Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Второй тур 28.10.16. Высшая лига.

1. Докажите, что при любых положительных a, b и c из деревянного куба со стороной $a+b+c$ можно вырезать 27 прямоугольных параллелепипедов размера $a\times b\times c$.

2. Многочлен $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ имеет n различных действительных корней. Докажите, что многочлен $Q(x)=C_{2n}^n a_n x^n + C_{2n-1}^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+C_{n+1}^1 a_1 x + C_n^0 a_0$ также имеет n различных действительных корней.

3. Даны целые числа $1\le k\le n$. Какое наибольшее количество k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из k наименьших элементов их объединения?

4. Докажите, что для всех достаточно больших простых чисел p выполнено следующее утверждение:

Пусть натуральные числа r и s таковы, что ни одно из чисел r, s, $r+s$, $r-s$ не делится на p. Назовём натуральное число $k\le p-1$ *хорошим*, если 1/2 не лежит между числами $\left\{\frac{rk}{p}\right\}$ и $\left\{\frac{sk}{p}\right\}$. Тогда доля хороших чисел (среди натуральных чисел, не превосходящих $p-1$) не меньше 1/3.

5. На плоскости расположены несколько точечных городов, все расстояния между ними различны. Каждый город субсидирует 100 ближайших к нему. От какого максимального количества городов может получать субсидию столица?

6. Даны бесконечная арифметическая прогрессия A и бесконечная возрастающая геометрическая прогрессия G, состоящие из натуральных чисел. Известно, что в A лежат все члены G, кроме первого и еще некоторых 2016 членов. Докажите, что сумма этих 2016 членов прогрессии G делится на 7.

7. Точки I и H — центр вписанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Обозначим через R_A радикальный центр вписанной окружности и двух вневписанных, касающихся сторон AC и AB. Точки R_B и R_C определяются аналогично. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $R_AR_BR_C$ лежит на прямой HI.

8. У двух магов есть $2n$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n>10$ — натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

9. Натуральное число n назовём *забавным*, если $\left\{\frac{n}{10^k}\right\}>\frac{n}{10^{10001}}$ при всех $k=1, 2, \ldots, 10000$.

Найдите количество забавных чисел.

10. Даны правильный треугольник ABC с центром O и точка P, не лежащая на его оси симметрии. Прямые AP, BP и CP пересекают соответственно прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOA_1, BOB_1 и COC_1, имеют две общих точки.

Второй тур 28.10.16. Первая лига.

1. Докажите, что при любых положительных a, b и c из деревянного куба со стороной $a+b+c$ можно вырезать 27 прямоугольных параллелепипедов размера $a\times b\times c$.

2. Сумма положительных чисел a, b и c равна 6. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^4+1}+\frac{6b^2}{b^3+16}+\frac{54c^2}{c^4+243}\leqslant 3.$$

3. Даны целые числа $1\le k\le n$. Какое наибольшее количество k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из k наименьших элементов их объединения?

4. Докажите, что для всех достаточно больших простых чисел p выполнено следующее утверждение:

Пусть натуральные числа r и s таковы, что ни одно из чисел r, s, $r+s$, $r-s$ не делится на p. Назовём натуральное число $k\le p-1$ *хорошим*, если 1/2 не лежит между числами $\left\{\frac{rk}{p}\right\}$ и $\left\{\frac{sk}{p}\right\}$. Тогда доля хороших чисел (среди натуральных чисел, не превосходящих $p-1$) не меньше 1/3.

5. На плоскости расположены несколько точечных городов, все расстояния между ними различны. Каждый город субсидирует 100 ближайших к нему. От какого максимального количества городов может получать субсидию столица?

6. Даны бесконечная арифметическая прогрессия A и бесконечная возрастающая геометрическая прогрессия G, состоящие из натуральных чисел. Известно, что в A лежат все члены G, кроме первого и еще некоторых 2016 членов. Докажите, что сумма этих 2016 членов прогрессии G делится на 7.

7. Точки I и H являются центром вписанной окружности и ортоцентром остроугольного треугольника ABC соответственно. Обозначим через R_A радикальный центр вписанной окружности и двух вневписанных, касающихся сторон AC и AB. Точки R_B и R_C определяются аналогично. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $R_AR_BR_C$ лежит на прямой HI.

8. У двух магов есть $2n+1$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n\ge 10$ — натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n+1$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

9. Даны натуральные числа n и k, причём $k\le n-2$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — различные вещественные числа, причём модуль суммы любых k из них не больше 1. Докажите, что сумма модулей любых двух из этих чисел не больше 2.

10. Даны правильный треугольник ABC с центром O и точка P, не лежащая на его оси симметрии. Прямые AP, BP и CP пересекают соответственно прямые BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOA_1, BOB_1 и COC_1, имеют две общих точки.

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Второй тур 28.10.16. Вторая лига.

1. На плоскости расположены несколько точечных городов, все расстояния между ними различны. Каждый город субсидирует 2 ближайших к нему. От какого максимального количества городов может получать субсидию столица?

2. Сумма положительных чисел a, b и c равна 6. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^4+1}+\frac{6b^2}{b^3+16}+\frac{54c^2}{c^4+243}\leqslant 3\,.$$

3. У двух магов есть $2n+1$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n \geq 10$ — натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n+1$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

4. В трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC, CD и DA в точках P, Q, R и S соответственно. Угол BAD равен $60°$. Точка X — середина отрезка PR, прямая PQ пересекает прямую CD в точке Y. Оказалось, что $AB \parallel RS$. Докажите, что тогда также $XY \parallel AB$.

5. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x^2 = 10^{2016}+y^2$?

6. Последовательность натуральных чисел задана соотношениями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n+4n$ при всех $n \geq 1$. Докажите, что каждый член этой последовательности можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел.

7. Докажите, что в куб со стороной 13 можно уместить 27 прямоугольных параллелепипедов $5\times5\times3$.

8. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N. В треугольниках ABM, MCN и AND провели медианы из вершин B, C и D соответственно. Докажите, что все три медианы пересекаются в одной точке.

9. В бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, встречаются все члены бесконечной возрастающей геометрической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, кроме первого и еще некоторых 2016 членов. Докажите, что сумма этих 2016 членов геометрической прогрессии делится на 7.

10. Из таблицы 30×30 склеили тор. Какое наибольшее количество клеток можно отметить таким образом, чтобы каждая отмеченная клетка имела не более шести отмеченных соседей (по стороне или вершине)? (Если описывать положение клетки в торической таблице номерами (i, j) строки и столбца, $1 \leq i, j \leq 30$, то две различные клетки (i_1, j_1) и (i_2, j_2) имеют общую вершину тогда и только тогда, когда обе разности i_1-i_2 и j_1-j_2 равны 0, ±1 или ±29.)

Двадцатый математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Второй тур 28.10.16. Высшая юниорская лига.

1. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N. В треугольниках ABM, MCN и AND провели медианы из вершин B, C и D соответственно. Докажите, что все три медианы пересекаются в одной точке.

2. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_1,a_2,a_3]}+\ldots+\frac{1}{[a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n]}\le 2.$$

Квадратные скобки здесь обозначают НОК чисел, стоящих в скобках.

3. Даны положительные числа a, b, c. Всегда ли можно из квадрата со стороной $a+b+c$ вырезать три прямоугольника $a\times b$, три прямоугольника $b\times c$ и три прямоугольника $c\times a$? Прямоугольники можно как угодно поворачивать.

4. Девятизначное число n называется *забавным*, если в нём есть все цифры от 1 до 9 и $\left\{\frac{n}{10^k}\right\}>\frac{n}{10^9}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, 8$. Найдите количество забавных чисел.

5. У двух магов есть $2n$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n > 10$ — натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

6. Даны целые числа $1 \le k \le n$. Какое наибольшее количество k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из k наименьших элементов их объединения?

7. Из таблицы 30×30 склеили тор. Какое наибольшее количество клеток можно отметить таким образом, чтобы каждая отмеченная клетка имела не более шести отмеченных соседей (по стороне или вершине)? (Если описывать положение клетки в торической таблице номерами (i, j) строки и столбца, $1 \le i, j \le 30$, то две различные клетки (i_1, j_1) и (i_2, j_2) имеют общую вершину тогда и только тогда, когда обе разности i_1-i_2 и j_1-j_2 равны 0, ±1 или ±29.)

8. Точки I и H являются центром вписанной окружности и ортоцентром остроугольного треугольника ABC соответственно. Обозначим через R_A радикальный центр вписанной окружности и двух вневписанных, касающихся сторон AC и AB. Точки R_B и R_C определяются аналогично. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $R_AR_BR_C$ лежит на прямой HI.

9. Найдите все пары натуральных чисел $a > b$, удовлетворяющие условию $(a-b)^{ab} = a^bb^a$.

10. Числа n и k натуральные, причём $k \le n-2$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные, различные, и модуль суммы любых k из этих чисел не превосходит единицы. Докажите, что если $|a_1| \ge 1$, то для любого $2 \le i \le n$ выполняется неравенство $|a_1|+|a_i| \le 2$.

Второй тур 28.10.16. Первая юниорская лига.

1. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N. В треугольниках ABM, MCN и AND провели медианы из вершин B, C и D соответственно. Докажите, что все три медианы пересекаются в одной точке.

2. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_1,a_2,a_3]}+\ldots+\frac{1}{[a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n]}\le 2.$$

Квадратные скобки здесь обозначают НОК чисел, стоящих в скобках.

3. Даны положительные числа a, b, c. Всегда ли можно из квадрата со стороной $a+b+c$ вырезать три прямоугольника $a\times b$, три прямоугольника $b\times c$ и три прямоугольника $c\times a$? Прямоугольники можно как угодно поворачивать.

4. Девятизначное число n называется *забавным*, если в нём есть все цифры от 1 до 9 и $\left\{\frac{n}{10^k}\right\}>\frac{n}{10^9}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, 8$. Найдите количество забавных чисел.

5. У двух магов есть $2n+1$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n \ge 10$ — натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n+1$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

6. Даны целые числа $1 \le k \le n$. Какое наибольшее количество k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из k наименьших элементов их объединения?

7. Из таблицы 30×30 склеили тор. Какое наибольшее количество клеток можно отметить таким образом, чтобы каждая отмеченная клетка имела не более шести отмеченных соседей (по стороне или вершине)? (Если описывать положение клетки в торической таблице номерами (i, j) строки и столбца, $1 \le i, j \le 30$, то две различные клетки (i_1, j_1) и (i_2, j_2) имеют общую вершину тогда и только тогда, когда обе разности i_1-i_2 и j_1-j_2 равны 0, ±1 или ±29.)

8. В трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC, CD и DA в точках P, Q, R и S соответственно. Угол BAD равен 60°. Точка X — середина отрезка PR, прямая PQ пересекает прямую CD в точке Y. Оказалось, что $AB \parallel RS$. Докажите, что тогда также $XY \parallel AB$.

9. Найдите все пары натуральных чисел $a > b$, удовлетворяющие условию $(a-b)^{ab} = a^b b^a$.

10. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_5$ — вещественные, различные, и модуль суммы любых трёх из них не превосходит единицы. Докажите, что если $|a_1| \ge 1$, то для любого $2 \le i \le 5$ выполняется неравенство $|a_1|+|a_i| \le 2$.

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Второй тур 28.10.16. Вторая юниорская лига.

1. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N. В треугольниках ABM, MCN и AND провели медианы из вершин B, C и D соответственно. Докажите, что прямые, содержащие эти три медианы, пересекаются в одной точке.

2. Даны различные натуральные числа a, b, c, большие 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[a,b,c]}<1.$$

Квадратные скобки здесь обозначают НОК чисел, стоящих в скобках.

3. Даны положительные числа a, b, c. Всегда ли можно из квадрата со стороной $a+b+c$ вырезать три прямоугольника $a\times b$, три прямоугольника $b\times c$ и три прямоугольника $c\times a$?

4. Девятизначное число n называется *забавным*, если в нём есть все цифры от 1 до 9 и $\left\{\dfrac{n}{10^k}\right\}>\dfrac{n}{10^9}$ при всех $k = 1, 2, \ldots, 8$. Найдите количество забавных чисел.

5. У двух магов есть $2n+1$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n \geq 10$ — натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n+1$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

6. Какое наибольшее количество двухэлементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2016\}$ можно выбрать таким образом, чтобы для любых двух выбранных подмножеств одно из них состояло из двух наименьших элементов их объединения?

7. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2 = y^2+10^{2016}$?

8. Точки I и I_A являются центром вписанной окружности и центром вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника ABC, соответственно. Точка J такова, что четырехугольник $BICJ$ — параллелограмм. Докажите, что $I_AJ \perp BC$.

9. Найдите все натуральные числа $a > 2$, удовлетворяющие условию $(a-2)^{2a} = a^2\cdot 2^a$.

10. Можно ли все точки на координатной прямой с рациональными координатами окрасить в два цвета таким образом, чтобы на любом отрезке прямой встретились бы точки обоих цветов?

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

Второй тур 28.10.16. Третья юниорская лига.

1. На плоской равнине живут 16 волшебников, каждый в своём доме. Расстояния между всеми домами различны. Как-то вечером каждый волшебник отправил своему ближайшему соседу сову с сообщением. В каком наименьшем количестве домов могли собраться все совы?

2. На окружности отмечены четыре дуги: в $200°$, $300°$, $310°$ и $320°$. Докажите, что на окружности есть точка, принадлежащая ровно трём отмеченным дугам.

3. У двух магов есть $2n+1$ отдельно стоящих волшебных коробок ($n \geq 10$ — натуральное число), каждая может расширяться и уменьшаться как угодно. Они играют в игру, ходя по очереди. За ход маг выбирает коробку, не лежащую ни в какой другой, и вкладывает её вместе со всем содержимым в другую коробку (возможно, находящуюся внутри какой-то ещё и/или содержащую какие-то ещё). Когда делать ходы больше нельзя, на каждой коробке пишут, сколько в ней других коробок, включая все вложенные. Если сумма этих $2n+1$ чисел чётна, выигрывает маг, ходивший первым, иначе выигрывает ходивший вторым. Кто выиграет при правильной игре?

4. Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x^2 = y^2+10^{10}$?

5. Последовательность натуральных чисел задана следующим соотношением: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n+4n$ при $n \geq 1$. Докажите, что каждый член этой последовательности можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел.

6. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых складываются два квадрата, отношение площадей которых – 5:4.

7. В школьном турнире по настольному теннису играли три команды с одинаковым числом игроков, не большим 20. Каждый игрок сыграл с каждым игроком из соперничающих команд. Лучше всех выступила команда «Воробьи», её игроки выиграли в два раза больше игр, чем игроки команды «Соколы», а проиграли в два раза меньше игр, чем игроки команды «Орлы». Какое количество игроков могло быть в каждой команде?

8. Внутри прямоугольника $ABCD$ взяли точку P, а на сторонах BC и CD прямоугольника отметили точки M и N соответственно. Оказалось, что отрезок BP делит отрезок AM пополам, а отрезок CP делит отрезок MN пополам. Докажите, что отрезок DP делит отрезок AN пополам.