Двадцать третий математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Четвертый тур 13.12.19. Высшая лига: бои за 1 и 3 места.

1. Выпуклый многоугольник ортогонально спроектировали с одной плоскости на другую. Докажите, что проекцию можно покрыть копией исходного многоугольника.

2. Даны положительные $x_1, \ldots, x_n$ с суммой π. Докажите, что

$$\frac{\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n}{\sin(x_1+x_2)\sin(x_2+x_3)\ldots\sin(x_n+x_1)} \le \left(\frac{\sin(\pi/n)}{\sin(2\pi/n)}\right)^n.$$

3. Дана диаграмма Юнга d. Пусть S — множество всех её поддиаграмм Юнга (включая пустую поддиаграмму и саму d). Найдите количество перестановок $\sigma: S \to S$ таких, что при любом $x \in S$ диаграмма $\sigma(x)$ не содержит угловых клеток диаграммы x. (Клетка α диаграммы x называется *угловой*, если x не содержит клеток над α и справа от α.)

4. Два игрока играют в следующую игру, выписывая по очереди на доску числа из отрезка $[1, 7]$. Изначально доска пуста. Выписанное число может быть равно другому числу на доске. Проигрывает тот, после чьего хода на доске найдётся тройка чисел, являющихся длинами сторон треугольника. Кто выигрывает при правильной игре — тот, кто делает первый ход или его соперник?

5. В городе счётное количество жителей, занумерованных всеми натуральными числами. Также в городе есть тайные общества, каждое состоит их 7 человек (любые два общества отличаются составом). При любом натуральном n житель с номером n участвует не менее, чем в n обществах (возможно, в бесконечном количестве обществ). Докажите, что можно прикрыть некоторые общества (возможно, ни одного не прикрыть) так, чтобы это условие по–прежнему выполнялось, но при прикрытии любого ещё одного общества уже не выполнялось бы.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2$ является квадратом натурального числа, а НОД чисел a, b, c есть сумма двух квадратов целых чисел. Докажите, что существует треугольник с длинами сторон $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, все координаты вершин которого — целые.

7. Найдите все натуральные n, для которых существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами такой, что все коэффициенты многочлена $f(x)^2-(1+x+\ldots+x^{n-1})$ кратны n.

8. Докажите, что число 5^n-1 не делится на 2^n+1 ни при каком натуральном n.

9. Дан разносторонний треугольник ABC. Окружность Ω касается лучей AB и AC в точках B_A и C_A соответственно, причём $AB_A = AC_A = BC$. Окружности Ω_B, Ω_C и точки A_B, C_B, A_C и B_C определяются аналогично. Оказалось, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку T и пересекаются вторично в точках S_A, S_B, S_C, не лежащих на одной прямой. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и $S_AS_BS_C$ касаются.

10. Даны два набора из 8 точек: A_1, B_1, C_1, D_1, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 и A_2, B_2, C_2, D_2, A'_2, B'_2, C'_2, D'_2. Назовём два четырёхугольника *похожими*, если они вписаны в концентрические (возможно, совпадающие) окружности. Известно, что каждый из пяти четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_1A'_1B_1B'_1$, $B_1B'_1C_1C'_1$, $C_1C'_1D_1D'_1$, $D_1D'_1A_1A'_1$ (возможно, самопересекающихся) похож на четырёхугольник, полученный из него заменой всех индексов 1 на 2. Докажите, что четырёхугольники $A'_1B'_1C'_1D'_1$ и $A'_2B'_2C'_2D'_2$ также похожи.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Четвертый тур 13.12.19.
Высшая лига: бои за 5 и 7 места. Первая лига: бой за 1 место.

1. Никакие три диагонали выпуклого 2019-угольника P не пересекаются в одной точке. Назовём *перекрёстком* точку пересечения двух диагоналей P, не являющуюся вершиной, а *циклом* — последовательность хотя бы трех перекрёстков, в которой каждые два последовательных перекрёстка (в том числе последний и первый) лежат на одной диагонали, но никакие три перекрёстка на диагонали не лежат. Какое наибольшее количество перекрёстков можно отметить так, чтобы никакие отмеченные перекрёстки не образовывали цикл?

2. Даны положительные $x_1, \ldots, x_n$ с суммой π. Докажите, что

$$\frac{\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n}{\sin(x_1+x_2)\sin(x_2+x_3)\ldots\sin(x_n+x_1)} \le \left(\frac{\sin(\pi/n)}{\sin(2\pi/n)}\right)^n.$$

3. Дан клетчатый квадрат 100×100. *Диаграммой Юнга* называется множество клеток, содержащее вместе с каждой своей клеткой все клетки левее и все клетки ниже ее. Пусть S — множество всех диаграмм Юнга, содержащихся в квадрате (включая пустую диаграмму и весь квадрат). Найдите количество перестановок $\sigma: S \to S$ таких, что при любом $x \in S$ диаграмма $\sigma(x)$ не содержит угловых клеток диаграммы x. (Клетка α диаграммы x называется *угловой*, если x не содержит клеток над α и справа от α.)

4. Два игрока играют в следующую игру, выписывая по очереди на доску числа из отрезка [1, 5]. Изначально доска пуста. Выписанное число может быть равно другому числу на доске. Проигрывает тот, после чьего хода на доске найдётся тройка чисел, являющихся длинами сторон треугольника. Кто выигрывает при правильной игре — тот, кто делает первый ход или его соперник?

5. Леша выписывает последовательность чисел. На первом шаге он пишет любое натуральное число a_1. На шаге номер k он считает произведение ненулевых цифр числа a_{k-1}, умножает это произведение на произвольное число, не превосходящее k и являющееся степенью двойки, и результат обозначает через a_k. Докажите, что в Лешиной последовательности найдутся два равных числа.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2$ является квадратом натурального числа, а НОД чисел a, b, c есть сумма двух квадратов целых чисел. Докажите, что существует треугольник с длинами сторон $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, все координаты вершин которого — целые.

7. Даны функции $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Известно, что функция $g(x)$ непрерывна на [0,1], функция $f(x)+g(x)$ строго возрастает на [0,1], а также $f(0) > 0$ и $f(1) < 0$. Докажите, что существует $x \in [0,1]$ такое, что $f(x) = 0$.

8. Аргументы и значения функции $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ — целые числа. Известно, что для любых целых $a_1, a_2, ..., a_n$ и для любого $i = 1, 2, ..., n$, если в выражении $S(a_1, a_2, ..., a_n)$ аргумент a_i заменить на $S(a_1, a_2, ..., a_n)$, то значение станет равным a_i. Докажите, что для любых целых $a_1, a_2, ..., a_n$ и для любого $i = 1, 2, ..., n$, если в выражении $S(a_n, a_{n-1}, ..., a_1)$ аргумент a_i заменить на $S(a_1, ..., a_n)$, то значение также станет равным a_i.

9. Дан разносторонний треугольник ABC. Окружность Ω касается лучей AB и AC в точках B_A и C_A соответственно, причём $AB_A = AC_A = BC$. Окружности Ω_B, Ω_C и точки A_B, C_B, A_C и B_C определяются аналогично. Оказалось, что окружности Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку T и пересекаются вторично в точках S_A, S_B, S_C, не лежащих на одной прямой. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и $S_AS_BS_C$ касаются.

10. Даны два набора из 8 точек: $A_1, B_1, C_1, D_1, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, A'_2, B'_2, C'_2, D'_2$. Назовём два четырёхугольника *похожими*, если они вписаны в концентрические (возможно, совпадающие) окружности. Известно, что каждый из пяти четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_1A'_1B_1B'_1$, $B_1B'_1C_1C'_1$, $C_1C'_1D_1D'_1$, $D_1D'_1A_1A'_1$ (возможно, самопересекающихся) похож на четырёхугольник, полученный из него заменой всех индексов 1 на 2. Докажите, что четырёхугольники $A'_1B'_1C'_1D'_1$ и $A'_2B'_2C'_2D'_2$ также похожи.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Четвертый тур 13.12.19. Первая лига: все бои, кроме боя за 1 место.

1. Никакие три диагонали выпуклого 2019-угольника P не пересекаются в одной точке. Назовём *перекрёстком* точку пересечения двух диагоналей P, не являющуюся вершиной, а *циклом* — последовательность хотя бы трех перекрёстков, в которой каждые два последовательных перекрёстка (в том числе последний и первый) лежат на одной диагонали, но никакие три перекрёстка на диагонали не лежат. Какое наибольшее количество перекрёстков можно отметить так, чтобы никакие отмеченные перекрёстки не образовывали цикл?

2. Даны положительные $x_1, \ldots, x_n$ с суммой π. Докажите, что

$$\frac{\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n}{\sin(x_1+x_2)\sin(x_2+x_3)\ldots\sin(x_n+x_1)} \le \left(\frac{\sin(\pi/n)}{\sin(2\pi/n)}\right)^n.$$

3. Дан клетчатый квадрат 100×100. *Диаграммой Юнга* называется множество клеток, содержащее вместе с каждой своей клеткой все клетки левее и все клетки ниже ее. Пусть S — множество всех диаграмм Юнга, содержащихся в квадрате (включая пустую диаграмму и весь квадрат). Найдите количество перестановок $\sigma : S \to S$ таких, что при любом $x \in S$ диаграмма $\sigma(x)$ не содержит угловых клеток диаграммы x. (Клетка α диаграммы x называется *угловой*, если x не содержит клеток над α и справа от α.)

4. Два игрока играют в следующую игру, выписывая по очереди на доску числа из отрезка $[1, 5]$. Изначально доска пуста. Выписанное число может быть равно другому числу на доске. Проигрывает тот, после чьего хода на доске найдётся тройка чисел, являющихся длинами сторон треугольника. Кто выигрывает при правильной игре — тот, кто делает первый ход или его соперник?

5. Дана последовательность из 51 натурального числа. Сумма этих чисел равна 100. Докажите, что для любого натурального числа $k < 100$ можно выбрать несколько (возможно, один) идущих подряд членов этой последовательности, дающих в сумме либо k, либо $100-k$.

6. Число называется *хорошим*, если оно представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, являющихся длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что найдется сколь угодно большое n, такое, что оба числа n и $n+1$ — хорошие.

7. Даны функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Известно, что функция $g(x)$ непрерывна на $[0,1]$, функция $f(x)+g(x)$ строго возрастает на $[0,1]$, а также $f(0) > 0$ и $f(1) < 0$. Докажите, что существует $x \in [0,1]$ такое, что $f(x) = 0$.

8. Аргументы и значения функции $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ — целые числа. Известно, что для любых целых $a_1, a_2, ..., a_n$ и для любого $i = 1, 2, ..., n$, если в выражении $S(a_1, a_2, ..., a_n)$ аргумент a_i заменить на $S(a_1, a_2, ..., a_n)$, то значение станет равным a_i. Докажите, что для любых целых $a_1, a_2, ..., a_n$ и для любого $i = 1, 2, ..., n$, если в выражении $S(a_n, a_{n-1}, ..., a_1)$ аргумент a_i заменить на $S(a_1, ..., a_n)$, то значение также станет равным a_i.

9. Чевианы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке P, а AH — его высота. Точки H_1 и H_2 симметричны точке H относительно прямых DE и DF соответственно. Докажите, что точки H_1, H_2 и A лежат на одной прямой.

10. Даны два набора из 8 точек: $A_1, B_1, C_1, D_1, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, A'_2, B'_2, C'_2, D'_2$. Назовём два четырёхугольника *похожими*, если они вписаны в концентрические (возможно, совпадающие) окружности. Известно, что каждый из пяти четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1$, $A_1A'_1B_1B'_1$, $B_1B'_1C_1C'_1$, $C_1C'_1D_1D'_1$, $D_1D'_1A_1A'_1$ (возможно, самопересекающихся) похож на четырёхугольник, полученный из него заменой всех индексов 1 на 2. Докажите, что четырёхугольники $A'_1B'_1C'_1D'_1$ и $A'_2B'_2C'_2D'_2$ также похожи.

Четвертый тур 13.12.19. Вторая лига.

1. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $f(xy+f(y)) = yf(x)$ при любых вещественных x и y.

2. Чевианы AD, BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке P, а AH — его высота. Точки H_1 и H_2 симметричны точке H относительно прямых DE и DF соответственно. Докажите, что точки H_1, H_2 и A лежат на одной прямой.

3. Леша выписывает последовательность чисел. На первом шаге он пишет любое натуральное число a_1. На шаге номер k он считает произведение ненулевых цифр числа a_{k-1}, умножает это произведение на произвольное число, не превосходящее k и являющееся степенью двойки, и результат обозначает через a_k. Докажите, что в Лешиной последовательности найдутся два равных числа.

4. Петя и Вася играют в игру на графе с $n > 3$ вершинами, для которого верно условие: между любыми тремя вершинами есть хотя бы 2 ребра. Ребята по очереди красят рёбра, не окрашенные ранее: Петя в красный цвет, а Вася в синий, причём нельзя красить рёбра так, чтобы одноцветные рёбра имели общую вершину. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первый ход делает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

5. В выпуклом восьмиугольнике $ABCDEFGH$ равны все углы и все главные диагонали. Докажите, что $AB+EF = CD+GH$.

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

7. Никакие три диагонали выпуклого 2019-угольника P не пересекаются в одной точке. Назовём *перекрёстком* точку пересечения двух диагоналей P, не являющуюся вершиной, а *циклом* — последовательность хотя бы трех перекрёстков, в которой каждые два последовательных перекрёстка (в том числе последний и первый) лежат на одной диагонали, но никакие три перекрёстка на диагонали не лежат. Какое наибольшее количество перекрёстков можно отметить так, чтобы никакие отмеченные перекрёстки не образовывали цикл?

8. Дана последовательность из 51 натурального числа. Сумма этих чисел равна 100. Докажите, что для любого натурального числа $k < 100$ можно выбрать несколько (возможно, один) идущих подряд членов этой последовательности, дающих в сумме либо k, либо $100–k$.

9. На доске написаны числа $(n–1, n, n+1)$, где n — натуральное число. За один ход можно выбрать написанные на доске числа a и b и заменить их числами $2a–b$ и $2b–a$. При каких n такими операциями можно добиться того, чтобы два из написанных на доске чисел были равны нулю?

10. Найдите количество упорядоченных пар целых чисел (x, y) таких, что $x^2+y^2 < 10^6$, для которых выполнено равенство $x^2+\min(x, y) = y^2+\max(x, y)$.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Четвертый тур 13.12.19. Высшая юниорская лига. Первая лига: бой за 1 место.

1. Число называется *хорошим*, если оно представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, являющихся длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что найдется сколь угодно большое n, такое, что оба числа n и n+1 — хорошие.

2. В остроугольном треугольнике ABC $AB \neq AC$, точка O — центр описанной окружности, точка H — ортоцентр, M — середина BC. Прямая AM пересекает описанную окружность BHC в точке K, причем M лежит между A и K. Отрезки HK и BC пересекаются в точке N, причем $\angle BAM = \angle CAN$. Докажите, что $AN \perp OH$.

3. Чевианы AD, BE и CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P внутри треугольника, а AH — его высота. Точки H_1 и H_2 симметричны точке H относительно прямых DE и DF соответственно. Докажите, что точки H_1, H_2 и A лежат на одной прямой.

4. Дан клетчатый квадрат 100×100. *Диаграммой Юнга* называется множество клеток, содержащее вместе с каждой своей клеткой все клетки левее и все клетки ниже ее. Пусть S — множество всех диаграмм Юнга, содержащихся в квадрате (включая пустую диаграмму и весь квадрат). Найдите количество перестановок $\sigma : S \to S$ таких, что при любом $x \in S$ диаграмма $\sigma(x)$ не содержит угловых клеток диаграммы x. (Клетка α диаграммы x называется *угловой*, если x не содержит клеток над α и справа от α.)

5. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2 = 1+2abc$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $(a+1)/2$, $(b+1)/2$, $(c+1)/2$ является точным квадратом.

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a} \geqslant \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

7. В ряд выложены 2019 шоколадок двух видов: молочные и темные. Альберто и Барбара играют в игру, начинает Альберто. Каждым ходом игрок должен съесть несколько (больше нуля) шоколадок, лежащих подряд, начиная с самой левой из оставшихся. При этом количество шоколадок, которое игрок съедает на своём ходу, должно быть таким, чтобы среди них было нечётное количество шоколадок того вида, которую он на этом ходу съел первой. Например, в последовательности шоколадок ММТМТ («М» — молочные, «Т» — тёмные) игрок своим ходом может съесть 1, 4 или 5 шоколадок. Игрок, который съедает последнюю шоколадку, выигрывает. Сколько среди всевозможных 2^{2019} начальных расположений шоколадок таких, в которых выигрывает Барбара?

8. Дана последовательность из 51 натурального числа. Сумма этих чисел равна 100. Докажите, что для любого натурального числа $k < 100$ можно выбрать несколько (возможно, один) идущих подряд членов этой последовательности, дающих в сумме либо k, либо $100–k$.

9. На доске написаны числа $(n–1, n, n+1)$, где n — натуральное число. За один ход можно выбрать написанные на доске числа a и b и заменить их числами $2a–b$ и $2b–a$. При каких n такими операциями можно добиться того, чтобы два из написанных на доске чисел были равны нулю?

10. Васин компьютер захватил вирус–вымогатель. На экране компьютера горит слово из 72 букв, в котором по 18 раз встречаются буквы *E*, *X*, *I* и *T*. Вася может вставить в любое место этого слова любую из последовательностей букв *EX*, *XE*, *IT*, *TI*, *IXIXI* или удалить такую последовательность из любого места. Докажите, что Вася сможет получить слово *EXIT* (и вылечить компьютер), сделав не более 2019 таких операций.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Четвертый тур 13.12.19. Первая юниорская лига: все бои, кроме боя за 1 место.

1. Число называется *хорошим*, если оно представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, являющихся длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что найдется сколь угодно большое n, такое, что оба числа n и $n+1$ — хорошие.

2. В выпуклом восьмиугольнике $ABCDEFGH$ равны все углы и все главные диагонали. Докажите, что $AB+EF = CD+GH$.

3. Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. На стороне BC выбрана точка K, а на отрезке AK точка M такая, что $AM = AE = AF$. Точки L и N — центры вписанных окружностей треугольников ABK и ACK соответственно. Докажите, что $\angle LMN = 90°$.

4. Доску $2n\times2n$ два раза покрыли $2n^2$ прямоугольниками 1×2: один раз красными и один раз синими. Мы называем две клетки *красными соседями*, если они составляют один красный прямоугольник, и *синими соседями*, если они составляют один синий прямоугольник. В каждой клетке написали отличное от нуля число так, что для каждой клетки написанное в ней число получается вычитанием числа, написанного в её синем соседе, из числа, написанного в её красном соседе. Докажите, что n делится на 3.

5. Найдите все пары натуральных чисел $a > n > 1$ такие, что a^n+a-2 — степень двойки.

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geqslant\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

7. Никакие три диагонали выпуклого 2019-угольника P не пересекаются в одной точке. Назовём *перекрёстком* точку пересечения двух диагоналей P, не являющуюся вершиной, а *циклом* — последовательность хотя бы трех перекрёстков, в которой каждые два последовательных перекрёстка (в том числе последний и первый) лежат на одной диагонали, но никакие три перекрёстка на диагонали не лежат. Какое наибольшее количество перекрёстков можно отметить так, чтобы никакие отмеченные перекрёстки не образовывали цикл?

8. Дана последовательность из 51 натурального числа. Сумма этих чисел равна 100. Докажите, что для любого натурального числа $k < 100$ можно выбрать несколько (возможно, один) идущих подряд членов этой последовательности, дающих в сумме либо k, либо $100-k$.

9. На доске написаны числа $(n-1, n, n+1)$, где n — натуральное число. За один ход можно выбрать написанные на доске числа a и b и заменить их числами $2a-b$ и $2b-a$. При каких n такими операциями можно добиться того, чтобы два из написанных на доске чисел были равны нулю?

10. Васин компьютер захватил вирус-вымогатель. На экране компьютера горит слово из 72 букв, в котором по 18 раз встречаются буквы *E*, *X*, *I* и *T*. Вася может вставить в любое место этого слова любую из последовательностей букв *EX*, *XE*, *IT*, *TI*, *IXIXI* или удалить такую последовательность из любого места. Докажите, что Вася сможет получить слово *EXIT* (и вылечить компьютер).

Четвертый тур 13.12.19. Вторая юниорская лига.

1. Число называется *хорошим*, если оно представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, являющихся длинами сторон некоторого треугольника. Докажите, что найдется сколь угодно большое n, такое, что оба числа n и $n+1$ — хорошие.

2. В выпуклом восьмиугольнике $ABCDEFGH$ равны все углы и все главные диагонали. Докажите, что $AB+EF = CD+GH$.

3. Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. На стороне BC выбрана точка K, а на отрезке AK точка M такая, что $AM = AE = AF$. Точки L и N — центры вписанных окружностей треугольников ABK и ACK соответственно. Докажите, что $\angle LMN = 90°$.

4. Доску $2n\times 2n$ два раза покрыли $2n^2$ прямоугольниками 1×2: один раз красными и один раз синими. Мы называем две клетки *красными соседями*, если они составляют один красный прямоугольник, и *синими соседями*, если они составляют один синий прямоугольник. В каждой клетке написали отличное от нуля число так, что для каждой клетки написанное в ней число получается вычитанием числа, написанного в её синем соседе, из числа, написанного в её красном соседе. Докажите, что n делится на 3.

5. Найдите все пары натуральных чисел a и n такие, что $a-2 > n > 1$ и a^n+a-2 — степень двойки.

6. Найдите все решения системы из 10 уравнений ($i = 1, 2, 3, ..., 10$) $x_i = 1 + \dfrac{6x_i^2}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2}$.

7. Никакие три диагонали выпуклого 2019-угольника P не пересекаются в одной точке. Назовём *перекрёстком* точку пересечения двух диагоналей P, не являющуюся вершиной, а *циклом* — последовательность хотя бы трех перекрёстков, в которой каждые два последовательных перекрёстка (в том числе последний и первый) лежат на одной диагонали, но никакие три перекрёстка на диагонали не лежат. Какое наибольшее количество перекрёстков можно отметить так, чтобы никакие отмеченные перекрёстки не образовывали цикл?

8. Дана последовательность из 51 натурального числа. Сумма этих чисел равна 100. Докажите, что для любого натурального числа $k < 100$ можно выбрать несколько (возможно, один) идущих подряд членов этой последовательности, дающих в сумме либо k, либо $100-k$.

9. На доске написаны числа $(n-1, n, n+1)$, где n — натуральное число. За один ход можно выбрать написанные на доске числа a и b и заменить их числами $2a-b$ и $2b-a$. При каких n такими операциями можно добиться того, чтобы два из написанных на доске чисел были равны нулю?

10. Васин компьютер захватил вирус-вымогатель. На экране компьютера горит слово из 72 букв, в котором по 18 раз встречаются буквы *E*, *X*, *I* и *T*. Вася может вставить в любое место этого слова любую из последовательностей букв *EX*, *XE*, *IT*, *TI*, *IXIXI* или удалить такую последовательность из любого места. Докажите, что Вася сможет получить слово *EXIT* (и вылечить компьютер).