

Юниоры, высшая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. Даны натуральные числа $k \geq 2$, $n > k$ и t . Каждому упорядоченному набору натуральных чисел $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, не превосходящих n , удалось сопоставить натуральное число $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, не превосходящее t , что $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \neq f(x_2, x_3, \dots, x_{k+1})$ при $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} \leq n$. Докажите, что $n \leq 2^{2^{\dots 2^t}}$ ($k-1$ двойка).

Решение. Обозначим $T = \{1, 2, \dots, t\}$ и будем индуктивно строить множества $M(x_1, \dots, x_l) \in 2^{2^{\dots 2^T}}$. Здесь $x_1 < \dots < x_l$, а также $n-l$ двоек.

А именно, положим $M(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \in T$, а также

$$M(x_1, \dots, x_l) = \{M(x_1, \dots, x_l, x_{l+1}) \mid x_{l+1} > x_l\}.$$

Предположим противное, и $n > 2^{2^{\dots 2^t}}$ ($k-1$ двойка). Тогда, так как $|2^{2^{\dots 2^t}}| = |2^{2^{\dots 2^t}}|$ (везде $k-1$ двойка), то по принципу Дирихле найдутся $1 \leq y_1 < y_2 \leq n$, для которых $M(y_1) = M(y_2)$.

Тогда по конструкции мы имеем $M(y_1, y_2) \in M(y_1)$. А раз $M(y_1) = M(y_2)$, то найдётся $y_3 > y_2$, для которого $M(y_1, y_2) = M(y_2, y_3)$. Аналогично, по конструкции $M(y_1, y_2, y_3) \in M(y_1, y_2)$, также $M(y_1, y_2) = M(y_2, y_3)$, откуда найдётся $y_4 > y_3$, для которого $M(y_1, y_2, y_3) = M(y_2, y_3, y_4)$. Действуя аналогично, мы получим последовательность y_1, \dots, y_{n+1} , для которой $M(y_1, \dots, y_n) = M(y_2, \dots, y_{n+1})$. А так как $M(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, то мы получим противоречие с условием.

♦ Разобран случай $k = 2$: 2 балла.

2. Дано натуральное число $k \geq 2$. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что из любых n точек на плоскости можно выбрать k таких точек, что либо все расстояния между ними не превосходят 2, либо все расстояния между ними строго больше 1.

Ответ: $(k-1)^2 + 1$. **Решение.** *Пример.* Докажем, что можно выбрать $n = (k-1)^2$ точек так, что для них условие не выполняется. Выберем $(k-1)$ круг радиуса $1/2$ так, чтобы расстояние между любыми двумя центрами было не меньше 10. Отметим в каждом круге по $(k-1)$ точке. Тогда среди любых k точек найдутся две из одного круга, и между ними расстояние будет не больше 1. Аналогично, среди любых k точек найдутся две из разных кругов, и расстояние между ними будет больше 2. Следовательно, пример работает.

Оценка. Покажем, что при $n \geq (k-1)^2 + 1$ требуемый набор из k точек можно выбрать.

Построим граф: вершинами графа будут являться точки, а ребром будем соединять точки на расстоянии не больше 1.

Пусть есть вершина степени хотя бы $k-1$. Выберем k точек, соответствующих данной вершине и её соседям. По неравенству треугольника получаем, что расстояние между любыми двумя из них не более 2.

Теперь пусть степень каждой вершины не более $k-2$. Запустим процесс. Возьмём вершину, отметим её, а затем выкинем её и всех её соседей. Затем отметим одну из оставшихся вершин, и снова выкинем её и всех её соседей, и так далее. Так как $n > (k-1)^2$, и каждый ход мы используем не более $k-1$ вершины, то в итоге мы отметим хотя бы k вершин. Полученные k вершин будут попарно не соединены друг с другом, то есть расстояние между любыми двумя будет больше 1.

♦ Только оценка или только пример: 4 балла.

3. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает вневписанную окружность (касающуюся стороны BC) в точках D и E таких, что D лежит на отрезке AE . Докажите, что

$$\frac{AD}{AE} \leq \frac{BC^2}{DE^2}.$$

Решение. Пусть данная вневписанная окружность касается AB в точке X . В силу подобия треугольников ADX и AXE ,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AX} \cdot \frac{AX}{AE} = \frac{AX^2}{AE^2},$$

поэтому достаточно доказать, что $\frac{p}{AE} \leq \frac{a}{2r_a}$ где p – полупериметр треугольника ABC , r_a – радиус вневписанной окружности, $a = BC$. Но $a \cdot AE \geq a \cdot (AH + 2r_a) = ah_a + 2ar_a \geq 2pr_a \iff ah_a \geq 2(p - a)r_a$ где H – проекция A на BC . Последнее верно, так как оба выражения равны удвоенной площади ABC .

4. Сивая кобыла обошла все клетки доски $n \times n$ ($n \geq 3$), каждый раз переходя из клетки в соседнюю по стороне и посетив каждую клетку ровно один раз. Бред может спросить кобылу, какой по счёту на её маршруте была любая выбранная им клетка, а кобыла честно ему ответит. Бред хочет узнать, где кобыла стартовала, задав менее $3n$ вопросов. Конечно или бесконечно множество таких n , при которых Бред заведомо может достичь своей цели?

Решение. Обобщим задачу. Будем считать, что в таблице $n \times n$ написаны различные натуральные числа, включая единицу, причём в клетке с известным нам числом стоит число x такое, что из единицы можно попасть в x , переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку с числом, на 1 большим (изначальный x выбирается после первого ответа кобылы). Обозначим через $f(n)$ минимальное количество шагов, за которые заведомо можно найти единицу в такой таблице $n \times n$. Докажем, что подходят все $n = 2^k - 1$ при натуральных k индукцией по k . Достаточно показать, что $f(2n + 1) \leq f(n) + 3(n + 1)$. База при $k = 1$ очевидна. Сделаем переход от n к $2n + 1$. Пронумеруем последовательно строки и столбцы числами от 0 до $2n$. Пусть $f(i, j)$ – число, записанное в строке i и столбце j . Сначала спросим, чему равны $f(n, j)$ для $0 \leq j \leq 2n$. Пусть k – это индекс, для которого $f(n, k)$ оказалось минимальным. Проверим, является ли $f(n - 1, k) < f(n, k)$. Можно считать, что 1 не находится в строке n , иначе цель достигнута. НУО $f(n - 1, k) < f(n, k) \leq x$ или $f(n, k) > x$ и x лежит в строке с номером меньше n . Тогда единица должна лежать между строками от 0 до $n - 1$ и новым x будет $\min(x, f(n - 1, k))$. НУО новый x лежит в столбце с номером, меньшим n . Теперь проверим $f(0, n), \dots, f(n - 1, n)$. Если $f(j, n) > x$ для всех $0 \leq j \leq n - 1$, то единица находится в квадрате $(i, j)_{0 \leq i, j \leq n-1}$. Иначе, если j удовлетворяет условию: $f(j, n) = \min_{0 \leq t \leq n-1} f(t, n)$, то проверим $f(j, n - 1)$. НУО $f(j, n - 1) = f(j, n) - 1$. Тогда единица лежит в квадрате $(i, j)_{0 \leq i, j \leq n-1}$, а новым x будет $f(j, n - 1)$. Заметим, что тогда суммарно требуется $2n + 1 + 1 + n + 1 + 3n = 3(n + 1)$ ходов.

5. Последовательность a_1, a_2, \dots состоит из квадратов натуральных чисел и удовлетворяет при всех натуральных m и n условию $a_{m+n} = a_m + a_n + 2mn$. Найдите все такие последовательности.

Ответ: $a_n = n^2$. **Решение.** Обозначим $a_1 = c$. При каждом натуральном n выполнено равенство $a_{n+1} = a_n + 2n + c$. Поэтому $a_n = a_1 + (2 \cdot 1 + c) + (2 \cdot 2 + c) + \dots + (2 \cdot (n - 1) + c) = n(n - 1) + nc = n(n + c - 1)$. Следовательно, $n(n + c - 1)$ – точный квадрат при всех натуральных n . Однако $n + c - 1$ для бесконечно многих n является простым, и не может быть квадратом при умножении на меньшее число. Поэтому $c = 1$, то есть $a_n = n^2$ при всех натуральных n .

♦ Ответ с проверкой: 0 баллов.

6. Дано бесконечное множество A , состоящее из целых чисел. Докажите, что в нем можно выбрать такие 20 элементов, что среднее арифметическое любых 11 из них не принадлежит множеству A .

Решение. Для начала заметим, что если ко всем числам из A прибавить одно и то же целое число, то к средним арифметическим всех конечных наборов прибавится это же число. Аналогично, если поделить все числа из A на их общий множитель, то на него поделятся и все средние арифметические. Если для полученного множества утверждение задачи верно, то оно было верно и ранее. Используя такие приемы, можно добиться того, чтобы не все элементы A были попарно сравнимы по модулю 11. (Если все числа дают одинаковый остаток по модулю 11, то можно сделать этот остаток нулевым, поделить все числа на 11, от чего все попарные разности строго уменьшатся. Рано или поздно одна из разностей станет не кратна 11.)

Докажем теперь, индукцией по $k \leq 20$, что из бесконечного множества $A \subset \mathbb{Z}$, можно выбрать такие k чисел, что все средние по 11 из них не лежат в A . Базой может служить $k \leq 10$. Совершим переход от $k - 1$ к k .

Преобразуем множество A так, как указано в первом абзаце; теперь в A есть как минимум два разных остатка по модулю 11. Если есть два остатка, которые встречаются хотя бы по 10 раз, то выберем соответствующие 20 чисел. Среднее арифметическое любых 11 из них окажется не целым, и тем более не будет принадлежать множеству A .

В противном случае все остатки, кроме одного, встречаются менее 10 раз, а один остаток – бесконечно много раз. Для удобства будем считать, что этот остаток – ноль (прибавив ко всем элементам A одну и ту же константу). Пусть A_0 – множество элементов A , кратных 11, а B – множество всех остальных элементов A (как мы знаем, конечное, но непустое). Выберем произвольное $b \in B$. Кроме того, рассмотрим все элементы A_0 , большие чем наибольшее число в B , а также все элементы A_0 , меньшие чем все элементы

B ; обозначим эти множества через A_+ и A_- соответственно. Одно из этих двух множеств бесконечно, не умаляя общности — A_+ .

По предположению индукции, выберем в A_+ такое множество из $k - 1$ чисел, что все их средние по 11 чисел не лежат в A_+ . Все эти средние заведомо больше чем максимальное число из B , поэтому они не лежат ни в B , ни в A_0 (если бы такое среднее лежало в A_0 , то оно попало бы и в A_+). Таким образом, они не лежат в A . Осталось добавить к этим $k - 1$ числам элемент b . Все наборы по 11 чисел с его участием имеют вид «10 чисел, кратных 11, а одно число, не кратное 11», поэтому среднее в таком наборе не является целым, и тем более не лежит в A . Переход индукции завершен.

7. В клетках таблицы $n \times n$ ($n \geq 2$) расставлены положительные числа. Пусть a_{ij} — число в клетке, находящейся на пересечении i -й строки и j -го столбца. Известно, что $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ для любых i и j таких, что $1 \leq i \leq j \leq n$. Пусть $S_i = a_{i1} + \dots + a_{in}$. Докажите, что

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} \leq 1.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде $\sum_{j=1}^n \frac{1}{1 + \sum_{i < j} \frac{1}{a_{ij}} + \sum_{i > j} a_{ji}} \leq 1$. Мы докажем это неравенство индукцией по n . При $n = 2$ это просто $\frac{1}{1+a_{12}} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_{12}}} \leq 1$, что очевидно верно — фактически мы имеем равенство.

Теперь предположим, что неравенство верно для n , и докажем его для $n + 1$. Обозначим $S'_j = 1 + \sum_{1 < i < j} \frac{1}{a_{ij}} + \sum_{i > j} a_{ji}$ для любого $j \geq 2$, так что $S_j - S'_j = \frac{1}{a_{1j}}$ для всех $j \geq 2$.

Тогда,

$$\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{S'_j} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{S_j} = \left[\sum_{j \geq 2} \left(\frac{1}{S'_j} - \frac{1}{S_j} \right) \right] - \frac{1}{S_1} = \left[\sum_{j \geq 2} \frac{\left(\frac{1}{S'_j} \right)^2}{a_{1j} + \frac{1}{S'_j}} \right] - \frac{1}{S_1} \geq \frac{\left(\sum_{j \geq 2} \frac{1}{S'_j} \right)^2}{S_1 - 1 + \left(\sum_{j \geq 2} \frac{1}{S'_j} \right)} - \frac{1}{S_1},$$

где последнее неравенство — просто неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Для простоты обозначим $a = \sum_{j \geq 2} \frac{1}{S'_j}$ и $b = S_1 - 1 = \sum_{j \geq 2} a_{1j} > 0$. Заметим, что $a \leq 1$ по гипотезе индукции (чтобы увидеть почему, просто исключите первую строку верхней треугольной матрицы). Таким образом,

$$a - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{S_j} \geq \frac{a^2}{a+b} - \frac{1}{1+b} = \left(a - \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) - \left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{b}} \right) = (a-1) + \left(\frac{1}{1+\frac{1}{b}} - \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) \geq a-1.$$

Это доказывает, что $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{S_j} \leq 1$, тем самым устанавливая шаг индукции.

8. Дано натуральное число $n > 1$. В колоде есть карты n различных мастей и n различных достоинств, и в каждой масти есть ровно одна карта каждого достоинства. Банкомёт раздаёт n игрокам по n карт. После этого игроки выбирают места за круглым столом и пытаются выложить на стол все карты, действуя таким образом: один из игроков выкладывает произвольную карту, а затем каждый следующий по часовой стрелке игрок выкладывает карту, отличающуюся и мастью, и достоинством от предыдущей выложенной карты. Для каких n банкомёт может так раздать карты, чтобы все карты выложить не удалось? (Игроки работают вместе, и они могут видеть карты друг друга).

Ответ: При всех $n > 1$. **Решение.** Перенумеруем масти и достоинства числами от 1 до n , и обозначим через (i, j) карту i -й масти j -го достоинства. Тогда пусть для $1 \leq i < n$ i -й игрок получит набор $(i, 1), \dots, (i, i-1), (n, i), (i, i+1), \dots, (i, n)$. А n -й игрок получит оставшиеся карты: $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$. Пусть требуемая рассадка существует. Пусть n игрок сидит не первым, и перед ним сидит k -й игрок. Но тогда у n -го игрока есть карта (k, k) , которую нельзя играть после любой карты k -го игрока. Аналогично, если n -й сидит первым, а k -ый за ним, то после карты (k, k) k -й игрок не сможет сыграть ни одно из своих карт. Следовательно, требуемой рассадки не существует.

9. Пусть $ABCDE$ — пятиугольник, вписанный в окружность Ω . Прямая, параллельная отрезку BC , пересекает отрезки AB и AC в точках S и T соответственно. Пусть X — точка пересечения прямых BE и DS , а Y — точка пересечения прямых CE и DT . Докажите, что если прямая AD является касательной к описанной окружности треугольника DXY , то прямая AE является касательной к описанной окружности треугольника EXY .

Решение. Предположим, что DS, DT пересекаются с Ω в точках P, Q и $BQ \cap CP = R$. Применим теорему Паскаля для шестиугольника $PDQVAC$. Получим, что точки S, T и R лежат на одной прямой. Теперь применим теорему Паскаля для шестиугольника $PDQVBC$. Получим, что точки X, Y и R лежат на одной прямой. Тогда $XY \cap ST = R$.

Так как AD является касательной к описанной окружности треугольника DXY , получим цепочку равенств: $\angle(TC, CR) = \angle(AC, CP) = \angle(AD, DP) = \angle(AD, DX) = \angle(DY, YX) = \angle(TY, YR)$. Следовательно, точки C, R, Y, T лежат на одной окружности. Тогда $\angle(XY, YE) = \angle(RY, YC) = \angle(RT, TC) = \angle(BC, CA) = \angle(BE, EA) = \angle(XE, EA)$, поэтому AE является касательной к описанной окружности треугольника EXY , что и требовалось.

10. В вершинах правильного $(2n + 1)$ -угольника расставили вещественные числа, среди которых есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное. Оказалось, что сумма чисел в любых двух соседних вершинах неотрицательна. Пусть S — сумма положительных чисел в вершинах, а T — сумма отрицательных. Докажите, что $nS + (n + 1)T \geq 0$.

Решение. Поскольку никакие два отрицательных числа не могут стоять рядом, то их количество $k \leq n$. После каждого отрицательного числа стоит положительное, которое не меньше по модулю. Обозначим эти положительные числа как a_1, a_2, \dots, a_k . Заметим, что для любого i все числа, кроме a_i , можно разбить на пары соседних, поэтому $S + T - a_i \geq 0$. Просуммируем по всем i : $kS + kT - a_1 - a_2 - \dots - a_k \geq 0$. Но $T \geq -a_1 - a_2 - \dots - a_k$, сложив эти неравенства, получим $kS + (k + 1)T \geq 0$. Так как $k \leq n$, то прибавив нужное число раз очевидное неравенство $S + T \geq 0$, получим требуемое.

Юниоры, первая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. Дано множество натуральных чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Известно, что существует множество целых чисел B такое, что любое натуральное число k единственным образом представляется в виде суммы элемента множества A и элемента множества B . Докажите, что существует множество целых чисел C такое, что любое целое число k единственным образом представляется в виде суммы элемента множества A и элемента множества C .

Решение. Выберем произвольное N , большее всех чисел из A . Для множеств X и Y через $X+Y$ обозначим множество $\{x+y \mid x \in X, y \in Y\}$.

Для каждого натурального k рассмотрим множество B_k — минимальное подмножество B такое, что $[1, k] \subset A+B_k$. Очевидно, что в B_k все элементы меньше k , тогда в $A+B_k$ все не больше $k+N$. Рассмотрим $D_k = \{1 \leq i < N \mid k+i \in A+B_k\}$. Рассмотрим $k = (N+1), 2(N+1), \dots, (2^{N-1}+1)(N+1)$. Так как D_i может принимать лишь 2^{N-1} возможное значение, то по принципу Дирихле найдутся $k > l$, для которых $D_k = D_l$.

Рассмотрим $C_0 = B_k \setminus B_l$. Так как $l > N$, то $B_k \setminus B_l$ может состоять только положительных элементов. Тогда

$$A+C_0 = (A+C_0) \cap \mathbb{N} = ((A+B_k) \setminus (A+B_l)) \cap \mathbb{N} = ([1, k] \cup (k+D_k)) \setminus ([1, l] \cup (l+D_l)) = [l+1, k] \cup (k+D_k) \setminus (l+D_l).$$

При этом каждый элемент из $A+C_0$ представляется ровно одним способом в виде суммы элемента A и элемента C_0 .

Таким образом, если $C_0 = \{c_1, \dots, c_m\}$, то в качестве C достаточно взять $C = \{(k-l)x + c_y \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

2. Дано натуральное число $k \geq 2$. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что из любых n точек на плоскости можно выбрать k таких точек, что либо все расстояния между ними не превосходят 2, либо все расстояния между ними строго больше 1.

Ответ: $(k-1)^2 + 1$. **Решение.** *Пример.* Докажем, что можно выбрать $n = (k-1)^2$ точек так, что для них условие не выполняется. Выберем $(k-1)$ круг радиуса $1/2$ так, чтобы расстояние между любыми двумя центрами было не меньше 10. Отметим в каждом круге по $(k-1)$ точке. Тогда среди любых k точек найдутся две из одного круга, и между ними расстояние будет не больше 1. Аналогично, среди любых k точек найдутся две из разных кругов, и расстояние между ними будет больше 2. Следовательно, пример работает.

Оценка. Покажем, что при $n \geq (k-1)^2 + 1$ требуемый набор из k точек можно выбрать.

Построим граф: вершинами графа будут являться точки, а ребром будем соединять точки на расстоянии не больше 1.

Пусть есть вершина степени хотя бы $k-1$. Выберем k точек, соответствующих данной вершине и её соседям. По неравенству треугольника получаем, что расстояние между любыми двумя из них не более 2.

Теперь пусть степень каждой вершины не более $k-2$. Запустим процесс. Возьмём вершину, отметим её, а затем выкинем её и всех её соседей. Затем отметим одну из оставшихся вершин, и снова выкинем её и всех её соседей, и так далее. Так как $n > (k-1)^2$, и каждый ход мы используем не более $k-1$ вершины, то в итоге мы отметим хотя бы k вершин. Полученные k вершин будут попарно не соединены друг с другом, то есть расстояние между любыми двумя будет больше 1.

♦ Только оценка или только пример: 4 балла.

3. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает вневписанную окружность (касающуюся стороны BC) в точках D и E таких, что D лежит на отрезке AE . Докажите, что

$$\frac{AD}{AE} \leq \frac{BC^2}{DE^2}.$$

Решение. Пусть данная вневписанная окружность касается AB в точке X . В силу подобия треугольников ADX и AXE ,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AX} \cdot \frac{AX}{AE} = \frac{AX^2}{AE^2},$$

поэтому достаточно доказать, что $\frac{p}{AE} \leq \frac{a}{2r_a}$ где p – полупериметр треугольника ABC , r_a – радиус вневписанной окружности, $a = BC$. Но $a \cdot AE \geq a \cdot (AH + 2r_a) = ah_a + 2ar_a \geq 2pr_a \iff ah_a \geq 2(p - a)r_a$ где H – проекция A на BC . Последнее верно, так как оба выражения равны удвоенной площади ABC .

4. Сивая кобыла обошла все клетки доски 15×15 , каждый раз переходя из клетки в соседнюю по стороне и посетив каждую клетку ровно один раз. Бред может спросить кобылу, какой по счёту на её маршруте была любая выбранная им клетка, а кобыла честно ему ответит. Бред хочет узнать, где кобыла стартовала, задав не более 45 вопросов. Сможет ли Бред заведомо достичь своей цели?

Решение. Обобщим задачу. Будем считать, что в таблице написаны различные натуральные числа, включая единицу, причём в клетке с известным нам числом стоит число x такое, что из единицы можно попасть в x , переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку с числом, на 1 большим. (Изначально x положим равным тому числу, про которое мы зададим первый вопрос.) Сначала спросим, чему равны 15 чисел в средней строчке, пусть наименьшее из них равно a . Спросим про еще одного соседа a , пусть это b – так мы поймем, сверху или снизу от средней строки находится путь от 1 до x . Если при этом $x \geq a$, то заменим x на $a - 1$ (мы спросили про трех соседей a , так что мы знаем, в какой клетке находится $a - 1$), а если $x < a$, то весь путь от 1 до x лежит с той же стороны от средней строки, что и x . В любом случае, мы перешли от доски 15×15 к доске 7×15 . Аналогично от нее перейдем к доске 7×7 , затем к 7×3 , 3×3 , 3×1 , 1×1 – в ней мы уже однозначно найдем 1. Итого, мы потратим $16 + 8 + 8 + 4 + 4 + 2 \leq 45$ ходов.

5. Последовательность a_1, a_2, \dots состоит из квадратов натуральных чисел и удовлетворяет при всех натуральных m и n условию $a_{m+n} = a_m + a_n + 2mn$. Найдите все такие последовательности.

Ответ: $a_n = n^2$. **Решение.** Обозначим $a_1 = c$. При каждом натуральном n выполнено равенство $a_{n+1} = a_n + 2n + c$. Поэтому $a_n = a_1 + (2 \cdot 1 + c) + (2 \cdot 2 + c) + \dots + (2 \cdot (n - 1) + c) = n(n - 1) + nc = n(n + c - 1)$. Следовательно, $n(n + c - 1)$ – точный квадрат при всех натуральных n . Однако $n + c - 1$ для бесконечно многих n является простым, и не может дать квадрат при умножении на меньшее число. Поэтому $c = 1$, то есть $a_n = n^2$ при всех натуральных n .

♦ Ответ с проверкой: 0 баллов.

6. Для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{100}, y_1, y_2, \dots, y_{100}$ докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x_i} + \sqrt{y_i}} \geq \frac{1000}{\sqrt{\sum_{i=1}^{100} x_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{100} y_i}}$$

Решение. Применим КБШ для наборов $\frac{1}{\sqrt{x_i} + \sqrt{y_i}}$ и $\sqrt{x_i} + \sqrt{y_i}$. Получим, что левая часть не меньше $100^2 / \sum(\sqrt{x_i} + \sqrt{y_i})$. Осталось доказать, что $\sum \sqrt{x_i} \leq 10 \sqrt{\sum x_i}$ (и аналогично для y_i). Это верно по неравенству о среднем арифметическом и квадратическом: $(\sum \sqrt{x_i})/100 \leq \sqrt{(\sum x_i)/100}$, значит $\sum \sqrt{x_i} \leq 10 \sqrt{\sum x_i}$.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел k таких, что число k^k можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.

Решение. Возьмем $k = 3x + 1$, тогда $k^k = (3x + 1)^{3x} (3x + 1) = 3x(3x + 1)^{3x} + (3x + 1)^{3x}$. Осталось подобрать x так, чтобы $3x$ тоже было кубом.

8. Дано натуральное число $n > 1$. В колоде есть карты n различных мастей и n различных достоинств, и в каждой масти есть ровно одна карта каждого достоинства. Банкомёт раздаёт n игрокам по n карт. После этого игроки выбирают места за круглым столом и пытаются выложить на стол все карты, действуя таким образом: один из игроков выкладывает произвольную карту, а затем каждый следующий по часовой стрелке игрок выкладывает карту, отличающуюся и мастью, и достоинством от предыдущей выложенной карты. Для каких n банкомёт может так раздать карты, чтобы все карты выложить не удалось? (Игроки работают вместе, и они могут видеть карты друг друга).

Ответ: При всех $n > 1$. **Решение.** Перенумеруем масти и достоинства числами от 1 до n , и обозначим через (i, j) карту i -й масти j -го достоинства. Тогда пусть для $1 \leq i < n$ i -й игрок получит набор $(i, 1), \dots, (i, i - 1), (n, i), (i, i + 1), \dots, (i, n)$. А n -й игрок получит оставшиеся карты: $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$. Пусть требуемая раскладка существует. Пусть n игрок сидит не первым, и перед ним сидит k -й игрок. Но тогда у n -го игрока есть карта (k, k) , которую нельзя играть после любой карты k -го игрока. Аналогично,

если n -й сидит первым, а k -ый за ним, то после карты (k, k) k -й игрок не сможет сыграть ни одно из своих карт. Следовательно, требуемой рассадки не существует.

9. В остроугольном треугольнике ABC , $AB < AC$. Серединый перпендикуляр к стороне BC пересекает прямые AB и AC в точках D , E соответственно. Точка M — середина отрезка DE . Луч MA пересекает описанную окружность треугольника ABC вторично в точке P , лежащей на дуге AB , не содержащей точку C . Докажите, что $\angle DPE = \angle BAC$.

Решение. Рассмотрим точку A' , симметричную A относительно серпера к BC , она кроме того лежит на BE и CD . Пусть L — середина BE . Заметим, что $A'MPL$ вписанный, поскольку $\angle(A'L, LM) = \angle(A'B, BA) = \angle(A'P, PA) = \angle(A'P, PM)$. Далее, пусть $\angle AME = \angle A'ME = x$. Тогда $\angle MAA' = 90 - x$, а значит $\angle PBL = 90 - x$. В то же время из вписанности $A'MPL$ имеем, что $\angle PLB = 2x$. Значит, $PL = LB = LE$, поэтому $\angle BPE = 90$, откуда $\angle PEB = x$. Выходит, $\angle PME = \angle PEB$, значит окружность (PME) касается BE . Отсюда $\angle MPE = \angle MEA' = \angle MEA$, так что окружность (PAE) касается DE . Получается, на медиане PM треугольника PDE точка A такова, что (PAE) касается стороны DE , значит A в нем — проекция ортоцентра на медиану. Отсюда получаем, что $\angle DPE + \angle DAE = 180$, что и требовалось.

10. В вершинах правильного $(2n + 1)$ -угольника расставили вещественные числа, среди которых есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное. Оказалось, что сумма чисел в любых двух соседних вершинах неотрицательна. Пусть S — сумма положительных чисел в вершинах, а T — сумма отрицательных. Докажите, что $nS + (n + 1)T \geq 0$.

Решение. Поскольку никакие два отрицательных числа не могут стоять рядом, то их количество $k \leq n$. После каждого отрицательного числа стоит положительное, которое не меньше по модулю. Обозначим эти положительные числа как a_1, a_2, \dots, a_k . Заметим, что для любого i все числа, кроме a_i , можно разбить на пары соседних, поэтому $S + T - a_i \geq 0$. Просуммируем по всем i : $kS + kT - a_1 - a_2 - \dots - a_k \geq 0$. Но $T \geq -a_1 - a_2 - \dots - a_k$, сложив эти неравенства, получим $kS + (k + 1)T \geq 0$. Так как $k \leq n$, то прибавив нужное число раз очевидное неравенство $S + T \geq 0$, получим требуемое.

Юниоры, вторая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Вписанная окружность касается стороны BC в точке D и стороны AB в точке F . Пусть J — точка касания невписанной окружности со стороной BC . Наконец, точка V такова, что $FICV$ — параллелограмм. Докажите, что $BI \parallel JV$.

Решение. Отложим от точки I вектор, равный \vec{CJ} . Пусть W — конец этого вектора. Тогда треугольники VCJ и FIW получаются друг из друга параллельным переносом на вектор \vec{CI} . Значит, достаточно доказать, что $FW \parallel IB$. При этом $IW = CJ = BD = FB$, и $IWBD$ — прямоугольник. Следовательно, $FWBI$ — равнобедренная трапеция, $FW \parallel BI$.

2. Дано натуральное число $k \geq 2$. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что из любых n точек на плоскости можно выбрать k таких точек, что либо все расстояния между ними не превосходят 2, либо все расстояния между ними строго больше 1.

Ответ: $(k - 1)^2 + 1$. **Решение.** *Пример.* Докажем, что можно выбрать $n = (k - 1)^2$ точек так, что для них условие не выполняется. Выберем $(k - 1)$ круг радиуса $1/2$ так, чтобы расстояние между любыми двумя центрами было не меньше 10. Отметим в каждом круге по $(k - 1)$ точке. Тогда среди любых k точек найдутся две из одного круга, и между ними расстояние будет не больше 1. Аналогично, среди любых k точек найдутся две из разных кругов, и расстояние между ними будет больше 2. Следовательно, пример работает.

Оценка. Покажем, что при $n \geq (k - 1)^2 + 1$ требуемый набор из k точек можно выбрать.

Построим граф: вершинами графа будут являться точки, а ребром будем соединять точки на расстоянии не больше 1.

Пусть есть вершина степени хотя бы $k - 1$. Выберем k точек, соответствующих данной вершине и её соседям. По неравенству треугольника получаем, что расстояние между любыми двумя из них не более 2.

Теперь пусть степень каждой вершины не более $k - 2$. Запустим процесс. Возьмём вершину, отметим её, а затем выкинем её и всех её соседей. Затем отметим одну из оставшихся вершин, и снова выкинем её и всех её соседей, и так далее. Так как $n > (k - 1)^2$, и каждый ход мы используем не более $k - 1$ вершины, то в итоге мы отметим хотя бы k вершин. Полученные k вершин будут попарно не соединены друг с другом, то есть расстояние между любыми двумя будет больше 1.

♦ Только оценка или только пример: 4 балла.

3. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает невписанную окружность (касающуюся стороны BC) в точках D и E таких, что D лежит на отрезке AE . Докажите, что

$$\frac{AD}{AE} \leq \frac{BC^2}{DE^2}.$$

Решение. Пусть данная невписанная окружность касается AB в точке X . В силу подобия треугольников ADX и AXE ,

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AD}{AX} \cdot \frac{AX}{AE} = \frac{AX^2}{AE^2},$$

поэтому достаточно доказать, что $\frac{p}{AE} \leq \frac{a}{2r_a}$ где p — полупериметр треугольника ABC , r_a — радиус невписанной окружности, $a = BC$. Но $a \cdot AE \geq a \cdot (AH + 2r_a) = ah_a + 2ar_a \geq 2pr_a \iff ah_a \geq 2(p - a)r_a$ где H — проекция A на BC . Последнее верно, так как оба выражения равны удвоенной площади ABC .

4. Аня пишет числа $1, 2, \dots, 100$ в клетки таблицы 10×10 , каждое число по одному разу, в произвольном порядке. За один ход Боря выбирает линию и просит Аню упорядочить числа: по возрастанию слева направо, если это строка, и по возрастанию сверху вниз, если это столбец. При этом Боря таблицу не видит. Через 11 ходов он должен указать клетку, на которой будет написано число от 30 до 71. Сможет ли Боря гарантированно победить, как бы ни расставляла числа Аня?

Ответ: да, может. **Решение.** Назовём столбцы слева направо буквами a, b, \dots, j , а строки сверху

вниз пронумеруем числами $1, 2, \dots, 10$. Упорядочим сначала числа во всех строчках, а последним шагом упорядочим числа в столбце e . Покажем, что число из клетки $e6$ нам подходит.

Во-первых, допустим, что оно оказалось больше 71. Тогда числа в клетках $e7, e8, e9, e10$ тоже больше 71, и во всех строчках, в которых стояли числа $e6, \dots, e10$ до упорядочивания столбца e , есть ещё по 5 чисел, больших 71. Получаем во всей таблице минимум 30 чисел, больших 71, чего не может быть.

Во-вторых, докажем, что оно не меньше 30. Предположим противное. Тогда числа в клетках $e1, e2, e3, e4, e5$ также меньше 30, и в каждой строке, где стояли числа $e1, e2, \dots, e6$ до упорядочивания столбца e , есть по 4 числа, меньших 30. Таким образом, всего чисел, меньших 30, хотя бы 30, что опять же невозможно.

5. Последовательность a_1, a_2, \dots состоит из квадратов натуральных чисел и удовлетворяет при всех натуральных m и n условию $a_{m+n} = a_m + a_n + 2mn$. Найдите все такие последовательности.

Ответ: $a_n = n^2$. **Решение.** Обозначим $a_1 = c$. При каждом натуральном n выполнено равенство $a_{n+1} = a_n + 2n + c$. Поэтому $a_n = a_1 + (2 \cdot 1 + c) + (2 \cdot 2 + c) + \dots + (2 \cdot (n-1) + c) = n(n-1) + nc = n(n+c-1)$. Следовательно, $n(n+c-1)$ – точный квадрат при всех натуральных n . Однако $n+c-1$ для бесконечно многих n является простым, и не может дать квадрат при умножении на меньшее число. Поэтому $c = 1$, то есть $a_n = n^2$ при всех натуральных n .

♦ Ответ с проверкой: 0 баллов.

6. Последовательность $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия, а последовательность $\{g_n\}$ – геометрическая. В последовательности $\{a_n + g_n\}$ первые четыре члена – $0, 0, 1, 0$ (в таком порядке). Найдите десятый член этой последовательности.

Ответ: 60. **Решение.** Пусть арифметическая прогрессия – это $a, a+d, a+2d, \dots$, геометрическая – b, bq, bq^2, \dots . Тогда нам дано, что $a+b = a+d+bq = a+3d+bq^3$. Из первого равенства получаем, что $d = b(1-q)$, а из второго $2d = bq(1-q)(1+q) = dq(1+q)$. Если $d = 0$, то $b = 0$ или $q = 1$. В любом случае получается, что обе прогрессии постоянны, а такого быть не может, так как третий член суммы отличается от остальных. Значит, $d \neq 0$, на него можно сократить. Тогда $2 = q(1+q)$ и $q = 1$ или $q = -2$. Если $q = 1$, то $a = a+d, d = 0$, но это невозможно. Значит, $q = -2, d = 3b$. Снова запишем $a+b = 0, a+6b+4b = a+10b = 9b = 1$. Следовательно, $b = 1/9, a = -1/9, d = 1/3$. Тогда десятый член последовательности равен $-1/9 + 9/3 - 2^9/9 = 3 + 57 = 60$.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел k таких, что число k^k можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел.

8. Дано натуральное число $n > 1$. В колоде есть карты n различных мастей и n различных достоинств, и в каждой масти есть ровно одна карта каждого достоинства. Банкомёт раздаёт n игрокам по n карт. После этого игроки выбирают места за круглым столом и пытаются выложить на стол все карты, действуя таким образом: один из игроков выкладывает произвольную карту, а затем каждый следующий по часовой стрелке игрок выкладывает карту, отличающуюся и мастью, и достоинством от предыдущей выложенной карты. Для каких n банкомёт может так раздать карты, чтобы все карты выложить не удалось? (Игроки работают вместе, и они могут видеть карты друг друга).

Ответ: При всех $n > 1$. **Решение.** Перенумеруем масти и достоинства числами от 1 до n , и обозначим через (i, j) карту i -й масти j -го достоинства. Тогда пусть для $1 \leq i < n$ i -й игрок получит набор $(i, 1), \dots, (i, i-1), (n, i), (i, i+1), \dots, (i, n)$. А n -й игрок получит оставшиеся карты: $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$. Пусть требуемая раскладка существует. Пусть n игрок сидит не первым, и перед ним сидит k -й игрок. Но тогда у n -го игрока есть карта (k, k) , которую нельзя играть после любой карты k -го игрока. Аналогично, если n -й сидит первым, а k -ый за ним, то после карты (k, k) k -й игрок не сможет сыграть ни одно из своих карт. Следовательно, требуемой раскладки не существует.

9. Три квадратных трехчлена $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ со старшими коэффициентами, равными 1, имеют по два вещественных корня и удовлетворяют условиям

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7), \quad Q(R(x)) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$$

при всех вещественных x . Чему может быть равно число $P(0) + Q(0) + R(0)$?

Ответ: 129. **Решение.** Заметим, что $P(Q(x))$ имеет четыре различных корня. Следовательно, $Q(1), Q(3), Q(5), Q(7)$ должны принимать ровно два значения (а именно быть корнями $P(x)$). Это значит, что

$Q(x)$ симметричен относительно прямой $x = 4$, то есть $Q(x) = (x - 4)^2 + a$, для некоторой константы a . Причем, $a + 1$ и $a + 9$ — корни P . Так как $P(a + 1) = P(a + 9) = 0$, то $P(x)$ симметричен относительно прямой $x = a + 5$, то есть $P(x) = (x - (a + 5))^2 + b$, для некоторой константы b . Аналогично получаем, что $R(x) = (x - 5)^2 + c$ и $Q(x) = (x - (c + 5))^2 + d$, для некоторых констант c и d . Но мы уже выяснили, что $Q(x) = (x - 4)^2 + a$, следовательно $2(c + 5) = 8$ и $c = -1$. Откуда, $R(x) = (x - 4)(x - 6)$. Подставляя $x = 2, 4, 6, 8$ в $R(x)$, получаем, что корнями Q являются числа 0 и 8. Следовательно, $Q(x) = x(x - 8)$. Наконец, подставляя $x = 1, 3, 5, 7$ в $Q(x)$, получаем, что корни P — это -7 и -15 , откуда $P(x) = (x + 7)(x + 15)$. Итого,

$$P(x) = x^2 + 22x + 105, \quad Q(x) = x^2 - 8x, \quad R(x) = x^2 - 10x + 24$$

А требуемая сумма $105 + 0 + 24 = 129$.

10. В вершинах правильного $(2n + 1)$ -угольника расставили вещественные числа, среди которых есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное. Оказалось, что сумма чисел в любых двух соседних вершинах неотрицательна. Пусть S — сумма положительных чисел в вершинах, а T — сумма отрицательных. Докажите, что $nS + (n + 1)T \geq 0$.

Решение. Поскольку никакие два отрицательных числа не могут стоять рядом, то их количество $k \leq n$. После каждого отрицательного числа стоит положительное, которое не меньше по модулю. Обозначим эти положительные числа как a_1, a_2, \dots, a_k . Заметим, что для любого i все числа, кроме a_i , можно разбить на пары соседних, поэтому $S + T - a_i \geq 0$. Просуммируем по всем i : $kS + kT - a_1 - a_2 - \dots - a_k \geq 0$. Но $T \geq -a_1 - a_2 - \dots - a_k$, сложив эти неравенства, получим $kS + (k + 1)T \geq 0$. Так как $k \leq n$, то прибавив нужное число раз очевидное неравенство $S + T \geq 0$, получим требуемое.