Двадцатый международный математический турнир старшеклассников «Кубок памяти А.Н. Колмогорова»

Казань, 25 октября–1 ноября 2016 года

Третий тур 30.10.15. Старшая группа. Высшая лига

ПРОЕКТ

1. Дан правильный 12-угольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2$. Дуги окружностей m_A, m_C и m_E лежат в этом многоугольнике и стягиваются отрезками A_1A_2, C_1C_2 и E_1E_2 соответственно. Обозначим $B = m_A \cap m_C$, $D = m_C \cap m_E$, $F = m_E \cap m_A$. Докажите, что дуги окружностей B_1BB_2, D_1DD_2 и F_1FF_2 пересекаются в одной точке.

2. Треугольник ABC имеет периметр 2. Проведём биссектрисы его внутренних углов (биссектриса — это луч) и отложим на них отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 длины 1. Докажите, что каждая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ больше 1.

3. Пусть $k \geq 2$ — натуральное число. У клетчатого квадрата $2k \times 2k$ склеили противоположные стороны, получив тор, в котором $4k^2$ узлов сетки. Каждое ребро (т.е. единичный отрезок) сетки окрашено либо в чёрный, либо в малиновый цвет. Докажите, что в торе найдутся две противоположных вершины, между которыми есть путь из $2k$ рёбер, состоящий из не более чем k одноцветных связных фрагментов. (Вершины называются *противоположными*, если кратчайший путь между ними по рёбрам сетки содержит $2k$ рёбер.)

4. Найдите наименьшее n, для которого любой многочлен с комплексными коэффициентами можно представить в виде суммы $2n$ многочленов, из которых n являются квадратами многочленов, а остальные n — кубами многочленов (с комплексными же коэффициентами).

5. Сколько существует перестановок $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ чисел от 1 до n, для которых можно подобрать выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ и прямую ℓ так, что проекции $B_1, \ldots, B_n$ всех вершин многоугольника $A_1, \ldots, A_n$ соответственно на эту прямую различны и расположены в порядке $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}$ (двигаться по прямой можно в любом из двух направлений)?

6. Медианы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 тетраэдра $ABCD$ продлили до пересечения с его описанной сферой в точках A_0, B_0, C_0 и D_0 соответственно. Оказалось, что $A_0A_1 = B_0B_1 = C_0C_1 = D_0D_1$. Докажите, что любые два противоположных ребра тетраэдра равны. (Медиана тетраэдра — это отрезок, соединяющий вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани.)

7. Обозначим через $\mathbb{Q}^+$ множество всех положительных рациональных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такие, что $f(1) = 1$ и

$$f(x+n) = f(x) + nf\left(\frac{1}{x}\right)$$

при всех натуральных n и $x \in \mathbb{Q}^+$.

8. Есть $N \geq 2$ мудрецов и их верный ассистент, которым предстоит следующее испытание. Сначала им рассказывают все правила, изложенные ниже, и дают время договориться о совместной стратегии. Потом мудрецов и ассистента разведут по разным комнатам и каждому покажут одни и те же три вида марок (увы, не существует способа, позволяющего разным участникам одинаково пронумеровать типы марок независимо друг от друга). С этого момента всякое общение между участниками запрещено. Затем их сведут вместе и каждому из мудрецов наклеят на лоб марку одного из этих трёх типов так, что каждый видит все марки, кроме своей. Ассистент, посмотрев на все марки, также наклеивает себе на лоб марку одного из этих типов по своему выбору и показывает её всем. Каждый мудрец должен написать на бумажке, какой из типов марок у него на лбу. Как участникам договориться, чтобы все мудрецы верно определили свои марки?

9. Положительные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что $x_a x_b \leqslant \left(\frac{2016}{2017}\right)^{|a-b|}$ при всех парах индексов a и b (возможно, что $a = b$). Найдите минимальное вещественное α такое, что для любого натурального n и любой описанной последовательности верно неравенство $x_1 + \cdots + x_n < \alpha$.

10. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такие, что $a_0 = 1$, $a_1 > 1$ и $a_n = \varphi(a_{n+1})$ при всех натуральных n. (Через $\varphi(k)$, как обычно, обозначено количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.)