

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 23.11.2021. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. В школе провели олимпиады по математике, физике и информатике, в каждой олимпиаде приняли участие 40 школьников (один и тот же школьник может принимать участие в разных олимпиадах). Докажите, что школьников можно разбить на 20 групп так, чтобы в каждой группе был и участник олимпиады по математике, и участник олимпиады по физике, и участник олимпиады по информатике.

Сербия, 2019

2. Пусть $N = k^{2021} + 1$ при некотором натуральном $k > 10^6$. На доске в указанном порядке в ряд выписаны числа $N, N - k, N - 2k, \dots, k + 1, 1$. За один шаг с доски стирается самое левое из оставшихся чисел вместе со всеми своими делителями (если такие есть). Эту операцию проделали несколько раз, пока на доске не осталось ни одного числа. Какие числа были стёрты на последнем шаге?

Казахстан, областная олимпиада 2018

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC точка M — середина стороны AB . Точка K такова, что K и B лежат в разных полуплоскостях относительно AC , $\angle KMC = 90^\circ$ и $\angle KAC = 180^\circ - \angle ABC$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает отрезок CK в точке E . Докажите, что точки A, M, C и E лежат на одной окружности.

Iran MO Third Round 2021, упрощение

4. Дано вещественное число α . Миша и Маша называют пару вещественных чисел x и y близкой, если

$$\frac{xy}{x + y + 1} + x^2 + y^2 = \alpha.$$

Миша загадал 6 попарно различных вещественных чисел и сообщил Маше, что ровно 5 из 15 пар этих чисел близкие. Докажите, что Маша может отгадать хотя бы одно из чисел, загаданных Мишей.

М. Антипов

5. В стране несколько городов, один из которых — Москва. Некоторые пары городов соединены двусторонними дорогами. Мэр хочет объединить Москву ещё с n городами в большую Москву так, чтобы (1) между любыми двумя городами большой Москвы можно было проехать по дорогам, не попадая в города вне неё, и (2) было ровно k городов вне большой Москвы, соединённых хотя бы одной дорогой с большой Москвой. Докажите, что есть не более C_{n+k}^k способов совершить такое объединение.

Отбор на Вьетнам-2012

6. Натуральное число $n \geq 4$ таково, что число $a = \frac{2^n - 2}{n}$ целое. Докажите, что a составное.

China National High School Mathematics League, 2nd round, 2021

7. Вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB треугольника ABC в точках T_A, T_B и T_C соответственно. Пусть A_B и A_C — проекции вершины A на биссектрисы углов B и C соответственно. Обозначим через ω_A окружность, описанную около треугольника $A_B A_C T_A$. Определим окружности ω_B и ω_C аналогично. Докажите, что окружности ω_A, ω_B и ω_C имеют общую точку, лежащую на окружности девяти точек треугольника ABC .

Д. Прокопенко, М. Дидин, И. Богданов

8. Дан граф G (без петель и кратных рёбер); его вершины u и v соединены ребром. В вершинах графа стоят N фишек. Если количество фишек в некоторой вершине не меньше, чем её степень, она может *выстрелить*: отправить по одной фишке в каждую из смежных с ней вершин. Одновременно может стрелять не более одной вершины. Докажите, что в каждый момент времени количества выстрелов, произведённых вершинами u и v , отличаются не более чем на N .

G. Tardos