Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Третий тур 27.11.2021. Высшая лига.

1. Последовательность натуральных чисел $T_1, T_2, \ldots$ назовём *последовательностью типа Трибоначчи*, если она удовлетворяет условию $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$ при всех натуральных n. Скажем, что две последовательности *похожи*, если из них можно выбросить по конечному набору членов так, чтобы они совпали. Докажите, что все натуральные числа можно разбить на последовательности типа Трибоначчи так, чтобы *любая* последовательность типа Трибоначчи была похожа на одну из последовательностей разбиения.

И. Богданов, В. Уфнаровский

2. Для положительных чисел a, b, c и x докажите неравенство

$$(a+b)\sqrt{\frac{xa+b}{a+xb}} + (b+c)\sqrt{\frac{xb+c}{b+xc}} + (c+a)\sqrt{\frac{xc+a}{c+xa}} \geqslant 2(a+b+c).$$

Crux v47n6

3. На плоскости лежит выпуклый шарнирный многоугольник P с попарно различными сторонами; его стороны — звенья постоянной длины, а в вершинах стоят шарниры, позволяющие непрерывно менять углы между звеньями. Полученный шарнирный механизм можно двигать; при этом в процессе некоторые рёбра могут пересекаться или даже накладываться. Вася хочет получить из P многоугольник, симметричный ему относительно некоторой прямой. Докажите, что он может это сделать тогда и только тогда, когда сумма длин второй и третьей по величине сторон многоугольника не больше его полупериметра.

W. Lenhard, S. Whitesides

4. Дана убывающая функция $f\colon \mathbb{N} \to [-1, 1]$. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n) — различные упорядоченные пары натуральных чисел, в каждой из которых числа взаимно просты. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(a_i)}{b_i(a_i+b_i)} + \frac{f(b_i)}{a_i(a_i+b_i)} - \frac{f(a_i+b_i)}{a_i b_i} \right) \leqslant 4.$$

L. R. Ford, L. Tornheim

5. Для целых чисел $b \geqslant 0$ и a введём обозначение $C_a^b = a(a-1)(a-2)\ldots(a-b+1)/b!$. Даны натуральные числа n и k. Выпишем все числа вида $C_k^j C_{-k}^{n-j}$, где $j = 0, 1, \ldots, n$. Докажите, что среди выписанных $n+1$ чисел либо нет нечётных, либо их ровно два.

Johann Cigler, Fedor Petrov

6. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC с углом 120° при вершине A. Биссектрисы углов B и C пересекают внешнюю биссектрису угла A в точках J_B и J_C соответственно. Окружность ω, построенная на отрезке $J_B J_C$ как на диаметре, пересекает луч MA в точке P. Касательные в точках J_B и J_C к окружности ω пересекают прямую BC в точках Q и R соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников PQR и PBC касаются.

А. Кузнецов, модифицировано И. Богдановым

7. Исходно на плоскости отмечены три точки A, B, C, попарные расстояния между которыми не превосходят 2 м. Каждую минуту какая-нибудь одна из точек отражается относительно центра масс всех трёх. Может ли через несколько ходов точка A оказаться на расстоянии, большем 3 м, от своего начального положения?

Д. Ширяев, О. Бадажкова, И. Богданов

8. Все грани выпуклого шестигранника — четырёхугольники, а в каждой вершине сходится три ребра. Шестигранник описан около сферы с центром I. Известно, что проекции точки I на рёбра некоторой грани шестигранника лежат на одной окружности. Докажите, что проекции точки I на ребра противоположной грани также лежат на одной окружности.

С. Арутюнян, модифицировано И. Фроловым

9. Дано натуральное число s. В королевстве живёт неограниченное количество мудрецов; один из них — визирь. Король заготовил для них испытание, которое будет проходить по следующим правилам. Некоторое количество мудрецов (включая визиря) расставляются так, чтобы визирь видел всех остальных мудрецов, а остальные мудрецы видели только визиря. У каждого мудреца пишут на лбу натуральное число, не превосходящее N. Каждый мудрец, не общаясь с остальными, тайно записывают на бумажку s чисел — это его гипотезы о числе, которое написано на его лбу. Мудрецы, зная все эти правила, перед испытанием проводят совещание, на котором для каждого из мудрецов вырабатывается стратегия — какие числа он должен написать в зависимости от того, что он увидел. Для какого наибольшего N мудрецы могут выбрать, сколько человек пойдет на испытание, и придумать для них стратегию, при которой обязательно хотя бы у одного мудреца его список будет содержать число, записанное у него на лбу?

К. Кохась, А. Латышев

10. Аня и Боря играют в игру на доске 1400×1401, делая ходы по очереди; начинает Аня. Каждым своим ходом Аня закрашивает k трёхклеточных уголков, а Боря закрашивает один клетчатый квадрат 2×2. Закрашивать уже закрашенные клетки нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких k Аня может обеспечить себе победу независимо от действий Бори?

Iran MO Third Round 2021

Третий тур 27.11.2021. Первая лига.

1. Докажите, что существует бесконечно много четверок натуральных чисел (a, b, c, d), для которых $ac - bd = ab + 1 = cd - 1$.

Д. Ширяев

2. Для положительных чисел a, b, c и x докажите неравенство

$$(a+b)\sqrt{\frac{xa+b}{a+xb}}+(b+c)\sqrt{\frac{xb+c}{b+xc}}+(c+a)\sqrt{\frac{xc+a}{c+xa}} \geqslant 2(a+b+c).$$

Crux v47n6

3. На плоскости лежит выпуклый шарнирный многоугольник P с попарно различными сторонами; его стороны — звенья постоянной длины, а в вершинах стоят шарниры, позволяющие непрерывно менять углы между звеньями. Полученный шарнирный механизм можно двигать; при этом в процессе некоторые рёбра могут пересекаться или даже накладываться. Вася смог получить из P многоугольник, симметричный ему относительно некоторой прямой. Докажите, что тогда сумма длин второй и третьей по величине сторон многоугольника не больше его полупериметра.

W. Lenhard, S. Whitesides

4. Дана убывающая функция $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_n, b_n) — различные упорядоченные пары натуральных чисел, в каждой из которых числа взаимно просты. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(a_i)}{b_i(a_i+b_i)}+\frac{f(b_i)}{a_i(a_i+b_i)}-\frac{f(a_i+b_i)}{a_ib_i}\right) \leqslant 2.$$

L. R. Ford, L. Tornheim

5. Дано натуральное число $n > 1$. Известно, что для каждого $k = 0, 1, 2 \ldots, n-1$ выполняется сравнение $C_{n-1}^k \equiv (-1)^k \pmod{n}$. Докажите, что n — простое.

фольклор

6. Точка M — середина стороны BC неравнобедренного треугольника ABC с углом 60° при вершине A. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке I, а их внешние биссектрисы — в точке J. Окружность ω, построенная на отрезке IJ как на диаметре, пересекает отрезок AM в точке P. Касательные в точках I и J к ω пересекают прямую BC в точках Q и R соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников PQR и PBC касаются.

А. Кузнецов

7. *Город* — это точка на плоскости. В стране $n \geqslant 2$ городов. Для каждого города X в стране нашёлся город $N(X)$, который строго ближе к X, чем любой из оставшихся городов. Правительство для каждого города X построило двустороннюю дорогу между X и $N(X)$; никаких других дорог нет. Известно, что по построенным дорогам можно добраться от любого города до любого другого. Назовем город Y *пригородным*, если он является $N(X)$ для некоторого X. Докажите, что не менее $(n-2)/4$ городов являются пригородными.

2021 Taiwan TST

8. Все грани выпуклого шестигранника — четырёхугольники, а в каждой вершине сходится три ребра. Шестигранник описан около сферы с центром I. Известно, что проекции точки I на рёбра некоторой грани шестигранника лежат на одной окружности. Докажите, что проекции точки I на ребра противоположной грани также лежат на одной окружности.

С. Арутюнян, модифицировано И. Фроловым

9. В королевстве живёт неограниченное количество мудрецов; один из них — визирь. Король заготовил для них испытание, которое будет проходить по следующим правилам. Некоторое количество мудрецов (включая визиря) расставляются так, чтобы визирь видел всех остальных мудрецов, а остальные мудрецы видели только визиря. У каждого мудреца пишут на лбу натуральное число, не превосходящее 30. Каждый мудрец, не общаясь с остальными, тайно записывает на бумажку 5 чисел — это его гипотезы о числе, которое написано на его лбу. Мудрецы, зная все эти правила, перед испытанием проводят совещание, на котором для каждого из мудрецов вырабатывается стратегия — какие числа он должен написать в зависимости от того, что он увидел. Смогут ли мудрецы выбрать, сколько человек пойдёт на испытание, и придумать для них стратегию, при которой обязательно хотя бы у одного мудреца его список будет содержать число, записанное у него на лбу?

К. Кохась, А. Латышев, Bartłomiej Bosek, Andrzej Dudek, Michał Farnik Farnik, Jarosław Grytczuk, and Przemysław Mazur. Hat chromatic number of graphs, 2019

10. Аня и Боря играют в игру на доске 1400×1401, делая ходы по очереди; начинает Аня. Каждым своим ходом Аня закрашивает k трёхклеточных уголков, а Боря закрашивает один клетчатый квадрат 2×2. Закрашивать уже закрашенные клетки нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких k Аня может обеспечить себе победу независимо от действий Бори?

Iran MO Third Round 2021