Третий тур 12.12.19. Высшая лига.

1. Можно ли расположить в пространстве пять равных правильных тетраэдров $T_1, \ldots, T_5$ так, чтобы при всех $i = 1, \ldots, 5$ тетраэдры T_i и T_{i+1} имели ровно одно общее ребро, и общие рёбра тетраэдра T_i с T_{i-1} и T_{i+1} были скрещивающимися? (Нумерация циклическая, то есть $T_0 = T_5$, $T_6 = T_1$; тетраэдры могут пересекаться друг с другом.)

2. На доске написаны 2500 чисел. Известно, что как ни разбей их на 50 групп по 50 чисел в каждой, обязательно найдётся группа, сумма чисел в которой равна 0. При каком наибольшем n можно гарантировать, что среди чисел на доске обязательно окажется хотя бы n равных?

3. Пусть $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $f(x_1, y_1) \neq \min(x_1, y_1)$ и $f(x_2, y_2) \neq \max(x_2, y_2)$ при некоторых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Известно, что при всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ выполнено следующее:

(1) $f(x, y) = f(y, x)$;

(2) $f(x, y) \in [x, y]$ при $x \leq y$;

(3) $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$.

Докажите, что существует $a \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x, a) = a$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

4. Все числа, которые можно представить в виде суммы квадратов двух взаимно простых натуральных чисел, выписаны в порядке возрастания. Докажите, что для любого n в этой последовательности можно найти n последовательных нечётных членов.

5. Окружность с центром I, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Пусть A_0 — центр окружности, вписанной в четырехугольник AA_1ID_1; аналогично определяются точки B_0, C_0, D_0. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A_1 на A_0B_0 и из точки B_1 на B_0C_0, пересекаются на прямой B_0D_0.

6. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек *образует инверсию*, если карточка с бóльшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, ..., n. Докажите, что после совершения всех n действий количество инверсий окажется таким же, как было вначале.

7. Модули комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны 1. Пусть a — среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а b — среднее арифметическое чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$,. Положим $c_k = a_kb+ab_k-a_kb_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Докажите, что $|c_1|+|c_2|+\ldots+|c_n| \leq n$.

8. Дано натуральное $n \geq 2019$. Числа 1, 2, ..., n^2 вписаны в клетки таблицы $n\times n$ так, что в каждой клетке написано одно число. Докажите, что можно отметить n клеток, никакие две из которых не находятся в одной строке или в одном столбце, так, чтобы никакие четыре числа, стоящие в отмеченных клетках, не образовывали арифметическую прогрессию.

9. Внутри остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $\angle PAC = \angle BAQ$ и $\angle PCA = \angle BCQ$. Пусть M_A, M_B и M_C — соответственно середины меньших дуг BC, CA и AB описанной окружности треугольника ABC. Луч M_AQ пересекает описанную окружность треугольника BPC в точке X_A; точки X_B и X_C определяются аналогично. Докажите, что точки P, X_A, X_B и X_C лежат на одной окружности.

10. Вася решил про каждое подмножество в $X = \{1, 2, \ldots, 10^5+1\}$, хорошее оно или плохое; Пете известно лишь, что X хорошее, а $\varnothing$ — плохое. Петя хочет найти хорошее подмножество такое, что все подмножества, получаемые из него удалением одного элемента — плохие. Он может задавать вопросы вида «Хорошее ли такое-то подмножество?». Может ли он гарантированно добиться желаемого за $\dfrac{10^{10}+10^5}{2}+3$ вопроса?

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Третий тур 12.12.19. Первая лига.

1. У Сени есть квадратный бильярдный стол, в четырех углах которого находятся лузы. Сеня хочет выполнить трюк: запустить два шара от одного и того же борта под прямым углом друг к другу (не обязательно из одной точки), чтобы оба, сделав ровно по 100 отражений, впервые попали в угловые лузы. Стартовые точки у борта и угол, под которым запускается один из шаров, Сеня выбирает по своему усмотрению. Шары считаем точками, отражаются они от бортов по правилу «угол падения равен углу отражения». Удастся ли Сене этот трюк?

2. На доске написаны 2500 чисел. Известно, что как ни разбей их на 50 групп по 50 чисел в каждой, обязательно найдётся группа, сумма чисел в которой равна 0. При каком наибольшем n можно гарантировать, что среди чисел на доске обязательно окажется хотя бы n равных?

3. Дано вещественное число $a > 1$. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задана условием $a_n = [a^{n+1}] - a[a^n]$. Найдите все $a > 1$, для которых эта последовательность периодична, начиная с некоторого места.

4. Все числа, которые можно представить в виде суммы квадратов двух взаимно простых натуральных чисел, выписаны в порядке возрастания. Докажите, что для любого n в этой последовательности можно найти n последовательных нечётных членов.

5. Окружность с центром I, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Пусть A_0 — центр окружности, вписанной в четырехугольник AA_1ID_1; аналогично определяются точки B_0, C_0, D_0. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A_1 на A_0B_0 и из точки B_1 на B_0C_0, пересекаются на прямой B_0D_0.

6. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек *образует инверсию*, если карточка с бóльшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, ..., n. Докажите, что после совершения всех n действий количество инверсий окажется таким же, как было вначале.

7. Натуральное число n и положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ таковы, что $a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{n+1}^n = n+1$. Докажите, что $\dfrac{1}{a_1^{n+1}+n} + \dfrac{1}{a_2^{n+1}+n} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n+1}^{n+1}+n} \geqslant 1$.

8. Дано натуральное $n \geq 2019$. Числа 1, 2, ..., n^2 вписаны в клетки таблицы $n \times n$ так, что в каждой клетке написано одно число. Докажите, что можно отметить n клеток, никакие две из которых не находятся в одной строке или в одном столбце, так, чтобы никакие четыре числа, стоящие в отмеченных клетках, не образовывали арифметическую прогрессию.

9. Внутри остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $\angle PAC = \angle BAQ$ и $\angle PCA = \angle BCQ$. Пусть M_A, M_B и M_C — соответственно середины меньших дуг BC, CA и AB описанной окружности треугольника ABC. Луч M_AQ пересекает описанную окружность треугольника BPC в точке X_A; точки X_B и X_C определяются аналогично. Докажите, что точки P, X_A, X_B и X_C лежат на одной окружности.

10. Вася решил про каждое подмножество в $X = \{1, 2, \ldots, 10^5+1\}$, хорошее оно или плохое; Пете известно лишь, что X хорошее, а $\varnothing$ — плохое. Петя хочет найти хорошее подмножество такое, что все подмножества, получаемые из него удалением одного элемента — плохие. Он может задавать вопросы вида «Хорошее ли такое-то подмножество?». Может ли он гарантированно добиться желаемого за $\dfrac{10^{10}+10^5}{2}+3$ вопроса?

Третий тур 12.12.19. Вторая лига.

1. Внутри треугольника ABC выбраны точки P и Q таким образом, что $\angle PAB = \angle CAQ$ и $\angle PCA = \angle QCB$. Биссектриса угла B пересекает прямые PA и PC в точках K и L соответственно, а описанную окружность треугольника ABC — в точке M. Описанные окружности треугольников AMK и CML пересекаются вторично в точке N. Докажите, что точки M, Q и N лежат на одной прямой.

2. На доске написаны 2500 чисел. Известно, что как ни разбей их на 50 групп по 50 чисел в каждой, обязательно найдётся группа, сумма чисел в которой равна 0. При каком наибольшем n можно гарантировать, что среди чисел на доске обязательно окажется хотя бы n равных?

3. Дан выпуклый 2019-угольник. Пусть A — среднее арифметическое площадей всех треугольников с вершинами в вершинах 2019-угольника, B — среднее арифметическое площадей всех четырехугольников с вершинами в вершинах 2019–угольника. Найдите A/B.

4. На белой доске $n\times(n+1)$, $n > 10$, у которой граничные клетки покрашены в черный цвет, играют Петя и Вася, по очереди перекрашивая белые клетки в черные. При этом Петя может красить только те клетки, у которых четное число соседних по стороне черных клеток, а Вася только те, у которых нечетное число соседних по стороне черных клеток. Петя ходит первый. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Окружность с центром I, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Пусть A_0 — центр окружности, вписанной в четырехугольник AA_1ID_1; аналогично определяются точки B_0, C_0, D_0. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A_1 на A_0B_0 и из точки B_1 на B_0C_0, пересекаются на прямой B_0D_0.

6. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек *образует инверсию*, если карточка с бóльшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, ..., n. Докажите, что после совершения всех n действий количество инверсий окажется таким же, как было вначале.

7. Даны натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n, сумма которых равна 2019. Найдите наименьшее такое положительное t, что уравнение $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x^i}{x^{2i}+1}=t$ имеет единственное положительное решение.

8. Дано натуральное k. Назовем множество простых чисел $\{p_1,..., p_n\}$ *k-классным*, если $\prod_{i=1}^{n}(p_i+k)$ делится на $\prod_{i=1}^{n}p_i$. Докажите, что количество k-классных множеств конечно.

9. У Сени есть квадратный бильярдный стол, в четырех углах которого находятся лузы. Сеня хочет выполнить трюк: запустить два шара от одного и того же борта под прямым углом друг к другу (не обязательно из одной точки), чтобы оба, сделав ровно по 100 отражений, впервые попали в угловые лузы. Стартовые точки у борта и угол, под которым запускается один из шаров, Сеня выбирает по своему усмотрению. Шары считаем точками, отражаются они от бортов по правилу «угол падения равен углу отражения». Удастся ли Сене этот трюк?

10. Вася решил про каждое подмножество в $X = \{1, 2, \dots, 10^5+1\}$, хорошее оно или плохое; Пете известно лишь, что X хорошее, а $\varnothing$ — плохое. Петя хочет найти хорошее подмножество такое, что все подмножества, получаемые из него удалением одного элемента — плохие. Он может задавать вопросы вида «Хорошее ли такое-то подмножество?». Может ли он гарантированно добиться желаемого за $\frac{10^{10}+10^5}{2}+20$ вопросов?

Третий тур 12.12.19. Высшая юниорская лига.

1. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек *образует инверсию*, если карточка с бóльшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, ..., n. Докажите, что после действий Карла количество инверсий не изменится.

2. Окружность с центром I, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. A_0 — центр окружности, вписанной в четырехугольник AA_1ID_1. Аналогично определяются точки B_0, C_0, D_0. Докажите, что перпендикуляры из точек A_1 на A_0B_0 и B_1 на B_0C_0, пересекаются на прямой B_0D_0.

3. Найдите наименьшее натуральное число, которое не представляется в виде $C_a^2 + C_b^2 + c$, где a, b, c— неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $a \ge b \ge c$ и $a+b \le 2019$.

4. Все числа, которые можно представить в виде суммы квадратов двух взаимно простых натуральных чисел, выписаны в порядке возрастания. Докажите, что для любого n в этой последовательности можно найти n последовательных нечётных членов.

5. Внутри треугольника ABC выбраны точки P и Q таким образом, что $\angle PAB = \angle CAQ$ и $\angle PCA = \angle QCB$. Биссектриса угла B пересекает прямые PA и PC в точках K и L соответственно, а описанную окружность треугольника ABC — в точке M. Описанные окружности треугольников AMK и CML пересекаются вторично в точке N. Докажите, что точки M, Q и N лежат на одной прямой.

6. Даны натуральные числа a_1, a_2, ..., a_n, сумма которых равна 2019. Найдите наименьшее такое положительное t, что уравнение $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x^i}{x^{2i}+1} = t$ имеет единственное решение.

7. Дано натуральное k. Назовем множество простых чисел $\{p_1,..., p_n\}$ *k-хорошим*, если $\prod_{i=1}^{n}(p_i + k)$ делится на $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Докажите, что количество k-хороших множеств конечно.

8. Вася решил про каждое подмножество в $X = \{1, 2, \ldots, 10^5+1\}$, хорошее оно или плохое; Пете известно лишь, что X хорошее, а $\varnothing$ — плохое. Петя хочет найти хорошее подмножество такое, что все подмножества, получаемые из него удалением одного элемента — плохие. Он может задавать вопросы вида «Хорошее ли такое-то подмножество?». Может ли он гарантированно добиться желаемого за $\frac{10^{10}+10^5}{2}+3$ вопроса?

9. Организаторы Кубка Колмогорова ожидают прибытия $2n$ команд. Каждые две команды сыграют между собой один бой. В каждый день турнира играется ровно один бой. Команда приезжает и заселяется в гостиницу в день своего первого боя, а в день своего последнего боя уезжает. День проживания в гостинице одной команды стоит 1000 тугриков (день заезда и день отъезда оплачиваются полностью). Какую наименьшую сумму может получить гостиница от всех команд вместе?

10. У Сени есть квадратный бильярдный стол, в четырех углах которого находятся лузы. Сеня хочет выполнить трюк: запустить два шара от одного и того же борта под прямым углом друг к другу (не обязательно из одной точки), чтобы оба, сделав ровно по 100 отражений, впервые попали в угловые лузы. Стартовые точки у борта и угол, под которым запускается один из шаров, Сеня выбирает по своему усмотрению. Шары считаем точками, отражаются они от бортов по правилу «угол падения равен углу отражения». Удастся ли Сене этот трюк?

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Третий тур 12.12.19. Первая юниорская лига.

1. Клара разложила в ряд n карточек, на которых написаны числа от 1 до n. Пара карточек *образует инверсию*, если карточка с бóльшим из двух номеров лежит левее карточки с меньшим номером. Карл берёт со стола карточку с числом 1, считает, сколько карточек было слева от неё, и вставляет её в ряд так, чтобы теперь столько карточек стало от неё справа. Дальше он проделывает это по очереди с карточками 2, 3, ..., n. Докажите, что после действий Карла количество инверсий не изменится.

2. Окружность с центром I, вписанная в четырехугольник $ABCD$, касается его сторон AB, BC, CD, DA в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. A_0 — центр окружности, вписанной в четырехугольник AA_1ID_1. Аналогично определяются точки B_0, C_0, D_0. Докажите, что перпендикуляры из точек A_1 на A_0B_0 и B_1 на B_0C_0, пересекаются на прямой B_0D_0.

3. На доске написали тысячу единиц. Разрешается стереть с доски любое число a и записать вместо него три экземпляра числа $a/3$. Для какого наибольшего m можно наверняка утверждать, что на доске всегда есть m одинаковых чисел?

4. Все числа, которые можно представить в виде суммы квадратов двух взаимно простых натуральных чисел, выписаны в порядке возрастания. Докажите, что для любого n в этой последовательности можно найти n последовательных нечётных членов.

5. Внутри треугольника ABC выбраны точки P и Q таким образом, что $\angle PAB = \angle CAQ$ и $\angle PCA = \angle QCB$. Биссектриса угла B пересекает прямые PA и PC в точках K и L соответственно, а описанную окружность треугольника ABC — в точке M. Описанные окружности треугольников AMK и CML пересекаются вторично в точке N. Докажите, что точки M, Q и N лежат на одной прямой.

6. Дано вещественное число $a > 1$. Последовательность a_1, a_2, a_3, … задана условием $a_n = [a^{n+1}]-a[a^n]$. Найдите все $a > 1$, для которых эта последовательность периодична, начиная с некоторого места.

7. Дано натуральное k. Назовем множество простых чисел $\{p_1, ..., p_n\}$ *k-хорошим*, если $\prod_{i=1}^{n}(p_i+k)$ делится на $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Докажите, что количество k-хороших множеств конечно.

8. Вася решил про каждое подмножество в $X = \{1, 2, …, 10^5+1\}$, хорошее оно или плохое; Пете известно лишь, что X хорошее, а $\varnothing$ — плохое. Петя хочет найти хорошее подмножество такое, что все подмножества, получаемые из него удалением одного элемента — плохие. Он может задавать вопросы вида «Хорошее ли такое-то подмножество?». Может ли он гарантированно добиться желаемого за $\frac{10^{10}+10^5}{2}+3$ вопроса?

9. Организаторы Кубка Колмогорова ожидают прибытия $2n$ команд. Каждые две команды сыграют между собой один бой. В каждый день турнира играется ровно один бой. Команда приезжает и заселяется в гостиницу в день своего первого боя, а в день своего последнего боя уезжает. При каком наименьшем k можно составить такое расписание, чтобы каждая команда платила не более, чем за k дней проживания (день заезда и день отъезда оплачиваются полностью)?

10. Дано натуральное $n \geq 2019$. Числа 1, 2, …, n^2 вписаны в клетки таблицы $n\times n$ так, что в каждой клетке написано одно число. Докажите, что можно отметить n клеток, никакие две из которых не находятся в одной строке или в одном столбце, так, чтобы никакие четыре числа, стоящие в отмеченных клетках, не образовывали арифметическую прогрессию.

Третий тур 12.12.19. Вторая юниорская лига.

1. Числа r, 1, 2, 3, ... 11 расставлены на ребрах куба по одному на каждом ребре. В каждой вершине записали сумму чисел, написанных на всех исходящих из нее ребрах. Оказалось, что числа во всех вершинах равны. При каком наибольшем r такое могло случиться?

2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = EF$, $BC = DE$ и $\angle ABC = \angle DEF$ (оба угла острые). Докажите, что середины отрезков AF, BE и CD лежат на одной прямой.

3. На доске написали тысячу единиц. Разрешается стереть с доски любое число a и записать вместо него три экземпляра числа $a/3$. Для какого наибольшего m можно наверняка утверждать, что на доске всегда есть m одинаковых чисел?

4. Дано 100 различных натуральных чисел, больших n^{99}, но меньших $n^{99}+n$ для некоторого натурального n. Докажите, что произведение никаких 99 из них не делится на оставшееся.

5. Точка P лежит на описанной окружности равнобедренного треугольника ABC с $AB = AC$. Окружность Ω симметрична относительно AP окружности с диаметром AB. Окружность с диаметром AP пересекает Ω в точках A и Q. Докажите, что $AQ \perp QC$.

6. Дано вещественное число $a > 1$. Последовательность a_1, a_2, a_3, … задана условием $a_n = [a^{n+1}]-a[a^n]$. Найдите все $a > 1$, для которых эта последовательность периодична, начиная с некоторого места.

7. Дано натуральное k. Назовем множество простых чисел $\{p_1,..., p_n\}$ *k-хорошим*, если $\prod_{i=1}^{n}(p_i+k)$ делится на $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Докажите, что количество k-хороших множеств конечно.

8. Дан выпуклый 2019-угольник. Пусть A — среднее арифметическое площадей всех треугольников с вершинами в вершинах 2019-угольника, B — среднее арифметическое площадей всех четырехугольников с вершинами в вершинах 2019–угольника. Найдите A/B.

9. Организаторы Кубка Колмогорова ожидают прибытия $2n$ команд. Каждые две команды сыграют между собой один бой. В каждый день турнира играется ровно один бой. Команда приезжает и заселяется в гостиницу в день своего первого боя, а в день своего последнего боя уезжает. При каком наименьшем k можно составить такое расписание, чтобы каждая команда платила не более, чем за k дней проживания (день заезда и день отъезда оплачиваются полностью)?

10. У Сени есть квадратный бильярдный стол. Сеня хочет выполнить трюк: запустить два шара из одной точки от борта под прямым углом друг к другу, чтобы они, отразившись несколько раз от бортов, встретились точно в центре стола. Стартовую точку у борта и угол, под которым запускается один из шаров, Сеня выбирает по своему усмотрению. Шары считаем точками, двигающимися с постоянными одинаковыми скоростями, отражаются они от бортов по правилу «угол падения равен углу отражения», и в углы стола им попадать запрещено. Удастся ли Сене этот трюк?