Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября - 1 ноября 2016 года

Третий тур 30.10.16. Высшая лига.

1. Дан правильный 12-угольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$. Дуги окружностей m_A, m_C и m_E лежат в этом многоугольнике и стягиваются отрезками A_1A_2, C_1C_2 и E_1E_2 соответственно. Обозначим $B = m_A \cap m_C$, $D = m_C \cap m_E$, $F = m_E \cap m_A$. Докажите, что дуги окружностей B_1BB_2, D_1DD_2 и F_1FF_2 пересекаются в одной точке. (Считается, что дуги B_1BB_2, D_1DD_2 и F_1FF_2 существуют.)

2. Треугольник ABC имеет периметр 2. Проведём биссектрисы его внутренних углов (биссектриса — это луч) и отложим на них отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 длины 1. Докажите, что каждая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ больше 1.

3. Пусть $k \geq 2$ — натуральное число. У клетчатого квадрата $2k\times 2k$ склеили противоположные стороны, получив тор, в котором $4k^2$ узлов сетки. Каждое ребро (т.е. единичный отрезок сетки) окрашено либо в чёрный, либо в малиновый цвет. Докажите, что в торе найдутся две противоположных вершины, между которыми есть путь из $2k$ рёбер, состоящий не более чем из k одноцветных связных фрагментов. (Вершины называются *противоположными*, если кратчайший путь между ними по рёбрам сетки содержит $2k$ рёбер.)

4. Найдите наименьшее n, для которого любой многочлен с комплексными коэффициентами можно представить в виде суммы $2n$ многочленов, из которых n являются квадратами многочленов, а остальные n — кубами многочленов (с комплексными же коэффициентами).

5. Сколько существует перестановок $(k_1, k_2, ..., k_n)$ чисел от 1 до n ($n \geq 3$), для которых можно подобрать выпуклый многоугольник $A_1A_2... A_n$ и прямую l так, что проекции $B_1, ..., B_n$ всех вершин многоугольника $A_1, ..., A_n$ соответственно на эту прямую различны и расположены в порядке $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}$ (двигаться по прямой можно в любом из двух направлений)?

6. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ продлили до пересечения с его описанной сферой в точках A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Оказалось, что $A_0A_1 = B_0B_1 = C_0C_1 = D_0D_1$. Докажите, что любые два противоположных ребра тетраэдра равны. Медиана тетраэдра — это отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани.

7. Обозначим через $\mathbb{Q}^+$ множество всех положительных рациональных чисел. Найдите все функции $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такие, что $f(1) = 1$ и $f(x+n) = f(x) + n f\left(\frac{1}{x}\right)$ при всех $x \in \mathbb{Q}^+$ и натуральных n.

8. Есть $N \geq 2$ мудрецов и их верный ассистент, которым предстоит следующее испытание. Сначала им рассказывают все правила, изложенные ниже, и дают время договориться о совместной стратегии. Потом мудрецов и ассистента разведут по разным комнатам и каждому покажут одни и те же три типа марок (увы, не существует способа, позволяющего разным участникам одинаково пронумеровать типы марок независимо друг от друга). С этого момента всякое общение между участниками запрещено. Затем их сведут вместе и каждому из мудрецов наклеят на лоб марку одного из этих трёх типов так, что каждый видит все марки, кроме своей. Ассистент, посмотрев на все марки, также наклеивает себе на лоб марку одного из этих типов по своему выбору и показывает её всем. Каждый мудрец должен по сигналу написать на бумажке, какой из типов марок у него на лбу. Как участникам договориться, чтобы все мудрецы верно определили свои марки?

9. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_a x_b \leqslant \left(\frac{2016}{2017}\right)^{|a-b|}$ при всех парах индексов a и b (возможно, что $a = b$). Найдите минимальное вещественное α такое, что для любого натурального n и любой описанной последовательности верно неравенство $x_1+x_2+\ldots+x_n \leq \alpha$.

10. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ и $a_n = \varphi(a_{n+1})$ при всех $n \geq 0$. (Через $\varphi(k)$, как обычно, обозначено количество натуральных чисел, не превосходящих k и взаимно простых с k.)

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября - 1 ноября 2016 года

Третий тур 30.10.16. Первая лига.

1. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.

2. На плоскости нарисовали три красных окружности. Их центры и точки пересечения покрасили в синий цвет — в результате получилось 9 синих точек. Могут ли 6 синих точек лежать на одной окружности, отличной от красных?

3. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Правительство покрасило дороги в синий и зеленый цвета так, что по синим дорогам можно из любого города проехать в любой другой, а также по зеленым дорогам можно из любого города проехать в любой другой. Докажите, что некоторые дороги можно перекрасить в красный цвет так, чтобы из каждого города выходило четное число красных дорог и по красным дорогам из любого города можно было бы проехать в любой другой.

4. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно представить в виде суммы трёх кубов многочленов с вещественными коэффициентами.

5. Сколько существует перестановок $(k_1, k_2, ..., k_n)$ чисел от 1 до n ($n \geq 3$), для которых можно подобрать выпуклый многоугольник $A_1A_2... A_n$ и прямую l так, что проекции $B_1, ..., B_n$ всех вершин многоугольника $A_1, ..., A_n$ соответственно на эту прямую различны и расположены в порядке $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}$ (двигаться по прямой можно в любом из двух направлений)?

6. На плоскости зафиксированы точки B и C. Переменная точка A выбирается так, что треугольник ABC — остроугольный и неравнобедренный. Пусть D и E — проекции середины стороны BC на стороны AB и AC соответственно, а точка O — центр описанной окружности ABC. Прямая DE пересекает прямые AO и BC в точках F и G соответственно. Докажите, что при всевозможных положениях точки A описанная окружность треугольника AFG проходит через фиксированную точку.

7. Обозначим через $\mathbb{Q}^+$ множество всех положительных рациональных чисел. Найдите все функции $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такие, что $f(1) = 1$ и $f(x+n) = f(x) + n f\left(\frac{1}{x}\right)$ при всех $x \in \mathbb{Q}^+$ и натуральных n.

8. Есть 40 мудрецов и их верный ассистент, которым предстоит следующее испытание. Сначала им рассказывают все правила, изложенные ниже, и дают время договориться о совместной стратегии. Потом мудрецов и ассистента разведут по разным комнатам и каждому покажут одни и те же три типа марок (увы, не существует способа, позволяющего разным участникам одинаково пронумеровать типы марок независимо друг от друга). С этого момента всякое общение между участниками запрещено. Затем их сведут вместе и каждому из мудрецов наклеят на лоб марку одного из этих трёх типов так, что каждый видит все марки, кроме своей. Ассистент, посмотрев на все марки, также наклеивает себе на лоб марку одного из этих типов по своему выбору и показывает её всем. Каждый мудрец по сигналу должен написать на бумажке, какой из типов марок у него на лбу. Как участникам договориться, чтобы все мудрецы верно определили свои марки?

9. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_a x_b \leq 1/4^{|a-b|}$ при всех парах индексов a и b (возможно, что $a = b$). Докажите, что $x_1+x_2+\ldots+x_n \leq 5/3$.

10. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ и $a_n = \varphi(a_{n+1})$ при всех $n \geq 0$. (Через $\varphi(k)$, как обычно, обозначено количество натуральных чисел, не превосходящих k и взаимно простых с k.)

Двадцатый математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Третий тур 30.10.16. Вторая лига.

1. В турнире участвуют 100 команд. В каждом туре играют все команды, причём с соперниками, с которыми ещё не играли. Какое наименьшее количество туров надо сыграть, чтобы, независимо от расписания игр, с гарантией нашлись три команды, сыгравшие каждая с каждой?

2. При каких натуральных n можно все натуральные делители числа 30^n разбить на тройки с равными произведениями?

3. Серединные перпендикуляры двух оснований трапеции пересекаются с серединными перпендикулярами двух боковых сторон этой трапеции в точках N, M, K, L. Могут ли эти точки лежать в вершинах трапеции, равной исходной?

4. Дан неравнобедренный треугольник ABC. На медианах AA_0, BB_0 и CC_0 как на диаметрах построены окружности, вторично пересекающие описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что перпендикуляры к отрезкам AA_1, BB_1 и CC_1, проходящие через точки A, B и C соответственно, проходят через одну точку.

5. Докажите, что любой многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами можно представить в виде суммы трёх кубов многочленов с вещественными коэффициентами.

6. В треугольнике ABC $\angle B = 30°$, $\angle A = 15°$. Перпендикуляр, восставленный в точке C к стороне AC, пересекает сторону AB в точке D. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямую CD в точке E. Отложим на продолжении стороны AB за B точку G так, что $BG=BC$. Докажите, что точки G, B, C и E лежат на одной окружности.

7. Найдите все натуральные n, для которых число $2^{2n-1}-2^n+1$ — точный квадрат.

8. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Правительство покрасило дороги в синий и зеленый цвета так, что по синим дорогам можно из любого города проехать в любой другой, а также по зеленым дорогам можно из любого города проехать в любой другой. Докажите, что некоторые дороги можно перекрасить в красный цвет так, чтобы из каждого города выходило четное число красных дорог и по красным дорогам из любого города можно было бы проехать в любой другой.

9. Из квадрата 8×8 вырезали угловые клетки. Рассмотрим покраску оставшихся клеток в два цвета такую, что в каждой вертикали, горизонтали и диагонали присутствуют клетки обоих цветов. Докажите, что таких раскрасок больше миллиарда.

10. Даны положительные числа a, b, c, сумма которых не меньше 2. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b\sqrt[3]{c}+a}+\frac{b}{c\sqrt[3]{a}+b}+\frac{c}{a\sqrt[3]{b}+c}\le 2.$$

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Третий тур 30.10.16. Высшая юниорская лига.

1. Даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 2. Докажите неравенство $\frac{a}{b\sqrt[3]{c}+a}+\frac{b}{c\sqrt[3]{a}+b}+\frac{c}{a\sqrt[3]{b}+c}\le 2$.

2. Некоторые из чисел 1, 2, 4, 8,… , 2^k красные, остальные — синие, причём сумма красных на 999 больше суммы синих. Сколько всего может быть красных чисел?

3. Сколько существует перестановок $i_1, \ldots, i_n$ чисел от 1 до n, для которых можно подобрать выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и прямую l так, что проекции $B_1, \ldots, B_n$ всех вершин многоугольника $A_1, \ldots, A_n$ соответственно на эту прямую различны и расположены в порядке $B_{i_1},\ldots,B_{i_n}$ (двигаться по прямой можно в любом из двух направлений)?

4. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.

5. При каких натуральных n можно все натуральные делители числа 30^n разбить на тройки с равными произведениями?

6. Вершины B, C остроугольного треугольника ABC фиксированы, вершина A переменная. Проекции середины стороны BC на стороны AB, AC — это точки D, E соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая DE пересекает прямые AO и BC в точках F и G соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника AFG проходит через фиксированную точку.

7. Пусть m — натуральное число. Назовем остаток a по модулю m *прекрасным*, если НОД$(a, m) = 1$ и существует такое натуральное число x, что $x^x \equiv a \pmod{m}$. Докажите, что если для некоторого n число a является прекрасным остатком по модулю n^n, то a также является прекрасным остатком по модулю n^{n^n}.

8. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Правительство покрасило дороги в синий и зеленый цвета так, что по синим дорогам можно из любого города проехать в любой другой, а также по зеленым дорогам можно из любого города проехать в любой другой. Докажите, что некоторые дороги можно перекрасить в красный цвет так, чтобы из каждого города выходило четное число красных дорог и по красным дорогам из любого города можно было бы проехать в любой другой.

9. Даны бесконечные последовательности неотрицательных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Для любого натурального числа n выполняются следующие соотношения: $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ и $a_{n+1}b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$. Оказалось, что $b_{2016} = 1$. Найдите все возможные значения числа a_1.

10. Найдите все натуральные n, для которых число $2^{2n-1}-2^n+1$ — точный квадрат.

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Третий тур 30.10.16. Первая юниорская лига.

1. Даны положительные числа a, b, c, сумма которых равна 2. Докажите неравенство $\frac{a}{b\sqrt[3]{c}+a}+\frac{b}{c\sqrt[3]{a}+b}+\frac{c}{a\sqrt[3]{b}+c}\le 2.$

2. Некоторые из чисел 1, 2, 4, 8,… , 2^k красные, остальные — синие, причём сумма красных на 999 больше суммы синих. Сколько всего может быть красных чисел?

3. Сколько существует перестановок $i_1, \ldots, i_n$ чисел от 1 до n, для которых можно подобрать выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и прямую l так, что проекции $B_1, \ldots, B_n$ всех вершин многоугольника $A_1, \ldots, A_n$ соответственно на эту прямую различны и расположены в порядке $B_{i_1},\ldots,B_{i_n}$ (двигаться по прямой можно в любом из двух направлений)?

4. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.

5. При каких натуральных n можно все натуральные делители числа 30^n разбить на тройки с равными произведениями?

6. Дан неравнобедренный треугольник ABC. На медиане AA_0 как на диаметре построена окружность, пересекающая вторично описанную окружность треугольника ABC в точке A_1. Докажите, что перпендикуляр к отрезку AA_1, проходящий через точку A, проходит через точку, симметричную ортоцентру треугольника ABC относительно его центра описанной окружности.

7. На плоскости нарисовали три красных окружности. Их центры и точки пересечения покрасили в синий цвет — в результате получилось 9 синих точек. Могут ли 6 синих точек лежать на одной окружности, отличной от красных?

8. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Правительство покрасило дороги в синий и зеленый цвета так, что по синим дорогам можно из любого города проехать в любой другой, а также по зеленым дорогам можно из любого города проехать в любой другой. Докажите, что некоторые дороги можно перекрасить в красный цвет так, чтобы из каждого города выходило четное число красных дорог и по красным дорогам из любого города можно было бы проехать в любой другой.

9. Известно, что $a+b = c$, $x+y = z$, $xa^2+yb^2 = zc^2$. Докажите, что $x/a+y/b+z/c = 0$.

10. Найдите все натуральные n, для которых число $2^{2n-1}-2^n+1$ — точный квадрат.

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Третий тур 30.10.16. Вторая юниорская лига.

1. Какое наибольшее число клеток можно отметить в квадрате 101×101 так, чтобы у каждой отмеченной клетки было хотя бы три неотмеченных соседних по стороне?

2. Некоторые из чисел 1, 2, 4, 8, …, 2^k красные, остальные синие, причём сумма красных на 33 больше суммы синих. Сколько всего красных чисел?

3. *Доминошка* — это полоска из двух клеток, на каждой из которых написано число от 0 до 6. В комплекте для игры в домино 28 доминошек, каждая комбинация чисел (включая пары одинаковых) встречается ровно один раз. Доминошки можно выкладывать в ряд, приставляя друг к другу половинками с одинаковым числом. Леша выложил в ряд несколько доминошек и заметил, что по правилам к ним нельзя приставить с краю ни одну из оставшихся. Какое наименьшее число доминошек мог выложить Леша?

4. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.

5. Решите в целых числах уравнение $a^2+b^2 = a+b+ab$.

6. В треугольнике ABC $\angle B = 30°$, $\angle A = 15°$. Перпендикуляр, восставленный в точке C к стороне AC, пересекается с серединным перпендикуляром к стороне AB в точке E. Отложим на продолжении стороны AB за B точку G так, что $BG = BC$. Докажите, что точки G, B, C и E лежат на одной окружности.

7. Известно, что $a+b = c$, $x+y = z$, $xa^2+yb^2 = zc^2$. Докажите, что $x/a+y/b+z/c = 0$.

8. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Правительство покрасило дороги в синий и зеленый цвета так, что по синим дорогам можно из любого города проехать в любой другой, а также по зеленым дорогам можно из любого города проехать в любой другой. Докажите, что некоторые дороги можно перекрасить в красный цвет так, чтобы из каждого города выходило четное число красных дорог и по красным дорогам из любого города можно было бы проехать в любой другой.

9. Даны круг K и точки A, B внутри него на расстоянии, большем 2. Докажите, что внутрь круга K можно уместить круг диаметра 1, не содержащий точек A и B.

10. Найдите все натуральные n, для которых число $2^{2n-1}-2^n+1$ — точный квадрат.

Третий тур 30.10.16. Третья юниорская лига.

1. Число 1234567 представлено в виде суммы шести или менее квадратов натуральных чисел. Сколько среди этих квадратов может быть нечётных?

2. Сколькими способами можно выбрать две костяшки домино из полного комплекта, чтобы их нельзя было приставить друг к другу по правилам игры в домино?

3. Некоторые из чисел 1, 2, 4, 8, …, 2^k красные, остальные синие, причём сумма красных на 33 больше суммы синих. Сколько всего красных чисел?

4. В турнире участвуют 20 команд. В каждом туре играют все команды, причём с соперниками, с которыми ещё не играли. Какое наименьшее количество туров надо сыграть, чтобы, независимо от расписания игр, с гарантией нашлись три команды, сыгравшие каждая с каждой?

5. Петя отмечает на прямой 5 точек, а Вася называет целое число от 1 до 10. Если Петя указывает среди отмеченных точек две, расстояние между которыми равно названному числу, он выиграл. Может ли Петя выиграть?

6. Серединные перпендикуляры двух оснований трапеции пересекаются с серединными перпендикулярами двух боковых сторон этой трапеции в точках N, M, K, L. Могут ли эти точки лежать в вершинах трапеции, равной исходной?

7. Известно, что $a+b = c$, $x+y = z$, $xa^2+yb^2 = zc^2$. Докажите, что $x/a+y/b+z/c = 0$.

8. Внутри неравнобедренного треугольника отмечена точка X. Какое наибольшее количество сторон треугольника может равняться отрезкам, соединяющим точку X с его вершинами?