Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Четвёртый тур 28.11.2021. Вторая лига. Бои за 1 и 3 места.

1. Пусть a, b, c — положительные числа, для которых

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=2.$$

Докажите, что

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

2. В стране 100 городов и 150 деревень. Из некоторых городов в некоторые деревни ведут грунтовые дороги. Правительство решило заасфальтировать 100 дорог так, чтобы из каждого города выходила ровно одна асфальтированная дорога и все эти дороги вели в разные деревни. На конкурс были представлены все возможные проекты асфальтирования дорог, удовлетворяющие описанным выше требованиям (известно, что таких проектов было не менее одного). Какое наибольшее число дорог могло не упоминаться ни в одном из проектов?

3. Обозначим $f(n)=\dfrac{n^n-1}{n-1}$. Докажите, что $(n^n)!$ делится на $(n!)^{f(n)}$.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_0, A_0, B_0, соответственно. Пусть точка M — середина отрезка, соединяющего вершину C_0 с точкой пересечения высот треугольника $A_0B_0C_0$, точка N — середина дуги ACB описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

5. Последовательности a_n и b_n определяются следующим образом:

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1};\qquad b_1=1,\quad b_{n+1}=\frac{b_n^2+2}{2b_n}.$$

Докажите, что любой член последовательности b_n встречается в последовательности a_n.

6. Дан треугольник с вершиной C. Точки X и Y таковы, что для каждой из них расстояние до вершины C треугольника равно сумме расстояний до двух других вершин. Какое наибольшее значение может принимать угол XCY?

7. Даны натуральные числа k и m, большие единицы. $2k$ юных жителей Страны Дураков готовятся к ЕДЭ (Единому Дурацкому Экзамену). Экзамен состоит из mk вопросов, на каждый из которых предлагается k вариантов ответа; ровно один из ответов правильный, но какой именно — дуракам неведомо. Чтобы сдать экзамен, нужно дать хотя бы $m+1$ правильный ответ. Могут ли юные дураки договориться так, чтобы хотя бы один из них точно сдал экзамен?

8. Даны натуральные числа $a, c>1$ и целое число $b\neq 0$. Докажите, что существует натуральное число n такое, что число a^n+b имеет делитель вида $cx+1$, $x\in\mathbb{N}$.

9. Существует ли множество из 100 различных вещественных чисел такое, что среднее арифметическое любых 10 из них тоже лежит в этом множестве?

10. Найдите все натуральные $n>1$, для которых существуют натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такие, что

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{2}{x_2^2}+\frac{2^2}{x_3^2}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{x_n^2}=1.$$