Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Второй тур 25.11.2021. Вторая лига.

1. Дано вещественное число α. Найдите все многочлены P с вещественными коэффициентами такие, что неравенство

$$P(2x+\alpha) \leqslant (x^{20}+x^{19})P(x)$$

выполнено при всех вещественных x.

2. Дан треугольник ABC. На сторонах BC, CA, AB во внешнюю сторону построены квадраты с центрами O_a, O_b, O_c соответственно. Окружность ω описана около треугольника $O_aO_bO_c$. Оказалось, что точка A лежит на ω. Докажите, что центр ω лежит на одной из сторон ABC.

3. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Точка N на отрезке CM такова, что $MN \cdot MC = AM^2$. Прямые AN и BN вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q соответственно. На отрезке PQ отмечены точки R и S, ближайшие к Q и P соответственно, такие, что $\angle NRC = \angle BNC$, $\angle NSC = \angle ANC$. Докажите, что $RN = SN$.

4. n пиратов собираются поделить сокровище, состоящее из одинаковых монет, как-то разложенных по мешкам. Количество монет и количество мешков делится на n, при этом изначально хотя бы k мешков пустые. Их главарь собирается несколько раз проделать следующую операцию: взять произвольный мешок и переложить из него несколько монет в пустой мешок. После этого он должен поделить сокровище между n пиратами так, чтобы каждому досталось поровну монет и поровну мешков. Для какого наименьшего k главарь всегда справится, как бы ни лежали монеты изначально?

5. На плоскости отмечена 2021 точка с целыми координатами. Оказалось, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками — целое. Докажите, что среди этих расстояний более 666 666 делятся на 3.

6. Для положительных чисел x, y докажите неравенство

$$\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}+\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{y^2+y+1} \geqslant 2(x+y).$$

7. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, определенная как

$$a_1 = 1, \quad a_{k+1} = a_k^3 + 1$$

при всех натуральных k. Докажите, что каждое простое p вида $3\ell + 2$, где ℓ натуральное, является делителем a_n при некотором натуральном n.

8. В клетках таблицы 2021×2021 расположены фишки, пронумерованные числами от 1 до k. В каждой клетке лежит не более одной фишки. Для каждой клетки вычислили множество номеров фишек, расположенных с ней в одной строке или в одном столбце (если в самой этой клетке лежит фишка, то её номер тоже учитывается). Оказалось, что у всех клеток эти множества различны. При каком наименьшем k такое могло случиться?

9. Для натурального числа n обозначим через $f(n)$ количество натуральных чисел, меньших n, которые не являются делителями n, но и не взаимно просты с ним. Докажите, что для каждого натурального k существует лишь конечное число n таких, что $f(n) = k$.

10. На доске в ряд выписаны числа 1, 2, …, 2021, каждое покрашено в черный или белый цвет. За один шаг Алина может выбрать три числа такие, что сумма двух из них равна удвоенному третьему, и поменять у этих трех чисел цвет. Алина хочет сделать все числа черными. Верно ли, что из любой изначальной раскраски Алине удастся осуществить желаемое?