Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Второй тур 25.11.2021. Высшая лига.

1. Дано нечётное натуральное число n. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\cos\frac{2\pi j}{n}+\cos\frac{2\pi k}{n}}=\frac{n^2}{2}\,.$$

Zhi-Wei Sun, Wojtek Wawrów, Fedor Petrov

2. Назовём *двоичным кубом* куб, для которого существует натуральное $n \leqslant 2021^{2021}$ такое, что сторона куба имеет длину 2^{-n}, а координаты всех его вершин имеют вид $a2^{-n}$ при целых a. *Раздутием* куба назовём куб, полученный из него гомотетией с центром в центре куба и коэффициентом $1+2^{-1000}$. Мы считаем, что куб не содержит границу. В пространстве дан набор двоичных кубов такой, что каждая точка лежит либо ровно в одном из кубов, либо на границе одного или нескольких из них. Докажите, что можно выбрать раздутия некоторых из этих кубов так, что каждая точка пространства будет лежать хотя бы в одном, но не более чем в восьми выбранных раздутиях.

И. Богданов, А. Тюленев

3. Дано непустое множество натуральных чисел S. Известно, что для любых a, $b \in S$ существует $c \in S$ такое, что $a(a+b)$ делится на c^2. Докажите, что в S найдется элемент, на который делятся все элементы S.

2021 Taiwan TST

4. Дано натуральное число n. Компания из n пиратов собирается поделить сокровище, состоящее из одинаковых монет, как-то разложенных по мешкам. Количество монет и количество мешков делятся на n, при этом изначально хотя бы k мешков пустые. Главарь собирается несколько раз проделать следующую операцию: взять произвольный мешок и переложить из него несколько монет в пустой мешок. После этого он должен поделить сокровище между n пиратами так, чтобы каждому досталось поровну монет и поровну мешков. Для какого наименьшего k главарь может достичь цели при любой описанной начальной ситуации?

MEMO 2021

5. В английском городе 1000 джентльменов, зарегистрированные в Реестре под номерами от 1 до 1000. Любые 720 из них образуют клуб. Мэр хочет обложить каждый клуб налогом, который выплачивается всеми участниками клуба в равных долях (налог — произвольное неотрицательное вещественное число). При этом суммарный налог, выплачиваемый джентльменом, не должен превосходить его номера в реестре. Какой наибольший налог может собрать мэр?

И. Богданов

6. Дано вещественное число α. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами такие, что неравенство

$$P(2x+\alpha) \geqslant (x^{20}+x^{19})P(x)$$

выполнено при всех вещественных x.

MEMO 2019

7. В треугольнике ABC отмечена точка P такая, что $\angle IPO = 90^\circ$, где I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Точка Q изогонально сопряжена точке P относительно треугольника ABC, а точка R симметрична Q относительно I. На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка S такая, что $\angle(PI, AI) = \angle(AI, AS)$. Докажите, что точки P, R и S лежат на одной прямой.

Н. Чернега, Ф. Ивлев, И. Фролов

8. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ выполнено $AB \parallel FC \parallel ED$, $BC \parallel AD \parallel FE$ и $CD \parallel BE \parallel AF$. Описанные окружности треугольников ACE и BDF пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через точку пересечения медиан треугольника ACE.

И. Фролов

9. Вещественные числа x и y таковы, что каждое из чисел x^3+y, x^2+y^2 и $x+y^3$ — целое. Докажите, что x и y тоже целые.

Japan TST 2019

10. В ориентированном графе 2021 вершина. Вершины расположены по кругу, и из каждой ведут рёбра в следующие 101 вершину против часовой стрелки. Дима хочет покрасить рёбра этого графа так, чтобы для любой пары вершин u и v существовал ориентированный путь из u в v, в котором нет одноцветных рёбер. Какое минимальное количество цветов потребуется Диме?

Baltic Way 2021 Short List

Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Второй тур 25.11.2021. Первая лига.

1. Для натурального числа n обозначим через $f(n)$ количество натуральных чисел, меньших n, которые не являются делителями n, но и не взаимно просты с n. Докажите, что для каждого натурального k существует лишь конечное количество таких n, что $f(n) = k$.

Iran MO Third Round 2021

2. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geqslant 5$). Никакие три диагонали многоугольника не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Докажите, что внутри каждого четырёхугольника $A_iA_jA_kA_\ell$ ($1 \leqslant i < j < k < \ell \leqslant n$) можно выбрать по 2 точки, не лежащие на диагоналях многоугольника, так, что все $2C_n^4$ выбранные точки будут различны, и в любой из частей, на которые диагонали разбивают многоугольник, будет не более трёх отмеченных точек.

С. Берлов, по мотивам China TST 2021

3. Дано непустое множество натуральных чисел S. Известно, что для любых a, $b \in S$ существует $c \in S$ такое, что $a(a+b)$ делится на c^2. Докажите, что в S найдется элемент, на который делятся все элементы S.

2021 Taiwan TST

4. Дано натуральное число n. Компания из n пиратов собирается поделить сокровище, состоящее из одинаковых монет, как-то разложенных по мешкам. Количество монет и количество мешков делятся на n, при этом изначально хотя бы k мешков пустые. Главарь собирается несколько раз проделать следующую операцию: взять произвольный мешок и переложить из него несколько монет в пустой мешок. После этого он должен поделить сокровище между n пиратами так, чтобы каждому досталось поровну монет и поровну мешков. Для какого наименьшего k главарь может достичь цели при любой описанной начальной ситуации?

MEMO 2021

5. В английском городе 1000 джентльменов, зарегистрированные в Реестре под номерами от 1 до 1000. Любые 720 из них образуют клуб. Мэр хочет обложить каждый клуб налогом, который выплачивается всеми участниками клуба в равных долях (налог — произвольное неотрицательное вещественное число). При этом суммарный налог, выплачиваемый джентльменом, не должен превосходить его номера в реестре. Какой наибольший налог может собрать мэр?

И. Богданов

6. Дано вещественное число α. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами такие, что неравенство
$$P(2x+\alpha) \geqslant (x^{20}+x^{19})P(x)$$
выполнено при всех вещественных x.

MEMO 2019

7. В треугольнике ABC отмечена точка P такая, что $\angle IPO = 90^\circ$, где I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Точка Q изогонально сопряжена точке P относительно треугольника ABC, а точка R симметрична Q относительно I. На описанной окружности треугольника ABC отмечена точка S такая, что $\angle(PI, AI) = \angle(AI, AS)$. Докажите, что точки P, R и S лежат на одной прямой.

Н. Чернега, Ф. Ивлев, И. Фролов

8. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ выполнено $AB \parallel FC \parallel ED$, $BC \parallel AD \parallel FE$ и $CD \parallel BE \parallel AF$. Описанные окружности треугольников ACE и BDF пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через точку пересечения медиан треугольника ACE.

И. Фролов

9. Положительные числа a, b и c таковы, что числа $a+2\sqrt{bc}$, $b+2\sqrt{ca}$ и $c+2\sqrt{ab}$ рациональны. Верно ли, что среди чисел a, b и c обязательно найдётся рациональное?

апгрейд Indonesia Regional MO 2016

10. В ориентированном графе 2021 вершина. Вершины расположены по кругу, и из каждой ведут рёбра в следующие 101 вершину против часовой стрелки. Дима хочет покрасить рёбра этого графа так, чтобы для любой пары вершин u и v существовал ориентированный путь из u в v, в котором нет одноцветных рёбер. Какое минимальное количество цветов потребуется Диме?

Baltic Way 2021 Short List