Двадцать четвёртый математический турнир старшеклассников
«Кубок памяти А.Н.Колмогорова»
Великий Новгород, 22–29 ноября 2021 года

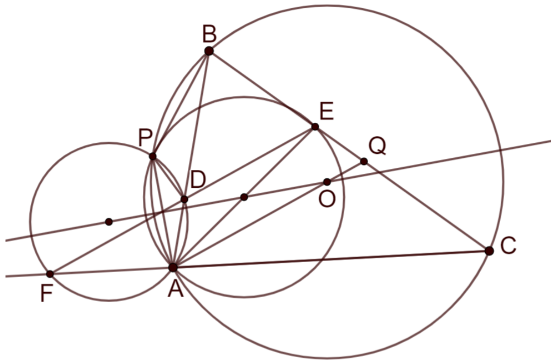
Первый тур 24.11.2021. ВТОРАЯ ЛИГА, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

Конкурс капитанов. Дан клетчатый квадрат 8×8. Отметьте 5 вершин квадратиков 1×1, не все из которых лежат на одной прямой, так, чтобы все расстояния между отмеченными точками были целыми.

1. *Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O. Прямая ℓ, параллельная прямой AO, пересекает отрезки AB, BC и луч CA в точках D, E и F соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AFD, середина отрезка AE и точка O лежат на одной прямой.*



Решение. Пусть Ω — окружность, построенная на AE как на диаметре. В задаче нужно доказать, что центры окружностей (ABC), (AFD) и ω лежат на одной прямой. Эти окружности имеют общую точку A. Тогда если мы покажем, что у этих окружностей есть ещё одна общая точка P, то их центры будут лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AP. Пусть P — вторая точка пересечения окружностей (AFD) и (ABC), а Q — точка пересечения прямой AO с отрезком BC. Обозначим $\angle OAC = \alpha$, $BCA = \beta$. Тогда $\angle ABC = \angle AOC/2 = (180^\circ - 2\angle OAC)/2 = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$; $\angle APD = \angle AFD = \angle CAO = \alpha$; $\angle BED = \angle BQA = \angle QAC + \angle QCA = \alpha + \beta$; $\angle BPD = \angle APB - \angle APD = (180^\circ - \angle ACB) - \alpha = 180^\circ - \alpha - \beta$. Из этих тождеств получаем, что точки P, B, E, D лежат на одной окружности, так как $\angle BPD + \angle BED = 180^\circ$. Следовательно, $\angle DPE = \angle DBE = \angle ABC = 90^\circ - \alpha$, откуда $\angle APE = \angle APD + \angle DPE = 90^\circ$. Значит, P лежит на Ω, откуда и следует решение задачи.

2. *Школьный этап Всероссийской олимпиады по математике проходил в виде тестирования, состоящего из n вопросов. За каждый вопрос можно было получить либо 0 баллов за неверный ответ, либо 1 балл за верный. Известно, что на каждый вопрос кто-то ответил верно, а также не все участники набрали одинаковое количество баллов. Докажите, что для какого-то вопроса средний балл тех, кто ответил на него верно, выше среднего балла тех, кто ответил на него неверно.*

Решение. Лемма. Пусть мы разбили всех участников на две группы, и в первой средний балл равен x, а во второй — y. Тогда средний балл всех участников находится между x и y.

Доказательство леммы. Пусть в первой группе a человек с суммарным баллом S, а во второй группе b человек со средним баллом T, и $x \leqslant y$. Тогда мы хотим доказать, что

$$\frac{S}{a} \leqslant \frac{S+T}{a+b} \leqslant \frac{T}{b}.$$

Каждое неравенство доказывается немедленно после домножения на знаменатели.

Из леммы следует, что мы можем сравнивать средний балл тех, кто ответил на вопрос верно, с общим средним баллом (обозначим его через X): если их средний балл больше X, то тем более он будет больше среднего балла ответивших неверно. Пусть на i-й вопрос верно ответили a_i человек, а их суммарный балл равен S_i. Предположим противное; тогда $\dfrac{S_i}{a_i} \leqslant X$. Также из леммы получаем, что

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leqslant X.$$

Докажем, что это неверно. В сумме $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ результат каждого участника посчитан столько раз, сколько баллов он набрал. Обозначим баллы участников как b_1, b_2, $\ldots$, b_k. Тогда то же неравенство переписывается как

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_k} \leqslant \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k}.$$

Последнее неравенство — неравенство между средним арифметическим и геометрическим с противоположным знаком. При этом равенство невозможно, так как среди b_i по условию есть разные значения. Противоречие.

♦ Задача сведена к сравнению среднего балла решивших задачу и среднего балла всех участников: *2 балла.*

3. *Дано натуральное $n > 2$ и $b = 2^{2^n}$. Нечетное натуральное число a таково, что $a \leqslant b \leqslant 2a$. Докажите, что число $a^2 + b^2 - ab$ не является точным квадратом.*

Решение. Пусть $b = 4m$ и $a = b - z$. Из условия следует, что $z \leqslant 2m$. Предположим, что $a^2 + b^2 - ab = k^2$. Тогда $k^2 - (b-a)^2 = ab \implies (k+z)(k-z) = ab$. В правую часть последнего равенства двойка входит в степени в точности 2^n. Так как z нечетно, то в левой части одна из скобок не делится на 4. Разберем два случая.

Случай 1: $k + z \not\vdots\, 4$. Тогда $k - z = 2m\ell$ для некоторого натурального ℓ. Равенство перепишется как $(2m\ell)(2m\ell + 2z) = 4ma \implies \ell(m\ell + z) = a \leqslant b = 4m \implies \ell^2 < 4 \implies \ell = 1$.

Следовательно, $m + z = a \implies 4m + 4z = 4a \implies b + 4(b - a) = 4a \implies 8a = 5b$, что невозможно, в силу $v_2(b) = 2^n > 3$.

Случай 2: $k - z \not\vdots\, 4$. Тогда $k + z = 2m\ell$, то есть $2m\ell(2m\ell - 2z) = 4ma \implies \ell(m\ell - z) = a$. Следовательно, $m\ell^2 = a + \ell z \leqslant 4m + 2m\ell \implies \ell^2 \leqslant 4 + 2\ell$, значит, $\ell \leqslant 3$.

Проверим, что такие значения ℓ тоже не подходят. Мы знаем, что $a = m\ell^2 - z\ell \implies 4a = b\ell^2 - (b-a)\ell \implies (4+\ell)a = b\ell(\ell - 1)$. При $\ell = 1$ слева не 0, а справа 0. При $\ell = 2$ получаем $6a = 2b$, при $\ell = 3$ — $7a = 6b$, что опять невозможно, так как b делится на большую степень двойки.

4. *Найдите все такие тройки натуральных взаимно простых в совокупности чисел (a, b, c), что для любого натурального n число $(a^n + b^n + c^n)^2$ делится на $ab + bc + ca$.*

Ответ: (1,1,1), (4,1,1), (1,4,1), (1,1,4).

Решение 1. Для начала покажем, что $(a, ab + bc + ca) = 1$. Пусть $a \,\vdots\, p$ и $a(b + c) + bc \,\vdots\, p$. Тогда или b, или c делится на p. Но тогда так как $a + b + c \,\vdots\, p$, то все три переменные делятся на p, что невозможно по условию. Значит, $(a, ab + bc + ca) = (b, ab + bc + ca) = (c, ab + bc + ca) = 1$. Подставим $n = \varphi(ab + bc + ca)$, получим $(a^{\varphi(ab+bc+ca)} + b^{\varphi(ab+bc+ca)} + c^{\varphi(ab+bc+ca)})^2 \equiv (1 + 1 + 1)^2 \equiv 9 \pmod{ab + bc + ca}$. Отсюда получаем, что $9 \,\vdots\, ab + bc + ca$. Если $ab + bc + ca = 3$, то все переменные равны 1. Если все переменные хотя бы 2, то $ab + bc + ca \geqslant 12$. Пусть $a = 1$, тогда $b + c + bc = (b + 1)(c + 1) - 1 = 9$, откуда получаем ещё одно решение $(1, 1, 4)$. Осталось убедиться, что эти решения подходят. Действительно, $(1^n + 1^n + 1^n)^2 \,\vdots\, 3$ и $(1^n + 1^n + 4^n)^2 \,\vdots\, 9$, так как $1^n + 1^n + 4^n \equiv 0 \pmod 3$.

Решение 2. Как и в первом решении, будем пользоваться тем, что $(a, ab+bc+ca) = (b, ab+bc+ca) = (c, ab+bc+ca) = 1$. Подставим $n = 3$, получим $(a^3+b^3+c^3)^2 = ((a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc)^2 \,\vdots\, ab+bc+ca$. Откуда получаем, что $9(abc)^2 \,\vdots\, ab + bc + ac$, а значит $9 \,\vdots\, ab + bc + ac$. Далее ответы находятся как в первом решении.

♦ Теорема Эйлера используется без проверки взаимной простоты: *дыра в 4 балла.*

5. *По кругу в каком-то порядке через равные промежутки стоят фишки 2021 различных цветов, каждый цвет встречается ровно дважды. Разрешается поменять местами две соседние фишки, если каждая из них при этой перестановке приблизится к другой фишке своего цвета. Какого наибольшего числа одноцветных пар соседей можно гарантированно добиться такими операциями из любого начального расположения?*

Ответ: 2.

Решение. *Оценка сверху.* Приведём пример ситуации, в которой больше двух пар получить нельзя. Расположим фишки цветов 1 рядом и фишки цветов 2 тоже, они разбивают круг на две дуги, фишки остальных цветов расположим по одной в каждой из этих дуг. Тогда никаких новых одноцветных пар соседей не образуется, потому что с фишками цветов 1 и 2 местами уже никто не поменяется.

Оценка снизу. Докажем, что хотя бы две пары сделать всегда получится. Будем делать операции, пока можем, сумма расстояний между одноцветными фишками будет уменьшаться, поэтому бесконечно процесс продолжаться не может. Напишем на фишке A, если при смещении по часовой стрелке расстояние от неё до одноцветной уменьшится, и B, если при смещении против часовой стрелки расстояние от неё до одноцветной уменьшится. Если одноцветные фишки диаметрально противоположны, напишем произвольно на одной A, на другой B. Заметим, что у нас 2021 фишка с A, 2021 фишка с B. Если больше ни одной замены сделать нельзя, то по часовой стрелке от фишки с A либо фишка с A, либо фишка того же цвета, а против часовой стрелки от фишки с B либо фишка с B, либо фишка того же цвета. Отсюда ясно, что хоть одна пара одноцветных соседей есть, иначе все буквы были бы одинаковыми. Если одноцветная пара соседей только одна, то при обходе по часовой стрелке только один раз после A будет B, значит все фишки с A идут подряд. Рассмотрим первую из них по часовой стрелке. Фишка одного цвета с ней должна быть не далее чем на 2021 по часовой стрелке от неё, то есть тоже должна содержать букву A. Но у нас на фишках одного цвета разные буквы. Противоречие.

⧫ Оценка сверху: *2 балла*, оценка снизу: *6 баллов.*

6. *Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Найдите наибольшее вещественное число λ такое, что для любых вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих соотношениям $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = 1$, выполнено неравенство*

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 - \left(x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + \ldots + x_n^2y_n^2\right) \geqslant \lambda.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$. Достигается для наборов $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots, 0)$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots, 0)$.

Решение. Нам необходимо доказать неравенство

$$\sum x_i^2y_i^2 \leqslant 1/2 + \left(\sum x_iy_i\right)^2 .(*)$$

Обозначим

$$s_+ = \sum_{i:\, x_iy_i \geqslant 0} x_iy_i, \qquad s_- = \sum_{i:\, x_iy_i < 0} x_iy_i.$$

Оценим левую часть $(*)$ следующим образом: $\sum x_i^2y_i^2 \leqslant s_+^2 + s_-^2$. Преобразуем правую часть

$$\left(\sum x_iy_i\right)^2 = s_+^2 + s_-^2 + 2s_-s_+ = s_+^2 + s_-^2 - 2|s_-| \cdot |s_+|.$$

Теперь нам достаточно доказать неравенство $|s_-| \cdot |s_+| \leqslant \frac{1}{4}$ (1).

$$2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 = \sum x_i^2 + y_i^2 \geqslant \sum 2|x_iy_i| = 2(|s_+| + |s_-|) \geqslant 4\sqrt{|s_-| \cdot |s_+|},$$

откуда получаем (1).

7. *Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Вневписанная окружность касается отрезка AC в точке K. Пусть W — вторая точка пересечения BI и описанной окружности треугольника ABC, а P — точка, симметричная I относительно высоты, опущенной из вершины B. Известно, что $\angle IKW = 90°$. Найдите величину угла $\angle BPK$.*

Решение. Пусть BH — высота, M — середина AC, а L — точка касания вписанной окружности с AC. Гомотетия с центром B, переводящая вписанную окружность во вневписанную, переводит точку X, симметричную L относительно I, в K. Поэтому KI — медиана треугольника BHK и $MI \parallel BK$. Поскольку $\angle WKL = \angle WLK = \angle KIL$, то W — точка пересечения касательных к окружности (IKL) в точках K и L. Поэтому IW — симедиана треугольника IKL, откуда $\angle IKB = \angle MIK = \angle WIL = \angle HBI$. Значит, окружность (KIB) касается BH. Середина BH имеет равные степени относительно окружностей (KIB) и (KIH), поэтому окружность (KIH) тоже касается BH. Следовательно, $\angle BPH = \angle BIH = 180° - \angle BKH$. Тогда четырехугольник $BKHP$ вписан, и $\angle BPK = \angle BHK = 90°$.

8. *Дан полный двудольный граф, в каждой доле которого по n вершин. Каждое ребро этого графа покрашено в один из $n^2 - 2n + 2$ цветов. При этом в каждый цвет покрашено хотя бы одно ребро. Докажите, что найдутся две вершины графа, между которыми существует не более одного одноцветного простого пути.*

Решение. Рассмотрим по отдельности все цвета и для каждого цвета разобьем граф, образованный ребрами выбранного цвета, на компоненты связности. Мы будем рассматривать только те компоненты, которые содержат более одной вершины. Пусть всего (для всех цветов) образовалось m таких компонент связности. Обозначим их через $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Для компоненты G_i обозначим через v_i число её вершин, через e_i число её ребер и через c_i — *избыток ребер* этой компоненты, равный $e_i - 1$. Отметим, что $m \geqslant n^2 - 2n + 2$ и все c_i неотрицательны. Поскольку всего в графе n^2 ребер, получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i = n^2 - m \leqslant 2n - 2$.

Рассмотрим произвольную вершину p. Пусть p входит ровно в s компонент G_i. Не умаляя общности будем считать, что это компоненты $G_1, G_2, \ldots, G_s$. Также не умаляя общности будем считать, что первые k из этих s компонент являются деревьями, а последующие $s - k$ компонент содержат циклы. Тогда $c_i = v_i - 2$

при $i \leqslant k$ и $c_i \geqslant v_i - 1$ при $k < i \leqslant s$. Предположим, что для любой вершины $q \neq p$ найдется как минимум два одноцветных простых пути из p в q. Тогда каждая такая вершина должна входить вместе с p либо хотя бы в две компоненты, являющиеся деревьями, либо хотя бы в одну компоненту, не являющуюся деревом. Тем самым, все вершины, кроме p, можно разделить на следующие три категории: 1) вершины, входящие хотя бы в две компоненты дерева; 2) вершины, входящие ровно в одну компоненту дерево и хотя бы в одну компоненту не дерево; 3) вершины, не входящие ни в одну компоненту дерево, но входящие хотя бы в одну компоненту не дерево. Обозначим количество вершин этих категорий через x, y и z соответственно. Тогда $x + y + z = 2n - 1$. Кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{k}(v_i - 1) \geqslant 2x + y$ и $\sum\limits_{i=k+1}^{s}(v_i - 1) \geqslant y + z$. Заметим также, что $k \leqslant x + y$. Действительно, каждое из деревьев $G_1, G_2, \ldots, G_k$ содержит хотя бы одно ребро, инцидентное p, все такие ребра различны и ведут в вершины первой или второй категории, следовательно, таких вершин не меньше k.

Итого получаем $2n-2 \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{s} c_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k}(v_i-2)+\sum\limits_{i=k+1}^{s}(v_i-1) \geqslant (2x+y-k)+(y+z) \geqslant x+y+z = 2n-1$. Противоречие.

9. *Дана последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... По ней строится последовательность вещественных чисел b_1, b_2, b_3, ..., где*

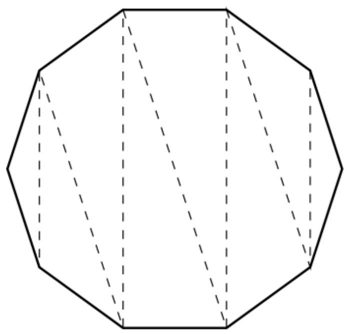
$$b_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Оказалось, что среди любого миллиона подряд идущих членов последовательности b_1, b_2, b_3, ... есть хотя бы один, являющийся целым числом. Докажите, что найдется такое k, что $a_k > 2021^{2021}$.

Решение. Предположим, что для некоторого M верно, что $a_k < M$ для любого k. Выберем $2 \cdot 10^6 M$ простых чисел, больших M, — $p_1, p_2, \ldots$ По китайской теореме об остатках существует такое N, что $N+i \vdots p_i$. Рассмотрим наименьшее такое n, что $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n > N$. Заметим, что при этом $S_n < N + 2 \cdot 10^6 M$. Следовательно, $S_n \vdots p_i$ для некоторого i. Но в этот момент числитель не кратен p_i, так как все a-шки меньше M. Поэтому b_n не является целым. То же можно сказать и про следующие миллион b-шек. Противоречие.

10. *Триангуляцией выпуклого n-угольника называется разбиение его на треугольники непересекающимися диагоналями. Антикликой триангуляции назовем подмножество вершин многоугольника, никакие две из которых не соединены стороной или диагональю. Саша подсчитал, что в любой триангуляции 100-угольника хотя бы M антиклик, причем есть триангуляции, в которых их ровно M. Сколько триангуляций содержат ровно M антиклик?*

Ответ: 100. **Решение.** Будем доказывать по индукции, что наименьшее количество антиклик достигается на триангуляции вида «зиг-заг» (пример такой триангуляции изображен на рисунке справа) и только на них. Пусть z_n — количество антиклик в «зиг-заг» триангуляции n угольника. База для $n = 3$, 4 и 5 работает, так как для них триангуляции единственны с точностью до поворота. Переход. Пусть дана триангуляция P. В этой триангуляции есть треугольник, НУО $A_{n-1}A_nA_1$ такой, что стороны $A_{n-1}A_n$ и A_nA_1 являются сторонами n-угольника. Антиклик, не содержащих A_n, столько, сколько в многоугольнике $A_1 \ldots A_{n-1}$ с теми же диагоналями. По индукционному предположению их не менее z_{n-1}, причем равенство только при «зиг-заг» триангуляции. Если антиклика содержит A_n, то мы можем дополнять её только вершинами $A_2, \ldots, A_{n-2}$. По индукционному предположению таких антиклик не менее z_{n-3}, причем равенство достигается только если проведена диагональ A_2A_{n-2} и оставшиеся диагонали образуют «зиг-заг» триангуляцию многоугольника $A_2 \ldots A_{n-2}$. Итого, антиклик не менее $z_{n-1} + z_{n-3}$, причем равенство достигается только если проведена диагональ A_2A_{n-2} и в многоугольнике $A_1 \ldots A_{n-1}$ диагонали образуют «зиг-заг» триангуляцию. В четырехугольнике $A_1A_2A_{n-2}A_n$ мы проводим одну из диагоналей и она вместе с A_2A_{n-2} однозначно восстанавливается до «зиг-заг» триангуляции многоугольника $A_1 \ldots A_{n-1}$. Причем эти диагонали вместе с A_1A_n образуют «зиг-заг» триангуляцию n-угольника.



Осталось посчитать количество «зиг-заг» триангуляций. Мы выбираем произвольную вершину за начало ломаной, далее идем от нее через одну вершины вправо или влево, и весь остальной путь однозначно определяется первым звеном. Итого, $2 \cdot 100$, но каждую ломаную мы посчитали дважды (для одного конца и для второго), поэтому на самом деле ответ 100.

♦ Только верный ответ и примеры «зиг-загов»: *не оценивается.*