Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 14.12.2019. ЮНИОРЫ.

Довывод

1. Пусть S — конечное множество из $n \geq 2$ элементов. Два игрока, A и B, по очереди выбирают непустые подмножества S, отличные от S. При этом

(1) запрещено выбирать множество, которое содержится в множестве, уже выбранном кем-то из игроков;

(2) запрещено выбирать множество, которое содержит множество, уже выбранное кем-то из игроков;

(3) запрещено выбирать множество, если оно в объединении с каким-то уже выбранным множеством, с которым оно не пересекается, дает S.

Начинает A. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

2. Простое число $p > 2$ и натуральные числа m и n таковы, что p^2 — среднее арифметическое чисел m^2 и n^2. Докажите, что $2p–m–n$ — либо квадрат, либо удвоенный квадрат.

3. Точки M, K, L — середины сторон BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Внутри четырёхугольника выбрана точка E такая, что $AE{\cdot}CE = BE{\cdot}DE$ и $\angle AED+\angle CEB = 180°$ и $\angle KLE = \angle KME$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — вписанный.

4. Различные вещественные числа a, b, c удовлетворяют условию $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=3$. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

Вывод

5. В городе есть несколько мальчиков и девочек, некоторые пары знакомы. Оказалось, что в любом множестве D из 8 девочек найдётся (возможно, пустое) подмножество D' такое, что любой мальчик, знакомый со всеми девочками из D', знаком ещё хотя бы с одной девочкой из D. Докажите, что в любом множестве M из 300 мальчиков найдётся (возможно, пустое) подмножество M' такое, что любая девочка, знакомая со всеми мальчиками из M', знакома ещё хотя бы с одним мальчиком из M.

6. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < AC$) точка M — середина BC, а I — центр вписанной окружности. Биссектриса внешнего угла A пересекает касательную к вписанной окружности, проведенную из точки M (и отличную от стороны BC) в точке P. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника MIP.

7. Даны 2^k+1 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k+1}$ (k — натуральное). Докажите, что в разложениях на простые множители их попарных сумм a_i+a_j, $i \neq j$, встречается не менее $k+1$ разных простых чисел.

Двадцать третий математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Ижевск, 8–14 декабря 2019 года

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 14.12.2019. СЕНЬОРЫ.

Довывод

1. На болоте имеются кочки, занумерованные всеми натуральными числами. Изначально на кочке с номером 1 сидит лягух. Раз в минуту он прыгает на другую кочку, причём с кочки s он прыгает на кочку с номером $s+t$, где t — натуральное, с вероятностью $1/2^t$. С какой вероятностью в ходе своего путешествия лягух посетит кочку с номером 2019?

2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Пусть H — его ортоцентр. Точки A_1, B_1, C_1 диаметрально противоположны вершинам треугольника на окружности Ω. Окружность с центром A и радиусом AH отразили относительно B_1C_1 и получили окружность Ω_A. Аналогично определим окружности Ω_B и Ω_C. Докажите, что окружности Ω, Ω_A, Ω_B и Ω_C имеют общую точку.

3. В городе есть несколько мальчиков и девочек, некоторые пары знакомы. Оказалось, что в любом множестве D из 8 девочек найдётся (возможно, пустое) подмножество D' такое, что любой мальчик, знакомый со всеми девочками из D', знаком ещё хотя бы с одной девочкой из D. Докажите, что в любом множестве M из 300 мальчиков найдётся (возможно, пустое) подмножество M' такое, что любая девочка, знакомая со всеми мальчиками из M', знакома ещё хотя бы с одним мальчиком из M.

4. Пусть $n > 3$ — натуральное число. Учитель написал на доске многочлены x^{n-3}, x^n и $x+x^{n+1}$. За один ход ученик может взять два (возможно, совпадающих) многочлена с доски и дописать на доску их сумму, разность или произведение. Для каких натуральных $n > 3$ можно за несколько действий добиться того, что на доске появится многочлен x?

Вывод

5. Даны нечётное натуральное число a и рациональное число b, которое можно записать в виде обыкновенной дроби с нечётным знаменателем. Известно, что величина $A(m,n)=\left|n\sqrt{n^2+a}-bm\right|$ не равна 0 ни при каких натуральных m и n. Докажите, что существует $C > 0$ такое, что $A(m, n) > C$ при всех натуральных m и n.

6. На плоскости зафиксированы окружность Ω, окружность ω внутри неё и точка P внутри ω. Через произвольную точку A окружности ω проводится прямая, перпендикулярная PA; она пересекает Ω в точках B и C. Докажите, что центры окружностей, описанных около всевозможных треугольников PBC, лежат на фиксированной окружности.

7. Изначально у каждого из 2^n человек есть 2^n карточек с числами $1, 2, \ldots, 2^n$. За ход два человека могут обменяться, отдав друг другу по одинаковому количеству карточек. За какое наименьшее число ходов они могут добиться ситуации, когда у каждого все карточки одинаковы?

Решения задач личной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *Пусть S — конечное множество из $n \geq 2$ элементов. Два игрока, A и B, по очереди выбирают непустые подмножества S, отличные от S. При этом*

(1) запрещено выбирать множество, которое содержится в множестве, уже выбранном кем–то из игроков;

(2) запрещено выбирать множество, которое содержит множество, уже выбранное кем–то из игроков;

(3) запрещено выбирать множество, если оно в объединении с каким–то уже выбранным множеством, с которым оно не пересекается, дает S.

Начинает A. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ. Выигрышную стратегию имеет *A*. Решение. Первым ходом *A* выбирает в S одноэлементное подмножество $\{x\}$. После этого *B* сможет выбирать только подмножества, не содержащие *x*, и если *B* выбирает множество T, то *A* выбирает его дополнение до $S \setminus \{x\}$. Очевидно, *A* всегда сможет сделать ход.

Задача 2. *Простое число $p > 2$ и натуральные числа m и n таковы, что p^2 — среднее арифметическое чисел m^2 и n^2. Докажите, что $2p–m–n$ — либо квадрат, либо удвоенный квадрат.*

Решение. Известно, что $2p^2 = m^2+n^2$. Домножим это равенство на 2, а в правой части прибавим и вычтем $2mn$. Получим $4p^4 = (m+n)^2+(m–n)^2$, или $(2p–m–n)(2p+m+n) = (m–n)^2$. НОД скобок в левой части является делителем их суммы $4p$. Если этот НОД не делится на *p*, то утверждение задачи выполнено: все простые множители, кроме, может быть, двойки, входят а разложение числа в четных степенях, если двойка — тоже, то $2p–m–n$ — квадрат, иначе — удвоенный квадрат. Если же НОД делится на *p*, то $m+n$ делится на *p*, и $m–n$ делится на *p*. Значит, *m* и *n* делятся на *p*. Из равенства $2p^2 = m^2+n^2$ следует, что $m = n = p$, то есть $2p–m–n = 0$ — квадрат.

Задача 3. *Точки M, K, L — середины сторон BC, CD, DA выпуклого четырёхугольника ABCD. Внутри четырёхугольника выбрана точка E такая, что $AE\cdot CE = BE\cdot DE$ и $\angle AED+\angle CEB = 180°$ и $\angle KLE = \angle KME$. Докажите, что четырёхугольник ABCD — вписанный.*

Решение. Отметим точку *F*, симметричную *A* относительно *E*, и пусть *N* — середина *DF*. Треугольники *BEC* и *FED* подобны по двум сторонам и углу. Отсюда $\angle BME = \angle FNE$ (как соответствующие элементы) и $\angle FNE = \angle ALE$, поскольку *ENL* — серединный треугольник *AFD*. Таким образом доказано, что $\angle ALE = \angle BME$. Прибавим к этому равенству $\angle KLE = \angle KME$, вычтем из 180°, и получим $\angle KLD = \angle KMC$, откуда $\angle CAD = \angle DBC$, а значит *ABCD* — вписанный.

Задача 4. *Различные вещественные числа a, b, c удовлетворяют условию $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}=3$. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.*

Ответ. –15/4. Решение. Не умаляя общности, можно считать, что $c = 1$. Тогда условие перепишется в виде: $b^2+a(a–3)b+a = 0$. Чтобы это квадратное уравнение относительно *b* имело решение, необходимо, чтобы дискриминант был неотрицателен, то есть $a^2(a–3)^2–4a = a(a–1)^2(a–4) \geq 0$. Случай $a = 1$ соответствует решению $a = b = c$, которое запрещено условием. Поэтому или $a < 0$, или $a \geq 4$. Отсюда

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=a\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{a}=3a+\frac{1}{a}-a^2=\frac{3a^2+1-a^3}{a}=\frac{(4-a)(1+2a)^2}{4a}-\frac{15}{4}\leqslant-\frac{15}{4},$$

так как $a(4–a) \leq 0$. Значение –15/4 достигается при $(a, b, c) = (4, –2,1)$

Задача 5. *В городе есть несколько мальчиков и девочек, некоторые пары знакомы. Оказалось, что в любом множестве D из 8 девочек найдётся подмножество D' такое, что любой мальчик, знакомый со всеми девочками из D', знаком ещё хотя бы с одной девочкой из D. Докажите, что в любом множестве M из 300 мальчиков найдётся подмножество M' такое, что любая девочка, знакомая со всеми мальчиками из M', знакома ещё хотя бы с одним мальчиком из M.*

Решение. Заметим, что $D_1 \subset D$ может быть взято за *D'* тогда и только тогда, когда ни для какого мальчика множество его знакомых в *D* не совпадает с D_1. Аналогично с *M* и *M'*. Предположим, что нашлось множество из *M* мальчиков, в котором нельзя выделить *M'*, удовлетворяющее условию. Тогда для любого $M_1 \subset M$ найдется девочка, которая в множестве *M* знакома в точности с мальчиками из M_1. Выберем в M_1 300 мальчиков, из них — 256, и каждому мальчику сопоставим своё четырёхзначное двоичное число. Выберем 8 девочек так, чтобы *i*-ая девочка знала в множестве *M* в точности тех мальчиков, которым сопоставлено число с 1 в *i*-ом разряде (мальчиков, которым ничего не сопоставлено, все эти девочки не знают). Тогда легко видеть, что в выбранном множестве девочек никакое подмножество нельзя назначить *D'*. Действительно, если $i_1, \ldots, i_k$ — номера девочек в подмножестве, то мальчик, которому сопоставлено число с единицами в разрядах $i_1, \ldots, i_k$ и нулями во всех остальных разрядах, из восьми выбранных девочек знает в точности $i_1, \ldots, i_k$.

Задача 6. *В остроугольном треугольнике ABC (AB < AC) точка M — середина BC, а I — центр вписанной окружности. Биссектриса внешнего угла A пересекает касательную к вписанной окружности, проведенную из точки M (и отличную от* *стороны BC) в точке P. Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника MIP.*

Решение. Обозначим через D и X точки касания вписанной окружности с прямыми BC и MP соответственно. Кроме того, обозначим через D' точку, диаметрально противоположную D на вписанной окружности, и через E точку касания вневписанной окружности со стороной BC.

Точки A, D', E лежат на одной прямой, так как гомотетия с центром в A переводящая вписанную окружность во вневписанную, переводит D' в E. Докажем, что на этой же прямой лежит точка X. Действительно, $MD = ME = MX$, поэтому $\angle DXE = 90°$. Также, $\angle DXD' = 90°$, как опирающийся на диаметр. Следовательно, X лежит на прямой $D'E$.

Заметим, что четырехугольники $AIXP$ и $IXMD$ — вписанные, поэтому $\angle AIP = \angle AXP = 90°-\angle IXA = \angle IXD = \angle IMD = \angle IMX$. Последнее равенство следует из того, что IDM и IXM — равные прямоугольные треугольники. Таким образом, $\angle AIP = \angle IMP$, из чего следует, что AI касается описанной окружности треугольника MIP.

Задача 7. *Даны 2^k+1 натуральных чисел a_1, a_2, …, a_{2^k+1} (k — натуральное). Докажите, что в разложениях на простые множители их попарных сумм a_i+a_j, $i \neq j$, встречается не менее $k+1$ разных простых чисел.*

Решение. Очевидно, какая-то попарная сумма делится на 2, поэтому достаточно доказать, что попарные суммы имеют хотя бы k нечетных простых делителей. Предположим, это не так, и среди простых делителей сумм встречаются только простые $p_1, \ldots, p_{k-1}$.

Сопоставим каждому a_i упорядоченную строку из нулей и единиц следующим образом. Чтобы понять, какое число стоит на j-ом месте строки, разделим a_i на максимальную степень p_j, а у частного найдем остаток от деления на p_j. То есть представим a_i в виде $a_i = p_j^{\alpha}(p_j q + r)$, где $0 \le r < p_j$. Теперь, если $r < p/2$, то на j-ом месте строки, соответствующей a_i, будет стоять 0, а иначе — 1.

Таким образом мы построили 2^k+1 строк длины k-1. Тогда найдутся три числа с одинаковыми строками. Не умаляя общности, a_1, a_2, a_3. Докажем, что для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, и для любого $p \in \{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$ выполнено $\nu_p(a_i + a_j) = \min(\nu_p(a_i), \nu_p(a_j))$ (*), где через $\nu_p(n)$ мы обозначим степень вхождения простого p в n. Действительно, если $\nu_p(a_i) \neq \nu_p(a_j)$, то это равенство очевидно выполнено. А если $\nu_p(a_i) = \nu_p(a_j)$, то после вынесения из обоих чисел p в наибольшей степени, сумма оставшихся чисел не может делиться на p (либо оба слагаемых имеют остаток меньше $p/2$ от деления на p, либо оба больше $p/2$).

Далее пусть $d = \text{НОД}(a_i, a_j)$, $a_i = db_i$, $a_j = db_j$. Из (*) следует, что $\nu_p(d) = \nu_p(a_i+a_j) = \nu_p(d)+\nu_p(b_i+b_j)$, для любого $p \in \{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$. То есть, $b_i+b_j = 2^m$. Это возможно только если b_i и b_j оба нечетны (оба четными они быть не могут, так как взаимно просты). Следовательно, $\nu_2(a_i) = \nu_2(a_j)$. Аналогичные рассуждения можно повторить для любой пары из $\{a_1, a_2, a_3\}$, поэтому $\nu_2(a_1) = \nu_2(a_2) = \nu_2(a_3)$. Сократим все три числа на эту степень двойки, все обозначения при этом оставим те же.

Вернемся к тому, что $a_i+a_j = d \cdot 2^m$. Заметим, что $m \ge 2$, так как $a_i \ge d$, $a_j \ge d$ и $a_i \neq a_j$. То есть суммы a_1+a_2, a_2+a_3 и a_1+a_3 все делятся на 4, что невозможно для трех нечетных чисел. Противоречие.

Решения задач личной олимпиады старшей группы.

Задача 1.

Ответ. Решение.

Задача 2.

Ответ. Решение.

Задача 3.

Ответ. Решение.

Задача 4.

Ответ. Решение.

Задача 5.

Ответ. Решение.

Задача 6.

Ответ. Решение.

Задача 7.

Ответ. Решение.