ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 1.11.16. ЮНИОРЫ.

Довывод

1. По кругу стоят девять мальчиков, у которых суммарно 1000 конфет. Дано натуральное число $n > 1$. Вася даёт ровно $1/n$ часть своих конфет следующему по часовой стрелке мальчику. Тот затем даёт $1/n$ часть имеющихся у него на данный момент конфет следующему по часовой стрелке мальчику. Так они продолжают, пока девятый мальчик не отдаст $1/n$ часть имеющихся у него на данный момент конфет Васе. Оказалось, что после этого у всех мальчиков столько же конфет, сколько было в самом начале. Чему могло быть равно n?

2. Даны вещественные числа a, b, c, d такие, что $abcd > 0$. Докажите, что существует перестановка x, y, z, w чисел a, b, c, d такая, что $2(xy+zw)^2 > (x^2+y^2)(z^2+w^2)$.

3. Биссектриса угла ABD пересекает основание AD равнобокой трапеции $ABCD$ в точке L. Точки K и N на отрезках AC и CD выбраны соответственно так, что $AK = AL$ и $DN = DL$. Докажите, что точки B, C, K, N лежат на одной окружности.

4. В каждой клетке квадрата 1000×1000 стоит красная или синяя фишка. Докажите, что можно выкинуть 990 строк таблицы так, чтобы в каждом столбце осталась хотя бы одна красная фишка, или выкинуть 990 столбцов таблицы так, чтобы в каждой строке осталась хотя бы одна синяя фишка.

Вывод

5. Существует ли натуральное число a такое, что числа x^2+3 и $(x+a)^2+3$ взаимно просты для всех натуральных x?

6. Дан остроугольный треугольник ABC и точка P внутри него. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно так, что четырехугольник $ADEC$ — вписанный. Точки Q, R, S — проекции точки P на стороны AB, AC, BC соответственно, причем Q лежит между A и D, а S лежит между C и E. Оказалось, что $\angle BAP+\angle BCP = \angle DPE$. Докажите, что треугольники DPE и QRS подобны.

7. Докажите, что у любого конечного множества A натуральных чисел существует подмножество B, удовлетворяющее следующим условиям: если $b_1, b_2 \in B$ различны, то ни одно из чисел b_1, b_2 не делится на другое и ни одно из чисел b_1+1, b_2+1 не делится на другое, а также для любого $a \in A$ найдётся $b \in B$ такое, что или b делится на a, или $a+1$ делится на $b+1$.

Двадцатый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Казань, 25 октября – 1 ноября 2016 года

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 1.11.16. СЕНЬОРЫ.

Довывод

1. Куб $100\times100\times100$ разбит на миллион единичных кубиков. *Линией* назовём 100 единичных кубиков, образующих параллелепипед $1\times1\times100$. Можно ли отметить некоторые из кубиков так, чтобы в 10000 линий было ровно по 4 отмеченных кубика, а в остальных 20000 линий — ровно по 7 отмеченных кубиков?

2. Пусть $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — равнобокая трапеция. Биссектриса угла ABD пересекает основание AD в точке L. Точки K и N на отрезках AC и CD соответственно выбраны так, что $AK = AL$ и $DN = DL$. Докажите, что точки B, C, K и N лежат на одной окружности.

3. Даны 1000 различных натуральных чисел. Может ли случиться так, что при любом натуральном n сумма их остатков при делении на n не превосходит $1{,}001n$?

4. Пусть w — бесконечное в обе стороны двоичное слово (последовательность из нулей и единиц). Для каждого натурального n обозначим через $F(n)$ количество всех его различных подслов длины n (подслово слова w — это слово, образованное одной или несколькими буквами слова w, идущими подряд). Может ли оказаться, что при всех $n > 20$ число $F(n)$ равно n-му простому числу?

Вывод

5. Докажите, что для любых вещественных чисел a, b и c, сумма квадратов которых равна 3, выполняется неравенство $5(a^4+b^4+c^4)+9 \geq 8(a^3+b^3+c^3)$.

6. Внутри вписанного шестиугольника $ABCDEF$ выбрана точка P. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6 — центры окружностей, описанных около треугольников PAB, PBC, PCD, PDE, PEF и PFA соответственно. Докажите, что прямые O_1O_4, O_2O_5 и O_3O_6 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

7. Фигура *лисичка*, ходящая по доске 10×10, задана набором векторов с целыми координатами, на которые она умеет ходить (не выходя за границы доски). Известно, что из любой клетки доски лисичка может дойти до любой другой. Также известно, что на доске можно расставить k лисичек, ни одна из которых не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое может случиться?

Решения задач личной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *По кругу стоят девять мальчиков, у которых суммарно 1000 конфет. Дано натуральное число $n > 1$. Вася даёт ровно $1/n$ часть своих конфет следующему по часовой стрелке мальчику. Тот затем даёт $1/n$ часть имеющихся у него на данный момент конфет следующему по часовой стрелке мальчику. Так они продолжают, пока девятый мальчик не отдаст $1/n$ часть имеющихся у него на данный момент конфет Васе. Оказалось, что после этого у всех мальчиков столько же конфет, сколько было в самом начале. Чему могло быть равно n?*

Ответ. 2, 12 или 112. Решение. Ясно, что количество конфет у Васи делится на n. Пусть оно равно kn. Поскольку у каждого из мальчиков после получения и отдачи конфет осталось столько же, сколько было, то все мальчики отдали столько же конфет, сколько получили. Поэтому следующий за Васей мальчик должен отдать k конфет, что составляет $1/n$ от имеющегося у него количества конфет на этот момент, т. е. у него nk конфет, а значит изначально у него было $(n-1)k$ конфет. Аналогично, у всех, кроме Васи, изначально было $(n-1)k$ конфет, т. е. $8(n-1)k+nk = 1000$ или $k(9n-8) = 1000$. Но у числа 1000 есть только 4 делителя, дающих остаток 1 при делении на 9: 1,10,100,1000. Поскольку $n > 1$, это даёт три возможных значения n: 2,12,112. Все они подходят.

Задача 2. *Даны вещественные числа a, b, c, d такие, что $abcd > 0$. Докажите, что существует перестановка x, y, z, w чисел a, b, c, d такая, что $2(xy+zw)^2 > (x^2+y^2)(z^2+w^2)$.*

Решение. Предположим, что при любой перестановке чисел, это неравенство не выполняется, тогда выполнены неравенства $2(ab+bc)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$, $2(ac+bd)^2 \le (a^2+c^2)(b^2+d^2)$ и $2(ad+bc)^2 \le (a^2+d^2)(b^2+c^2)$. Сложим их. После раскрытия скобок и приведения подобных остается неравенство $12abcd \le 0$, что противоречит условию. Значит исходное предположение неверно.

Задача 3. *Биссектриса угла ABD пересекает основание AD равнобокой трапеции $ABCD$ в точке L. Точки K и N на отрезках AC и CD выбраны соответственно так, что $AK = AL$ и $DN = DL$. Докажите, что точки B, C, K, N лежат на одной окружности.*

Решение. Докажем, что треугольники AKB и DNB подобны. $\angle BAC = \angle BDC$, так как трапеция равнобедренная. Так как BL — биссектриса угла ABD, то $\frac{AB}{BD} = \frac{AL}{LD}$, и из условия последнее отношение также равно $\frac{AK}{DN}$. Значит, указанные треугольники подобны по равным углам $\angle BAK = \angle BDN$ и отношению двух прилежащих сторон. А это значит, что углы BKC и BNC равны, как соответственные внешние углы подобных треугольников. Так как точки K и N лежат с одной стороны от прямой BC, из этого равенства следует, что точки B, C, K и N лежат на одной окружности.

Задача 4. *В каждой клетке квадрата 1000×1000 стоит красная или синяя фишка. Докажите, что можно выкинуть 990 строк таблицы так, чтобы в каждом столбце осталась хотя бы одна красная фишка, или выкинуть 990 столбцов таблицы так, чтобы в каждой строке осталась хотя бы одна синяя фишка.*

Решение. Докажем индукцией по $m+n$, что если в таблице меньше 2^m строк и меньше 2^n столбцов, то можно оставить или не более n строк таких, что в каждом столбце будет красная фишка, или не более m столбцов таких, что в каждой строке будет синяя фишка.

База: одно из чисел равно 1, не умаляя общности, m. Тогда в таблице $k\times1$ либо есть красная фишка, которая и будет целой строкой, либо все фишки синие и можно взять столбец.

Переход: пусть есть строка, в которой красных фишек не меньше, чем синих. Рассмотрим прямоугольник, образованный столбцами, пересекающими эту строку по клеткам, содержащим синие фишки. В нем менее 2^m строк и менее 2^{n-1} столбцов, поэтому или есть не более m столбцов таких, что в каждой строке есть синяя фишка, или $n-1$ строка такая, что в каждом столбце есть красная фишка. Добавляя к этой $n-1$ строке ту, которую мы нашли в начале, получим требуемое. Если же такой строки нет, то красных фишек меньше половины, поэтому есть столбец, в котором синих клеток больше, чем красных. Опять применим индукционное предположение и получим требуемое.

Задача 5. *Существует ли натуральное число a такое, что числа x^2+3 и $(x+a)^2+3$ взаимно просты для всех натуральных x?*

Ответ. Нет. Решение. Предположим, что такое a существует, очевидно тогда, что оно не может делиться ни на 2, ни на 3. Заметим, что $4a(x^2+3)-(2x-a)(2ax+a^2) = a(a^2+12)$, поэтому существует такое p, что a^2+12 делится на p, и $(p, 2a) = 1$. В силу последнего обстоятельства существует натуральное число x такое, что $2ax+a^2$ делится на p. Тогда и $4a(x^2+3)$ делится на p, то есть x^2+3, делится на p. Также мы знаем, что $(x^2+3, (x+a)^2+3) = (x^2+3, 2ax+a^2) \ge p$. Значит числа x^2+3 и $(x+a)^2+3$ не взаимно просты.

Задача 6. *Дан остроугольный треугольник ABC и точка P внутри него. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно так, что четырехугольник $ADEC$ — вписанный. Точки Q, R, S — проекции точки P на стороны AB, AC, BC соответственно, причем Q лежит между A и D, а S лежит* *между C и E. Оказалось, что $\angle BAP+\angle BCP = \angle DPE$. Докажите, что треугольники DPE и QRS подобны.*

Решение. Проведем через точку P общую касательную l окружностей Ω_1 и Ω_2, описанных вокруг треугольников APD и CPE (ее существование обеспечено условием $\angle BAP+\angle BCP = \angle DPE$).

Заметим, что прямая l проходит через точку B, поскольку она должна проходить через радикальный центр окружностей Ω_1, Ω_2 и описанной окружности $ADEC$, через который уже проходят прямые AD и CE. Пусть l пересекает AC в точке R'. Выберем на прямых AB и BC точки Q' и S' соответственно таким образом, что треугольники PQQ', PRR' и PSS' поворотно гомотетичны с центром в P. Из равенства углов $PR'R$ и $PS'S$ следует, что четырехугольник $PS'CR'$ — вписанный, аналогично четырехугольник $PR'AQ'$ вписанный.

Из касания l и Ω_2, и в силу вписанности $PS'CR'$, получаем, что $\angle BPE = \angle PCE = \angle PCS' = \angle PR'S'$, а значит, $PE \| R'S'$. Аналогично, $PD \| R'Q'$. Поэтому, треугольники DPE и $Q'R'S'$ гомотетичны (с центром в точке B), и, следовательно, треугольники DPE и $Q'R'S'$ подобны. При поворотной гомотетии с центром в P, переводящей R в R', точки Q и S переходят в Q' и S' соответственно, а значит треугольник $Q'R'S'$ подобен треугольнику QRS. Следовательно, треугольники DPE и QRS подобны, что и требовалось доказать.

Задача 7. *Докажите, что у любого конечного множества A натуральных чисел существует подмножество B, удовлетворяющее следующим условиям: если $b_1, b_2 \in B$ различны, то ни одно из чисел b_1, b_2 не делится на другое и ни одно из чисел b_1+1, b_2+1 не делится на другое, а также для любого $a \in A$ найдётся $b \in B$ такое, что или b делится на a, или a+1 делится на b+1.*

Решение. Рассмотрим двуцветный ориентированный граф, у которого вершинами будут элементы множества A, и от вершины b к вершине a идет синяя стрелка, если b делится на a, и красная, если a+1 делится на b+1. Тогда мы хотим выбрать независимое подмножество вершин B такое, что в любую вершину множества $A \setminus B$ ведет стрелка из B.

Поделим вершины на три группы: исходные, выбранные и хорошие (вершины будут перемещаться из группы в группу, но никакая вершина на может находиться в двух группах одновременно). Изначально все вершины находятся в группе исходных. Выберем среди них такие, в которые не входит ни одна синяя стрелка и отправим их в группу выбранных. Тогда, в силу транзитивности синих стрелок, в каждую исходную вершину ведет хотя бы одна синяя стрелка из выбранных вершин. Если так случилось, что между выбранными вершинами нет красных стрелок, то, приняв за B множество выбранных вершин, мы решим задачу. Если же красные стрелки есть, то найдем все выбранные вершины, в которые ведет хотя бы одна красная стрелка из других выбранных, и отправим их в группу хороших. После этого, могло оказаться, что в некоторые исходные вершины не идет синей стрелки из выбранных. В этом случае добавим в множество выбранных те вершины из исходных, в которые синие стрелки приходят только из хороших вершин. После этого снова отправим в группу хороших те из выбранных вершин, в которые ведет хотя бы одна красная стрелка из других выбранных. В силу транзитивности теперь уже красных стрелок, в любую хорошую вершину все еще ведет хотя бы одна красная стрелка из выбранных. Будем продолжать такие перемещения (из исходных в выбранные, из выбранных в хорошие). Заметим, что если в некоторый момент мы не смогли уменьшить множество исходных вершин, то задача решена, а так как изначально там конечное число вершин, этот момент обязательно наступит.

Решения задач личной олимпиады старшей группы.

Задача 1. *Куб $100\times100\times100$ разбит на миллион единичных кубиков.* ***Линией*** *назовём 100 единичных кубиков, образующих параллелепипед $1\times1\times100$. Можно ли отметить некоторые из кубиков так, чтобы в 10000 линий было ровно по 4 отмеченных кубика, а в остальных 20000 линий — ровно по 7 отмеченных кубиков?*

Ответ. Нельзя. Решение. Всего имеется $(4\cdot10000+7\cdot20000)/3 = 60000$ отмеченных кубиков. Пусть в одном из трёх возможных направлений идёт m линий, содержащих по 4 кубика, и $10000-m$ линий, содержащих по 7 кубиков. Тогда $4m+7(10000-m) = 60000 \Leftrightarrow 3m = 10000$, что невозможно.

Задача 2. *Пусть $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — равнобокая трапеция. Биссектриса угла ABD пересекает основание AD в точке L. Точки K и N на отрезках AC и CD соответственно выбраны так, что $AK = AL$ и $DN = DL$. Докажите, что точки B, C, K и N лежат на одной окружности.*

Решение. Докажем, что треугольники AKB и DNB подобны. $\angle BAC = \angle BDC$, так как трапеция равнобокая. Так как BL — биссектриса $\angle ABD$, то $\frac{AB}{BD}=\frac{AL}{LD}$, и из условия последнее отношение также равно $\frac{AK}{DN}$. Значит, указанные треугольники подобны по равным углам $\angle BAK = \angle BDN$ и отношению двух прилежащих сторон. А это значит, что углы BKC и BNC равны, как соответственные внешние углы подобных треугольников. Так как точки K и N лежат с одной стороны от прямой BC, из этого равенства следует, что точки B, C, K и N лежат на одной окружности.

Задача 3. *Даны 1000 различных натуральных чисел. Может ли случиться так, что при любом натуральном n сумма их остатков при делении на n не превосходит $1{,}001n$?*

Ответ. Может. Решение. Построим по индукции для любого натурального k набор из k чисел, удовлетворяющих условию задачи. Первое число возьмем равным 1. Пусть на k-м шаге у нас уже есть k чисел, удовлетворяющих условию, и наибольшее из них равно t. Добавим к ним число $T = (1000tk)!$. Заметим, что тогда новое число T делится на все числа от 1 до $1000tk$. Поэтому для них условие выполнено, так как оно было выполнено для k чисел. Для числа a, большего $1000tk$, заметим, что сумма имевшихся k чисел меньше, чем $a/1000$, а остаток числа T при делении на a меньше a, поэтому условие выполнено для всех натуральных n.

Задача 4. *Пусть w — бесконечное в обе стороны двоичное слово (последовательность из нулей и единиц). Для каждого натурального n обозначим через $F(n)$ количество всех его различных подслов длины n (подслово слова w — это слово, образованное одной или несколькими буквами слова w, идущими подряд). Может ли оказаться, что при всех $n > 20$ число $F(n)$ равно n–му простому числу?*

Ответ. Нет. Решение. Докажем, что для произвольного слова w должно выполняться неравенство $F(n+1)-F(n) \le 2(F(n)-F(n-1))$. Назовем слово v *разветвлённым*, если оба слова $v0$ и $v1$ являются подсловами w. Тогда очевидно, что $F(n+1)-F(n)$ есть в точности количество разветвлённых подслов длины n. Однако, если от разветвлённого слова длины n отрезать левую букву, то получится разветвлённое слово длины $n-1$, причем каждое такое слово u будет получаться не более чем дважды (максимум из $0u$ и $1u$). Значит, количество разветвлённых слов длины $n-1$ не меньше половины количества разветвлённых слов длины n, то есть $F(n+1)-F(n) \le 2(F(n)-F(n-1))$.

Итак, если требуемое возможно, то $p_{n+1} - p_n \leqslant 2(p_n - p_{n-1})$ при $n > 21$. Но это не так, скажем, для $p_{29} = 109$, $p_{30} = 113$, $p_{31} = 127$.

Задача 5. *Докажите, что для любых вещественных чисел a, b и c, сумма квадратов которых равна 3, выполняется неравенство $5(a^4+b^4+c^4)+9 \ge 8(a^3+b^3+c^3)$*

Решение. Распишем 9 из левой части как $9 = 2(a^2+b^2+c^2)+3$. Далее заметим, что по неравенству о средних для 8 чисел

$$\frac{a^4+a^4+a^4+a^4+a^4+a^2+a^2+1}{8} \geqslant \sqrt[8]{a^{24}} = a^3.$$

Сложив три таких неравенства для a, b и c, получим требуемое.

Задача 6. *Внутри вписанного шестиугольника $ABCDEF$ выбрана точка P. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6 — центры окружностей, описанных около треугольников PAB, PBC, PCD, PDE, PEF и PFA соответственно. Докажите, что прямые O_1O_4, O_2O_5 и O_3O_6 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.*

Решение. Проведем инверсию с центром в точке P произвольного радиуса. Обозначим образы точек A, B, C, D, E, F вновь через A, B, C, D, E, F: старую картинку мы использовать не будем. Точки O_i перейдут в точки G_i, симметричные точке P относительно новых сторон AB и других. Нам нужно доказать, что окружности, описанные около треугольников $G_iG_{i+3}P$, проходят через еще одну точку или касаются в P. В силу гомотетии с центром в P и коэффициентом 1/2 можно доказывать это утверждение, заменив G_i на H_i — основания перпендикуляров из P на стороны шестиугольника. Обозначим точку пересечения продолжений сторон AB и DE через X, аналогично определим точки Y и Z (возможно, бесконечно удаленные). Тогда описанная окружность треугольника PH_1H_4 также проходит через X, а центром этой окружности является середина PX. Точки X, Y и Z по теореме Паскаля лежат на одной прямой, а значит, и центры трех окружностей лежат на одной прямой l. Если на этой же прямой лежит точка P, то окружности касаются в точке P, в противном случае они проходят через точку, симметричную P относительно l.

Случай, когда некоторые из точек X, Y и Z являются бесконечно удаленными, разбирается, например, предельным переходом.

Задача 7. *Фигура* ***лисичка****, ходящая по доске 10×10, задана набором векторов с целыми координатами, на которые она умеет ходить (не выходя за границы доски). Известно, что из любой клетки доски лисичка может дойти до любой другой. Также известно, что на доске можно расставить k лисичек, ни одна из которых не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое может случиться?*

Ответ. 70. Решение. *Пример*. Сопоставим каждой клетке пару координат (i, j), где $1 \le i, j \le 10$ (координаты возрастают слева направо и снизу вверх). Расставим лисичек в клетки с суммой координат от 7 до 15 включительно. Тогда не занято $(1+2+3+4+5)\cdot 2 = 30$ клеток. Ход лисички — любой вектор с модулем суммы координат, не меньшим 9 (тогда эти координаты нестрого одного знака). Поставленные лисички друг друга не бьют, так как разность сумм координат у них не больше 8. При этом из любой клетки можно дойти либо до левого нижнего, либо до правого верхнего угла (и наоборот). Поскольку эти углы также соединены ходом лисички, из любой клетки можно дойти до любой. Поэтому пример подходит.

Оценка. Рассмотрим клетку $P = (5, 5)$. Из нее возможно сделать ход; обе его координаты по модулю не превосходят 5. Предположим, что один их этих модулей не превосходит 4; не умаляя общности, обе координаты вектора $v = (x, y)$ неотрицательны, при этом $x \le y$ (тогда $0 \le x \le 4$ и $1 \le y \le 5$). Обозначим множество, состоящее из $10x+10y-xy$ клеток, принадлежащих верхним y строкам или правым x столбцам, через M. Каждой клетке доски X, если это возможно, сопоставим клетку доски Y, в которую мы попадем, прибавив к координатам клетки X вектор v. Все клетки разбились на *цепочки*, все цепочки могут заканчиваться только в множестве M. В каждой цепочке разность между количествами клеток, на которых стоит и не стоит лисичка в гипотетическом примере, не больше 1 (поскольку как минимум каждая вторая клетка цепочки свободна). Если лисичек было больше 70, то общая разность δ количеств занятых и свободных клеток больше, чем $70-30 = 40$.

Будем называть цепочку *плохой*, если она содержит нечетное количество клеток, и *хорошей* в противном случае. Заметим, что δ не больше количества плохих цепочек. Если $x = 0$, то количество плохих цепочек не больше 40. Пусть теперь $x \ge 1$. Все xy клеток, лежащих в прямоугольнике с угловыми клетками $(11-x, y+1)$ и $(10, 2y)$, являются концами хороших цепочек длины 2. Кроме того, при $x \ge 2$ все $2y$ клеток, лежащих в прямоугольнике с угловыми клетками $(x+1, 11-y)$ и $(x+2, 10)$, также являются концами хороших цепочек длины 2, причем эти клетки не лежат в предыдущем множестве. Значит, хороших цепочек как минимум $xy+2y$, поэтому плохих цепочек не более $10(x+y)-2xy-2y = 2(4-x)(y-5)+40 \le 40$. В случае же $x = 1$ количество плохих цепочек не больше $10(x+y)-2xy - y = 10+7y \le 40$ при $y \le 4$ и равно 10 при $y = 5$. Значит, при $x \le 4$ оценка доказана.

Иначе из клетки P ведет только вектор с координатами $(5, 5)$, и аналогичное верно для любой из четырёх центральных клеток. Тогда лисичка может ходить на векторы $(\pm5, 5)$, а значит, если разбить доску на четыре квадрата 5×5, то клетки противоположных квадратов разбиваются на пары соединённых ходом лисички, и занятых клеток не больше половины.