Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Первый тур 27.10.16. Высшая лига.

1. Даны выпуклый многогранник и точка X внутри него. Обозначим через a количество граней, перпендикуляр на которые из X попадает строго внутрь грани; через b — количество рёбер, перпендикуляр на которые из X попадает строго внутрь ребра, и этот перпендикуляр образует острые углы с гранями, сходящимися в этом ребре; через c — количество вершин A, все рёбра из которых образуют острые углы с отрезком AX. Докажите, что $a-b+c=2$.

2. Найдите наименьшее натуральное $n>1$, для которого $(n-1)!$ делится нацело на n^{333}.

3. Города некоторой страны соединены дорогами (каждая дорога соединяет ровно два города) так, что из любого города в любой можно проехать единственным образом. Некоторые из городов этой страны являются *стратегическими*; каждый город, лежащий на пути между двумя стратегическими городами, поддерживает радиосвязь хотя бы с одним из них. Докажите, что найдутся два соседних города, в объединении поддерживающие радиосвязь со всеми стратегическими городами (считается, что стратегический город поддерживает связь сам с собой).

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, не имеющего параллельных сторон, пересекаются в точке L. Прямая, проходящая через L и образующая равные углы с AB и CD, пересекает эти стороны в точках X и Y соответственно. Прямая, проходящая через L и образующая равные углы с BC и AD, пересекает эти стороны в точках U и V соответственно. Докажите, что если $AX > AV$, то $BX > BU$.

5. Дано натуральное d. Различные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_k$ множества $D=\{1, 2, \ldots, d\}$ таковы, что для любого непустого подмножества X множества D найдётся единственная пара индексов (i, j) такая, что $X = A_i \Delta B_j$. Найдите все возможные пары (n, k). (Напомним, что $A \Delta B$ — это множество всех элементов, лежащих ровно в одном из множеств A и B.)

6. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что $f(x+y)+f(x)f(y)=x^2y^2+2xy$ при всех $x, y\in\mathbb{R}$.

7. Пусть $n\geq 3$ — натуральное число. В квадратной таблице $n\times n$ изначально стоят нули. За ход разрешается выбрать в таблице квадрат $(n-1)\times(n-1)$, прибавить к некоторым числам в этом квадрате по единице и вычесть по единице из всех остальных чисел в этом квадрате. При каких n через несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой встречаются все числа $1, 2, \ldots, n^2$?

8. Даны неотрицательные числа $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ и вещественные числа $c_1,\ldots,c_n,d_1,\ldots,d_n$. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ic_j\min(a_i,a_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_id_j\min(b_i,b_j)\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_id_j\min(a_i,b_j)$.

9. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делится отрезками PR и QR на три равные части.

10. Для каждого натурального n докажите равенство $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]^2$.

Первый тур 27.10.16. Первая лига.

1. Даны выпуклый n-угольник и точка P внутри него. Руслан опустил перпендикуляры на все прямые, содержащие стороны n-угольника, и посчитал количество сторон AB, для которых перпендикуляр упал внутрь отрезка AB. Дима посчитал количество углов A n-угольника, для которых луч AP делит угол A на два острых угла. Докажите, что Руслан и Дима получили два равных числа.

2. Найдите все натуральные числа a, для которых выполняется следующее условие: для любого натурального числа n число $4(a^n+1)$ является кубом натурального числа.

3. Города некоторой страны соединены дорогами (каждая дорога соединяет ровно два города) так, что из любого города в любой можно проехать единственным образом. Некоторые из городов этой страны являются *стратегическими*; каждый город, лежащий на пути между двумя стратегическими городами, поддерживает радиосвязь хотя бы с одним из них. Докажите, что найдутся два соседних города, в объединении поддерживающие радиосвязь со всеми стратегическими городами (считается, что стратегический город поддерживает связь сам с собой).

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, не имеющего параллельных сторон, пересекаются в точке L. Прямая, проходящая через L и образующая равные углы с AB и CD, пересекает эти стороны в точках X и Y соответственно. Прямая, проходящая через L и образующая равные углы с BC и AD, пересекает эти стороны в точках U и V соответственно. Докажите, что если $AX = AV$, то $BX = BU$.

5. Поверхность кубика $5\times5\times5$ оклеена в один слой уголками из трех клеток. Какое наименьшее число уголков может быть перегнуто через рёбра?

6. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что $f(x+y)+f(x)f(y) = x^2y^2+2xy$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. В квадратной таблице $n\times n$ изначально стоят нули. За ход разрешается выбрать в таблице квадрат $(n-1)\times(n-1)$, прибавить к некоторым числам в этом квадрате по единице и вычесть по единице из всех остальных чисел в этом квадрате. При каких n через несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой встречаются все числа $1, 2, \ldots, n^2$?

8. Даны неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и вещественные числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j \min(a_i, a_j) \geqslant 0$.

9. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делится отрезками PR и QR на три равные части.

10. Решите в вещественных числах x, y, z систему уравнений $x+y+z = 2$, $xyz = 2(xy+yz+zx)$.

Первый тур 27.10.16. Вторая лига.

1. Даны выпуклый n-угольник и точка P внутри него. Руслан опустил перпендикуляры на все прямые, содержащие стороны n-угольника, и посчитал количество сторон AB, для которых перпендикуляр упал внутрь отрезка AB. Дима посчитал количество углов A n-угольника, для которых луч AP делит угол A на два острых угла. Докажите, что Руслан и Дима получили два равных числа.

2. Поверхность кубика $5\times5\times5$ оклеена в один слой уголками из трех клеток. Какое наименьшее число уголков может быть перегнуто через рёбра?

3. Даны неотрицательные числа a_1, a_2, ... , a_n и вещественные числа b_1, b_2, ... , b_n. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j \min(a_i, a_j) \geqslant 0$.

4. Найдите все натуральные числа a, для которых выполняется следующее условие: для любого натурального числа n число $4(a^n+1)$ является кубом натурального числа.

5. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Обозначим точки пересечения отрезков PR и QR с KL через X и Y. Продлим отрезок KL до пересечения со сторонами треугольника ABC в точках Z и T. Докажите, что отрезок ZT делится точками K, L, X и Y на пять равных частей.

6. В ряд стоят мальчики и девочки. Известно, что для любых двух девочек каждый ребенок, стоящий между ними, дружит хотя бы с одной из них. Докажите, что найдутся два соседних ребенка, которые в совокупности дружат со всеми девочками (считается, что ребенок дружит с самим собой).

7. Дан пятиугольник $ABCDE$, описанный около окружности с центром I и радиусом 1. Известно, что $\angle EAB = \angle EIA = 90°$, а треугольник DIC — равносторонний. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

8. Решите в вещественных числах x, y, z систему уравнений $x+y+z = 2$, $xyz = 2(xy+yz+zx)$.

9. По законам страны Анчурии телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 ненулевых цифр, а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

10. Среди математиков, занимающихся философией, каждый четвёртый — спортсмен. Среди философов, занимающихся спортом, каждый пятый — математик. Среди спортсменов, занимающихся математикой, каждый третий — философ. Философ Серёжа очень интересуется математикой. Математиков, философов и спортсменов, занимающихся только своим видом, поровну. Кого больше всех: математиков, философов или спортсменов?

Двадцатый математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Первый тур 27.10.16. Высшая юниорская лига.

1. Докажите, что для любого натурального $n > 1$, свободного от квадратов, существуют такие простое число p и целое число m, что n делится на p, а p^2+pm^p делится на n.

2. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делится отрезками PR и QR на три равные части.

3. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\geq 1.$$

4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$, не имеющего параллельных сторон, пересекаются в точке L. Прямая, проходящая через L и образующая равные углы с AB и CD, пересекает эти стороны в точках X и Y соответственно. Прямая, проходящая через L и образующая равные углы с BC и AD, пересекает эти стороны в точках U и V соответственно. Докажите, что если $AX = AV$, то $BX = BU$.

5. Внутри выпуклого многоугольника дана точка T. Сторону многоугольника назовём *хорошей*, если основание перпендикуляра из точки T на эту сторону находится строго внутри этой стороны. Вершину A назовём *хорошей*, если оба угла, на которые разбивает угол многоугольника при этой вершине отрезок AT, являются острыми. Докажите, что количество хороших сторон равно количеству хороших вершин.

6. Города некоторой страны соединены дорогами (каждая дорога соединяет ровно два города) так, что из любого города в любой можно проехать единственным образом. Некоторые из городов этой страны являются *стратегическими*, и каждый город, лежащий на пути между двумя стратегическими городами, поддерживает радиосвязь с каким-нибудь из них (или с обоими). Докажите, что найдутся два соседних города, в объединении поддерживающие радиосвязь со всеми стратегическими городами (считается, что стратегический город поддерживает связь сам с собой).

7. Пусть n и $k < 6n$ — натуральные числа. В квадратной таблице $6n\times6n$ изначально стоят нули. За ход разрешается выбрать в таблице квадрат $k\times k$, прибавить к некоторым числам в этом квадрате по единице и вычесть по единице из всех остальных чисел в этом квадрате. При каком наибольшем k через несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой встречаются все числа $1, 2, \ldots, 36n^2$?

8. По законам страны Анчурии телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 ненулевых цифр, а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

9. Найдите все натуральные числа a, для которых выполняется следующее условие: для любого натурального числа n число $4(a^n+1)$ является кубом натурального числа.

10. Среди математиков, занимающихся философией, каждый четвёртый — спортсмен. Среди философов, занимающихся спортом, каждый пятый — математик. Среди спортсменов, занимающихся математикой, каждый третий — философ. Философ Серёжа очень интересуется математикой. Математиков, философов и спортсменов, занимающихся только своим видом, поровну. Кого больше всех: математиков, философов или спортсменов?

Двадцатый математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Первый тур 27.10.16. Первая юниорская лига.

1. Докажите, что для любого натурального $n>1$, свободного от квадратов, существует такие простое число p и целое число m, что n делится на p, а p^2+pm^p делится на n.

2. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Докажите, что отрезок KL делится отрезками PR и QR на три равные части.

3. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\geq 1.$$

4. Дан пятиугольник $ABCDE$, описанный около окружности с центром I и радиусом 1. Известно, что $\angle EAB = \angle EIA = 90°$, а треугольник DIC — равносторонний. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

5. Внутри выпуклого многоугольника дана точка T. Сторону многоугольника назовём *хорошей*, если основание перпендикуляра из точки T на эту сторону находится строго внутри этой стороны. Вершину A назовём *хорошей*, если оба угла, на которые разбивает угол многоугольника при этой вершине луч АТ, являются острыми. Докажите, что количество хороших сторон равно количеству хороших вершин.

6. В ряд стоят мальчики и девочки. Известно, что для любых двух девочек каждый ребенок, стоящий между ними, дружит хотя бы с одной из них. Докажите, что найдутся два соседних ребенка, которые в совокупности дружат со всеми девочками (считается, что ребенок дружит с самим собой).

7. Пусть $n > 5$ — натуральное число. В квадратной таблице $n\times n$ изначально стоят нули. За ход разрешается выбрать в таблице квадрат $(n-1)\times(n-1)$, прибавить к некоторым числам в этом квадрате по единице и вычесть по единице из всех остальных чисел в этом квадрате. При каких n через несколько таких ходов можно получить таблицу, в которой встречаются все числа 1, 2, …, n^2?

8. По законам страны Анчурии телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 ненулевых цифр, а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

9. Решите уравнение в простых числах: $p+p^2+p^3+p^4 = q!$.

10. Среди математиков, занимающихся философией, каждый четвёртый — спортсмен. Среди философов, занимающихся спортом, каждый пятый — математик. Среди спортсменов, занимающихся математикой, каждый третий — философ. Философ Серёжа очень интересуется математикой. Математиков, философов и спортсменов, занимающихся только своим видом, поровну. Кого больше всех: математиков, философов или спортсменов?

Двадцатый математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Первый тур 27.10.16. Вторая юниорская лига.

1. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют условиям $x+y+z = 2$ и $xyz = 2(xy+yz+zx)$. Найдите все возможные тройки (x,y,z).

2. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Обозначим точки пересечения отрезков PR и QR с KL через X и Y. Продлим отрезок KL до пересечения со сторонами треугольника AB и BC в точках Z и T соответственно. Докажите, что $ZK = XY = LT$.

3. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab \geq 3$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+2} \geq 1.$$

4. Дан пятиугольник $ABCDE$, описанный около окружности с центром I и радиусом 1. Известно, что $\angle EAB = \angle EIA = 90°$, а треугольник DIC — равносторонний. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

5. Внутри выпуклого многоугольника дана точка T. Сторону многоугольника назовём *хорошей*, если основание перпендикуляра из точки T на эту сторону находится строго внутри этой стороны. Вершину A назовём *хорошей*, если оба угла, на которые разбивает угол многоугольника при этой вершине луч AT, являются острыми. Докажите, что количество хороших сторон равно количеству хороших вершин.

6. В ряд стоят мальчики и девочки. Известно, что для любых двух девочек каждый ребенок, стоящий между ними, дружит хотя бы с одной из них. Докажите, что найдутся два соседних ребенка, которые в совокупности дружат со всеми девочками (считается, что ребенок дружит с самим собой).

7. В квадратной таблице 2016×2016 изначально стоят нули. За ход разрешается выбрать в таблице квадрат 2015×2015, прибавить к некоторым числам в этом квадрате по единице и вычесть по единице из всех остальных чисел в этом квадрате. Можно ли такими операциями получить таблицу, в которой встречаются все числа $1, 2, \ldots, 2016^2$?

8. По законам страны Анчурии, телефонные номера всех абонентов должны состоять из 10 цифр (цифры могут быть от 0 до 9, причем нули могут стоять в том числе и в начале номера), а у любых двух абонентов номера должны различаться хотя бы в двух цифрах, либо ровно в одной цифре, но хотя бы на 2. Какое наибольшее количество телефонных номеров может быть в Анчурии?

9. Решите уравнение в простых числах: $p+p^2+p^3+p^4 = q!$.

10. Среди математиков, занимающихся философией, каждый четвёртый — спортсмен. Среди философов, занимающихся спортом, каждый пятый — математик. Среди спортсменов, занимающихся математикой, каждый третий — философ. Философ Серёжа очень интересуется математикой. Математиков, философов и спортсменов, занимающихся только своим видом, поровну. Кого больше всех: математиков, философов или спортсменов?

Первый тур 27.10.16. Третья юниорская лига.

1. В двух словах КУБОК, КОЛМОГОРОВА требуется заменить буквы цифрами (одинаковые — одинаковыми, разные — разными), чтобы сумма полученных чисел делилась на 2016. Можно ли это сделать?

2. Концы отрезка длины 5 лежат на границе квадрата 4x4. Укажите множество точек, где может находиться середина этого отрезка.

3. Среди математиков, занимающихся философией, каждый четвёртый — спортсмен. Среди философов, занимающихся спортом, каждый пятый — математик. Среди спортсменов, занимающихся математикой, каждый третий — философ. Философ Серёжа очень интересуется математикой. Математиков, философов и спортсменов, занимающихся только своим видом, поровну. Кого больше всех: математиков, философов или спортсменов?

4. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют условиям $x+y+z = 2$ и $xyz = 2(xy+yz+zx)$. Найдите все возможные тройки (x, y, z).

5. Поверхность кубика Рубика оклеена в один слой доминошками (каждая покрывает два квадратика, имеющие общую сторону). Какое наименьшее число доминошек может быть перегнуто через ребро?

6. В ряд стоят мальчики и девочки. Известно, что для любых двух девочек каждый ребенок, стоящий между ними, дружит хотя бы с одной из них. Докажите, что найдутся два соседних ребенка, которые в совокупности дружат со всеми девочками (считается, что каждый ребенок дружит с самим собой).

7. Вписанная окружность ω равнобедренного треугольника ABC касается его равных сторон AB, BC и основания AC в точках P, Q и R соответственно. Отрезки AQ и CP повторно пересекают окружность ω в точках K и L соответственно. Обозначим точки пересечения отрезков PR и QR с KL через X и Y. Продлим отрезок KL до пересечения со сторонами треугольника AB и BC в точках Z и T соответственно. Докажите, что $ZK = XY = LT$.

8. В мешке лежат 2016 камней. Двое по очереди выбрасывают из мешка любое число камней, равное простому числу или 1. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?