## XX Кубок памяти А.Н.Колмогорова

**Казань, 25 октября – 1 ноября 2016**

# Блиц-бой 31.10.2016, старшая группа,

# высшая и первая лиги. Команда____________________

| N | Задача | Ответ |
|---|---|---|
| **1.** | На доске 8×8 стоят ладьи, причем есть как белые, так и черные. Известно, что ладьи разного цвета друг друга не бьют. Какое наибольшее число ладей может стоять на краю доски? | |
| **2.** | Пусть в треугольнике $ABC$ $AB = AC= 26$, $BC = 20$. В треугольнике проведены высоты $AD$ и $BE$. Чему равен радиус окружности, проходящей через $D$ и касающейся $AC$ в точке $E$? | |
| **3.** | Клетки поверхности куба 100×100×100 раскрашены в черный и белый цвета таким образом, что, как бы ни приложить к поверхности прямоугольник 1×4 (прямоугольник можно прикладывать только по клеточкам, возможно, перегибая вдоль ребра), количество черных клеток, покрытых прямоугольником, будет одним и тем же. Сколько существует таких раскрасок? | |
| **4.** | Обозначим через $d(n)$ наибольший нечетный делитель $n$. Найдите, чему равна сумма $d(1)+d(2)+\ldots+d(2^{2016})$ | |
| **5.** | Пусть $ABC$ – прямоугольный треугольник с прямым углов $A$. На гипотенузе $BC$ вне треугольника построен квадрат $BDEC$. Биссектриса прямого угла $A$ пересекает сторону $BC$ в точке $F$, а отрезок $DE$ – в точке $G$. Известно, что $AB = 24$, $AC = 10$. Найдите площадь четырехугольника $BDGE$. | |
| **6.** | Функция $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет такому соотношению $f(x)f(y)-af(xy) = x+y$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Найдите все возможные значения $a$ и для каждого значения $a$ соответствующую функцию $f(x)$. | |
| **7.** | Найдите наименьшее натуральное $a$, для которого строго между $a$ и $2a$ лежит ровно 101 точный квадрат. | |
| **8.** | Какое наибольшее значение может принимать выражение $\frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$, если $x, y >0$? | |

## *XX Кубок памяти А.Н.Колмогорова*

***Казань, 25 октября – 1 ноября 2016***

# *Блиц-бой 31.10.2016, старшая группа,*

# *высшая и первая лиги. Команда*____________________

| *N* | *Задача* | *Ответ* |
|---|---|---|
| **1.** | На доске 8×8 стоят ладьи, причем есть как белые, так и черные. Известно, что ладьи разного цвета друг друга не бьют. Какое наибольшее число ладей может стоять на краю доски? | |
| **2.** | Пусть в треугольнике *ABC* *AB* = *AC*= 26, *BC* = 20. В треугольнике проведены высоты *AD* и *BE*. Чему равен радиус окружности, проходящей через *D* и касающейся *AC* в точке *E*? | |
| **3.** | Клетки поверхности куба 100×100×100 раскрашены в черный и белый цвета таким образом, что, как бы ни приложить к поверхности прямоугольник 1×4 (прямоугольник можно прикладывать только по клеточкам, возможно, перегибая вдоль ребра), количество черных клеток, покрытых прямоугольником, будет одним и тем же. Сколько существует таких раскрасок? | |
| **4.** | Обозначим через $d(n)$ наибольший нечетный делитель $n$. Найдите, чему равна сумма $d(1)+d(2)+\ldots+d(2^{2016})$ | |
| **5.** | Пусть *ABC* – прямоугольный треугольник с прямым углов *A*. На гипотенузе *BC* вне треугольника построен квадрат *BDEC*. Биссектриса прямого угла *A* пересекает сторону *BC* в точке *F*, а отрезок *DE* – в точке *G*. Известно, что *AB* = 24, *AC* = 10. Найдите площадь четырехугольника *BDGE*. | |
| **6.** | Функция $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет такому соотношению $f(x)f(y)-af(xy) = x+y$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Найдите все возможные значения $a$ и для каждого значения $a$ соответствующую функцию $f(x)$. | |
| **7.** | Найдите наименьшее натуральное $a$, для которого строго между $a$ и $2a$ лежит ровно 101 точный квадрат. | |
| **8.** | Какое наибольшее значение может принимать выражение $\frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$, если $x$, $y$ >0? | |

# *XX Кубок памяти А.Н.Колмогорова*

***Казань, 25 октября – 1 ноября 2016***

## *Блиц-бой 31.10.2016, старшая группа, вторая лиги. Команда____________________*

| *N* | *Задача* | *Ответ* |
|---|---|---|
| **1.** | Требуется расставить на шахматной доске ладьи четырёх различных цветов, так чтобы ладей всех цветов было поровну, и никакие ладьи разного цвета не били друг друга. Найти наибольшее число ладей, при котором это возможно. | |
| **2.** | Натуральное число $n$ имеет ровно 6 делителей $1<a<b<c<d<n$, они пронумерованы порядке возрастания. Известно, что $(a–1)$-й делитель равен $(1+a+b)b$. Найдите все значения $n$. | |
| **3.** | Есть 50 листочков бумаги. На каждом записали число 1 или –1, а затем запечатали лист в непрозрачные конверты. За один вопрос можно узнать, чем равно произведение чисел в трех указанных конвертах. За какое наименьшее число вопросов можно узнать произведение всех 50-ти чисел? | |
| **4.** | Про 27 монет известно, что 26 из них настоящие и весят 1 грамм, а ещё одна монета фальшивая и весит $m$, $m+1$, или $m+2$ граммов (где $m$ — натуральное число, известное взвешивающему). Оказалось, что за два взвешивания на чашечных весах без гирь можно определить вес фальшивой монеты. При каком наибольшем $m$ это возможно? | |
| **5.** | Пусть $ABC$ – прямоугольный треугольник с прямым углов $A$. На гипотенузе $BC$ вне треугольника построен квадрат $BDEC$. Биссектриса прямого угла $A$ пересекает сторону $BC$ в точке $F$, а отрезок $DE$ – в точке $G$. Известно, что $AB = 24$, $AC = 10$. Найдите площадь четырехугольника $BDGE$. | |
| **6.** | Последовательность $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ задана формулой $a_n = 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$. Найдите НОД$(a_0, a_1, \ldots, a_{2016})$. | |
| **7.** | Про функцию $f(x)$ известно, что $f(1) = 1$, и для любых $x$, y выполнено тождество $f(x+y) = 2^x f(y)+3^y f(x)$. Найдите $f(x)$. | |
| **8.** | Какое наибольшее значение может принимать выражение $\frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$, если $x$, $y$ >0? | |

## XX Кубок памяти А.Н.Колмогорова

**Казань, 25 октября – 1 ноября 2016**

# Блиц-бой 31.10.2016, младшая группа, высшая и первая лиги. Команда____________________

| N | Задача | Ответ |
|---|---|---|
| 1. | На доске 8×8 стоят ладьи, причем есть как белые, так и черные. Известно, что ладьи разного цвета друг друга не бьют. Какое наибольшее число ладей может стоять на краю доски? | |
| 2. | Натуральное число $n$ имеет ровно 6 делителей $1<a<b<c<d<n$, они пронумерованы порядке возрастания. Известно, что $(a–1)$-й делитель равен $(1+a+b)b$. Найдите все значения $n$. | |
| 3. | Про 27 монет известно, что 26 из них настоящие и весят 1 грамм, а ещё одна монета фальшивая и весит $m$, $m+1$, или $m+2$ граммов (где $m$ — натуральное число, известное взвешивающему). Оказалось, что за два взвешивания на чашечных весах без гирь можно определить вес фальшивой монеты. При каком наибольшем $m$ это возможно? | |
| 4. | Обозначим через $d(n)$ наибольший нечетный делитель $n$. Найдите, чему равна сумма $d(1)+d(2)+…+d(2^{2016})$ | |
| 5. | Внутри треугольника $ABC$ находятся точки $M$ и $N$. Расстояния от точки $M$ до сторон $AB$, $BC$ и $AC$ равны соответственно 1 см, 4 см и 25 см, а расстояния от точки $N$ до тех же сторон (в том же порядке) равны 5 см, 7 см и 21 см. Найдите радиус вписанной окружности треугольника $ABC$. | |
| 6. | Рассмотрим последовательность. $q_n = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$Для скольких натуральных $n$, меньших миллиона, выполнено неравенство $q_n > q_{n+1}$? $[m]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $m$. | |
| 7. | Про функцию $f(x)$ известно, что $f(1) = 1$, и для любых $x$, y выполнено тождество $f(x+y) = 2^x f(y)+3^y f(x)$. Найдите $f(x)$. | |
| 8. | Расставим натуральные числа от 1 до 9 в клетки квадрата 3×3. Выберем в каждом столбце наименьшее число, а из этих трех чисел выберем наибольшее и обозначим его за $a$. Теперь выберем наибольшее число в каждой строке, а из этих трех чисел выберем наименьшее, обозначим его за $b$. Сколько существует расстановок, при которых $a = b = 4$? | |

## *XX Кубок памяти А.Н.Колмогорова*

***Казань, 25 октября – 1 ноября 2016***

# *Блиц-бой 31.10.2016, младшая группа, вторая и третья лиги. Команда____________________*

| ***N*** | ***Задача*** | ***Ответ*** |
|---|---|---|
| **1.** | На доске $8\times8$ стоят ладьи, причем есть как белые, так и черные. Известно, что ладьи разного цвета друг друга не бьют. Какое наибольшее число ладей может стоять на краю доски? | |
| **2.** | $ABCD$ – трапеция с основаниями $AD$ и $BC$. $AD = 4$, $BC = 9$. Биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекаются на $CD$. Найдите длину $AB$. | |
| **3.** | Есть 50 листочков бумаги. На каждом записали число 1 или –1, а затем запечатали лист в непрозрачные конверты. За один вопрос можно узнать, чем равно произведение чисел в трех указанных конвертах. За какое наименьшее число вопросов можно узнать произведение всех 50-ти чисел? | |
| **4.** | Найдите все простые числа р такие, что каждое из чисел $\frac{p+1}{2}$ и $\frac{p^2+1}{2}$ есть точный квадрат. | |
| **5.** | Известно, что для некоторых действительных чисел $a$ и $b$ верно $a+b=1$. Найдите наименьшее значение выражения $a^3+b^3+3ab$. | |
| **6.** | Последовательность $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ задана формулой $a_n = 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$. Найдите НОД($a_0, a_1, \ldots, a_{2016}$). | |
| **7.** | Точки $M$ и $N$ делят сторону $BC$ треугольника $ABC$ на три равные части ($M$ лежит ближе к $B$). Прямая, параллельная стороне $AC$, пересекает отрезки $AB$, $AM$ и $AN$ в точках $D$, $E$ и $F$ соответственно. Докажите, что $EF$:$DE$. | |
| **8.** | Найдите все натуральные $t$, при которых уравнение $x(x+t) = y^2$ не имеет решений в натуральных числах $x$, $y$. | |