Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Личная олимпиада. Старшая группа.

1. *999 команд сыграли двухкруговой турнир по волейболу: каждая сыграла с каждой матч дома и матч в гостях. Каждая команда выиграла ровно половину своих домашних матчей и ровно половину гостевых. Докажите, что какая-то из команд дважды обыграла какую-то другую. Напомним, что в волейболе ничьих не бывает.*

Решение. Предположим противное. Тогда в каждой паре команд либо обе победили соперника у себя дома, либо обе победили соперника в гостях. Соединим ребром те пары, где обе команды победили друг друга дома. Получим граф на 999 вершинах, каждая степени 499, что противоречит лемме о рукопожатиях.

2. *В равнобокой трапеции $ABCD$ окружность с центром на основании AD касается прямых AB и CD в точках B и C соответственно. Пусть отрезок AC вторично пересекает эту окружность в точке P. Пусть точка K такова, что $ABCK$ — параллелограмм. Описанная окружность треугольника CKD пересекает отрезок AC в точке $Q \neq C$. Докажите, что $AP = CQ$.*

Решение 1. Обозначим $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$ и $\angle CAB = \beta$. Пусть O — центр первой окружности из условия. Из симметрии следует, что O — середина AD и $\angle BOC = 180^\circ - 2\angle AOB = 180^\circ - 2(90^\circ - \angle BAO) = 2\alpha$. Тогда $\angle APB = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - \angle BOC/2 = 180^\circ - \alpha$. Из вписанности четырёхугольника $KQCD$ имеем $\angle KQC = 180^\circ - \angle CDK = 180^\circ - \alpha$, а из $AB \parallel CK$ имеем $\angle QCK = \angle QAB = \beta$. Следовательно, в треугольниках ABP и CKQ равны $AB = CK$, $\angle APB = \angle KQC = 180^\circ - \alpha$ и $\angle PAB = \angle QCK = \beta$. Значит они равны, откуда и следует равенство отрезков AP и CQ.

Решение 2. Так как первая окружность из условия касается AB, то $AB^2 = AP \cdot AC$. Докажем, что $CK^2 = CQ \cdot CA$, откуда будет следовать, что $CQ = \frac{CK^2}{CA} = \frac{AB^2}{CA} = AP$. Заметим, что $\angle AKC = 180^\circ - \angle BAK = 180^\circ - \angle CDK = \angle KQC$, откуда следует, что треугольники KQC и AKC подобны. Следовательно, $CK^2 = CQ \cdot CA$, что и требовалось доказать.

3. *Дано простое число $p > 3$. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $a + b = c + d = p$, а число $abcd$ — точный квадрат. Докажите, что какие-то два из чисел a, b, c и d совпадают.*

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $a, c < \frac{p}{2}$. Предположим, что $acbd = ac(p-a)(p-c) = x^2$. Тогда $x^2 \equiv (ac)^2 \pmod p$, откуда $x \equiv ac \pmod p$ или $x \equiv -ac \pmod p$. По модулю замены знака будем считать, что $x \equiv ac \pmod p$ и $x = ac - kp$. По неравенству о средних $a(p-a)c(p-c) < (\frac{p^2}{4})^2$, откуда $|x| = |ac - kp| < (\frac{p^2}{4})$. Так как $a, c < \frac{p}{2}$, то $ac < (\frac{p^2}{4})$ и $|kp| < \frac{p^2}{2}$. Следовательно, $|k| < \frac{p}{2}$.

Раскрытием скобок в равенстве $ac(p-a)(p-c) = (ac-kp)^2$ получаем $p^2(ac-k^2) = pac(a+c-2k)$. Значит $(a + c - 2k) \,\vdots\, p$. Из неравенств $a, c < \frac{p}{2}$ и $|k| < \frac{p}{2}$ получаем, что $-p < a + c - 2k < 2p$. Следовательно, или $a + c - 2k = 0$, или $a + c - 2k = p$.

1) Если $a + c - 2k = 0$, то из условия $p^2(ac - k^2) = pac(a + c - 2k)$ получаем, что $ac = k^2$. Тогда a и c будут являться корнями квадратного трёхчлена $x^2 - 2kx + k^2$, откуда $a = c = k$.

2) Если $a+c-2k = p$, то из условия $p^2(ac-k^2) = pac(a+c-2k)$ получаем, что $ac-k^2 = ac$. Следовательно $k = 0$, и $a + c = p$. Но так не бывает, так как $a, c < \frac{p}{2}$.

4. *Каждой* упорядоченной *паре чисел x и y из интервала $(0, 1)$ сопоставлено натуральное число $f(x, y)$. Может ли случиться так, что равенство $f(x, y) = f(y, z)$ выполняется только при $x = y = z$?*

Ответ: Да, может. **Решение 1.** Пусть $f(z, z) = 1$ для любого $z \in (0, 1)$. Пусть теперь $x \neq y$. Рассмотрим первое место i, в котором отличаются двоичные записи чисел x и y (берём записи без бесконечных хвостов единиц). Если в x — ноль, а в y — единица, то положим $f(x, y) = 2i$, иначе положим $f(x, y) = 2i + 1$. Пусть $f(x, y) = f(y, z) = m$. Если $m = 1$, то $x = y = z$. Если $m = 2i$, то получается, что на i-м места числа y с одной стороны стоит единица (т.к. $f(x, y) = 2i$), а с другой — ноль (т.к. $f(y, z) = 2i$), противоречие; аналогично разбирается случай $m = 2i + 1$.

Решение 2. Пронумеруем все рациональные числа на интервале $(0, 1)$: r_1, r_2, ... Положим $f(z, z) = 1$ для любого $z \in (0, 1)$. Пусть теперь $x \neq y$. Если $x < y$, положим $f(x, y) = 2i$, где i — наименьшее натуральное число такое, что $x < r_i < y$. Если $x > y$, положим $f(x, y) = 2i + 1$, где i — наименьшее натуральное число такое, что $x > r_i > y$. Пусть $f(x, y) = f(y, z) = m$. Если $m = 1$, то $x = y = z$. Если $m = 2i$, то $x < r_i < y$ и $y < r_i < z$, что невозможно; аналогично невозможен случай $m = 2i + 1$.

Замечание. Оба примера устроены одинаково. Зафиксируем некоторое число $t \in (0, 1)$. Положим $f(t, t) = 1$. Чего мы хотим от остальной функции? Посмотрим на множество $A(t)$ — множество значений функции

(переменной x) $f(x,t)$ при $x \neq t$, и множество $B(t)$ — множество значений функции $f(t,x)$ при $x \neq t$. Чего мы хотим от этих множеств?
1. Чтобы ни $A(t)$, ни $B(t)$ не содержали 1.
2. Чтобы они не пересекались: иначе, если $m \in A(t)$ и $m \in B(t)$, то найдутся такие a и b, что $f(a,t) = m$ и $f(t,b) = m$.
3. Чтобы для $s \neq t$ множества $A(t)$ и $B(s)$ пересекались: тогда в качестве $f(s,t)$ можно взять любое число из $A(t) \cap B(s)$.

5. *Дети привёзли в лагерь по гаджету. При заезде гаджеты пронумеровали: гаджет, привезённый ребёнком i, получил номер i. В первую же ночь дети обсудили, кто что привёз, и каждый составил для себя список, перечислив все гаджеты в порядке от более желанного к менее желанному. Воспитатель хочет предложить детям поменяться гаджетами так, что ребёнку i достанется гаджет с номером $\sigma(i)$. Группа детей A может заблокировать предложение, если дети из A могут перераспределить между собой гаджеты, которые они привезли сами, так, чтобы каждый ребёнок $i \in A$ получил гаджет (привезённый ребёнком из A), который ему нравится не меньше, чем $\sigma(i)$, и при этом нашёлся бы ребёнок $i_0 \in A$, получивший гаджет с номером, отличным от $\sigma(i_0)$. Докажите, что существует не более одного предложения воспитателя, которое не может заблокировать ни одна группа детей.*

Решение. Введём граф, вершинами которого будут дети, из ребёнка i проведём направленное ребро в ребёнка j, если гаджет с номером j нравится ребёнку i больше всего. В полученном графе, очевидно, есть некоторый цикл C_1 (возможно, состоящий из одной вершины). Предложим каждому ребёнку в этом цикле гаджет следующего по циклу ребёнка. Отпустим детей из цикла C_1 на прогулку, а с оставшимися проделаем ту же процедуру. Повторяя эту процедуру много раз, получим последовательность циклов C_1, C_2, …, C_n. Назовём полученное предложение σ.

Рассмотрим какое-нибудь другое предложение σ'. Пусть B — множество детей i, для которых $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$. Из множества детей B выберем ребёнка i из цикла с наименьшим номером C_k. Докажем, что дети, образующие C_k, могут заблокировать предложение σ'. Действительно, каждый из детей в C_1, C_2, …, C_{k-1} получил в σ и σ' один и тот же гаджет. Значит, каждый из детей в C_k получил лучший с его точки зрения гаджет из оставшихся, т.е. точно не хуже чем в σ', а ребёнок i — не совпадающий с σ.

Замечание. Можно доказать, что предложение σ из решения не может заблокировать ни одна группа детей. Описанный в решении алгоритм называется *top trading cycle*.

6. *Докажите, что многочлен*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{1\,000\,000} x^{i(i-1)/2}$$

раскладывается в произведение семи непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

Решение. Докажем, что $P(x)$ делится на все многочлены вида $1 + x^{2^k}$ при $k = 0, 1, \ldots, 5$. Поскольку эти (приведённые) многочлены взаимно просты, а их суммарная степень $2^6 - 1$ меньше 10^6, многочлен $P(x)$ есть произведение всех этих многочленов на непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, что и требовалось.

Лемма. Числа $i(i-1)/2$ при $i = 1, 2, \ldots, 10^6$ дают все возможные остатки по модулю 2^{k+1} поровну раз, при любом $k = 0, 1, \ldots, 5$.

Доказательство. Достаточно доказать лемму при $k = 5$, что мы и сделаем. Два данных числа $i(i-1)/2$ и $j(j-1)/2$ сравнимы по модулю 2^6 ровно тогда, когда $2^7 \mid i(i-1) - j(j-1) = (i-j)(i+j-1)$; сомножители $i - j$ и $i + j - 1$ разной чётности, так что сравнимость равносильна тому, что $i \equiv j \pmod{2^7}$ или $i + j \equiv 1 \pmod{2^7}$. Осталось заметить, что в каждом отрезке натуральных чисел вида $[N \cdot 2^6 + 1, (N+1) \cdot 2^6]$ нет пар различных чисел, удовлетворяющих таким сравнениям: про первое это очевидно, а для второго достаточно заметить, что при $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2^6$ имеем $(2^6N + i) + (2^6N + j) \equiv i + j \pmod{2^7}$, причём $3 \leqslant i + j \leqslant 2^7 - 1$. Значит, на этом отрезке наше выражение даёт все возможные остатки при делении на 2^6 по разу, а отрезок $[1, 10^6]$ разбивается на такие отрезки. $\square$

Вернёмся к задаче. Выберем произвольное $0 \leqslant k \leqslant 5$. Используя лемму, разобьём все числа $1 \leqslant i \leqslant 10^6$ на пары так, чтобы в каждой паре разность чисел была сравнима с 2^k по модулю 2^{k+1}. Для каждой такой пары p, q многочлен $x^p + x^q$ делится на $1 + x^{2^k}$, поэтому и $P(x)$ делится на $1 + x^{2^k}$.

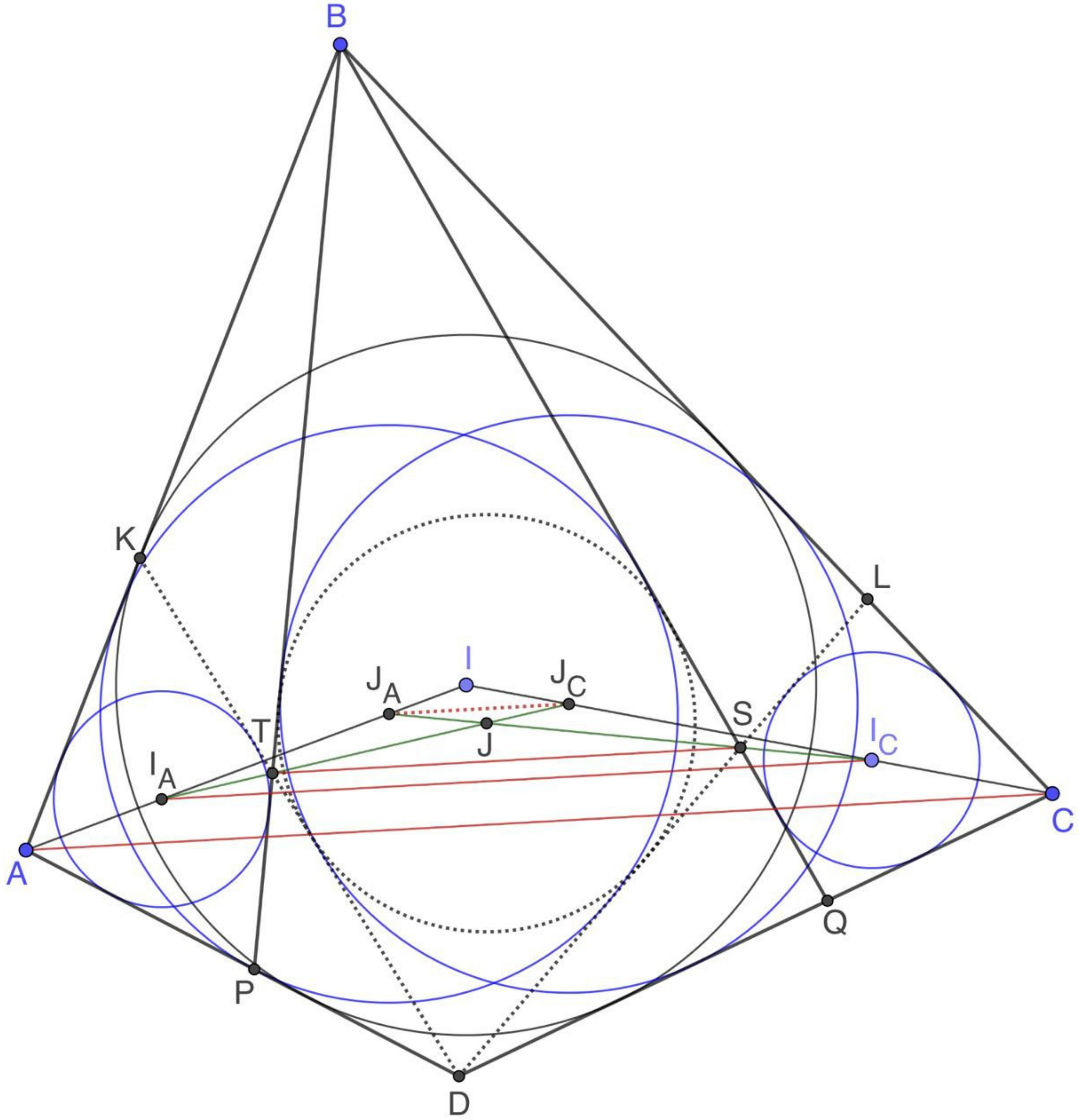
7. *Дан описанный четырёхугольник $ABCD$, все стороны которого имеют разные длины. На сторонах AD и CD выбраны точки P и Q соответственно. Оказалось, что вписанные окружности треугольников ABP и CBQ с центрами I_A и I_C имеют равные радиусы. Окружность с центром J_A касается отрезков AB,*

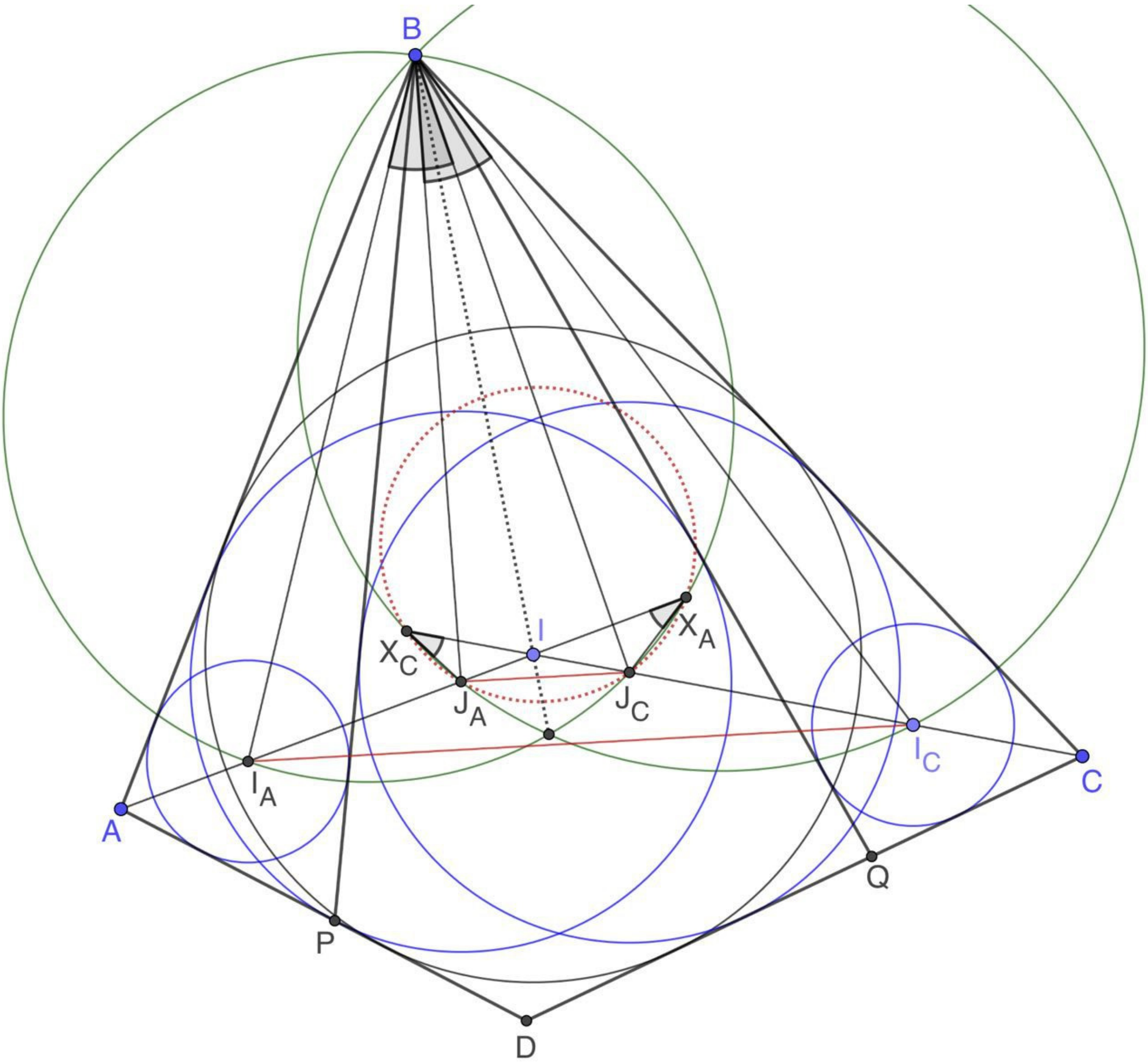
AD и BQ. Окружность с центром J_C касается отрезков BC, CD и BP. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BI_AJ_C и BI_CJ_A лежит на биссектрисе угла ABC.

Решение. Пусть Ω — вписанная окружность четырехугольника $ABCD$; можно считать, что ее центр I не лежит на AC. Обозначим окружности из условия с центрами I_A, I_C, J_A и J_C через ω_A, ω_C, Ω_A, Ω_C соответственно. Отметим на сторонах AB и BC точки K и L соответственно, такие что отрезки DK и DL касаются окружностей ω_A и ω_C соответственно. Пусть DK и DL пересекают BP и BQ в точках T и S соответственно. По критериям описанности четырехугольника получаем $DT-TB = DA-AB = DC-CB = DS-SB$, поэтому отрезки DK и DL касаются окружностей Ω_C и Ω_A соответственно, а четырехугольник $BTDS$ описан около некоторой окружности ω с центром J.

Поскольку радиусы ω_A и ω_C равны, то $AI_A/AI = CI_C/CI$ и $TI_A/TJ = SI_C/SJ$. Следовательно, $I_AI_C \parallel AC$ и $I_AI_C \parallel TS$. (Точки T и S лежат на отрезках I_AJ_C и I_CJ_A, которые находятся внутри треугольника AIC, поэтому TS не совпадает с AC). Если радиусы Ω_A и Ω_C различны, то центр положительной гомотетии окружностей Ω_A и Ω_C должен лежать на прямых AC и TS по теореме о трех центрах гомотетии для Ω_A, Ω_C, Ω и для Ω_A, Ω_C, ω. Значит, радиусы Ω_A и Ω_C равны и $J_AJ_C \parallel I_AI_C$.

Пусть X_A и X_C — вторые точки пересечения I_AJ_A и I_CJ_C с окружностями (BI_AJ_C) и (BI_CJ_A) соответственно. Достаточно доказать, что I лежит на радикальной оси окружностей (BI_AJ_C) и (BI_CJ_A), что эквивалентно тому, что точки I_A, I_C, X_A, X_C лежат на одной окружности. Поскольку $I_AI_C \parallel J_AJ_C$, то достаточно доказать, что точки J_A, J_C, X_A, X_C лежат на одной окружности. Имеем $\angle(J_AX_A, X_AJ_C) = \angle(I_AX_A, X_AJ_C) = \angle(I_AB, BJ_C) = \angle(J_AB, BI_C) = \angle(J_AX_C, X_CI_C) = \angle(J_AX_C, X_CJ_C)$, поскольку углы I_ABJ_C и J_ABI_C равны половине угла ABC.


B
K
L
I
J_A
J_C
T
J
S
I_C
I_A
A
C
Q
P
D


B
I
X_C
X_A
J_A
J_C
I_A
I_C
A
C
P
Q
D