

1. Простое число  $p > 3$  не содержит цифр 1, 4, 7. Докажите, что можно выбрать одну из его ненулевых цифр и вписать в число перед ней цифру на один меньше так, чтобы полученное число оказалось составным.

2. Вещественные числа  $a, b, c, d$  таковы, что

$$a^3 + ab + b^3 = a^2 + b^2; \quad b^3 + bc + c^3 = b^2 + c^2; \quad c^3 + cd + d^3 = c^2 + d^2.$$

На сколько могут отличаться числа  $a^3 + ad + d^3$  и  $a^2 + d^2$ ?

3. Параллелограммы  $ABCD$  и  $AEFG$  расположены на плоскости так, что  $DE = CF$ . Прямые  $BG$ ,  $DE$  и  $CF$ , пересекаясь, ограничивают треугольник  $\Delta$ . Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

4. На клетчатой доске  $a \times b$  закрашили несколько непересекающихся (в том числе по углу!) доминошек. Найдите все пары  $(a, b)$ , для которых оставшуюся часть доски всегда можно разбить на доминошки (независимо от того, какие именно доминошки закрашены).

5. Положительные рациональные числа  $a, b, c$  и натуральные числа  $k, m, n$  таковы, что  $abc = 1$  и число  $a^k + b^m + c^n$  — целое. Докажите, что если число  $a$  записать в виде несократимой дроби, то ее числитель будет точной степенью натурального числа (выше первой).

6. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Лучи  $CB$  и  $DA$  пересекаются в точке  $Q$ . Окружность, описанная около треугольника  $APB$ , вторично пересекает отрезки  $AD$  и  $BC$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Окружность, описанная около треугольника  $CPD$ , вторично пересекает отрезки  $B_1C$  и  $A_1D$  в точках  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $A_1C_1$ ,  $B_1D_1$  и  $QO$  пересекаются в одной точке.

7. Сумма положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  равна 100. Докажите, что

$$\frac{x_1^6}{x_1^4 + x_2x_3} + \frac{x_2^6}{x_2^4 + x_3x_4} + \dots + \frac{x_{99}^6}{x_{99}^4 + x_{100}x_1} + \frac{x_{100}^6}{x_{100}^4 + x_1x_2} \geq 50.$$

8. Дано натуральное число  $k$ . В начале игры в ряд случайным образом выкладывают  $2k+1$  монет. Каждая монета с вероятностью  $1/2$  лежит орлом вверх, с вероятностью  $1/2$  — решкой. Двое игроков делают ходы по очереди. За ход игрок может забрать несколько подряд лежащих монет, начиная с самой левой. При этом, если самая левая монета лежит решкой вверх, то среди выбранных обязательно должно оказаться нечетное число монет, лежащих решкой вверх. Если же самая левая монета лежит орлом вверх, то среди выбранных обязательно должно оказаться нечетное число монет, лежащих орлом вверх. Побеждает тот, кому достается последняя монета. Какова вероятность того, что у первого игрока есть выигрышная стратегия?