Решения задач командной олимпиады старшей группы.

1. *В школе провели олимпиады по математике, физике и информатике, в каждой олимпиаде приняли участие 40 школьников (один и тот же школьник может принимать участие в разных олимпиадах). Докажите, что школьников можно разбить на 20 групп так, чтобы в каждой группе был и участник олимпиады по математике, и участник олимпиады по физике, и участник олимпиады по информатике.*

Сербия, 2019

Решение. Распределим сначала в каждую группу по одному школьнику, участвовавшем в олимпиаде по математике. Пусть в x группах уже есть школьник, писавший физику. Тогда нам осталось добавить писавшего физику в $20-x$ групп. При этом из 40 школьников, писавших физику, мы использовали x человек, то есть ещё $40-x$ школьников осталось, $x \leqslant 20$. Так как мы использовали 20 человек, то хотя бы 20, писавших информатику, ещё осталось. Распределим их по одному в каждую группу. Даже если кто-то из них также писал физику, у нас осталось хотя бы $40 - x - 20 = 20 - x$ нераспределённых человек, писавших физику. Поэтому мы можем добавить по одному человеку в каждую из $20 - x$ групп, где не было физика после того, как были распределены математики. Итого в каждой группе есть участник каждой олимпиады, и если ещё какие-то школьники остались нераспределёнными, их можно определить в любую группу.

Замечание. На самом деле, в условии число 40 можно заменить на 27, а вот на 26 уже нельзя — строится контрпример.

2. *Пусть $N = k^{2021}+1$ при некотором натуральном $k > 10^6$. На доске в указанном порядке в ряд выписаны числа N, $N-k$, $N-2k$, $\ldots$, $k+1$, 1. За один шаг с доски стирается самое левое из оставшихся чисел вместе со всеми своими делителями (если такие есть). Эту операцию проделали несколько раз, пока на доске не осталось ни одного числа. Какие числа были стёрты на последнем шаге?*

Казахстан, областная олимпиада 2018

Ответ: Только число $\dfrac{k^{2021}+1}{k+1}+k$.

Решение. Обозначим $\dfrac{k^{2021}+1}{k+1}+k = b$. Во-первых, число b действительно находится в этом ряду, так как оно даёт остаток 1 при делении на k и меньше N. Докажем сначала, что это число не является делителем никакого числа левее него. Предположим противное и обозначим через a число, которое делится на b. Пусть $a = b \cdot t$. По модулю k числа a и b дают остатки 1, поэтому t тоже даёт остаток 1. Но тогда или $t = 1$, или $t \geqslant k+1$. В первом случае $a = b$, но на самом деле $a > b$; во втором случае $b \cdot (k+1) > a$, противоречие.

Итак, число b не будет вычеркнуто как делитель числа левее него. Осталось доказать, что все остальные числа будут вычеркнуты к моменту, когда доберутся до b. Отметим, что число на позицию правее b равно $\frac{N}{k+1}$.

Рассмотрим произвольное число c правее b. Будем умножать его на $k+1$, пока оно не попадёт в промежуток $\left(\frac{N}{k+1}; N\right]$. Оно не может перепрыгнуть весь промежуток, так как отношение концов промежутка как раз равно $k+1$. Получается, что где-то в промежутке есть число m, делителем которого является c. Значит, мы вычеркнем число c не позднее шага, на котором мы вычеркнем само число m. Осталось убедиться, что никакое число не вычеркнуто на последнем шаге вместе с b. Но

$$b = \frac{k^{2021}+1}{k+1} + k = k^{2020} - k^{2019} + k^{2018} - \ldots - k + 1 + k$$

сравнимо с $2021 + k$ по модулю $k+1$ (так как $k^s \equiv (-1)^s \pmod{k+1}$), что не сравнимо с нулём благодаря условию $k > 10^6$. Поэтому для любого числа c, рассмотренного выше, полученное число m не совпадает с b. Значит, только число b будет вычеркнуто на последнем шаге.

3. *В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC точка M — середина стороны AB. Точка K такова, что K и B лежат в разных полуплоскостях относительно AC, $\angle KMC = 90^\circ$ и $\angle KAC = 180^\circ - \angle ABC$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает отрезок CK в точке E. Докажите, что точки A, M, C и E лежат на одной окружности.*

Iran MO Third Round 2021, упрощение

Решение. Пусть AH — высота треугольника ABC. Построим на AC треугольник CAK', подобный треугольнику CHM так, что K' и B лежат по разные стороны от AC и $\dfrac{CK'}{CM} = \dfrac{CA}{CH} = \dfrac{AK'}{MH}$. Тогда из этих соотношений и равенства углов $\angle K'CM = \angle K'CA + \angle ACM = \angle MCH + \angle ACM = \angle ACH$ получаем, что треугольники $K'CM$ и ACH подобны, откуда следует, что $\angle K'MC = \angle AHC = 90^\circ$. Также

$\angle CAK' = \angle CHM = 180^\circ - \angle MHB = 180^\circ - \angle ABC$, так как как HM — медиана в прямоугольном треугольнике AHB и треугольник BMH — равнобедренный. Значит $K' = K$. Осталось заметить, что $\angle AEC = 180^\circ - \angle EAC - \angle ECA = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCM = 180^\circ - \angle AMC$, откуда и следует утверждение задачи.

4. *Дано вещественное число α. Миша и Маша называют пару вещественных чисел x и y* близкой, *если*

$$\frac{xy}{x+y+1} + x^2 + y^2 = \alpha.$$

Миша загадал 6 попарно различных вещественных чисел и сообщил Маше, что ровно 5 из 15 пар этих чисел близкие. Докажите, что Маша может отгадать хотя бы одно из чисел, загаданных Мишей.

М. Антипов

Решение. Пусть x, y и z — попарно различные действительные числа. Докажем, что если из равенств

$$\begin{aligned} xy + (x^2+y^2)(x+y+1) &= \alpha(x+y+1)\\ yz + (y^2+z^2)(y+z+1) &= \alpha(y+z+1)\\ zx + (z^2+x^2)(z+x+1) &= \alpha(z+x+1) \end{aligned} \qquad (*)$$

выполняются какие-то два, то выполняется и третье. Не умаляя общности, пусть выполняются первые два равенства.

Первый способ. Вычтем из первого равенства второе и поделим разность на $x - z \neq 0$, получится $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + x + y + z = \alpha$ (**). Это выражение симметрично относительно x, y и z, поэтому если, например, вычесть из первого равенства третье и поделить результат на $y - z$, то получится то же самое. Значит, если домножить (верное) равенство (**) на $y - z$ и вычесть полученное из (верного) первого равенства, то получится, что и третье равенство выполняется.

Второй способ. Домножим первое равенство на $x - y$, после преобразований получится

$$x^4 + x^3 - \alpha(x^2 + x) = y^4 + y^3 - \alpha(y^2 + y).$$

Это выражение имеет вид $f(x) = f(y)$. Тогда, аналогично, второе равенство преобразуется к равенству $f(y) = f(z)$. Тогда $f(x) = f(z)$ и, после деления на $x - z \neq 0$, получится третье равенство.

Может показаться, что мы доказали, что если пара чисел x и y, а также пара чисел y и z — близкая, то и пара чисел z и x — близкая. Тогда все 6 чисел разбиваются на группы чисел, каждая пара которых — близкая. Тогда ровно 5 близких пар быть не могло: если в какой-то группе хотя бы 4 числа, то уже в ней хотя бы 6 близких пар; если в каждой группе менее трёх чисел, то пар не более 3; если в одной группе 3 числа, то пар или 3, или 4, или уже 6.

В нашем рассуждении есть ровно одна ошибка: чтобы из того, что пара x и y, а также пара y и z — близкие, следовало, что и пара z и x — близкая, нам надо третье равенство в (*) поделить на $z + x + 1$. А это число может равняться нулю! Если ни одно из этих чисел не ноль, то ровно 5 близких пар получиться не могло. Значит, в какой-то тройке это и произошло. Тогда $zx + (z^2 + x^2) \cdot 0 = \alpha \cdot 0$, т.е. $zx = 0$. Значит, числа x и z — это 0 и -1 в каком-то порядке, эти числа и отгадает Маша.

5. *В стране несколько городов, один из которых — Москва. Некоторые пары городов соединены двусторонними дорогами. Мэр хочет объединить Москву ещё с n городами в* большую Москву *так, чтобы (1) между любыми двумя городами большой Москвы можно было проехать по дорогам, не попадая в города вне неё, и (2) было ровно k городов вне большой Москвы, соединённых хотя бы одной дорогой с большой Москвой. Докажите, что есть не более C_{n+k}^k способов совершить такое объединение.*

Отбор на Вьетнам-2012

Решение 1 (явное отображение). Пронумеруем вершины, кроме Москвы, произвольным образом.

Будем красить города из большой Москвы в красный цвет, а их соседей в зелёный цвет. То есть мэру нужно покрасить n городов в красный, а k других городов в зелёный.

Теперь построим соответствие способу покраски способ расставить в ряд k зелёных и n красных символов (способов сделать это C_{n+k}^k). Для удобства сначала будем писать не просто символы, а номера городов, после чего забудем сами номера, оставив только строчку цветных символов.

На первом этапе алгоритма выпишем в возрастающем порядке номера городов, соседних с Москвой (все они покрашены!). При этом мы покрасим красные в розовый, а зелёные так и оставим зелёными. На очередном шаге будем брать строчку, брать в ней самый левый розовый номер x, и записывать в конец строки номера всех его ещё не выписанных соседей (все они покрашены!) в порядке возрастания номеров, причём номера красных городов запишем розовым, а зелёных — зелёным. После чего поменяем цвет номера x на красный.

Так как на каждом шаге количество красных номеров увеличивалось на 1, то процесс закончится.

Докажем, что полученное отображение инъективно. Предположим, есть две покраски городов, дающие одну и ту же последовательность. Тогда существует символ, который соответствует разным номерам в раскрасках; рассмотрим самый левый такой символ. Пусть до него последовательности имели вид $a_1a_2\ldots a_tx$ и $a_1a_2\ldots a_ty$. В каждой из раскрасок номера x и y появились как соседи красных вершин с выписанными ранее номерами. Но поскольку предыдущие символы совпадали, то должен был совпасть и номер на месте $t+1$.

Решение 2 (индукция). Докажем индукцией по $s=n+k$ утверждение задачи для любого графа G.

База $n+k=0$. Имеется один способ сделать большую Москву, не добавляя больше ничего, этот способ может ещё и не подходить, в любом случае не более чем один вариант.

Переход $s\to s+1$. Посмотрим на пару (n,k) такую, что $n+k=s+1$. Если $n=0$, то способ не более чем один. Если $k=0$, то аналогично, поскольку нужно взять целиком компоненту связности с Москвой, в ней либо n вершин и тогда один способ, либо не n, тогда способов ноль. Остался случай, когда n, $k>0$. Рассмотрим какого-то соседа Москвы — город X.

Посчитаем, сколько есть вариантов взять X в большую Москву. Если сразу присоединить его к большой Москве, то мы получим немного другой граф G', в котором эти две вершины стянулись в одну, старые вершины соединены с новой вершиной, если были соединены хотя бы с одной из исходных. Тогда способу взять n городов, чтобы город X был среди них, с k соседями в графе G ставится в соответствие способ взять $n-1$ город в графе G' с теми же k соседями. По предположению индукции, способов сделать это не более C^k_{n+k-1}.

Посчитаем, сколько есть вариантов не взять X. Удалим город X, получим граф G'. Способу выбрать в G ровно n городов, не выбирая X, соответствует способ выбрать n городов с $k-1$ соседом в графе G' (один сосед исчез – это X). По предположению индукции, таких способов не более C^{k-1}_{n+k-1}.

Таким образом, способов выбрать n городов в графе G с ровно k соседями не более $C^k_{n+k-1}+C^{k-1}_{n+k-1}=C^k_{n+k}$.

6. *Натуральное число $n\geqslant 4$ таково, что число $a=\dfrac{2^n-2}{n}$ целое. Докажите, что a составное.*

China National High School Mathematics League, 2nd round, 2021

Решение. Предположим, что число a простое. Если n нечётно, то a чётно и, поскольку $n\geqslant 4$, больше 2, т.е. не является простым. Значит, $n=2k$ — чётное число, и $k\geqslant 2$, а тогда $a=\dfrac{2^{2k-1}-1}{k}$. Поскольку a — целое, то k — нечётное.

Пусть d — наименьшее натуральное число, для которого 2^d-1 делится на k (т.е. *показатель* числа 2 по модулю k); поскольку $k\neq 1$, то $d\geqslant 2$. Известно, что тогда для любого натурального числа s такого, что 2^s-1 делится на k, число s делится на d. В частности, $2k-1$ делится на d, а по теореме Эйлера и $\varphi(k)$ делится на d; значит, $d\leqslant\varphi(k)<k<2k-1$. Итак, $2k-1=dt$ для некоторого $t>1$.

$$a=\frac{2^{dt}-1}{k}=\frac{2^d-1}{k}\cdot\left(2^{d(t-1)}+2^{d(t-2)}+\ldots+1\right).$$

Поскольку a простое, то первый множитель должен быть равен 1, откуда $k=2^d-1$. Тогда

$$t=\frac{2k-1}{d}=\frac{2^{d+1}-3}{d}>d,$$

поскольку несложной индукцией можно убедиться, что при $d\geqslant 2$ выполнено неравенство $2^{d+1}-3>d^2$. Вспомним, что $\text{НОД}(2^d-1,2^t-1)=2^{\text{НОД}(d,t)}-1$. Тогда

$$a=\frac{2^{dt}-1}{2^d-1}=\frac{(2^{\text{НОД}(d,t)}-1)(2^{dt}-1)}{(2^d-1)(2^t-1)}\cdot\frac{2^t-1}{2^{\text{НОД}(d,t)}-1}=\frac{2^{dt}-1}{\text{НОК}(2^d-1,2^t-1)}\cdot\frac{2^t-1}{2^{\text{НОД}(d,t)}-1}.$$

Поскольку $t>d$, то второй множитель — больше 1; поскольку t делится на $\text{НОД}(d,t)$, то он ещё и целый. Поскольку $2^{dt}-1>(2^d-1)(2^t-1)$, то и первый множитель — больше 1; к тому же, $2^{dt}-1$ делится и на 2^d-1, и на 2^t-1, поэтому он целый. Противоречие с тем, что a — простое.

7. *Вписанная окружность касается сторон BC, CA и AB треугольника ABC в точках T_A, T_B и T_C соответственно. Пусть A_B и A_C — проекции вершины A на биссектрисы углов B и C соответственно. Обозначим через ω_A окружность, описанную около треугольника $A_BA_CT_A$. Определим окружности ω_B и*

ω_C аналогично. Докажите, что окружности ω_A, ω_B и ω_C имеют общую точку, лежащую на окружности девяти точек треугольника ABC.

Д. Прокопенко, М. Дидин, И. Богданов

Решение. **Лемма.** Дан треугольник XYZ и точка P. Пусть P_X, P_Y, P_Z — проекции P на прямые YZ, ZX, XY соответственно. Тогда окружности девяти точек треугольников XYZ, XYP, YZP, ZXP пересекаются на окружности $(P_X P_Y P_Z)$.

Доказательство. Пусть X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 — середины YZ, ZX, XY, PX, PY, PZ соответственно, а F — вторая точка пересечения двух окружностей $(X_1Y_1Z_1)$ и $(X_1Y_2Z_2)$ (то есть окружностей девяти точек треугольников XYZ и PYZ). Имеем

$$\angle(FY_1, FZ_2) = \angle(FY_1, FX_1) + \angle(FX_1, FZ_2) = \angle(Z_1Y_1, Z_1X_1) + \angle(Y_2X_1, Y_2Z_2) = \\ = \angle(YZ, XZ) + \angle(PZ, YZ) = \angle(PZ, XZ) = \angle(X_2Y_1, X_2Z_2).$$

Значит, F лежит на окружности девяти точек треугольника PZX, аналогично F лежит на окружности девяти точек треугольника PXY. Точки P_X и P_Y — основания высот треугольников PYZ и PZX, поэтому они лежат на окружностях (FZ_2X_1) и (FZ_2Y_1) соответственно. Получаем

$$\angle(FP_X, FP_Y) = \angle(FP_X, FZ_2) + \angle(FZ_2, FP_Y) = \angle(X_1P_X, X_1Z_2) + \angle(Y_1Z_2, Y_1P_Y) = \angle(YZ, PY) + \\ + \angle(PX, ZX) = \angle(YP_X, YP) + \angle(XP, XP_Y) = \angle(P_ZP_X, P_ZP) + \angle(P_ZP, P_ZP_Y) = \angle(P_ZP_X, P_ZP_Y),$$

откуда F лежит на окружности $(P_XP_YP_Z)$. Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Пусть точки M и N симметричны A относительно биссектрис углов B и C соответственно. Из симметрии $MT_A = AT_C = AT_B = NT_A$. Поэтому ω_A — окужность девяти точек треугольника AMN, и она проходит через основание высоты AH_A этого треугольника. Следовательно ω_A проходит через проекции A на стороны треугольника BIC, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC. По лемме ω_A проходит через точку пересечения F окружностей девяти точек треугольников ABC, AIB, BIC, AIC. Аналогично, ω_B и ω_C проходят через F.

Замечание. F— точка Фейербаха треугольника ABC.

8. *Дан граф G (без петель и кратных рёбер); его вершины u и v соединены ребром. В вершинах графа стоят N фишек. Если количество фишек в некоторой вершине не меньше, чем её степень, она может выстрелить: отправить по одной фишке в каждую из смежных с ней вершин. Одновременно может стрелять не более одной вершины. Докажите, что в каждый момент времени количества выстрелов, произведённых вершинами u и v, отличаются не более чем на N.*

G. Tardos

Решение. Возьмём какой-нибудь момент времени. Для вершины x графа G обозначим через $f(x)$ количество выстрелов, произведённых вершиной x. Если $f(u) = f(v)$, то утверждение доказано. Не умаляя общности, пусть $f(u) < f(v)$. Поделим все вершины графа G на два множества: U — те, которые стреляли не более $f(u)$ раз, и V — те, которые стреляли более $f(u)$ раз; тогда $u \in U$, $v \in V$.

Будем теперь думать, что во время выстрела мы перемещаем фишки по рёбрам. Возьмём какое-нибудь ребро ab, где $a \in U$, $b \in V$. Тогда мы переместили по этому ребру $f(a)$ раз фишку из a в b (а значит, и из U в V) и $f(b)$ раз из b в a (а значит, и из V в U). Поскольку $f(a) \leqslant f(u) < f(b)$, то только по ребру ab в V добавилось $f(b) - f(a) > 0$ фишек. Суммарно по всем рёбрам, соединяющим U и V, в V добавилось не более N фишек (потому что у нас всего не более N фишек). При этом каждое ребро добавило положительное число фишек, поэтому по каждому ребру добавилось не более N фишек, в частности, по ребру uv. Это и означает, что $f(v) - f(u) \leqslant N$.