КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 26.10.16. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько положительных среди этих пяти чисел?

2. На острове живут рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, всегда говорящие неправду. Путешественник подошёл к группе из двадцати островитян. Первому островитянину он задал вопрос: "Сколько рыцарей среди вас?". Тот ответил: «Среди нас … рыцарей". Путешественник не расслышал, какое число назвал первый и спросил у второго: "Что он сказал?". Тот ответил: "Он сказал, что среди нас 10 рыцарей". И тогда третий закричал: "Не верьте второму! Он лжет!" И тогда четвёртый закричал: "Не верьте третьему! Он лжет!". Так высказались все до двадцатого включительно, обвинив во лжи предыдущего. Сколько в этой компании рыцарей?

3. В остроугольном треугольнике ABC ($AC > AB$) проведена биссектриса AD. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AD, вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что прямая EA проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.

4. В кружке n ребят, причём любые двое ребят либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из ребят ровно 10 врагов в этом же кружке, причём если A дружит с B, но враждует с C, то B и C враждуют. Найдите все возможные значения n.

5. Найдите все пары чисел $a, b \in \mathbf{R}$, которые для всех пар положительных чисел x, y, меньших единицы, удовлетворяют условию $[ax+by]+[bx+ay] = (a+b)[x+y]$.

6. Дано простое число p. Докажите, что существует бесконечно много натуральных k, для которых число $3\cdot 2^k+k$ делится на **а)** p; **б)** p^2.

7. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, точка I — центр вписанной окружности, точка D — основание высоты из вершины A. Точки M и N — центры вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD, лежащие против вершин B и C соответственно. Точки K и L — центры вневписанных окружностей треугольников HBD и HCD, лежащие против вершин B и C соответственно. Докажите, что прямые HI, KN и LM пересекаются в одной точке или параллельны.

8. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 2$ выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leq n.$$

9. Даны 200 различных натуральных чисел, меньших 300, сумма которых чётна. Докажите, что из этих чисел можно выбрать 100 чисел так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся.

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 26.10.16. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Оказалось, что $AH{:}HA_1 = BH{:}HB_1 = 2{:}1$. Докажите, что треугольник ABC правильный.

2. Докажите, что уравнения $2^x+\frac{1}{2^x}=2^{2x}$ и $2^x+\frac{1}{2^x}=2^{3x}-1$ имеют одни и те же действительные корни.

3. В кружке n ребят, причём любые двое ребят либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из ребят ровно 24 врага в этом же кружке, причём если A дружит с B, но враждует с C, то B и C враждуют. Найдите все возможные значения n.

4. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают окружность, описанную около этого треугольника, в точках A_1 и B_1 соответственно. Окружность, вписанная в этот же треугольник, касается сторон BC и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CKL, лежит на прямой A_1B_1.

5. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 2$ выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leq n.$$

6. Петя как-то занумеровал вершины правильного 2017-угольника числами от 1 до 2017. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины?

7. Дано натуральное m. Докажите, что существует бесконечно много натуральных k, для которых число $3\cdot 2^k+k$ делится на m.

8. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, точка I — центр вписанной окружности, точка D — основание высоты из вершины A. Точки M и N — центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Точки K и L являются центрами вневписанных окружностей треугольников HBD и HCD, касающихся стороны HD. Докажите, что прямые HI, KM и LN пересекаются в одной точке.

9. Дима записал в каждую клетку таблицы, в которой 100 столбцов и $10! = 3628800$ строк, одно из чисел 1, 2, …, 100. При этом в каждой строке все числа встречаются по разу, и любые две строки различны. Затем при каждом $i = 1, 2, \ldots, 100$ он посчитал количество N_i различных чисел в i-м столбце. Какое наименьшее значение может принимать сумма $N_1+N_2+\ldots+N_{100}$?

Решения задач командной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *Произведение пяти чисел отрицательно, а сумма любых трёх из них — положительна. Сколько положительных среди этих пяти чисел?*

Ответ. Одно. Решение. Так как произведение пяти чисел отрицательно, среди них нечётное число отрицательных. При этом трёх или больше отрицательных чисел быть не может, потому что тогда нашлись бы три числа с отрицательной суммой. Значит, отрицательное число только одно.

Задача 2. *На острове живут рыцари, всегда говорящие правду и лжецы, всегда говорящие неправду. Путешественник подошёл к группе из двадцати островитян. Тот ответил: «Среди нас … рыцарей". Путешественник не расслышал, какое число назвал первый и спросил у второго: "Что он сказал?". Тот ответил: "Он сказал, что среди нас 10 рыцарей". И тогда третий закричал: "Не верьте второму! Он лжет!" И тогда четвёртый закричал: "Не верьте третьему! Он лжет!". Так высказались все до двадцатого включительно, обвинив во лжи предыдущего. Сколько в этой компании рыцарей?*

Ответ. 9. Решение. Очевидно, с третьего лжецы и рыцари чередуются, потому что лжец лжеца, как и рыцарь рыцаря, обвинить во лжи не может. Поэтому среди последних 18 человек ровно 9 рыцарей. Допустим, второй — рыцарь. Тогда первый действительно сказал, что среди них 10 рыцарей. Но если первый сказал правду, то второй должен быть лжецом, а если первый солгал, то тогда среди них 10 рыцарей. В обоих случаях противоречие, так что второй — лжец. Но тогда первый тоже должен быть лжецом: иначе он действительно сказал бы, что рыцарей 10, и второй подтвердил бы его слова.

Задача 3. *В остроугольном треугольнике ABC ($AC > AB$) проведена биссектриса AD. Прямая, проходящая через B перпендикулярно AD, вторично пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E. Докажите, что прямая EA проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.*

Решение. По условию $AC > AB$, значит угол ADB — острый. Также угол BAD острый, поэтому перпендикуляр из B пересекает отрезок AD, а точка E лежит на дуге AD, не содержащей B. Пусть $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle ACD = \gamma$. Тогда $\angle ABE = 90°-\alpha$, а $\angle ADB = \alpha+\gamma$, как внешний в треугольнике ADC. Из вписанности четырехугольника $AEDB$ заключаем, что $\angle ADE = \angle ABE = 90°-\alpha$ и $\angle BAE = 180°-\angle BDE = 180°-(\alpha+\gamma)-(90°-\alpha) = 90°-\gamma$. Этому же равен угол BAO, поэтому точки A, E и O лежат на одной прямой.

Задача 4. *В кружке n ребят, причём любые двое ребят либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из ребят ровно 10 врагов в этом же кружке, причём если A дружит с B, но враждует с C, то B и C враждуют. Найдите все возможные значения n.*

Ответ. 11, 12, 15, 20. Решение. Если все враги одного из двух друзей являются врагами другого, то у любых двух друзей одни и те же враги. При этом друг моего друга — мой друг, иначе у меня был бы враг, который не враждует с моим другом. Поэтому все кружковцы разбиваются на группы, где каждый дружит с каждым, причём в каждой группе на 10 человек меньше, чем во всём кружке. Пусть в каждой группе k человек. Тогда 10 должно делиться на k, а всего ребят в кружке — $10+k$. С другой стороны, если m — делитель числа 10, то кружок, состоящий из $m+1$ группы размера $k = 10/m$, где любые двое из одной группы дружат, а из разных групп — враждуют, удовлетворяет условию задачи. Перебирая теперь делители числа 10, получаем ответ.

Задача 5. *Найдите все пары чисел $a, b \in \mathbf{R}$, которые для всех пар положительных чисел x, y, меньших единицы, удовлетворяют условию $[ax+by]+[bx+ay] = (a+b)[x+y]$.*

Ответ. $a = b = 0$ или $a = b = 1$. Решение. Равенство из условия можно преобразовать в следующее: $ax+by-\{ax+by\}+bx+ay-\{bx+ay\} = (a+b)(x+y-\{x+y\})$, которое в свою очередь равносильно равенству $\{ax+by\}+\{bx+ay\} = (a+b)\{x+y\}$. Подставим $y = 1-x$. Правая часть будет равна 0, значит, каждое слагаемое в левой части должно равняться 0. Если $\{ax+by\} = 0$, то для любого $x \in (0,1)$ число $(a-b)x+b$ — целое. Очевидно, что такое возможно только когда $a=b$ и $a \in \mathbf{Z}$.

Вернемся к исходному равенству с целыми частями и подставим в него $x = y = (1-\varepsilon)/2$. Получим $2[a(1-\varepsilon)] = 2a[1-\varepsilon] = 0$. Отсюда делаем вывод, что $0 \le a(1-\varepsilon) < 1$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$. Это возможно только при $a = 0$ или $a = 1$. Оба эти варианта, очевидно, подходят.

Задача 6. *Дано простое число p. Докажите, что существует бесконечно много натуральных k, для которых число $3\cdot 2^k+k$ делится на* ***а)*** *p;* ***б)*** *p^2.*

Решение. Если $p = 2$, то на p^2 будут делиться все числа вида $3\cdot 2^k+k$, где k делится на 4. Далее считаем, что $p > 2$.

а) Из малой теоремы Ферма следует, что подойдут все числа вида $k = 3(p-1)+np(p-1)$, где n — произвольное натуральное. б) Заметим, что $\varphi(p^2) = p(p-1)$. Поэтому

$$3\cdot 2^{3(p-1)+np(p-1)}+3(p-1)+np(p-1) \equiv 3\cdot 2^{3(p-1)}+3(p-1)+np(p-1) \pmod{p^2}.$$

Поскольку число $3\cdot 2^{3(p-1)}+3(p-1)$ делится на p, его вычет по модулю p^2 равен sp для некоторого натурального s. Поэтому при всех $n = s+lp$ ($l \in \mathbf{N}$) число $3\cdot 2^{3(p-1)}+3(p-1)+np(p-1) \equiv sp-sp+lp^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$, что завершает доказательство.

Задача 7. *В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, точка I — центр вписанной окружности, точка D — основание высоты из вершины A. Точки M и N — центры вневписанных окружностей треугольников ABD и ACD, лежащие против вершин B и C соответственно. Точки K и L — центры вневписанных окружностей треугольников HBD и HCD, лежащие против вершин B и C соответственно. Докажите, что прямые HI, KN и LM пересекаются в одной точке или параллельны.*

Решение. Докажем, что $HK \parallel IN$, $HL \parallel IM$ и $KL \parallel MN$, откуда будет следовать, что треугольники HKL и INM гомотетичны или получаются друг из друга параллельным переносом, а значит, прямые HI, KN и LM пересекаются в одной точке или параллельны.

Положим $\angle ACI = \angle ICB = \gamma$. Тогда $\angle BHD = 2\gamma$, так что $\angle DHK = 90°–\gamma = 90°–\angle ICD$ (*). Поскольку $\angle CDH = 90°$, из равенства (*) следует, что $HK \parallel NI$. Аналогично доказывается, что $HL \parallel MI$.

Для доказательства параллельности KL и MN достаточно показать, что $DK/DM = DL/DN$, или, что равносильно, $DK\cdot DN = DL\cdot DM$. Точка N является центром вневписанной окружности треугольника ACD, поэтому $\angle ADN = 45°$, $\angle DAN = 45°+\gamma$, $\angle AND = 90°–\gamma$. По аналогичной причине $\angle KDH = 45°$, $\angle DKH = 45°+\gamma$, $\angle KHD = 90°–\gamma$. Следовательно, треугольники DKH и DAN подобны, и $DK\cdot DN = DH\cdot DA$. Аналогично показывается, что треугольники DHL и DMA подобны, и $DM\cdot DL = DH\cdot DA$. Значит, $DK\cdot DN = DL\cdot DM$, что и требовалось.

Задача 8. *Докажите, что при всех натуральных $n \geq 2$ выполнено неравенство*

$$\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leq n$$

Решение. Из неравенства Бернулли имеем $\sqrt[k]{\dfrac{k}{k-1}}=\sqrt[k]{1+\dfrac{1}{k-1}} \leq 1+\dfrac{1}{k(k-1)}$.

Суммируя полученные неравенства по всем k от 2 до n, получаем, что $\sqrt{\frac{2}{1}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \leq n-1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=n-1+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=n-\frac{1}{n}<n$.

Задача 9. *Даны 200 различных натуральных чисел, меньших 300, сумма которых чётна. Докажите, что из этих чисел можно выбрать 100 чисел так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся.*

Решение. Пусть данные числа равны $a_1 < a_2 < \ldots < a_{200}$. Обозначим $x_i = a_{2i}–a_{2i-1}$. Сумма всех x_i четна, так как её четность совпадает с четностью суммы всех a_i. Пусть сумма всех x_i равна $2k$. Если мы сможем из множества x_i выбрать набор чисел с суммой k, то мы сможем также найти 100 чисел, сумма которых равна сумме остальных. Для этого надо в сотню чисел брать a_{2i}, если x_i попало в наш набор, и a_{2i-1}, если нет.

Докажем, что такой набор существует. Сначала оценим сумму x_i:

$$x_1+x_2+\ldots+x_{100} = (a_2–a_1)+(a_4–a_3)+\ldots+(a_{200}–a_{199}) =$$
$$= a_{200}–a_1–(a_3–a_2)–(a_5–a_4)–\ldots–(a_{199}–a_{198}) \leq a_{200}–a_1–99 \leq 299–1–99 = 199.$$

Теперь рассмотрим суммы $0, x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+x_2+\ldots+x_{99}$. Если какие–то две из них дают одинаковые остатки по модулю k, то числа, входящие в их разность, и будут нужным нам набором (их сумма положительна, делится на k и меньше $2k$, значит равняется k). А так как $k \leq 99$, такие две суммы обязательно найдутся.

Решения задач командной олимпиады старшей группы.

Задача 1. *Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Оказалось, что $AH:HA_1 = BH:HB_1 = 2:1$. Докажите, что треугольник ABC правильный.*

Решение. Из условия следует, что треугольники ABH и A_1B_1H гомотетичны с центром H и коэффициентом ½. Поэтому отрезок A_1B_1 параллелен AB и равен его половине. Значит, треугольники CAB и CB_1A_1 гомотетичны с центром C и коэффициентом ½, то есть A_1 и B_1 — середины сторон CB и CA соответственно. Поэтому высоты AA_1 и BB_1 являются также и медианами, откуда $AC = AB = BC$.

Задача 2. *Докажите, что уравнения $2^x+1/2^x = 2^{2x}$ и $2^x+1/2^x = 2^{3x}-1$ имеют одни и те же действительные корни.*

Решение. Умножим оба уравнения на 2^x и обозначим 2^x через y. Так как 2^x принимает все положительные значения, достаточно доказать, что положительные корни у получившихся уравнений $y^3-y^2-1=0$ и $y^4-y^2-y-1=0$ совпадают. А для этого достаточно заметить, что $y^4-y^2-y-1 = (y+1)(y^3-y^2-1)$.

Задача 3. *В кружке n ребят, причём любые двое ребят либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из ребят ровно 24 врага в этом же кружке, причём если А дружит с В, но враждует с С, то В и С враждуют. Найдите все возможные значения n.*

Ответ. 25, 26, 27, 28, 30, 32, 36, 48. Решение. Если все враги одного из двух друзей являются врагами другого, то у любых двух друзей одни и те же враги. При этом друг моего друга — мой друг, иначе у меня был бы враг, который не враждует с моим другом. Поэтому все кружковцы разбиваются на группы, где каждый дружит с каждым, причём в каждой группе на 24 человека меньше, чем во всём кружке. Пусть в каждой группе k человек. Тогда 24 должно делиться на k, а всего ребят в кружке — $24+k$. С другой стороны, если m — делитель числа 24, то кружок, состоящий из $m+1$ группы размера $k = 24/m$, где любые двое из одной группы дружат, а из разных групп — враждуют, удовлетворяет условию задачи. Перебирая теперь делители числа 24, получаем ответ.

Задача 4. *Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают окружность, описанную около этого треугольника, в точках A_1 и B_1 соответственно. Окружность, вписанная в этот же треугольник, касается сторон BC и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника CKL, лежит на прямой A_1B_1.*

Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Так как $IK \perp BC$ и $IL \perp AC$, центром описанной окружности треугольника CKL является середина O отрезка IC. По лемме о трезубце $A_1I = A_1C$ и $B_1I = B_1C$. Поэтому A_1B_1 — серединный перпендикуляр отрезка CI, и потому проходит через точку O.

Задача 5. *Докажите, что при всех натуральных $n \ge 2$ выполнено неравенство* $\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \ldots + \sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \le n$.

Решение. Из неравенства Бернулли имеем $\sqrt[k]{\frac{k}{k-1}} = \sqrt[k]{1+\frac{1}{k-1}} \le 1+\frac{1}{k(k-1)}$. Суммируя полученные неравенства по всем k от 2 до n, получаем, что $\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \ldots + \sqrt[n]{\frac{n}{n-1}} \le n-1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = n-1+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = n-\frac{1}{n} < n$.

Задача 6. *Петя как-то занумеровал вершины правильного 2017-угольника числами от 1 до 2017. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины А в вершину В, если между ними не больше 9 других вершин и число в В больше числа в А. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины?*

Ответ. 12. Решение. Оценка сверху. Покажем, что Петя может расставить числа так, чтобы Вася не смог побывать более чем в 12 вершинах. Рассмотрим граф G, вершинами которого являются вершины 2017-угольника, а две вершины соединены ребром, если в 2017-угольнике между ними не более 9 других вершин (при этом петель в графе нет). Покажем, что вершины графа G красятся правильным образом в 12 цветов (то есть так, что никакие две вершины одного цвета не соединены ребром). Цвета будем обозначать числами 0, 1, 2, …, 11. Пронумеруем вершины в порядке обхода 2017-угольника. Раскрасим вершины с номерами от 1 до 48 в цвет, соответствующий остатку числа при делении на 12. Затем еще не окрашенную вершину с номером a раскрасим в цвет, соответствующий остатку числа $a-4$ при делении на 11. Легко убедиться, что две смежные вершины графа тем самым покрашены в разные цвета.

Теперь расставляем числа за Петю следующим образом. Пронумеруем по возрастанию сначала все числа 0-го цвета, потом 1-го, 2-го, и т. д., до 11-го. Заметим, что Вася ходом фишки обязан сменить цвет, при этом вернуться в цвет с меньшим номером он не может. Значит, он побывает не более чем в одной вершине каждого цвета, а, следовательно, всего не более чем в 12 вершинах.

Оценка снизу. Каждой вершине сопоставим наибольшее длину цепочки (считая в цепочке количество вершин), по которой Вася может пройти, начиная с этой вершины. Заметим, что никаким двум вершинам, между которыми не более 9 других вершин, не может быть сопоставлено одно и то же число, потому что из одной вершины A мы можем пойти во вторую вершину B, а затем по максимальной цепочке с началом в B, тем самым увеличив длину цепочки из вершины A. Если теперь каждой вершине сопоставлено число, не превосходящее 11, то по принципу Дирихле какому-то числу сопоставлено не менее $\left[\frac{2017}{11}\right]+1$ вершин, и между какими-то двумя из них не более 9 других вершин (иначе всего вершин не меньше, чем $11\cdot\left(\left[\frac{2017}{11}\right]+1\right) > 2017$), противоречие. Следовательно, хоть какой-то вершине сопоставлено число, не меньшее 12, с нее Вася и начнет двигаться по максимальной цепочке.

Задача 7. *Дано натуральное m. Докажите, что существует бесконечно много натуральных k, для которых число $3\cdot 2^k+k$ делится на m.*

Решение. Докажем этот факт индукцией по m. База $m = 1$ очевидна. Пусть всё уже доказано для всех $n \le m-1$. Если $m = 2^s$, то подойдут все k, равные степеням двойки, большим 2^s. Пусть $m = 2^s\cdot r$, где r нечётно и $r > 1$. Положим $d = 2^s\cdot$НОД$(r, \varphi(r))$. Так как $d < m$, найдётся такое k, что $3\cdot 2^k+k$ делится на d. Заметим, что если мы увеличим k на $2^s\cdot\varphi(r)$, то, в силу теоремы Эйлера, к числу $3\cdot 2^k+k$ по модулю m прибавится $2^s\cdot\varphi(r)$. Поскольку числа m/d и $2^s\cdot\varphi(r)/d$ взаимно просты, многократным прибавлением $2^s\cdot\varphi(r)$ можно получить любой кратный d вычет по модулю m, в том числе и 0. Таким образом мы получим одно искомое k для $n = m$. Прибавляя к нему числа, делящиеся на $m\varphi(r)$, получим бесконечно много таких k.

Задача 8. *В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, точка I — центр вписанной окружности, точка D — основание высоты из вершины A. Точки M и N — центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Точки K и L являются центрами вневписанных окружностей треугольников HBD и HCD, касающихся стороны HD. Докажите, что прямые HI, KM и LN пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть прямые DM и CN пересекаются в точке X, а прямые BM и DN — в точке Y. По теореме Паппа для троек X, L, M и Y, K, N, точки пересечения прямых KM и LN, KX и LY, NX и MY лежат на одной прямой. При этом прямые NX и MY пересекаются в точке I, поэтому если мы докажем, что точка пересечения прямых KX и LY лежит на прямой HI, то мы докажем, что прямые HI, KN и LM пересекаются в одной точке.

Докажем, что $HK \parallel XC$, $HL \parallel BY$ и $KL \parallel XY$. Отсюда будет следовать, что треугольники HKL и IXY гомотетичны или получаются друг из друга параллельным переносом (последнее, очевидно, невозможно), а значит прямые HI, KX и LY пересекаются в одной точке, а именно — центре гомотетии.

Положим $\angle ACI = \angle ICB = \gamma$. Тогда $\angle BHD = 2\gamma$, так что $\angle DHK = 90°-\gamma = 90°-\angle ICD$ (*). Поскольку $\angle CDH = 90°$, из равенства (*) следует, что $HK \parallel NI$. Аналогично доказывается, что $HL \parallel MI$.

Для доказательства параллельности KL и XY достаточно показать, что $DK/DY = DL/DX$, или, что равносильно, $DK\cdot DX = DL\cdot DY$. Точка X является центром вневписанной окружности треугольника ACD, поэтому $\angle ADX = 45°$, $\angle DAX = 45°+\gamma$, $\angle AXD = 90°-\gamma$. По аналогичной причине $\angle KDH = 45°$, $\angle DKH = 45°+\gamma$, $\angle KHD = 90°-\gamma$. Следовательно, треугольники DKH и DAX подобны, и $DK\cdot DX = DH\cdot DA$. Аналогично показывается, что подобны треугольники DHL и DYA, и $DY\cdot DL = DH\cdot DA$. Значит, $DK\cdot DX = DL\cdot DY$, что и требовалось.

Задача 9. *Дима записал в каждую клетку таблицы, в которой 100 столбцов и 10! = 3628800 строк, одно из чисел 1, 2, ..., 100. При этом в каждой строке все числа встречаются по разу, и любые две строки различны. Затем при каждом i = 1, 2, ..., 100 он посчитал количество N_i различных чисел в i-м столбце. Какое наименьшее значение может принимать сумма $N_1+N_2+\ldots+N_{100}$?*

Ответ. 144. Решение. Существует $2^{22} > 10!$ перестановок чисел 1, 2, …, 100 таких, что числа, бóльшие 44, стоят на своих местах, а на местах $(2k-1, 2k)$ при $k \le 22$ стоят числа $2k-1$ и $2k$ в некотором порядке. Если Дима выберет 10! различных таких перестановок и запишет их в строки таблицы, то он получит, что $N_k \le 2$ при $k \le 44$ и $N_k = 1$ при $k > 44$. Значит, полученная сумма не будет превосходить 144.

Осталось показать, что сумму, меньшую 144, получить нельзя. Для начала переформулируем это утверждение. Рассмотрим таблицу T размера 100×100, строки и столбцы которой занумерованы числами от 1 до 100. В таблице T отметим клетку (i, j), если в j–м столбце исходной таблицы встречается число i. Тогда общее число отмеченных клеток равно $N_1+\ldots+N_{100}$.

Для произвольной квадратной таблицы $n\times n$ назовём набор из n её отмеченных клеток *ладейным*, если среди этих клеток нет двух в одной строке или в одном столбце. Тогда каждая строка $(a_1, \ldots, a_{100})$ исходной таблицы соответствует ладейному набору из 100 клеток $(a_1, 1), (a_2, 2), \ldots, (a_{100}, 100)$ в таблице T. Значит, нам достаточно доказать, что, если в таблице T отметить не более 143 клеток, то количество ладейных наборов меньше 10!.

Докажем индукцией по $n \ge 1$, что если в таблице P размера $n\times n$ отмечено не более $n+k$ клеток, количество ладейных наборов в ней не превосходит $2^{k/2}$: поскольку $10! > 3\cdot 2^{20} > 2^{43/2}$, отсюда будет следовать требуемое. База при $n = 1$ очевидна. Для перехода выберем из всех строк и столбцов таблицы P линию, содержащую наименьшее число t отмеченных клеток; без ограничения общности, это первая строка. Если $t = 0$, то ладейных наборов нет совсем. Пусть $t \ge 1$. Рассмотрим любую из t отмеченных клеток в первой строке (пусть для определённости эта клетка первая). Количество ладейных наборов, содержащих её, равно количеству ладейных наборов в таблице P', полученной удалением первых строки и столбца. Так как первая строка и первый столбец таблицы P содержат хотя бы по t отмеченных клеток, в P' не более $(n-1)+k-2(t-1)$ отмеченных клеток, то есть количество указанных наборов не больше $2^{k/2-(t-1)}$ по предположению индукции. Суммируя эти оценки для всех клеток первой строки, получаем, что общее число ладейных наборов в P не превосходит $t\cdot 2^{k/2-(t-1)}$. Это не больше $2^{k/2}$, поскольку при $t \ge 1$ верно неравенство $t \le 2^{t-1}$ (легко проверяемое по индукции). Переход завершён.