

## КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 26.11.2024. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Существуют ли приведённые квадратные трёхчлены  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  такие, что

$$P(Q(x)) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) \quad \text{и} \quad Q(R(x)) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-8)?$$

2. Назовем *представлением* натурального числа  $n$  разложение вида  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  с целыми числами  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Докажите, что при  $n \geq 3$  количество представлений, в которых не менее половины *ненулевых* чисел — единицы, равно количеству представлений, в которых  $a_2 = a_3$ .

3. Найдите все нечётные натуральные числа  $n$ , при которых число  $(2^n - 1)(5^n - 1)$  является полным квадратом.

4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Лучи  $CB$  и  $DA$  пересекаются в точке  $Q$ . Окружность, описанная около треугольника  $APB$ , вторично пересекает отрезки  $AD$  и  $BC$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Окружность, описанная около треугольника  $CPD$ , вторично пересекает отрезки  $B_1C$  и  $A_1D$  в точках  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $A_1C_1$ ,  $B_1D_1$  и  $QO$  пересекаются в одной точке.

5. Найдите наименьшее число  $C$ , для которого верно следующее утверждение.

Пусть  $n > 2$  — натуральное число, а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — положительные числа; положим  $a_{n+k} = a_k$  при всех натуральных  $k$ . Определим  $b_i = a_i + \max(a_{i+1}, a_{i+2})$ . Тогда

$$C \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^{1000} \geq \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1})^{1000}.$$

6. Дано простое число  $p$ , пусть  $n = p^2 + p + 1$ . Рассмотрим семейство  $\mathcal{F}$  из  $(p+1)$ -элементных подмножеств в  $n$ -элементном множестве  $X$  такое, что никакая пара подмножеств в  $\mathcal{F}$  не пересекается ровно по одному элементу. Найдите максимальный размер такого семейства  $\mathcal{F}$ .

7. Биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается стороны  $BC$  в точке  $A_2$ . Окружность  $\omega_a$  проходит через точки  $A_1$ ,  $A_2$  и середину отрезка  $AI$ . Окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$  определяются аналогично. Докажите, что центры окружностей  $\omega_a$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_c$  лежат на одной прямой.

8. Натуральное число  $k$  таково, что число  $p = 8k + 5$  простое. Целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_{4k+2}$  таковы, что  $|a_i| = i$  при всех  $i = 1, 2, \dots, 4k+2$ . Рассмотрим при всех  $j = 1, 2, \dots, 4k+2$  суммы

$$S_j = a_1^{2j-1} + a_2^{2j-1} + \dots + a_{4k+2}^{2j-1}.$$

Какое наименьшее количество чисел, не кратных  $p$ , может оказаться среди этих сумм?