Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Четвертый тур 28.11.2021. Высшая лига.

1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC < AB$. В нём проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в точке H, и отмечены середины сторон A_2, B_2, C_2 сторон BC, CA, AB соответственно. Окружность ω_1 проходит через центры вписанных окружностей треугольников HB_1B_2, HC_1C_2 и центр вневписанной окружности треугольника HA_1A_2, касающейся отрезка A_1A_2. Окружность ω_2 проходит через центры вневписанных окружностей треугольников HB_1B_2, HC_1C_2, касающихся отрезков B_1B_2 и C_1C_2 соответственно, и центр вписанной окружности треугольника HA_1A_2. Докажите, что радиусы ω_1 и ω_2 равны.

А. Скутин

2. Ерёма Кельин нарисовал сто прямых общего положения на плоскости. Он утверждает, что у всех выпуклых четырехугольников, образованных этими прямыми, отрезки, соединяющие середины диагоналей, параллельны друг другу. Могут ли его слова быть правдой?

М. Антипов

3. На круговой автодороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина в них хватает на два круга. Два водителя хотят, стартовав от одной колонки и, заправившись из неё, и стартовав в разные стороны, объехать каждый весь круг; по пути можно заправляться на других колонках, не обязательно забирая весь бензин. Докажите, что им это удастся.

И. Богданов

4. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с центром O. Точки P и Q таковы, что O лежит на отрезке PQ, и $PO = 3 \cdot QO$. Докажите, что $PA + PB + PC + PD \geqslant QA + QB + QC + QD$.

MathOverflow

5. Даны натуральные числа n, k, a и b. Назовём *путём* путь по целочисленными точкам из $(0, 0)$ в (n, k), где каждый шаг — сдвиг на единицу вправо или вверх. Рассмотрим два пути T и B с общими началом и концом, не имеющие других общих вершин, причём T лежит над B; они ограничивают клетчатый многоугольник P. Докажите, что количество путей в P, имеющих a горизонтальных рёбер из T и b горизонтальных рёбер из B, равно количеству путей в P, имеющих b горизонтальных рёбер из T и a горизонтальных рёбер из B.

6. Приведённый многочлен $f(x)$ степени n с целыми коэффициентами имеет n различных ненулевых комплексных корней $z_1, \ldots, z_n$. Докажите, что все числа вида $z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, являются целыми числами, делящимися на простое число p, тогда и только тогда, когда все коэффициенты в $f(x)$, некратные p, стоят при мономах x^k, где k кратно p.

MathOverflow

7. Пусть $n \geqslant 5$ — натуральное число, $\pi(n)$ — количество простых чисел, не превосходящих n, а $k < \pi(n)/2$ — натуральное число. Подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ назовём *примитивным*, если в нём нет двух чисел, одно из которых делится на другое. Докажите, что количество примитивных подмножеств мощности $k + 1$ не меньше, чем количество примитивных подмножеств мощности k.

KoMal

8. Сумма четырёх положительных чисел $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ равна 8. Докажите, что

$$\sqrt{2(a^2 + b^2)} + \sqrt{2(b^2 + c^2)} + \sqrt{2(c^2 + d^2)} + 2\sqrt{ad} \leqslant 16.$$

Ниньбинь, отбор на вьетнамскую олимпиаду

9. Последовательность a_0, a_1, a_2, … удовлетворяет соотношениям $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = x$, $a_3 = y$ и

$$a_{n+2}a_{n-2} = x^2 a_{n+1}a_{n-1} - y a_n^2$$

при всех $n \geqslant 2$ (здесь x и y — вещественные числа). Оказалось, что $a_n \neq 0$ при всех $n \neq 0$. Для натуральных чисел $k > \ell$, определим

$$f(k, \ell) = \frac{a_{k+\ell}a_{k-\ell}}{a_k^2 a_\ell^2}.$$

Докажите, что $f(k, m) = f(k, \ell) + f(\ell, m)$ при всех натуральных $k > \ell > m$.

В. Быковский, А. Устинов

10. В стране 100 городов и 100 деревень. Из некоторых городов в некоторые деревни ведут грунтовые дороги; других дорог нет. Известно, что даже после закрытия любой дороги из каждого города можно будет проехать по дорогам в любую деревню. Правительство решило заасфальтировать 100 дорог так, чтобы из каждого города выходила ровно одна асфальтированная дорога и все эти дороги вели в разные деревни. На конкурс были представлены все возможные проекты асфальтирования дорог, удовлетворяющие описанным выше требованиям (известно, что таких проектов было не менее одного). Какое наибольшее число дорог могло не упоминаться ни в одном из проектов?

Д.Карпов

Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Четвертый тур 28.11.2021. Первая лига.

1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < BC < CA$. Точки H_C и M_C — основание высоты из вершины C и середина стороны AB соответственно, а H — ортоцентр треугольника. Пусть I_C — центр вписанной окружности треугольника HH_CM_C, а J_C — центр вневписанной окружности треугольника HH_CM_C, касающейся стороны HM_C. Аналогично определяются точки H_B, M_B, I_B и J_B. Докажите, что точки I_B, I_C, J_B, J_C лежат на одной окружности.

А. Скутин, упрощение

2. Ерёма Кельин нарисовал сто прямых общего положения на плоскости. Он утверждает, что у всех выпуклых четырехугольников, образованных этими прямыми, отрезки, соединяющие середины диагоналей, параллельны друг другу. Могут ли его слова быть правдой?

М. Антипов

3. На круговой автодороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина в них хватает на два круга. Два водителя хотят, стартовав от одной колонки и, заправившись из неё, и стартовав в разные стороны, объехать каждый весь круг; по пути можно заправляться на других колонках, не обязательно забирая весь бензин. Докажите, что им это удастся.

И. Богданов

4. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с центром O. Точки P и Q таковы, что O лежит на отрезке PQ, и $PO = 3 \cdot QO$. Докажите, что $PA + PB + PC + PD \geqslant QA + QB + QC + QD$.

MathOverflow

5. Даны натуральные числа n и $m \geqslant n$. У Игоря есть по одному постеру с изображением Колмогорова всех возможных размеров $k \times \ell$, где $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant \ell \leqslant n$ (в общей сложности mn постеров). Он должен по очереди повесить их все на стену в своей комнате (не поворачивая). Каждый очередной повешенный постер должен либо не перекрываться с предыдущими, либо полностью накрывать один из тех постеров, которые видны на стене на данный момент, и не перекрываться с остальными видимыми постерами. Какую наименьшую суммарную площадь могут занимать постеры, когда все они будут повешены?

Switzerland Final Round 2021

6. Пусть n — натуральное число. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, что

$$P(x)P(x^2)\dots P(x^n) = P\left(x^{n(n+1)/2}\right).$$

Саудовская Аравия, тренировочная олимпиада, 2019

7. Пусть $n \geqslant 5$ — натуральное число, $\pi(n)$ — количество простых чисел, не превосходящих n, а $k < \pi(n)/2$ — натуральное число. Подмножество множества $\{1, 2, \dots, n\}$ назовём *примитивным*, если в нём нет двух чисел, одно из которых делится на другое. Докажите, что количество примитивных подмножеств мощности $k+1$ не меньше, чем количество примитивных подмножеств мощности k.

KoMal

8. Сумма четырёх положительных чисел $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ равна 8. Докажите, что

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+d^2)} + 2\sqrt{ad} \leqslant 16.$$

Ниньбинь, отбор на вьетнамскую олимпиаду

9. Последовательность натуральных чисел (a_i) задана условиями $a_1 = a$, $a_{k+1} = a_k^2 + 1$ для каждого натурального числа k. Докажите, что для каждого натурального числа n число

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\dots(a_n + a_{n+1})$$

не является точным квадратом.

Саудовская Аравия, тренировочная олимпиада, 2019

10. В стране 100 городов и 150 деревень. Из некоторых городов в некоторые деревни ведут грунтовые дороги. Правительство решило заасфальтировать 100 дорог так, чтобы из каждого города выходила ровно одна асфальтированная дорога и все эти дороги вели в разные деревни. На конкурс были представлены все возможные проекты асфальтирования дорог, удовлетворяющие описанным выше требованиям (известно, что таких проектов было не менее одного). Какое наибольшее число дорог могло не упоминаться ни в одном из проектов?

Д.Карпов