

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 26.11.2024. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Существуют ли приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ такие, что

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) \quad \text{и} \quad Q(R(x)) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)?$$

Ответ: да, существуют.

Решение. Подойдут $P(x) = (x+7)(x+15)$, $Q(x) = x^2 - 8x = x(x-8)$ и $R(x) = x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x-6)$. Тогда

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= (Q(x)+7)(Q(x)+15) = (x^2-8x+7)(x^2-8x+15) = (x-1)(x-7) \cdot (x-3)(x-5), \\ Q(R(x)) &= R(x)(R(x)-8) = (x-4)(x-6) \cdot (x^2-10x+16) = (x-4)(x-6) \cdot (x-2)(x-8), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Комментарий. Построить пример (и даже доказать его единственность!) можно из следующих равенств:

$$\begin{aligned} 0 &= P(Q(1)) = P(Q(3)) = P(Q(5)) = P(Q(7)), \\ 0 &= Q(R(2)) = Q(R(4)) = Q(R(6)) = Q(R(8)). \end{aligned}$$

Поскольку квадратный трёхчлен $P(x)$ имеет не более двух корней, то числа $Q(1)$, $Q(3)$, $Q(5)$ и $Q(7)$ разбиваются на две пары равных чисел. Поскольку аргументы, в которых квадратный трёхчлен принимает одинаковые значения, должны быть симметричны относительно абсциссы вершины, получаем, что абсцисса вершины $Q(x)$ равна 4.

Аналогично, получаем, что $R(2)$, $R(4)$, $R(6)$, $R(8)$ — это корни $Q(x)$. Тогда,

1. абсцисса вершины $R(x)$ равна 5, откуда $R(x) = (x-5)^2 + c$,
2. $R(2)$ и $R(4)$ — корни $Q(x)$, т.е. тоже должны быть симметричны относительно абсциссы вершины $Q(x)$, откуда $R(2) + R(4) = 8$.

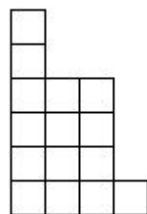
Значит, $(2-5)^2 + (4-5)^2 + 2c = 8$, откуда $c = -1$ и $R(x) = x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x-6)$.

Осталось найти $Q(x)$ и $P(x)$. Это несложно: мы же знаем их корни!

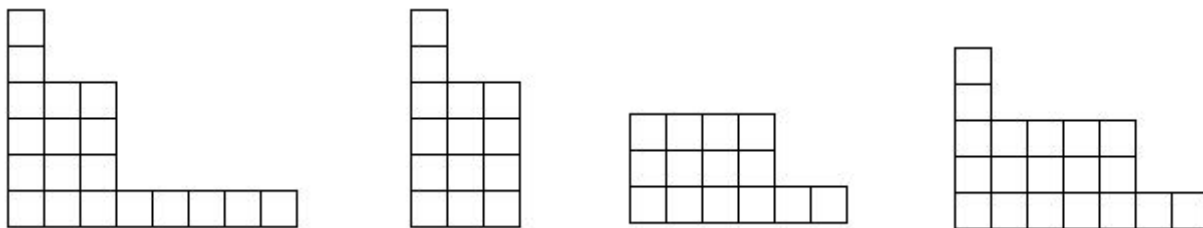
- $R(2) = R(8) = 8$ и $R(4) = R(6) = 0$ — корни $Q(x)$, откуда $Q(x) = x(x-8)$;
- $Q(1) = Q(7) = -7$, $Q(3) = Q(5) = -15$ — корни $P(x)$, откуда $P(x) = (x+7)(x+15)$.

2. Назовем представлением натурального числа n разложение вида $n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ с целыми числами $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Докажите, что при $n \geq 3$ количество представлений, в которых не менее половины ненулевых чисел — единицы, равно количеству представлений, в которых $a_2 = a_3$.

Решение. Будем изображать каждое представление числа n в виде клетчатой фигуры (которую мы будем называть *диаграммой*), состоящей из n столбиков, стоящих подряд, в k -м из которых a_k клеток. Например, для представления $15 = 6 + 4 + 4 + 1 + 0 + 0 + \dots + 0$ диаграмма будет такой, как на картинке справа. Пусть A — множество диаграмм, которые соответствуют тем представлениям в которых не менее половины ненулевых чисел — единицы, а B — тем, в которых $a_2 = a_3$.



Построим биекцию из множества A в множество B . Возьмём диаграмму из множества A . В ней количество k столбиков высоты ровно 1 составляет хотя бы половину от всех столбиков. Временно выкинем все эти столбики, а оставшуюся диаграмму отразим симметрично относительно диагонали из левого нижнего угла. Поскольку каждый столбик был высоты хотя бы 2, то получится диаграмма, в которой высоты первого и второго столбиков одинаковы. Кроме того, поскольку k было не меньше половины количества столбиков, то теперь высота первого столбика не больше k . Добавим перед этими столбиками столбик высоты k и получим диаграмму из B . Ниже — пример для какой-то конкретной ситуации.



3. Найдите все нечётные натуральные числа n , при которых число $(2^n - 1)(5^n - 1)$ является полным квадратом.

Ответ: только $n = 1$.

Решение. При $n = 1$ выражение равно 4. Пусть теперь $n > 1$. Разберём два случая, какой остаток n даёт при делении на 4. Поскольку n нечётно, то остаток может быть только 1 или 3.

1. $n \equiv 3 \pmod{4}$: поскольку $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$, в этом случае

$$(2^n - 1)(5^n - 1) \equiv (2^3 - 1)(0 - 1) = -7 \equiv 3 \pmod{5},$$

т.е. не может быть точным квадратом, т.к. квадраты не дают остаток 3 при делении на 5.

2. $n \equiv 1 \pmod{4}$: заметим, что $5^n - 1$ делится на 4. Поделим выражение на 4, от этого число не перестанет быть точным квадратом. Тогда (при $n \geq 5$)

$$\frac{(2^n - 1)(5^n - 1)}{4} = (2^n - 1)(5^{n-1} + 5^{n-2} + \dots + 1) \equiv (0 - 1)(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ слагаемых}}) = -n \equiv 3 \pmod{4},$$

т.е. не может быть точным квадратом, т.к. квадраты не дают остаток 3 при делении на 4.

Комментарий. Во втором случае вместо деления на 4 можно было посмотреть на выражение по модулю 16: так как $5^4 = 625 \equiv 1 \pmod{16}$, то

$$(2^n - 1)(5^n - 1) \equiv (0 - 1)(5^1 - 1) = -4 \equiv 12 \pmod{16},$$

но квадраты не дают остаток 12 при делении на 16.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Отрезки AC и BD пересекаются в точке P . Лучи CB и DA пересекаются в точке Q . Окружность, описанная около треугольника APB , вторично пересекает отрезки AD и BC в точках A_1 и B_1 соответственно. Окружность, описанная около треугольника CPD , вторично пересекает отрезки B_1C и A_1D в точках C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что прямые A_1C_1 , B_1D_1 и QO пересекаются в одной точке.

Решение. Обозначим через M и N середины отрезков AD и BC , через M_1 и N_1 — середины отрезков A_1D_1 и B_1C_1 через R — точку пересечения отрезков A_1C_1 и B_1D_1 . Расстояние от точки X до прямой ℓ условимся обозначать $d(X, \ell)$.

Из вписанности четырёхугольников ABB_1A_1 , $ABCD$ и CDD_1C_1 мы получаем, что $\angle A_1D_1C_1 = \angle C_1CD = \angle QAB = \angle BB_1A$, поэтому четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ тоже вписанный. Обозначим $\angle ABP = \angle PCD = \alpha$, $\angle PAB = \angle PDC = \beta$. В силу вписанности A_1PBA и D_1PCD мы получаем, что $\angle D_1A_1P = \alpha = \angle A_1D_1P$, поэтому $A_1P = PD_1$. Аналогично, $\angle PB_1C_1 = \beta = \angle PC_1B_1$ и $PB_1 = PC_1$. Значит, точка P лежит на серединных перпендикулярах к непараллельным сторонам A_1D_1 и B_1C_1 вписанного четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$, а потому является его центром описанной окружности, в частности, $PD_1 = PC_1$.

Из сказанного выше следует, что углы α и β острые, поэтому точка O лежит внутри угла AQB , а тогда $\angle DOM = \alpha$ и $\angle CON = \beta$. Тогда подобны прямоугольные треугольники PD_1M_1 и DOM ; PC_1N_1 и CON , откуда следует равенство отношений

$$\frac{D_1M_1}{OM} = \frac{PD_1}{OD} = \frac{PC_1}{OC} = \frac{C_1N_1}{ON} \Rightarrow \frac{d(O, AD)}{d(O, BC)} = \frac{OM}{ON} = \frac{D_1M_1}{C_1N_1} = \frac{A_1D_1}{B_1C_1}.$$

Поскольку четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — вписанный, то $\triangle A_1RD_1 \sim \triangle B_1RC_1$. Значит,

$$\frac{d(R, AD)}{d(R, BC)} = \frac{A_1D_1}{B_1C_1} = \frac{d(O, AD)}{d(O, BC)},$$

поэтому точки P , O и R лежат на одной прямой, что и требовалось.

5. Найдите наименьшее число C , для которого верно следующее утверждение.

Пусть $n > 2$ — натуральное число, а a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа; положим $a_{n+k} = a_k$ при всех натуральных k . Определим $b_i = a_i + \max(a_{i+1}, a_{i+2})$. Тогда

$$C \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^{1000} \geq \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1})^{1000}.$$

Ответ: $C = 2^{1000}$.

Решение. Пусть $d_i = a_i - a_{i+1}$. Для вещественного числа x обозначим $x^- = \max(x, 0)$ и $x^+ = \min(x, 0)$. Тогда получается, что

$$\begin{aligned} b_i - b_{i+1} &= d_i + \max(a_{i+1}, a_{i+2}) - \max(a_{i+2}, a_{i+3}) = \\ &= d_i + (\max(a_{i+1}, a_{i+2}) - a_{i+2}) - (\max(a_{i+2}, a_{i+3}) - a_{i+2}) = d_i + d_{i+1}^+ + d_{i+2}^-. \end{aligned}$$

Докажем сначала, что $C = 2^{1000}$ подходит под условие. Из неравенства о средних для любых вещественных x и y получаем $\frac{x^{1000} + y^{1000}}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{1000}$, откуда следует, что $(x+y)^{1000} \leq 2^{999}(x^{1000} + y^{1000})$. Если $x \geq 0$ и $y \leq 0$, то $|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$, а значит, $(x+y)^{1000} \leq x^{1000} + y^{1000}$. Пользуясь этими неравенствами, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1})^{1000} &= \sum_{i=1}^n (d_i + d_{i+1}^+ + d_{i+2}^-)^{1000} \leq \sum_{i=1}^n 2^{999} (d_i^{1000} + (d_{i+1}^+ + d_{i+2}^-)^{1000}) \leq \\ &\leq 2^{999} \sum_{i=1}^n (d_i^{1000} + (d_{i+1}^+)^{1000} + (d_{i+2}^-)^{1000}) = 2^{999} \sum_{i=1}^n (d_i^{1000} + (d_i^+)^{1000} + (d_i^-)^{1000}) = \\ &= 2^{999} \sum_{i=1}^n 2d_i^{1000} = 2^{1000} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^{1000}. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что $C \geq 2^{1000}$ для любого C , удовлетворяющего условию. Возьмём $n = 2m > 4$ и $a_1 = 0, a_2 = 1, \dots, a_{m+1} = m+1, a_{m+2} = m, \dots, a_n = 1$. Тогда $|a_i - a_{i+1}| = 1$ при всех i , а также $|b_i - b_{i+1}| = 2$ при всех $i \neq m-1, m, 2m-1, 2m$. Значит,

$$Cn = C \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^{1000} \geq \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1})^{1000} \geq (n-4)2^{1000}.$$

То есть $Cn \geq 2^{1000}(n-4)$, или $C \geq 2^{1000} \left(1 - \frac{4}{n}\right)$. Поскольку это верно сколь угодно большом чётном n , отсюда следует, что $C \geq 2^{1000}$.

6. Дано простое число p , пусть $n = p^2 + p + 1$. Рассмотрим семейство \mathcal{F} из $(p+1)$ -элементных подмножеств в n -элементном множестве X такое, что никакая пара подмножеств в \mathcal{F} не пересекается ровно по одному элементу. Найдите максимальный размер такого семейства \mathcal{F} .

Ответ: $\frac{1}{p^2+p+1} C_{p^2+p+1}^{p+1}$ (в решении будет доказано, что это число равно $C_{p^2+p-1}^{p-1}$).

Решение. Для начала приведём пример, в котором ровно $\frac{1}{p^2+p+1} C_{p^2+p+1}^{p+1}$ подмножеств. Выделим какие-то два элемента и рассмотрим все $C_{p^2+p-1}^{p-1}$ подмножеств из $p+1$ элемента, которые содержат их обоих. Понятно, что любая пара из них не пересекается ровно по одному элементу. С другой стороны, их

$$C_{p^2+p-1}^{p-1} = \frac{(p^2+p-1)!}{(p^2)!(p-1)!} = \frac{1}{p^2+p+1} \cdot \frac{(p^2+p+1)!}{(p^2)!(p+1)!} = \frac{1}{p^2+p+1} C_{p^2+p+1}^{p+1}.$$

Теперь докажем, что больше $\frac{1}{p^2+p+1}C_{p^2+p+1}^{p+1}$ подмножеств в \mathcal{F} быть не может. Будем пользоваться следующим утверждением¹: для любого простого числа p существует проективная плоскость над полем \mathbb{F}_p вычетов по модулю p . Она устроена так: имеется $p^2 + p + 1$ элементов (точек) и $p^2 + p + 1$ подмножеств из этих элементов (прямых), в каждом из которых ровно $p + 1$ элемент, а любые два подмножества пересекаются ровно по одному элементу. Зафиксируем любую нумерацию элементов проективной плоскости.

Вернёмся теперь к нашему множеству X . Рассмотрим случайную нумерацию элементов множества X и случайную величину, равную количеству элементов из \mathcal{F} , ставших прямыми в выбранной выше проективной плоскости. Поскольку любые два элемента из \mathcal{F} не пересекаются ровно по одному элементу, то каждое значение этой случайной величины не больше 1. Значит, её математическое ожидание также не больше 1. С другой стороны, каждый элемент из \mathcal{F} может стать элементом проективной плоскости (т.е. одним из конкретных $p^2 + p + 1$ множеств) с вероятностью $(p^2 + p + 1)/C_{p^2+p+1}^{p+1}$ (т.к. любые две из $C_{p^2+p+1}^{p+1}$ нумераций одного конкретного множества равновероятны), откуда математическое ожидание этой же величины равно

$$|\mathcal{F}| \cdot \frac{p^2 + p + 1}{C_{p^2+p+1}^{p+1}} \leq 1,$$

отсюда и следует оценка.

Комментарий. Приведём описание проективной плоскости над \mathbb{F}_p . Его точки задаются упорядоченными тройками (x, y, z) элементов \mathbb{F}_p , не все из которых равны нулю; при этом две тройки, отличающиеся друг от друга умножением на ненулевой вычет, задают одну и ту же точку. Такая точка обозначается $(x : y : z)$. Прямые задаются такими же тройками; при этом прямая $(a : b : c)$ содержит точку $(x : y : z)$, если $ax + by + cz = 0$. Нетрудно проверить, что эта конструкция удовлетворяет условиям, указанным выше.

7. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I . Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_2 . Окружность ω_a проходит через точки A_1, A_2 и середину отрезка AI . Окружности ω_b и ω_c определяются аналогично. Докажите, что центры окружностей $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ лежат на одной прямой.

Решение. Сделаем инверсию относительно вписанной окружности. Точка A_1 перейдет в проекцию A_2 на прямую IA_1 , а точка A — в середину A' отрезка B_2C_2 . Поэтому середина AI переходит в точку A_0 , симметричную I относительно A' , а образ окружности ω_a после инверсии — окружность с диаметром A_0A_2 . Ее центр O_a удовлетворяет $\vec{IO_a} = \frac{\vec{IA_2} + \vec{IA_0}}{2} = \frac{\vec{IA_2} + \vec{IB_2} + \vec{IC_2}}{2}$. Выражение симметрично, поэтому центры образов $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ после инверсии совпадают, а значит, до инверсии они лежали на одной прямой, проходящей через I .

8. Натуральное число k таково, что число $p = 8k + 5$ простое. Целые числа $a_1, a_2, \dots, a_{4k+2}$ таковы, что $|a_i| = i$ при всех $i = 1, 2, \dots, 4k + 2$. Рассмотрим при всех $j = 1, 2, \dots, 4k + 2$ суммы

$$S_j = a_1^{2j-1} + a_2^{2j-1} + \dots + a_{4k+2}^{2j-1}.$$

Какое наименьшее количество чисел, не кратных p , может оказаться среди этих сумм?

Ответ: 2.

Решение. Пусть t — первообразный корень по модулю p . Тогда числа t, t^2, \dots, t^{8k+4} дают разные остатки при делении на p . Известно, что если $x^2 - 1$ делится на p , то $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Подставляя $x = t^{4k+2}$, получаем, что $t^{4k+2} \equiv -1 \pmod{p}$.

Пример. Рассмотрим множество из $4k + 2$ вычетов по модулю p вида t^{4i} и t^{4i+1} для всех $0 \leq i \leq 2k$. В получившемся множестве нет противоположных (поскольку противоположным вычету t^x является t^{x+4k+2} , а в нашем множестве не может быть одновременно двух этих вычетов). Тогда мы можем выбрать числа a_i , соответствующее этим вычетам. Заметим, что при всех нечётных $j = 1, 3, \dots, 8k + 3$, не равных $2k + 1$ и $6k + 3$, сумма

$$\sum_{i=1}^{4k+2} a_i^j = \sum_{i=0}^{2k} (t^{4i})^j + \sum_{i=0}^{2k} (t^{4i+1})^j = \frac{t^{(8k+4)j} - 1}{t^{4j} - 1} + t \frac{t^{(8k+4)j} - 1}{t^{4j} - 1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

¹участники могли им пользоваться без доказательства

Последнее следует из того, что $t^{(8k+4)j} - 1 \not\equiv p$ и $t^{4j} - 1 \not\equiv p$, так как $4j \not\equiv 8k+4$. То есть для выбранных a_i не более двух сумм не делятся на p .

Оценка. Так как числа $1, t^2, t^4, \dots, t^{8k+2}$ это все квадратичные вычеты по модулю p , то при $j = 1, 2, \dots, 4k+1$ получаем, что

$$\sum a_i^{2j} = \sum (a_i^2)^j = (1^2)^j + (2^2)^j + \dots + \left(\left(\frac{p-1}{2} \right)^2 \right)^j = 1 + t^{2j} + \dots + t^{(8k+2)j} = \frac{t^{(8k+4)j} - 1}{t^{2j} - 1} \not\equiv p.$$

Предположим, что для всех $j = 1, 2, \dots, 2k+1$ суммы $\sum a_i^{2j-1}$ делятся на p . Тогда для всех $j = 1, 2, \dots, 4k+2$ суммы $\sum_i a_i^j$ делятся на p . Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{4k+1}) = \alpha_{4k+2}x^{4k+2} + \alpha_{4k+1}x^{4k+1} + \dots + \alpha_1x.$$

С одной стороны, $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{4k+2}) = \sum_j \alpha_j \sum_i a_i^j \not\equiv p$. С другой, $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{4k+2}) = f(a_{4k+2}) \not\equiv p$. Получили противоречие. Значит, для одного из $j = 1, 2, \dots, 2k+1$ одна из сумм $\sum_i a_i^{2j-1}$ не делится на p .

Предположим, что для всех $j = 2k+2, 2k+3, \dots, 4k+2$ суммы $\sum a_i^{2j-1}$ делятся на p . Так как $a^t \equiv \left(\frac{1}{a}\right)^{8k+4-t} \pmod{p}$, то для всех $j = 1, 2, \dots, 2k+1$ суммы $\sum_i \left(\frac{1}{a_i}\right)^{2j-1}$ делятся на p . Так как среди вычетов $\frac{1}{a_i}$ нет противоположных, то, применяя предыдущие рассуждения для вычетов $\frac{1}{a_i}$, получаем противоречие. Значит, хотя бы две суммы не делятся на p .