Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Личная олимпиада. Старшая группа. Довывод.

1. 999 команд сыграли двухкруговой турнир по волейболу: каждая сыграла с каждой матч дома и матч в гостях. Каждая команда выиграла ровно половину своих домашних матчей и ровно половину гостевых. Докажите, что какая-то из команд дважды обыграла какую-то другую. Напомним, что в волейболе ничьих не бывает.

М. Антипов

2. В равнобокой трапеции $ABCD$ окружность с центром на основании AD касается прямых AB и CD в точках B и C соответственно. Пусть отрезок AC вторично пересекает эту окружность в точке P. Пусть точка K такова, что $ABCK$ — параллелограмм. Описанная окружность треугольника CKD пересекает отрезок AC в точке $Q \neq C$. Докажите, что $AP = CQ$.

Казахстан 2018

3. Дано простое число $p > 3$. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $a + b = c + d = p$, а число $abcd$ — точный квадрат. Докажите, что какие-то два из чисел a, b, c и d совпадают.

Саудовская Аравия 2019

4. Каждой *упорядоченной* паре чисел x и y из интервала $(0, 1)$ сопоставлено натуральное число $f(x, y)$. Может ли случиться так, что равенство $f(x, y) = f(y, z)$ выполняется только при $x = y = z$?

Соревнование им. М. Швейцера, 1966

Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Личная олимпиада. Старшая группа. Вывод.

5. Дети привёзли в лагерь по гаджету. При заезде гаджеты пронумеровали: гаджет, привезённый ребёнком i, получил номер i. В первую же ночь дети обсудили, кто что привёз, и каждый составил для себя список, перечислив все гаджеты в порядке от более желанного к менее желанному. Воспитатель хочет предложить детям поменяться гаджетами так, что ребёнку i достанется гаджет с номером $\sigma(i)$. Группа детей A может *заблокировать предложение*, если дети из A могут перераспределить между собой гаджеты, которые они привезли сами, так, чтобы каждый ребёнок $i \in A$ получил гаджет (привезённый ребёнком из A), который ему нравится не меньше, чем $\sigma(i)$, и при этом нашёлся бы ребёнок $i_0 \in A$, получивший гаджет с номером, отличным от $\sigma(i_0)$. Докажите, что существует не более одного предложения воспитателя, которое не может заблокировать ни одна группа детей.

L. Shapley, H. Scarf, D. Gale

6. Докажите, что многочлен

$$P(x) = \sum_{i=1}^{1\,000\,000} x^{i(i-1)/2}$$

раскладывается в произведение семи непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

Mathoverflow

7. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$, все стороны которого имеют разные длины. На сторонах AD и CD выбраны точки P и Q соответственно. Оказалось, что вписанные окружности треугольников ABP и CBQ с центрами I_A и I_C имеют равные радиусы. Окружность с центром J_A касается отрезков AB, AD и BQ. Окружность с центром J_C касается отрезков BC, CD и BP. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BI_AJ_C и BI_CJ_A лежит на биссектрисе угла ABC.

С. Арутюнян, И. Богданов, И. Фролов