}(a_n-a_{n+1}) \geq$$
$$a_1a_n(a_1-a_n)+a_na_{n+1}(a_n-a_{n+1}) \geq a_1a_{n+1}(a_1-a_{n+1}),$$

так как разность

$$a_1a_n(a_1-a_n)+a_na_{n+1}(a_n-a_{n+1})-a_1a_{n+1}(a_1-a_{n+1})=(a_n-a_{n+1})(a_1-a_n)(a_1-a_{n+1})$$

раскладывается на множители, каждый из которых неотрицателен.

7. *Точка M — середина дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC, не содержащей точки A. Высота из вершины A пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке N. Через центр описанной окружности проведены прямые, параллельные MB и MC, пересекающие отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что $NK = NL$.*

Решение. Из параллельности OK и MB, OL и MC имеем $\angle OKA+\angle OLA=\angle MBA+\angle MCA=\pi$. Значит, четырехугольник $OKAL$ — вписанный. Пусть ω — описанная около него окружность и S — точка пересечения AN и ω. Из равенства $\angle OAB=\frac{1}{2}(\pi-\angle BOA)=\frac{\pi}{2}-\angle BCA=\angle NAC$ следует, что дуги KO и SL окружности ω равны и, значит, $OSKL$ — равнобедренная трапеция. Поэтому серединные перпендикуляры к сторонам OS и LK совпадают. Рассмотрим случай, когда точка N лежит на дуге MB (случай, когда точка N лежит на дуге MC, разбирается аналогично). Из равенства $\angle OSA=\angle OKA=\angle MBA=\angle MNA$ следует параллельность MN и OS. Но OM и SN — перпендикуляры к стороне BC, поэтому $OMNS$ — параллелограмм. Поэтому $SN = OM = ON$, то есть точка N лежит на серединном перпендикуляре к отрезку OS, а, значит, и к LK.

8. *CC_1 — высота остроугольного треугольника ABC. Через вершину C проведена прямая. На неё из вершин A и B опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 (причём точка C лежит на отрезке A_1B_1). Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.*

Решение. Обозначим через T, M, N центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и середины сторон AC и AB соответственно. Тогда точки C, A_1, A, C_1 будут лежать на окружности с центром в точке M, поэтому TM — серединный перпендикуляр к отрезку A_1C_1. Точки B, C_1, C, B_1 лежат на одной окружности, поэтому $2\angle MNA = 2\angle CBA = 2\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1TC_1 = 2\angle MTC_1$, поэтому точки C_1, N, M, T лежат на одной окружности. Но поскольку эта окружность проходит через две середины сторон и основание высоты треугольника ABC, то она является окружностью девяти точек этого треугольника.

9. *Дано натуральное число a. Докажите, что каждое натуральное число N представимо в виде $N = ax+(a, x)+[a, x]$ (x — натуральное число) не более чем одним способом. Напомним, что (a, b) и $[a, b]$ — это, соответственно, НОД и НОК чисел a и b.*

Решение. Пусть для некоторого натурального N выполняется равенство $N = ax+(a, x)+[a, x] = ay+(a, y)+[a, y]$, где x и y — натуральные числа. Из определения НОК и НОД следует, что $(a, N) = (a, ax+(a, x)+[a, x]) = (a, (a, x)) = (a, x)$. Аналогично, $(a, N) = (a, y)$. Обозначим (a, N) через d. Тогда из равенства $(a, b)[a, b] = ab$ следует, что $[a, x] = ax/d$, и поэтому $N = ax+(a, x)+[a, x] = ax+d+ax/d$. Аналогично $N = ay+d+ay/d$. Приравнивая эти выражения, получаем: $ax(1+1/d) = ay(1+1/d)$, то есть $x = y$, что и требовалось доказать.

10. *Клетки квадрата 15×15 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать квадрат 4×4, состоящий из 16 клеток, и прибавить по 1 ко всем числам в его клетках. При каком наибольшем k после 2015 таких операций заведомо найдутся четыре клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязаны быть параллельными сторонам исходного квадрата), сумма чисел в которых не меньше k?*

Ответ. При $k = 895$. Решение. Пронумеруем строки и столбцы квадрата числами от 1 до 15. Рассмотрим клетки таблицы, которые стоят на пересечении строк и столбцов с номерами, делящимися на 4. Очевидно, каждый квадратик 4×4 содержит ровно одну из них, поэтому после 2015 ходов сумма чисел в них будет равна 2015. Выделим квадрат 3×3, состоящий из этих клеток. В нем посчитаем один раз сумму чисел в четырех квадратах 2×2, три раза сумму в квадрате с вершинами в центрах угловых клеток и два раза в квадрате с вершинами в центрах клеток, являющихся серединами сторон. В итоге число в каждой клетке мы посчитаем 4 раза, поэтому хотя бы в одном квадрате сумма должна быть больше, чем $[4*2015/9] = 895$. Построим пример для $k = 896$ и 2016 ходов (для 2015 тогда тоже получится). Произвольный квадрат 12×12 разбиваем на 9 квадратов 4×4 и к каждому 224 раза применяем операцию прибавления 1. В любом квадрате числа в вершинах на превосходят 224, поэтому сумма их не превосходит 896.

♦ Только оценка или только пример: *4 балла*.

XIX МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР СТАРШЕКЛАССНИКОВ
“КУБОК ПАМЯТИ А.Н. КОЛМОГОРОВА”. СОЧИ, 31.10-09.11.2015

Вторая юниорская лига, 4 тур, краткие решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, кроме случаев, когда явно оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На плоскости проведены 3n красных и n синих прямых общего положения (n > 1; никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). Докажите, что найдётся многоугольник, на сторонах которого все точки красные.*

Решение. Известно, что $3n$ красных прямых общего положение делят плоскость на несколько частей, из которых $(3n-1)(3n-2)/2$ являются не бесконечными, т.е. многоугольниками. При этом каждая синяя прямая пересекает не более $3n-1$ из этих областей. Это значит, что вместе они пересекают не больше $n(3n-1)$ областей, и при $n > 1$ хотя бы одна из этих областей не пересекается синими прямыми, то есть имеет красную границу.

♦ Подсчет числа многоугольников: *2 балла*.

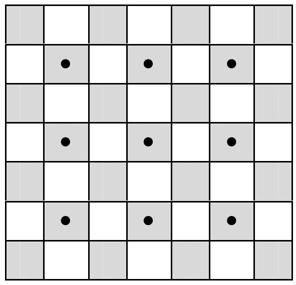
2. *Изначально дано 16 одноэлементных множеств. За один ход можно взять два множества и добавить к имеющимся множествам их объединение. Можно ли получить все 15-элементные множества менее чем за 64 хода?*

Ответ. Можно. Решение. Расположим одноэлементные множества в ряд. Первыми 8 ходами объединим первое множество со вторым, третье — с четвёртым, …, 15-е с 16-м. следующими 4 ходами получим четырёхэлементные множества {1, 2, 3, 4}, …, {13, 14, 15, 16}. Затем двумя ходами получим восьмиэлементные множества 1-8 и 9-16. Теперь любое 15-элементное множество равно объединению каких-то восьмиэлементного, четырёхэлементного, двухэлементного и одноэлементного множеств из числа имеющихся. Стало быть, оно может быть получено за три хода, и всего нам понадобится $8+4+2+16\cdot 3 = 62$ хода.

3. *В треугольнике ABC центр вписанной окружности с центром I равноудалён от вершины C и середины M стороны AB. Найдите наибольшее возможное значение угла CIM.*

Ответ. 150°. Решение. Пусть K, N, L – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно. Тогда треугольники KIM и CIN равны по катету и гипотенузе. Из этого следует: $\angle CIN = \angle KIM$ и $\angle CIM = \angle KIN = 180°-\angle B$. Поэтому угол CIM максимален, когда угол B минимален. Кроме того, используя традиционные обозначения для сторон треугольника и полагая $KM = x = CN$, получаем $\frac{c}{2} = x + b - x = b$. Но легко доказать, что, если в треугольнике одна из сторон в два раза меньше другой, то угол, противолежащий меньшей из этих сторон, не превосходит 30°. Прямоугольный треугольник с острым углом 30° даёт нужный пример.

4. *Хромой слон ходит как обычный, но на одну клетку. Какое наибольшее число ходов он может сделать, выйдя из угла доски (2N+1)×(2N+1), если ему запрещено становиться на клетку, на которой он уже был?*



Ответ. N^2+1. Решение. Пусть клетки, по которым ходит слон — чёрные. Выделим черные клетки через одну. На рис. они отмечены точками. Ясно, что хромой слон каждый нечётный ход должен сделать в отмеченную клетку, а их всего N^2, т.е. он не может сделать более N^2+1 ходов. Пример обхода из левого нижнего угла: сначала «зигзагом» по первым двум вертикалям поднимаемся до верхней отмеченной клетке, переходим в верхнюю клетку третей вертикали, по третьей и четвёртой вертикалям «зигзагом опускаемся до нижней отмеченной клети, переходим на следующую вертикаль и т.д. Так будут обойдены все отмеченные клетки, после чего делаем ещё один ход в угол.

♦ Только ответ: *0 баллов*. Только пример: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

5. *От пристани А вниз по течению реки отправились одновременно два катера и плот. Один катер шёл с собственной скоростью 50 км/ч; дойдя до пристани Б, он сразу повернул назад и на расстоянии 4 км от А встретил плот. Другой катер имел собственную скорость 30 км/ч; дойдя до Б, он также сразу повернул назад, а его встреча с плотом произошла в 6,5 км от А. Найдите расстояние между А и Б.*

Ответ. 52 км. Решение. Пусть v — скорость течения, S – расстояние между пристанями. Тогда условие задачи приводит к системе уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{v} = \dfrac{S}{50+v} + \dfrac{S-4}{50-v} \\ \dfrac{6,5}{v} = \dfrac{S}{30+v} + \dfrac{S-6,5}{30-v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{200}{v} = \dfrac{100S}{50+v} \\ \dfrac{195}{v} = \dfrac{60S}{30+v} \end{cases}$$

Выражая из двух уравнений S через v и приравнивая полученные выражения, находим $v = 2$, $S = 52$.

Второе решение. Пусть v — скорость течения. Относительно плота катер движется с постоянной скоростью, поэтому время удаления катера от плота равно времени возвращения. Времена удаления катеров обратно пропорциональны их скоростям относительно берега, т.е. $(50+v):(30+v) = 6,5:4 = 52:32$, откуда $v = 2$. Следовательно, первый катер прошел от А до В за час (за это время плот прошел половину от 4 км). А катер за этот час прошел 50+2 = 52 км.

♦ Система верно составлена, но не решена: *4 балла*. Ответ с проверкой: *2 балла*.

6. *Найдите все тройки простых чисел, a, b, c, для которых можно подобрать натуральное число k так, что выполняется равенство* $a^2+b^2+16c^2 = 9k^2+1$.

Ответ. (3, 3, 2), (3, 17, 3), (3, 37, 3). Решение. По модулю 3 показываем, что два слагаемых в левой части должны делиться на 3. Значит, они равны 3. Далее несложный перебор приводит к ответам.

♦ Ответ без обоснования отсутствия других решений: *не более 4 баллов*.

7. *Последовательность чисел строится по следующему правилу:*

$$a_0 = 1, a_1 = 2015, a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n - \frac{n-2}{n^2+n} a_{n-1}.$$

Найдите величину $\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \ldots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$

Ответ. −1007. Решение. По индукции легко доказывается равенство $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$.

Поэтому искомая величина равна 2–3+4–5+…+2014–2015 = –1007.

8. *На доске написано число 2. Петя и Волк играют в такую игру. Петя записывает на доску число, делящееся на 2, затем Волк выписывает число, делящееся на 3, затем Петя – число, делящееся на 4 и т.д. При этом новое число можно получить из написанного на доске либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив цифры предыдущего числа (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Второе число Петя получает, дописав в конце 4. Теперь на доске записано 24. Далее, если Волк своим ходом превратил число *A* в число *B*, Петя снова превращает *B* в *A*. Это не противоречит правилам, поскольку число 24 делится на 4, 6, 8. Чтобы число Волка делилось на 9, он должен дописать 3. Затем Петя добавляет 0. После этого Волк должен превратить 2430 в число, делящееся на 11. Признак делимости на 11 показывает, что перестановкой цифр или зачёркиванием этого добиться невозможно. Но добавлением цифры этого тоже не сделаешь, поскольку число 24300 при делении на 11 даёт остаток 1, и прибавлением цифры остаток 0 не получается.