Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Второй тур 10.12.19. Высшая лига.

1. Противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны. Тетраэдр вписан в сферу Ω. Точку X, лежащую на Ω, отразили относительно плоскостей граней тетраэдра. Пусть Y — центр сферы, проходящей через четыре полученных точки. Докажите, что Y лежит на Ω.

2. В языке есть две буквы, A и B, и бесконечное множество слов, ни одно из которых не является подсловом другого. Может ли оказаться, что для каждого достаточно большого n в языке не меньше, чем $1{,}999^n$ слов длины n?

3. Дано натуральное число n. Рассмотрим все неупорядоченные разбиения числа n на натуральные слагаемые; пусть p — их общее количество (например, при $n = 3$ имеем $p = 3$, поскольку $3 = 2+1 = 1+1+1$). Пусть k — натуральное число, не превосходящее p. Докажите, что существует такое множество натуральных чисел S, что количество неупорядоченных разбиений n на слагаемые, каждое из которых лежит в S, равно k.

4. Страна имеет форму выпуклого многоугольника периметра P. Министр сотовой связи выяснил, что в стране можно поставить вышку с радиусом покрытия 1, которая не покрывает точек вне страны; однако для любого бóльшего радиуса покрытия это уже неверно. Какие значения может принимать площадь страны?

5. Последовательность непрерывных функций $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что для каждого $a \in [0,1]$ найдутся различные натуральные числа n и m, при которых $f_n(a) = f_m(a)$. Докажите, что найдутся два различных натуральных числа s и t, при которых функции $f_s(x)$ и $f_t(x)$ совпадают на некотором интервале.

6. Дано нечётное простое число p. Целые числа $a_1, \ldots, a_p$ таковы, что сумма $a_1^i + a_2^i + \ldots + a_p^i$ кратна p при каждом $i = 1, 2, \ldots, s$. При каком наименьшем s из этого следует, что числа $a_1, \ldots, a_p$ дают либо одинаковые, либо попарно различные остатки при делении на p?

7. Найдите все функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие тождеству $f(x+f(y+xy)) = (y+1)f(x+1)-1$ при всех $x, y \in \mathbb{R}^+$. (Здесь $\mathbb{R}^+$ — множество всех положительных действительных чисел.)

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AC, пересекает лучи BA и BC в точках A_0 и C_0 соответственно. Луч CD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0CC_0 в точке C_1. Луч AD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0AC_0 в точке A_1. Докажите, что прямая A_1C_1 касается окружности, описанной около треугольника A_0BC_0.

9. В однокруговом футбольном турнире участвовало $2n$ команд, и все набрали разные количества очков (за победу давали 3 очка, за ничью — 1, а за поражение — 0). Если бы за победу давали не три, а два очка, то количества очков у всех тоже оказались бы разными, но в рейтинге первая команда поменялась бы местами со второй, третья с четвертой, …, предпоследняя — с последней. При каком наименьшем n это возможно?

10. Докажите, что для любого натурального n найдется натуральное k такое, что 51^k-17 делится на 2^n.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Второй тур 10.12.19. Первая лига.

1. Противоположные рёбра тетраэдра $ABCD$ равны. Тетраэдр вписан в сферу Ω. Точку X, лежащую на Ω, отразили относительно плоскостей граней тетраэдра. Пусть Y — центр сферы, проходящей через четыре полученных точки. Докажите, что Y лежит на Ω.

2. В языке есть две буквы, A и B, и бесконечное множество слов, ни одно из которых не является подсловом другого. Может ли оказаться, что для каждого достаточно большого n в языке не меньше, чем $1{,}999^n$ слов длины n?

3. На доске $n\times n$ стоят n невидимых ладей, которые могут бить друг друга. За один ход можно указать на клетку, после чего вам скажут, находится ли она под боем хотя бы одной ладьи. Игра заканчивается, как только указана клетка, на которой стоит ладья. За какое наименьшее число ходов можно гарантированно закончить игру?

4. Страна имеет форму выпуклого многоугольника периметра P. Министр сотовой связи выяснил, что в стране можно поставить вышку с радиусом покрытия 1, которая не покрывает точек вне страны; однако для любого бóльшего радиуса покрытия это уже неверно. Какие значения может принимать площадь страны?

5. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $\frac{1}{1^2+2019}+\frac{1}{2^2+2019}+\ldots+\frac{1}{n^2+2019}<\frac{2}{45}$.

6. Дано нечётное простое число p. Целые числа $a_1, \ldots, a_p$ таковы, что сумма $a_1^i+a_2^i+\ldots+a_p^i$ кратна p при каждом $i = 1, 2, \ldots, s$. При каком наименьшем s из этого следует, что числа $a_1, \ldots, a_p$ дают либо одинаковые, либо попарно различные остатки при делении на p?

7. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству $f(x+f(y+xy)) = (y+1)f(x+1)-1$ при всех $x, y\in\mathbb{R}$.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AC, пересекает лучи BA и BC в точках A_0 и C_0 соответственно. Луч CD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0CC_0 в точке C_1. Луч AD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0AC_0 в точке A_1. Докажите, что прямая A_1C_1 касается окружности, описанной около треугольника A_0BC_0.

9. В однокруговом футбольном турнире участвовало $2n$ команд, и все набрали разные количества очков (за победу давали 3 очка, за ничью — 1, а за поражение — 0). Если бы за победу давали не три, а два очка, то количества очков у всех тоже оказались бы разными, но в рейтинге первая команда поменялась бы местами со второй, третья с четвертой, …, предпоследняя — с последней. При каком наименьшем n это возможно?

10. Докажите, что для любого натурального n найдется натуральное k такое, что 51^k-17 делится на 2^n.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Второй тур 10.12.19. Вторая лига.

1. Правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$ вписан в единичную окружность с центром O, внутри него отмечена произвольная точка M. Обозначим через B_k вторую точку пересечения прямой A_kM с единичной окружностью. Докажите, что $A_1B_1^2+A_2B_2^2+\ldots+A_nB_n^2 \geqslant \dfrac{4n}{1+OM^2}$.

2. В языке есть две буквы, A и B, и бесконечное множество слов, ни одно из которых не является подсловом другого. Может ли оказаться, что для каждого достаточно большого n в языке не меньше, чем $1{,}999^n$ слов длины n?

3. На доске $n\times n$ стоят n невидимых ладей, которые могут бить друг друга. За один ход можно указать на клетку, после чего вам скажут, находится ли она под боем хотя бы одной ладьи. Игра заканчивается, как только указана клетка, на которой стоит ладья. За какое наименьшее число ходов можно гарантированно закончить игру?

4. Выпуклый 2019-угольник $A_1A_2...\,A_{2019}$ разрезан на кусочки по всем диагоналям через две вершины. Какое наименьшее количество кусочков могло получиться?

5. Рассмотрим все последовательности $a_1, a_2, ..., a_{200}$, в которой каждое число равно 0 или 1. Последовательность $b_1, b_2, ..., b_{200}$ строится по следующему правилу:

$$b_i=\begin{cases} a_i+a_{i+1} & i=1 \\ a_{i-1}+a_i+a_{i+1} & 1<i<200. \\ a_{i-1}+a_i & i=200 \end{cases}$$

Сколько последовательностей (b_n) получаются более чем из одной последовательности (a_n)?

6. Дано натуральное число $n > 10$ и все его натуральные делители $1 = a_1 < a_2 < ... < a_k = n$. Докажите, что $a_1a_2+a_2a_3+...+a_ka_1 \le n^2$.

7. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющие тождеству $f(x+f(y+xy)) = (y+1)f(x+1)-1$ при всех $x, y\in\mathbb{R}$.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AC, пересекает лучи BA и BC в точках A_0 и C_0 соответственно. Луч CD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0CC_0 в точке C_1. Луч AD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0AC_0 в точке A_1. Докажите, что прямая A_1C_1 касается окружности, описанной около треугольника A_0BC_0.

9. В однокруговом футбольном турнире участвовало $2n$ команд, и все набрали разные количества очков (за победу давали 3 очка, за ничью — 1, а за поражение — 0). Если бы за победу давали не три, а два очка, то количества очков у всех тоже оказались бы разными, но в рейтинге первая команда поменялась бы местами со второй, третья с четвертой, …, предпоследняя — с последней. При каком наименьшем n это возможно?

10. В последовательности $s_1, s_2, s_3, ...$ натуральных чисел $s_1 = 2$, и при каждом натуральном n член s_{n+1} получается прибавлением к s_n произведения всех простых делителей s_n. Докажите, что произведение первых 2019 простых чисел является членом последовательности (s_n).

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Второй тур 10.12.19. Высшая юниорская лига.

1. Петя закрасил некоторые клетки таблицы 100×100, подсчитал количество закрашенных клеток в каждой строке и каждом столбце и сообщил эти данные Васе. Вася, подумав, сказал, что точно знает, какие клетки закрашены. Докажите, что если знать, что Вася может однозначно восстановить, какие клетки закрашены, то можно это сделать, зная только, сколько закрашенных клеток в каждой строке и как упорядочены столбцы по количеству закрашенных клеток.

2. Даны натуральные числа n и k. На вечеринку пришли n гостей, некоторые из которых знакомы друг с другом. Оказалось, что на вечеринке у каждого гостя не более $2k$ знакомых, но у каждых двух гостей, не знакомых друг с другом, не менее k общих знакомых. Докажите, что $n \le 6k$.

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AC, пересекает лучи BA и BC в точках A_0 и C_0 соответственно. Луч CD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0CC_0 в точке C_1. Луч AD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0AC_0 в точке A_1. Докажите, что прямая A_1C_1 касается окружности, описанной около треугольника A_0BC_0.

4. Сто муравьёв ползут с разными постоянными скоростями по контуру квадрата, обходя его по часовой стрелке. Может ли оказаться, что они будут встречаться друг с другом только в вершинах квадрата? (Начальное положение муравьёв может быть произвольным).

5. Существует ли многочлен $f(x)$ четвертой степени с целыми коэффициентами такой, что для любого целого k многочлен $f(x)+k$ не представляется в виде произведения двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами?

6. Положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c = 3$. Докажите, что $\dfrac{a}{1+2b^3}+\dfrac{b}{1+2c^3}+\dfrac{c}{1+2a^3}\ge 1$.

7. Даны натуральное число K и некоторые его делители $k_1, k_2, ..., k_n$. Известно, что существуют целые числа $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющие условию $k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n = 1$. Докажите, что существуют целые числа $y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющие условиям $k_1y_1+k_2y_2+...+k_ny_n = 1$ и $|k_iy_i| \le K$ при всех $i = 1, 2, ..., n$.

8. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Перпендикуляры к стороне BC, восставленные в точках B и C пересекают прямую EF в точках M и N соответственно. Прямые DM и DN пересекают вписанную окружность треугольника ABC вторично в точках P и Q соответственно. Прямые BQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что прямая DR делит отрезок MN пополам.

9. Правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$ вписан в единичную окружность с центром O, внутри него отмечена произвольная точка M. Обозначим через B_k вторую точку пересечения прямой A_kM с единичной окружностью. Докажите, что $A_1B_1^2+A_2B_2^2+\ldots+A_nB_n^2 \geqslant \dfrac{4n}{1+OM^2}$.

10. Дано натуральное число n. Рассмотрим все неупорядоченные разбиения числа n на натуральные слагаемые; пусть p — их общее число (например, при $n = 3$ имеем $p = 3$, поскольку $3 = 2+1 = 1+1+1$). Пусть k — натуральное число, не превосходящее p. Докажите, что существует такое множество натуральных чисел S, что количество неупорядоченных разбиений n на слагаемые, каждое из которых лежит в S, равно k.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Второй тур 10.12.19. Первая юниорская лига.

1. Петя закрасил некоторые клетки таблицы 100×100, подсчитал количество закрашенных клеток в каждой строке и каждом столбце и сообщил эти данные Васе. Вася, подумав, сказал, что точно знает, какие клетки закрашены. Докажите, что если знать, что Вася может однозначно восстановить, какие клетки закрашены, то можно это сделать, зная только, сколько закрашенных клеток в каждой строке и как упорядочены столбцы по количеству закрашенных клеток.

2. Даны натуральные числа n и k. На вечеринку пришли n гостей, некоторые из которых знакомы друг с другом. Оказалось, что на вечеринке у каждого гостя не более $2k$ знакомых, но у каждых двух гостей, не знакомых друг с другом, не менее k общих знакомых. Докажите, что $n \le 6k$.

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AC, пересекает лучи BA и BC в точках A_0 и C_0 соответственно. Луч CD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0CC_0 в точке C_1. Луч AD вторично пересекает описанную окружность треугольника A_0AC_0 в точке A_1. Докажите, что прямая A_1C_1 касается окружности, описанной около треугольника A_0BC_0.

4. Сто муравьёв ползут с разными постоянными скоростями по контуру квадрата, обходя его по часовой стрелке. Может ли оказаться, что они будут встречаться друг с другом только в вершинах квадрата? (Начальное положение муравьёв может быть произвольным).

5. Существует ли многочлен $f(x)$ четвертой степени с целыми коэффициентами такой, что для любого целого k многочлен $f(x)+k$ не представляется в виде произведения двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами?

6. Положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c = 3$. Докажите, что $\dfrac{a}{1+2b^3}+\dfrac{b}{1+2c^3}+\dfrac{c}{1+2a^3}\ge 1$.

7. Даны натуральное число K и некоторые его делители $k_1, k_2, ..., k_n$. Известно, что существуют целые числа $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющие условию $k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n = 1$. Докажите, что существуют целые числа $y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющие условиям $k_1y_1+k_2y_2+...+k_ny_n = 1$ и $|k_iy_i| \le K$ при всех $i = 1, 2, ..., n$.

8. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Перпендикуляры к стороне BC, восставленные в точках B и C пересекают прямую EF в точках M и N соответственно. Прямые DM и DN пересекают вписанную окружность треугольника ABC вторично в точках P и Q соответственно. Прямые BQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что прямая DR делит отрезок MN пополам.

9. Правильный треугольник ABC вписан в единичную окружность с центром O, внутри него отмечена произвольная точка M. Обозначим через A', B', C' вторые точки пересечения прямых AM, BM, CM с единичной окружностью соответственно. Докажите, что $AA'^2+BB'^2+CC'^2 \geqslant \dfrac{12}{1+OM^2}$.

10. В последовательности $s_1, s_2, s_3, ...$ натуральных чисел $s_1 = 2$, и при каждом натуральном n член s_{n+1} получается прибавлением к s_n произведения всех простых делителей s_n. Докажите, что произведение первых 2019 простых чисел является членом последовательности (s_n).

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

Второй тур 10.12.19. Вторая юниорская лига.

1. Петя закрасил некоторые клетки таблицы 100×100, подсчитал количество закрашенных клеток в каждой строке и каждом столбце и сообщил эти данные Васе. Вася, подумав, сказал, что точно знает, какие клетки закрашены. Докажите, что если знать, что Вася может однозначно восстановить, какие клетки закрашены, то можно это сделать, зная только, сколько закрашенных клеток в каждой строке и как упорядочены столбцы по количеству закрашенных клеток.

2. Даны натуральные числа n и k. На вечеринку пришли n гостей, некоторые из которых знакомы друг с другом. Оказалось, что на вечеринке у каждого гостя не более $2k$ знакомых, но у каждых двух гостей, не знакомых друг с другом, не менее k общих знакомых. Докажите, что $n \le 6k$.

3. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, а точка M — середина стороны AC. Прямая, проходящая через H перпендикулярно BM, пересекает прямую AC в точке T, а прямая, проходящая через T параллельно BM, пересекает прямые BA и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что точки B, K, L и H лежат на одной окружности.

4. Четыре муравья ползут с разными постоянными скоростями по контуру квадрата, обходя его по часовой стрелке. Может ли оказаться, что они будут встречаться друг с другом только в вершинах квадрата? (Начальное положение муравьёв может быть произвольным).

5. Существует ли многочлен $f(x)$ четвертой степени с целыми коэффициентами такой, что для любого целого k многочлен $f(x)+k$ не представляется в виде произведения двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами?

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $\frac{1}{1^2+2019}+\frac{1}{2^2+2019}+\ldots+\frac{1}{n^2+2019}<\frac{2}{45}$.

7. Докажите, что ни для какого простого числа p число p^2+p+1 не является точным кубом.

8. В описанном четырёхугольнике $ABCD$ сторона BC вдвое больше стороны AB. Серединный перпендикуляр к BC и биссектриса угла DCB пересекаются в точке X. Докажите, что прямые AX и BD перпендикулярны.

9. Правильный треугольник ABC вписан в единичную окружность с центром O, внутри него отмечена произвольная точка M. Обозначим через A', B', C' вторые точки пересечения прямых AM, BM, CM с единичной окружностью соответственно. Докажите, что $AA'^2+BB'^2+CC'^2 \geqslant \frac{12}{1+OM^2}$.

10. В последовательности s_1, s_2, s_3, ... натуральных чисел $s_1 = 2$, и при каждом натуральном n член s_{n+1} получается прибавлением к s_n произведения всех простых делителей s_n. Докажите, что произведение первых 2019 простых чисел является членом последовательности (s_n).