Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Третий тур 27.11.2021. Вторая лига.

1. Для любых вещественных чисел a,b,$c \in (0,1)$ докажите неравенство

$$(\sqrt{2}a - bc)(\sqrt{2}b - ac)(\sqrt{2}c - ab) \leqslant \frac{1}{8}.$$

2. Найдите наибольшее натуральное n такое, что существует последовательность a_1, a_2, $\ldots$, a_n, удовлетворяющая условиям $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ при $3 \leqslant i \leqslant n$, все её члены больше 1 и являются степенями простых чисел.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P, а диагонали AC и BD пересекаются в точке Q. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD — лежат на отрезках AQ и DQ соответственно. Описанные окружности треугольников ADQ и MNQ пересекаются в точке T ($T \neq Q$). Оказалось, что точки T и Q лежат по одну сторону от прямой MN, а также $\angle APD = 90°$. Докажите, что прямая PT делит отрезок MN пополам.

4. Каждую точку плоскости покрасили в один из четырех цветов. Докажите, что найдутся две одноцветные точки на расстоянии 1 или $\sqrt{3}$.

5. В таблице 100×100 расставили числа 1 до 100, каждое число встречается 100 раз. За одну операцию разрешается обнулить все числа строки или столбца, в котором сумма чисел больше 100. После нескольких операций сумма чисел в каждой строке и каждом столбце оказалась не больше 100. Какое наибольшее количество ненулевых чисел могло остаться в таблице?

6. Обозначим через ω описанную окружность треугольника ABC, а через X точку, симметричную A относительно B. Прямая CX пересекает ω вторично в точке D. Прямые BD и AC пересекаются в точке E, прямые AD и BC пересекаются в точке F. Обозначим через M и N середины сторон AB и AC. Может ли прямая EF иметь хотя бы одну общую точку с описанной окружностью треугольника AMN?

7. Аня и Боря играют в игру на доске 1400×1401, делая ходы по очереди. Аня своим ходом закрашивает 100 трехклеточных уголков. Боря своим ходом закрашивает один квадрат 2×2. Закрашивать уже закрашенные клетки нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

8. В королевстве живёт неограниченное количество мудрецов; один из них — визирь. Король заготовил для них испытание, которое будет проходить по следующим правилам. Некоторое количество мудрецов (включая визиря) расставляются так, чтобы визирь видел всех остальных мудрецов, а остальные мудрецы видели только визиря. У каждого мудреца пишут на лбу натуральное число, не превосходящее 30. Каждый мудрец, не общаясь с остальными, тайно записывает на бумажку 5 чисел — это его гипотезы о числе, которое написано на его лбу. Мудрецы, зная все эти правила, перед испытанием проводят совещание, на котором для каждого из мудрецов вырабатывается стратегия — какие числа он должен написать в зависимости от того, что он увидел. Смогут ли мудрецы выбрать, сколько человек пойдёт на испытание, и придумать для них стратегию, при которой обязательно хотя бы у одного мудреца его список будет содержать число, записанное у него на лбу?

9. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с рациональными коэффициентами такой, что $P(x)$ имеет n различных вещественных корней, образующих арифметическую прогрессию. Докажите, что среди корней $P(x)$ есть два, являющиеся корнями некоторого квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами.

10. Найдите все функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которых $2(a + b - 1)$ делится на $f(a) + f(b)$ при всех $a, b \in \mathbb{N}$.