Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Первый тур 24.11.2021. ВТОРАЯ ЛИГА.

1. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O. Прямая ℓ, параллельная прямой AO, пересекает отрезки AB, BC и луч CA в точках D, E и F соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AFD, середина отрезка AE и точка O лежат на одной прямой.

2. Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике проходил в виде тестирования, состоящего из n вопросов. За каждый вопрос можно было получить либо 0 баллов за неверный ответ, либо 1 балл за верный. Известно, что на каждый вопрос кто-то ответил верно, а также не все участники набрали одинаковое количество баллов. Докажите, что для какого-то вопроса средний балл тех, кто ответил на него верно, выше среднего балла тех, кто ответил на него неверно.

3. Дано натуральное $n > 2$ и $b = 2^{2^n}$. Нечетное натуральное число a таково, что $a \leqslant b \leqslant 2a$. Докажите, что число $a^2 + b^2 - ab$ не является точным квадратом.

4. Найдите все такие тройки натуральных взаимно простых в совокупности чисел (a, b, c), что для любого натурального n число $(a^n + b^n + c^n)^2$ делится на $ab + bc + ca$.

5. По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки 2021 различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Какого наибольшего числа одноцветных пар соседей можно гарантированно добиться такими операциями из любого начального расположения?

6. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Найдите наибольшее вещественное число λ такое, что для любых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих соотношениям $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1$, выполнено неравенство

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 - \left(x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + \ldots + x_n^2y_n^2\right) \geqslant \lambda.$$

7. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Вневписанная окружность касается отрезка AC в точке K. Пусть W — вторая точка пересечения BI и описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, симметричная I относительно высоты, опущенной из вершины B. Известно, что $\angle IKW = 90^\circ$. Найдите величину угла $\angle BPK$.

8. Дан полный двудольный граф, в каждой доле которого по n вершин. Каждое ребро этого графа покрашено в один из $n^2 - 2n + 2$ цветов. При этом в каждый цвет покрашено хотя бы одно ребро. Докажите, что найдутся две вершины графа, между которыми существует не более одного одноцветного простого пути.

9. Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$. По ней строится последовательность вещественных чисел $b_1, b_2, b_3, \ldots$, где

$$b_n = \frac{a_1a_2\ldots a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Оказалось, что среди любого миллиона подряд идущих членов последовательности $b_1, b_2, b_3, \ldots$ есть хотя бы один, являющийся целым числом. Докажите, что найдется такое k, что $a_k > 2021^{2021}$.

10. *Триангуляцией* выпуклого n-угольника называется разбиение его на треугольники непересекающимися диагоналями. *Антикликой* триангуляции назовем подмножество вершин многоугольника, никакие две из которых не соединены стороной или диагональю. Саша подсчитал, что в любой триангуляции 100-угольника хотя бы M антиклик, причем есть триангуляции, в которых их ровно M. Сколько триангуляций содержат ровно M антиклик?