Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Первый тур 24.11.2021. Высшая лига.

1. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Найдите наибольшее вещественное число λ такое, что для любых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих соотношениям $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 = 1$, выполнено неравенство

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 - \left(x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+\ldots+x_n^2y_n^2\right) \geqslant \lambda.$$

MathOverflow

2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_c касается отрезков AH и BH, а также окружности с диаметром AB. Точки O_a и O_b определяются аналогично. Докажите, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

А. Кузнецов

3. В выпуклом многоугольнике P выбрана хорда наименьшей длины, делящая площадь пополам. Могут ли углы, образованные этой хордой со сторонами, к которым она прилегает, быть меньше $60°$?

Mathoverflow, И. Богданов

4. Есть $n \geqslant 2$ чугунных и n медных гирь, каждая весит не более $n-\frac{1}{2}$, сумма весов гирь каждого типа равна n. Докажите, что можно разделить все гири на две группы так, что в каждой группе будут как чугунные, так и медные гири, а разность суммарных весов групп не будет превосходить 1.

MathOverflow

5. Дан связный граф на $n \geqslant 3$ вершинах, остающийся связным при выкидывании любой вершины. Известно, что в любом простом цикле нет двух вершин, связанных ребром не из цикла. Докажите, что все ребра можно ориентировать так, чтобы от любой вершины можно было добраться до любой другой, но при выкидывании любого ребра это свойство нарушалось.

H. Robbins

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Вневписанная окружность касается отрезка AC в точке K. Пусть W — вторая точка пересечения BI и описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, симметричная I относительно высоты, опущенной из вершины B. Известно, что $\angle IKW = 90°$. Найдите величину угла $\angle BPK$.

С. Арутюнян

7. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ имеют целые коэффициенты. Докажите, что и $P(x)$ имеет целые коэффициенты.

Японский отбор на ММО-2019

8. По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки 2021 различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Какого наибольшего числа одноцветных пар соседей можно гарантированно добиться такими операциями из любого начального расположения?

М. Антипов

9. Найдите все тройки инъективных функций f, g, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношениям

$$f(x+f(y)) = g(x)+h(y), \quad g(x+g(y)) = h(x)+f(y), \quad h(x+h(y)) = f(x)+g(y)$$

при всех x, $y \in \mathbb{R}$.

ELMO 2014

10. Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$. По ней строится последовательность вещественных чисел $b_1, b_2, b_3, \ldots$, где

$$b_n = \frac{a_1a_2\ldots a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Оказалось, что среди любого миллиона подряд идущих членов последовательности $b_1, b_2, b_3, \ldots$ есть хотя бы один, являющийся целым числом. Докажите, что найдется такое k, что $a_k > 2021^{2021}$.

2021 Iberoamerican Mathematical Olympiad, P3 Усложнение

Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

Первый тур 24.11.2021. Первая лига.

1. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Найдите наибольшее вещественное число λ такое, что для любых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих соотношениям $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2 = 1$, выполнено неравенство

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 - \left(x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+\ldots+x_n^2y_n^2\right) \geqslant \lambda.$$

MathOverflow

2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность с центром в точке O_c касается отрезков AH и BH, а также окружности с диаметром AB. Точки O_a и O_b определяются аналогично. Докажите, что прямые AO_a, BO_b и CO_c пересекаются в одной точке.

А. Кузнецов

3. *Триангуляцией* выпуклого многоугольника называется разбиение его на треугольники непересекающимися диагоналями. *Антикликой* в данной триангуляции назовём подмножество вершин многоугольника, никакие две из которых не являются вершинами одного и того же треугольника из триангуляции. Саша подсчитал, что в любой триангуляции данного выпуклого 100-угольника хотя бы M антиклик, причем есть триангуляции, в которых их ровно M. Сколько триангуляций содержат ровно M антиклик?

BW21-SL

4. Есть $n \geqslant 2$ чугунных и n медных гирь, каждая весит не более $n - \frac{1}{2}$, сумма весов гирь каждого типа равна n. Докажите, что можно разделить все гири на две группы так, что в каждой группе будут как чугунные, так и медные гири, а разность суммарных весов групп не будет превосходить 1.

MathOverflow

5. Дан полный двудольный граф, в каждой доле которого по n вершин. Каждое ребро этого графа покрашено в один из $n^2 - 2n + 2$ цветов. При этом в каждый цвет покрашено хотя бы одно ребро. Докажите, что найдутся две вершины графа, между которыми существует не более одного одноцветного простого пути.

KMO 2021

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Вневписанная окружность касается отрезка AC в точке K. Пусть W — вторая точка пересечения BI и описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, симметричная I относительно высоты, опущенной из вершины B. Известно, что $\angle IKW = 90^\circ$. Найдите величину угла $\angle BPK$.

С. Арутюнян

7. Непостоянный многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами таков, что для любых натуральных чисел n и k число

$$\frac{f(n+1)\cdot f(n+2)\cdot\ldots\cdot f(n+k)}{f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(k)} \text{ — целое.}$$

Докажите, что $f(0) = 0$.

Саудовская Аравия, отбор на ММО, 2019

8. По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки 2021 различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Какого наибольшего числа одноцветных пар соседей можно гарантированно добиться такими операциями из любого начального расположения?

М. Антипов

9. Докажите, что для вещественных чисел x и y равенство $|x^5 - y^5| = xy\max(x^3, y^3)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется равенство $|x^3 - y^3| = xy\min(x, y)$.

журнал Mathematical Reflections, 2021 год, выпуск 1

10. Дано натуральное $n > 2$; положим $b = 2^{2^n}$. Нечётное натуральное число a таково, что $a \leqslant b \leqslant 2a$. Докажите, что число $a^2 + b^2 - ab$ не является точным квадратом.