Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Первый тур 09.12.19. Высшая лига.

1. Дано простое p, дающее остаток 1 при делении на 8. Рассмотрим все остатки x по модулю p такие, что x — не 4-я степень, а x–1 — 4-я степень (по модулю p). Докажите, что ровно треть рассмотренных остатков являются квадратами по модулю p.

2. В стране имеют хождение монеты с достоинствами $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{99}$ тугриков. Путешественник знает это, но не знает, как выглядят монеты каждого из достоинств (монеты одного достоинства всегда выглядят одинаково, а разных — по-разному). Однажды он нашел мешочек со 100 различными монетами и аппарат, который продает 1 конфету за 1 тугрик. В аппарат можно положить любую монету, а взамен получить 1 конфету и сдачу (за один раз можно получить только одну конфету). Какое наименьшее количество конфет необходимо купить путешественнику, чтобы заведомо узнать, как выглядят монеты каждого из достоинств?

3. На доске написаны n различных вещественных чисел. Для каждого из 2^n подмножеств этих чисел Петя записал в блокнот сумму этого подмножества. Оказалось, что в блокноте есть не менее $1{,}8^n$ различных чисел. Докажите, что число 2019 встречается в блокноте не более, чем $1{,}7^n$ раз.

4. Из четырех реек сделали выпуклый шарнирный четырехугольник. Две точки на его противоположных сторонах соединили еще одной рейкой, но конструкция осталась нежесткой. Обязательно ли исходный четырёхугольник — параллелограмм?

5. На прямой задано бесконечное множество точек X. Двое играют в игру, раунды в которой занумерованы всеми натуральными числами. На очередном раунде первый выбирает положительное число α, а второй располагает на прямой интервал длины α. Второй выигрывает, если в результате (после бесконечного числа ходов) всё множество X покрыто интервалами. Предположим, что у второго есть выигрышная стратегия. Докажите, что X счётно.

6. Среди граней тетраэдра $ABCD$ нет прямоугольных треугольников. Пусть A_B и A_C — проекции точки A на BD и CD, B_C и B_A — точки B на CD и AD, а C_A и C_B — точки C на AD и BD соответственно. Докажите, что прямые A_CA_B, B_CB_A и C_AC_B параллельны одной плоскости.

7. Дана ограниченная функция $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}$, принимающая только положительные значения. Также даны простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Известно, что для любого положительного рационального q выполнено неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i f(p_i q)\geqslant 0$. Докажите, что $a_1+a_2+\ldots+a_k \geq 0$.

8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около другой окружности. Лучи DA и CB пересекаются в точке E, а лучи CD и BA — в точке F. Пусть O_E — центр окружности, касающейся отрезков ED, EC и описанной окружности треугольника DEC. Докажите, что точки F, O и O_E лежат на одной прямой.

9. Пусть a, b, c, d — попарно взаимно простые числа, большие 1. Верно ли, что у многочлена $\dfrac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)(1-x^d)(1-x^{abc})(1-x^{acd})(1-x^{abd})(1-x^{bcd})}{(1-x)^2(1-x^{ab})(1-x^{ac})(1-x^{ad})(1-x^{bc})(1-x^{bd})(1-x^{cd})}$ обязательно есть отрицательный коэффициент?

10. На плоскости отмечено конечное множество точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченных точки, как на диаметре (круг содержит свою границу). Каким наименьшим числом дисков гарантированно удастся покрыть все отмеченные точки?

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Первый тур 09.12.19. Первая лига.

1. Среди натуральных чисел a, не превосходящих данного натурального n, большего 1, выбрали все, для которых n взаимно просто с каждым из чисел a и $a+1$. Докажите, что количество выбранных чисел равно $n\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\left(1-\frac{2}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{p_k}\right)$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — все различные простые делители n.

2. В стране имеют хождение монеты с достоинствами $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{99}$ тугриков. Путешественник знает это, но не знает, как выглядят монеты каждого из достоинств (монеты одного достоинства всегда выглядят одинаково, а разных — по-разному). Однажды он нашел мешочек со 100 различными монетами и аппарат, который продает 1 конфету за 1 тугрик. В аппарат можно положить любую монету, а взамен получить 1 конфету и сдачу (за один раз можно получить только одну конфету). Какое наименьшее количество конфет необходимо купить путешественнику, чтобы заведомо узнать, как выглядят монеты каждого из достоинств?

3. На доске написаны n различных вещественных чисел. Для каждого из 2^n подмножеств этих чисел Петя записал в блокнот сумму этого подмножества. Оказалось, что в блокноте есть не менее $1{,}8^n$ различных чисел. Докажите, что число 2019 встречается в блокноте не более, чем $1{,}7^n$ раз.

4. Из четырех реек сделали выпуклый шарнирный четырехугольник. Две точки на его противоположных сторонах соединили еще одной рейкой, но конструкция осталась нежесткой. Обязательно ли исходный четырёхугольник — параллелограмм?

5. Два игрока по очереди вписывают числа в клетки таблицы 19×19. За один ход можно вписать 0 или 1 в любую пустую клетку. После того как все клетки будут заполнены, они подсчитают суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце. Пусть A — наибольшая сумма в строке, B — наибольшая сумма в столбце. Если $A > B$, то выиграет первый. Если $A < B$, выиграет второй. Если $A = B$, будет ничья. Сможет ли кто–то из игроков обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Если да, то кто?

6. Среди граней тетраэдра $ABCD$ нет прямоугольных треугольников. Пусть A_B и A_C — проекции точки A на BD и CD, B_C и B_A — точки B на CD и AD, а C_A и C_B — точки C на AD и BD соответственно. Докажите, что прямые A_CA_B, B_CB_A и C_AC_B параллельны одной плоскости.

7. Аня и Ваня написали по пять положительных чисел. Сумма Аниных чисел на 5 больше суммы Ваниных, а сумма квадратов всех 10 чисел равна 100. Найдите наибольшее возможное значение произведения всех 10 чисел.

8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около другой окружности. Лучи DA и CB пересекаются в точке E, а лучи CD и BA — в точке F. Пусть O_E — центр окружности, касающейся отрезков ED, EC и описанной окружности треугольника DEC. Докажите, что точки F, O и O_E лежат на одной прямой.

9. Пусть a, b, c — попарно взаимно простые числа, большие 1. Докажите, что у многочлена $\frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)(1-x^{abc})}{(1-x)(1-x^{ab})(1-x^{ac})(1-x^{bc})}$ есть хотя бы один отрицательный коэффициент.

10. На плоскости отмечено конечное множество точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченных точки, как на диаметре (круг содержит свою границу). Каким наименьшим числом дисков гарантированно удастся покрыть все отмеченные точки?

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Первый тур 09.12.19. Вторая лига.

1. Среди натуральных чисел a, не превосходящих данного натурального n, большего 1, выбрали все, для которых n взаимно просто с каждым из чисел a и $a+1$. Докажите, что количество выбранных чисел равно $n\left(1-\frac{2}{p_1}\right)\left(1-\frac{2}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{p_k}\right)$, где $p_1, p_2, ..., p_k$ — все различные простые делители n.

2. В стране имеют хождение монеты с достоинствами $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{99}$ тугриков. Путешественник знает это, но не знает, как выглядят монеты каждого из достоинств (монеты одного достоинства всегда выглядят одинаково, а разных — по-разному). Однажды он нашел мешочек со 100 различными монетами и аппарат, который продает 1 конфету за 1 тугрик. В аппарат можно положить любую монету, а взамен получить 1 конфету и сдачу (за один раз можно получить только одну конфету). Какое наименьшее количество конфет необходимо купить путешественнику, чтобы заведомо узнать, как выглядят монеты каждого из достоинств?

3. На доске написаны n различных вещественных чисел. Для каждого из 2^n подмножеств этих чисел Петя записал в блокнот сумму этого подмножества. Оказалось, что в блокноте есть не менее $1{,}8^n$ различных чисел. Докажите, что число 2019 встречается в блокноте не более, чем $1{,}7^n$ раз.

4. Аня и Ваня написали по пять положительных чисел. Сумма Аниных чисел на 5 больше суммы Ваниных, а сумма квадратов всех 10 чисел равна 100. Найдите наибольшее возможное значение произведения всех 10 чисел.

5. Два игрока по очереди вписывают числа в клетки таблицы 19×19. За один ход можно вписать 0 или 1 в любую пустую клетку. После того как все клетки будут заполнены, они подсчитают суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце. Пусть A — наибольшая сумма в строке, B — наибольшая сумма в столбце. Если $A > B$, то выиграет первый. Если $A < B$, выиграет второй. Если $A = B$, будет ничья. Сможет ли кто–то из игроков обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Если да, то кто?

6. Среди граней тетраэдра $ABCD$ нет прямоугольных треугольников. Пусть A_B и A_C — проекции точки A на BD и CD, B_C и B_A — точки B на CD и AD, а C_A и C_B — точки C на AD и BD соответственно. Докажите, что прямые A_CA_B, B_CB_A и C_AC_B параллельны одной плоскости.

7. Про натуральное число n известно, что число $\sqrt{12n^2+1}$ — также натуральное. Докажите, что натуральным является и число $\sqrt{\frac{\sqrt{12n^2+1}+1}{2}}$.

8. В остроугольном треугольнике ABC $AB > AC$, точка O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Точки M и N на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $AMHN$ — параллелограмм. Точка L симметрична H относительно прямой MN. Прямые OL и AH пересекаются в точке K. Докажите, что точки A, M, N, K лежат на одной окружности.

9. Пусть a, b, c — попарно взаимно простые числа, большие 1. Докажите, что у многочлена $\frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)(1-x^{abc})}{(1-x)(1-x^{ab})(1-x^{ac})(1-x^{bc})}$ есть хотя бы один отрицательный коэффициент.

10. На плоскости отмечено конечное множество точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченных точки, как на диаметре (круг содержит свою границу). Каким наименьшим числом дисков гарантированно удастся покрыть все отмеченные точки?

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Первый тур 09.12.19. Высшая юниорская лига.

1. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F, соответственно. Пусть M — произвольная точка на стороне BC, отличная от B, C и D. Пусть прямые DI и EF пересекаются в точке T, и пусть K — середина отрезка MT. Докажите, что описанные окружности треугольников DEF, TDM и KIT имеют общую точку.

2. В стране имеют хождение монеты достоинством 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{99} тугриков. Путешественник знает это, но не знает, как выглядят монеты каждого из достоинств (монеты одного достоинства всегда выглядят одинаково, а разных — по–разному). Однажды он нашел мешочек со 100 различными монетами и аппарат, который продает 1 конфету за 1 тугрик. В аппарат можно положить любую монету, а взамен получить 1 конфету и сдачу (за один раз можно получить только одну конфету). Какое наименьшее количество конфет необходимо купить путешественнику, чтобы заведомо узнать, как выглядят монеты каждого из достоинств?

3. В остроугольном треугольнике ABC $AB > AC$, точка O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Точки M и N на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $AMHN$ — параллелограмм. Точка L симметрична H относительно прямой MN. Прямые OL и AH пересекаются в точке K. Докажите, что точки A, M, N, K лежат на одной окружности.

4. Два игрока по очереди вписывают числа в клетки таблицы 19×19. За один ход можно вписать 0 или 1 в любую пустую клетку. После того как все клетки будут заполнены, они подсчитают суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце. Пусть A — наибольшая сумма в строке, B — наибольшая сумма в столбце. Если $A > B$, то выиграет первый. Если $A < B$, выиграет второй. Если $A = B$, будет ничья. Сможет ли кто–то из игроков обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Если да, то кто?

5. На плоскости отмечено конечное множество точек (точек хотя бы две). *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченные точки, как на диаметре. Каким наименьшим числом дисков гарантированно удастся покрыть все отмеченные точки?

6. Про натуральное число n известно, что число $\sqrt{12n^2+1}$ — также натуральное. Докажите, что натуральным является и число $\sqrt{\dfrac{\sqrt{12n^2+1}+1}{2}}$.

7. Положительные числа a_1, a_2, ..., a_6 таковы, что $a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6 = 3$ и $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_6^2=9$. Докажите, что $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \leq 1$.

8. Треугольник разрезан на k выпуклых четырёхугольников. Стороны четырёхугольников разбиения разделяют первый угол треугольника на x частей, второй — на y частей и третий на z частей. На сторонах треугольника (не в вершинах) всего 100 вершин четырёхугольников. Какое наименьшее значение может принимать величина $k-x-y-z$?

9. На доске написаны n различных вещественных чисел. Для каждого из 2^n подмножеств этих чисел Петя записал в блокнот сумму этого подмножества. Оказалось, что в блокноте есть не менее $1{,}8^n$ различных чисел. Докажите, что число 2019 встречается в блокноте не более, чем $1{,}7^n$ раз.

10. Среди натуральных чисел a, не превосходящих данного натурального n, большего 1, выбрали все, для которых n взаимно просто с каждым из чисел a и a+1. Докажите, что количество выбранных чисел равно $n\left(1-\dfrac{2}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{2}{p_2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{2}{p_k}\right)$, где p_1, p_2, ..., p_k — все различные простые делители n.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Первый тур 09.12.19. Первая юниорская лига.

1. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F, соответственно. Пусть M — произвольная точка на стороне BC, отличная от B, C и D. Пусть прямые DI и EF пересекаются в точке T, и пусть K — середина отрезка MT. Докажите, что описанные окружности треугольников DEF, TDM и KIT имеют общую точку.

2. В стране имеют хождение монеты достоинством 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{99} тугриков. Путешественник знает это, но не знает, как выглядят монеты каждого из достоинств (монеты одного достоинства всегда выглядят одинаково, а разных — по–разному). Однажды он нашел мешочек со 100 различными монетами и аппарат, который продает 1 конфету за 1 тугрик. В аппарат можно положить любую монету, а взамен получить 1 конфету и сдачу (за один раз можно получить только одну конфету). Какое наименьшее количество конфет необходимо купить путешественнику, чтобы заведомо узнать, как выглядят монеты каждого из достоинств?

3. В остроугольном треугольнике ABC $AB > AC$, точка O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Точки M и N на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $AMHN$ — параллелограмм. Точка L симметрична H относительно прямой MN. Прямые OL и AH пересекаются в точке K. Докажите, что точки A, M, N, K лежат на одной окружности.

4. Два игрока по очереди вписывают числа в клетки таблицы 19×19. За один ход можно вписать 0 или 1 в любую пустую клетку. После того как все клетки будут заполнены, они подсчитают суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце. Пусть A — наибольшая сумма в строке, B — наибольшая сумма в столбце. Если $A > B$, то выигрывает первый. Если $A \le B$, выиграывет второй. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

5. На плоскости отмечено 100 точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченные точки, как на диаметре. Докажите, что все точки можно накрыть четырьмя дисками.

6. Про натуральное число n известно, что число $\sqrt{12n^2+1}$ — также натуральное. Докажите, что натуральным является и число $\sqrt{\dfrac{\sqrt{12n^2+1}+1}{2}}$.

7. Положительные числа a_1, a_2, ..., a_6 таковы, что $a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6 = 3$ и $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_6^2=9$. Докажите, что $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \le 1$.

8. Треугольник разрезан на k выпуклых четырёхугольников. Стороны четырёхугольников разбиения разделяют первый угол треугольника на x частей, второй — на y частей и третий на z частей. Может ли оказаться, что $k < x+y+z$?

9. На множестве целых чисел определена операция $a*b = a(b+1)$. Для какой перестановки a_1, a_2, ..., a_n чисел 1, 2, ..., n значение выражения $a_1*(a_2*(a_3*...*(a_{n-1}*a_n)...))$ будет наибольшим?

10. Среди натуральных чисел a, не превосходящих данного натурального n, большего 1, выбрали все, для которых n взаимно просто с каждым из чисел a и $a+1$. Докажите, что количество выбранных чисел равно $n\left(1-\dfrac{2}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{2}{p_2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{2}{p_k}\right)$, где p_1, p_2, ..., p_k — все различные простые делители n.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Первый тур 09.12.19. Вторая юниорская лига.

1. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F, соответственно. Пусть M — произвольная точка на стороне BC, отличная от B, C и D. Пусть прямые DI и EF пересекаются в точке T, и пусть K — середина отрезка MT. Докажите, что описанные окружности треугольников DEF, TDM и KIT имеют общую точку.

2. В стране имеют хождение монеты достоинством 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{99} тугриков. Путешественник знает это, но не знает, как выглядят монеты каждого из достоинств (монеты одного достоинства всегда выглядят одинаково, а разных — по–разному). Однажды он нашел мешочек со 100 различными монетами и аппарат, который продает 1 конфету за 1 тугрик. В аппарат можно положить любую монету, а взамен получить 1 конфету и сдачу (за один раз можно получить только одну конфету). Какое наименьшее количество конфет необходимо купить путешественнику, чтобы заведомо узнать, как выглядят монеты каждого из достоинств?

3. На плоскости отмечено 100 точек. *Диском* назовём круг, построенный на отрезке, соединяющем две отмеченные точки, как на диаметре. Докажите, что все точки можно накрыть четырьмя дисками.

4. Два игрока по очереди вписывают числа в клетки таблицы 19×19. За один ход можно вписать 0 или 1 в любую пустую клетку. После того как все клетки будут заполнены, они подсчитают суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце. Пусть A — наибольшая сумма в строке, B — наибольшая сумма в столбце. Если $A \geq B$, то выигрывает первый. Если $A < B$, выигрывает второй. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

5. На катете BC прямоугольного треугольника ABC даны такие точки D и E, что $\angle DAC = \angle EAD = \angle BAE$. Основания перпендикуляров из точек D и E на гипотенузу AB обозначим через K и S соответственно. Отрезок CK пересекает отрезок AE в точке H. Прямая, проходящая через H параллельно AD пересекает отрезок BC в точке M. Докажите, что в четырёхугольник $CHSM$ можно вписать окружность.

6. Про натуральное число n известно, что число $\sqrt{12n^2+1}$ — также натуральное. Докажите, что натуральным является и число $\sqrt{\dfrac{\sqrt{12n^2+1}+1}{2}}$.

7. Положительные числа a_1, a_2, ..., a_6 таковы, что $a_1+a_2+a_3-a_4-a_5-a_6 = 3$ и $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_6^2=9$. Докажите, что $a_1a_2a_3a_4a_5a_6 \leq 1$.

8. Треугольник разрезан на k выпуклых четырёхугольников. Стороны четырёхугольников разбиения разделяют первый угол треугольника на x частей, второй — на y частей и третий на z частей. Может ли оказаться, что $k < x+y+z$?

9. На множестве целых чисел определена операция $a*b = a(b+1)$. Для каждой перестановки a_1, a_2, ..., a_n чисел 1, 2, ..., n вычислили значение выражения $(\ldots((a_1*a_2)*a_3)*\ldots*a\{_{n-1}\})*a_n$. Сколько разных значений получилось?

10. Сколько существует семизначных чисел, у которых средняя цифра равна полусумме первой и последней?