Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Четвёртый тур 28.11.2021. Вторая лига. Бои за 5 и 7 места.

1. Положительные вещественные a, b, c удовлетворяют уравнению $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=3$. Докажите, что

$$\frac{a^2+b}{a+b}+\frac{b^2+c}{b+c}+\frac{c^2+a}{c+a}\geqslant\frac{9}{4}.$$

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Пусть S — площадь треугольника ABC. Докажите неравенство

$$2\cdot S\cdot\left(\frac{1}{AD}-\frac{1}{BD}\right)\leqslant AB.$$

3. Обозначим $f(n)=\dfrac{n^n-1}{n-1}$. Докажите, что $(n^n)!$ делится на $(n!)^{f(n)}$.

4. Найдите целую часть отношения $\dfrac{A}{B}$ для чисел

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{997\cdot 998}+\frac{1}{999\cdot 1000}$$

и

$$B=\frac{1}{501\cdot 1000}+\frac{1}{502\cdot 999}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 502}+\frac{1}{1000\cdot 501}.$$

5. Назовём натуральное число N *конструктивным*, если существует 1000 подряд идущих целых неотрицательных чисел, сумма всех цифр которых равна N. Найдите все конструктивные числа.

6. Найдите все пары натуральных чисел (n,p), где p простое и

$$1+2+\ldots+n=3\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+p^2\right).$$

7. Даны натуральные числа $k>1$ и $m>1$. $2k$ юных жителей Страны Дураков готовятся к ЕДЭ (Единому Дурацкому Экзамену). Экзамен состоит из mk вопросов, на каждый из которых предлагается k вариантов ответа; ровно один из ответов правильный, но какой именно — дуракам неведомо. Чтобы сдать экзамен, нужно дать хотя бы $m+1$ правильный ответ. Могут ли юные дураки договориться так, чтобы хотя бы один из них точно сдал экзамен?

8. Существует ли множество из 100 различных вещественных чисел, такое что среднее арифметическое любых 10 из них тоже лежит в этом множестве?

9. Треугольник ABC ($AC>BC$) вписан в окружность ω. Биссектриса CN этого треугольника пересекает ω в точке M ($M\neq C$). На отрезке BN отмечена произвольная точка T. Пусть H — ортоцентр треугольника MNT. Описанная окружность треугольника MNH пересекает ω в точке R ($R\neq M$). Докажите, что $\angle ACT=\angle BCR$.

10. Клетки доски $(2n+1)\times(2m+1)$ красятся в два цвета — белый и черный. Единичная клетка строки (столбца) называется доминирующей по строке (по столбцу), если более половины клеток этой строки (этого столбца) имеет одинаковый цвет с этой клеткой. Докажите, что по крайней мере $n+m+1$ клеток доски одновременно доминируют и по строке, и по столбцу.