Двадцатый математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Казань, 25 октября - 1 ноября 2016 года

Четвёртый тур 31.10.16. Высшая лига, бои за 1-6 места.

1. На бесконечном прямом тракте несколько (конечное количество) кикимор расставили волшебные верстовые камни. Каждая кикимора выставила бесконечный в обе стороны ряд камней одинакового веса, соседние камни которого находятся на расстоянии в версту друг от друга; веса камней у разных кикимор могут быть разными. Из любой точки тракта видны все камни, расстояние до которых меньше α (α — фиксированное вещественное число). Святогор вышел на тракт в некотором месте. Далее каждую минуту он перемещается в центр тяжести всех камней, которые он видит (сам по себе он никуда не идёт). Верно ли, что через некоторое время он обязательно перестанет перемещаться? (Считается, что из любой точки Святогор видит хотя бы один камень.)

2. Мальчик Андрей пишет на очень длинном рулоне туалетной бумаги подряд без пробелов числа 1234567891011…, пока ему не надоест. Надоедает ему тогда, когда в этой строке есть все не более чем n-значные числа ($n > 10$). Какое число Андрей выпишет последним?

3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Касательная к описанной окружности треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно DE. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'DE$ касается описанной окружности треугольника ABC.

4. Дана квадратная таблица, клетки которой покрашены в белый и чёрный цвет. Две клетки называются *соседними*, если расстояние между их центрами не превосходит утроенной длины стороны клетки. С таблицей разрешается делать произвольные перестановки строк и столбцов. Верно ли, что из любой таблицы можно получить такую, в которой чёрные клетки образуют связное множество? (Множество связно, если от любой его клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз к соседней и не выходя за пределы этого множества.)

5. Докажите, что существует константа $C > 2$, для которой верно следующее утверждение: «Пусть n — натуральное число, а $P(x)$ — приведённый многочлен n-ой степени с целыми коэффициентами, имеющий n различных вещественных корней. Предположим, что все эти корни больше единицы и отличны от двойки. Тогда произведение этих корней не меньше, чем C^n.»

6. Составное натуральное число n называется *правильным*, если существует натуральное k такое, что любой делитель числа n, отличный от единицы, представляется в виде m^2+k, где m — натуральное число. Найдите все правильные числа.

7. Из единичного квадрата вырезали n выпуклых многоугольников. Докажите, что сумма их периметров не превосходит $4+2(n-1)\sqrt{2}$.

8. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости. Для любых $1 \le i < j \le 4$ проведём некоторую плоскость π_{ij} через A_i и A_j. Предположим, что при каждых $1 \le i < j < k \le 4$ плоскости π_{ij}, π_{ik} и π_{jk} имеют единственную общую точку B_{ijk}. Докажите, что точки B_{123}, B_{124}, B_{134} и B_{234} лежат в одной плоскости.

9. Пусть k — натуральное число. Докажите, что любой граф, в котором степени всех вершин не меньше $2k$, содержит $(k+1)$-рёберно связный подграф. (Связный граф называется n-рёберно связным, если в нём есть хотя бы n рёбер, и при выкидывании любых $n-1$ рёбер он остаётся связным.)

10. Пусть $f(x)$ — квадратный трёхчлен с вещественными коэффициентами. Может ли оказаться, что существует ровно одна (с точностью до циклических сдвигов) тройка различных вещественных чисел (a, b, c) такая, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$?

Двадцатый математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Казань, 25 октября - 1 ноября 2016 года

Четвёртый тур 31.10.16. Высшая лига, бой за 7-8 места, первая лига.

1. На бесконечном прямом тракте несколько (конечное количество) кикимор расставили волшебные верстовые камни. Каждая кикимора выставила бесконечный в обе стороны ряд камней одинакового веса, соседние камни которого находятся на расстоянии в версту друг от друга; веса камней у разных кикимор могут быть разными. Из любой точки тракта видны все камни, расстояние до которых меньше α (α — фиксированное вещественное число). Святогор вышел на тракт в некотором месте. Далее каждую минуту он перемещается в центр тяжести всех камней, которые он видит (сам по себе он никуда не идёт). Верно ли, что через некоторое время он обязательно перестанет перемещаться? (Считается, что из любой точки Святогор видит хотя бы один камень.)

2. Мальчик Андрей пишет на очень длинном рулоне туалетной бумаги подряд без пробелов числа 1234567891011…, пока ему не надоест. Надоедает ему тогда, когда в этой строке есть все не более чем n-значные числа ($n > 10$). Какое число Андрей выпишет последним?

3. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Касательная к описанной окружности треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно DE. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'DE$ касается описанной окружности треугольника ABC.

4. В городе 100000 человек, любые двое либо враждуют, либо дружат. Можно ли каждому человеку выдать бесконечное множество, состоящее из натуральных чисел, так, чтобы множества любых двух дружащих имели бесконечно много общих элементов, а множества любых двух враждующих не имели общих элементов?

5. Пусть f — функция, сопоставляющая каждой тройке целых чисел (a, b, c) целое число $f(a, b, c)$. Известно, что для любых целых a, b, c_1 и c_2 выполнено равенство $f(a, b, c_1+c_2) = f(b, c_1, a)+f(b, c_2, a)$. Найдите все такие функции f.

6. Составное натуральное число n называется *правильным*, если существует натуральное k такое, что любой делитель числа n, отличный от единицы, представляется в виде m^2+k, где m — натуральное число. Найдите все правильные числа.

7. В выпуклом 99-угольнике провели все 99 диагоналей, отрезающих от этого многоугольника треугольник. Многоугольник распался на 199 частей. Могут ли какие-то 140 из них иметь равные площади?

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Треугольники $B_1C_1D_1$, $A_2C_2D_2$ и $A_3B_3D_3$ получены параллельными переносами из треугольников BCD, ACD и ABD соответственно; при этом каждая из четвёрок (C_1, D_1, C_2, D_2), (B_1, D_1, B_3, D_3) и (A_2, D_2, A_3, D_3) лежит на одной прямой. Докажите, что треугольник, образованный прямыми B_1C_1, A_2C_2 и A_3B_3, равен треугольнику ABC.

9. Пусть k — натуральное число. Докажите, что любой граф, в котором степени всех вершин не меньше $2k$, содержит $(k+1)$-рёберно связный подграф. (Связный граф называется n-рёберно связным, если в нём есть хотя бы n рёбер, и при выкидывании любых $n-1$ рёбер он остаётся связным.)

10. Пусть $f(x)$ — квадратный трёхчлен с вещественными коэффициентами. Может ли оказаться, что существует ровно одна (с точностью до циклических сдвигов) тройка различных вещественных чисел (a, b, c) такая, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$?

Четвёртый тур 31.10.16. Вторая лига.

1. Даны положительные числа x, y, z. Докажите, что $4(x+y+z)^3 \geq 27(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)$.

2. По кругу расположены n городов. Между первым и вторым идут две дороги, между вторым и третьим — 2^2 дорог, …, между n-м и 1-м — 2^n дорог. Петя хочет посчитать количество способов проехать от города A до города B, двигаясь либо всегда по часовой стрелке, либо всегда против часовой стрелки, пока не попадет из одного города в другой. Какое минимальное число у него может получиться?

3. В выпуклом 99-угольнике провели все 99 диагоналей, отрезающих от этого многоугольника треугольник. Многоугольник распался на 199 частей. Могут ли какие-то 140 из них иметь равные площади?

4. В некоторые клетки таблицы $m\times n$ ($m \geq 4$ строк и n столбцов) ставят фигуру «аллигатор». Аллигатор бьёт все клетки в своём столбце, а также по одной соседней клетке слева и справа. Какое наименьшее количество аллигаторов нужно поставить на доску, чтобы все клетки были под угрозой? (Клетка, на которой стоит аллигатор, считается угрожаемой.)

5. В стране n городов, они соединены дорогами так, что из каждого города можно добраться до любого другого, причем дорог четное число. Докажите, что можно ввести на всех дорогах одностороннее движение так, чтобы из каждого города выходило четное число дорог.

6. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 60°$. Прямая, соединяющая ортоцентр треугольника ABC с его центром описанной окружности пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что $AD = AE$.

7. Из всех натуральных делителей составного числа n вычли по единице. При каких n все получившиеся разности будут точными квадратами?

8. На множестве целых чисел задана операция *, которая паре целых чисел a и b сопоставляет целое число $a*b$. Оказалось, что $a*(b+c) = b*a+c*a$ для любых целых a, b и c. Докажите, что существует целое число k такое, что $a*b = k\cdot a\cdot b$ для всех пар a и b.

9. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Касательная к описанной окружности треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно DE. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'DE$ касается описанной окружности треугольника ABC.

10. По кругу лежат 27 монет, две из которых — фальшивые и лежат рядом. Разрешается указать любой набор монет и спросить, сколько в нём фальшивых. За какое наименьшее число вопросов можно определить обе фальшивые монеты, если ответы даются только после того, как все вопросы заданы?

Четвёртый тур 31.10.16. Высшая юниорская лига.

1. Числа 1, 2, ..., 2017^2 расставлены в клетках таблицы 2017×2017. Разрешается поменять местами любые две строки или два столбца, или переставить все числа любой строки или любого столбца в обратном порядке. Можно ли с помощью таких операций поменять местами два числа так, чтобы все остальные числа остались на своих местах?

2. На плоскости расположено 24 робота. В каждом роботе установлен прожектор, освещающий угол в 70° (вместе со сторонами) с вершиной в роботе. Будем называть упорядоченную пару роботов *удачной*, если первый из этих роботов освещает второго. Какое наибольшее число удачных пар роботов может быть?

3. Дано натуральное число $n > 2$. Докажите, что существует такое натуральное число $m > n^n$, что число $\dfrac{n^m - m^n}{m+n}$ — натуральное.

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Касательная к описанной окружности треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно DE. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'DE$ касается описанной окружности треугольника ABC.

5. Даны положительные числа x, y, z. Докажите, что $4(x+y+z)^3 \geq 27(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)$.

6. Точка H — ортоцентр остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, точка H' симметрична H относительно A. Прямая AB пересекает отрезок CH' в точке D. Прямая AC пересекает отрезок BH' в точке E. Оказалось, что $BD = CE$. Чему может быть равен угол BAC?

7. В выпуклом 99-угольнике провели все 99 диагоналей, отрезающих от этого многоугольника треугольник. Многоугольник распался на 199 частей. Могут ли какие-то 140 из них иметь равные площади?

8. Натуральное число n называется *правильным*, если оно составное и для некоторого натурального k любой делитель числа n, отличный от единицы, представляется в виде m^2+k, где m — натуральное число. Найдите все правильные числа.

9. На множестве целых чисел задана операция *, которая паре целых чисел a и b сопоставляет целое число $a*b$. Оказалось, что $a*(b+c) = b*a+c*a$ для любых целых a, b и c. Докажите, что существует целое число k такое, что $a*b = k \cdot a \cdot b$ для всех пар a и b.

10. По кругу лежат 27 монет, две из которых — фальшивые и лежат рядом. Разрешается указать любой набор монет и спросить, сколько в нём фальшивых. За какое наименьшее число вопросов можно определить обе фальшивые монеты, если ответы даются только после того, как все вопросы заданы?

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября - 1 ноября 2016 года

Четвёртый тур 31.10.16. Первая юниорская лига.

1. Числа 1, 2, ..., 2017^2 расставлены в клетках таблицы 2017×2017. Разрешается поменять местами любые две строки или два столбца, или записать все числа любой строки или любого столбца в противоположном порядке. Можно ли с помощью таких операций поменять местами два числа так, чтобы все остальные числа остались на своих местах?

2. На плоскости расположено 24 робота. В каждом роботе установлен прожектор, освещающий угол в 40° (вместе со сторонами) с вершиной в роботе. Будем называть упорядоченную пару роботов *удачной*, если первый из этих роботов освещает второго. Какое наибольшее число удачных пар роботов может быть?

3. Дано натуральное число $n > 2$ и n не делится на 3. Докажите, что существует такое натуральное число $m > n^n$, что число $\dfrac{n^m - m^n}{m+n}$ — натуральное.

4. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, а биссектрисы углов BCA и CAD пересекают описанную окружность в точках E и F. Докажите, что если отрезок EF проходит через центр вписанной окружности треугольника AMB, то $AB \parallel CD$.

5. Найдите все решения системы уравнений в целых числах:

$$x + y + z = 2, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

6. Точка H — ортоцентр остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, точка H' симметрична H относительно A. Прямая AB пересекает отрезок CH' в точке D. Прямая AC пересекает отрезок BH' в точке E. Оказалось, что $BD = CE$. Чему может быть равен угол BAC?

7. В выпуклом 99-угольнике провели все 99 диагоналей, отрезающих от этого многоугольника треугольник. Многоугольник распался на 199 частей. Могут ли какие-то 140 из них иметь равные площади?

8. Натуральное число n называется *правильным*, если оно составное и для некоторого натурального k любой делитель числа n, отличный от единицы, представляется в виде m^2+k, где m — натуральное число. Найдите все правильные числа.

9. На множестве целых чисел задана операция *, которая паре целых чисел a и b сопоставляет целое число $a*b$. Оказалось, что $a*(b+c) = b*a+c*a$ для любых целых a, b и c. Докажите, что существует целое число k такое, что $a*b = k\cdot a\cdot b$ для всех пар a и b.

10. По кругу лежат 27 монет, две из которых — фальшивые и лежат рядом. Разрешается указать любой набор монет и спросить, сколько в нём фальшивых. За какое наименьшее число вопросов можно определить обе фальшивые монеты, если ответы даются только после того, как все вопросы заданы?

Четвёртый тур 31.10.16. Вторая юниорская лига.

1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 60°$. Прямая, соединяющая ортоцентр треугольника ABC с его центром описанной окружности, пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что $AD = AE$.

2. Найдите все решения системы уравнений в целых числах:

$$x + y + z = 2, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

3. Докажите, что для любого нечетного $n > 1$ существует натуральное $m > n^n$ такое, что $n^m - m^n$ делится на $m+n$.

4. В стране n городов, они соединены дорогами так, что из каждого города можно добраться до любого другого, причем дорог четное число. Докажите, что можно ввести на всех дорогах одностороннее движение так, чтобы из каждого города выходило четное число дорог.

5. В некоторые клетки таблицы $m \times n$ ($m \geq 4$ строк и n столбцов) ставят фигуру «аллигатор». Аллигатор бьёт все клетки в своём столбце, а также по одной соседней клетке слева и справа. Какое наименьшее количество аллигаторов нужно поставить на доску, чтобы все клетки были под угрозой? (Клетка, на которой стоит аллигатор, считается угрожаемой.)

6. В треугольнике ABC $\angle A > 60°$ и $\angle C > 30°$. В полуплоскости с границей BC, не содержащей точку A, отмечены точки D и E такие, что $\angle ABE = \angle CBD = 90°$ и $\angle BAE = \angle BCD = 60°$. Точки F и H — середины отрезков AE и CD соответственно; G — точка пересечения прямых AC и DE. Докажите, что $\angle FGH = \angle ABC$.

7. Чему равна сумма цифр числа $9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot 99999999 \cdot \ldots \cdot 99\ldots99$ (каждый следующий множитель имеет в два раза больше цифр, чем предыдущий; в последнем множителе — 2^{2016} девяток)?

8. Из всех натуральных делителей составного числа n вычли по единице. При каких n все получившиеся разности будут точными квадратами?

9. В ряд выложены десять одинаковых монет. Две из них фальшивые и лежат рядом. Разрешается указать любой набор монет и спросить, сколько в нём фальшивых. Можно ли определить, какие монеты фальшивые, задав только два таких вопроса, если ответы на оба вопроса даются после того, как оба заданы?

10. Диагонали выпуклого пятиугольника разбивают его на пятиугольник и 10 треугольников. Могут ли восемь из этих треугольников быть равновеликими?

Четвёртый тур 31.10.16. Третья юниорская лига.

1. Приведите пример пяти различных натуральных чисел, каждое из которых меньше 2016, ни одно из которых не делится на другое, а произведение любых двух делится на каждое из пяти этих чисел.

2. Число 518 обладает следующим свойством. Рассмотрим все возможные шесть трёхзначных чисел, образованные перестановками его цифр. Среднее арифметическое этих шести чисел равно 518. Найдите все трехзначные числа с таким свойством.

3. В некоторые клетки таблицы $m\times n$ ($m \geq 4$ строк и n столбцов) ставят фигуру «аллигатор». Аллигатор бьёт все клетки в своём столбце, а также по одной соседней клетке слева и справа. Какое наименьшее количество аллигаторов нужно поставить на доску, чтобы все клетки были под угрозой? (Клетка, на которой стоит аллигатор, считается угрожаемой.)

4. В парламенте одинаковое число мужчин и женщин. Некоторые из них враждуют между собой, причём среди любых троих или нет враждующих, или нечётное число пар враждующих (либо одна, либо все три). Какое наименьшее число депутатов может быть в парламенте, если у каждого мужчины 7 врагов, а у каждой женщины — 10?

5. В равнобедренной трапеции отмечена точка X, расстояние от которой до вершин основания A и D равно AD, а до вершин другого основания B и C равно BC. На боковых сторонах вовне трапеции построены равносторонние треугольники с вершинами Y и Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

6. На плоскости расположено 25 видеокамер, каждая из которых обозревает угол 80°. Для каждой камеры подсчитан индекс — количество других камер, которые находятся в её поле видимости. Может ли сумма индексов всех камер быть больше 500?

7. Чему равна сумма цифр числа $9\times99\times9999\times\ldots\times99\ldots99$ (всего 7 множителей, каждый следующий множитель имеет в два раза больше цифр, чем предыдущий)?

8. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a+2b+4c = 6abc$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел a, b, c больше 1.