

1. Простое число  $p > 3$  не содержит цифр 1, 4, 7. Докажите, что можно выбрать одну из его ненулевых цифр и вписать в число перед ней цифру на один меньше так, чтобы полученное число оказалось составным.

**Решение.** Из условия следует, что простое число  $p$  не делится на 3. Мы впишем цифру так, чтобы полученное число было кратно трем, тем самым, оно будет составным. Это равносильно тому, что сумма его цифр будет кратна 3. Пусть  $p$  дает остаток 1 при делении на 3. Тогда его сумма цифр тоже дает остаток 1 от деления на 3, а последняя цифра не может быть 2, 4, 5, 6, 8, 10, то есть остаются лишь варианты 3 и 9. Значит, если перед последней цифрой добавить цифру 2 или 8, полученное число будет кратно 3. Теперь разберем случай, когда  $p$  при делении 3 дает остаток 2. Тогда какая-то из цифр числа  $p$  не кратна трем. Из условия следует, что она может быть равна лишь 2, 5 или 8. Если перед ней вписать цифру на единицу меньше, получим требуемое.

2. Вещественные числа  $a, b, c, d$  таковы, что

$$a^3 + ab + b^3 = a^2 + b^2; \quad b^3 + bc + c^3 = b^2 + c^2; \quad c^3 + cd + d^3 = c^2 + d^2.$$

На сколько могут отличаться числа  $a^3 + ad + d^3$  и  $a^2 + d^2$ ?

**Ответ.** 0 или 1. **Решение.** Заметим, что

$$a^3 + ab + b^2 - a^2 - b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a^2 - ab + b^2) = (a + b - 1)(a^2 - ab + b^2).$$

Поскольку  $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$ , то вторая скобка может равняться нулю лишь в случае  $a = b = 0$ . Таким образом, первое условие равносильно тому что либо  $a + b = 1$ , либо  $a = b = 0$ , и аналогично с двумя другими условиями. Если среди чисел нет нулей, то  $a + b = b + c = c + d = 1$ , а тогда и  $d + a = 1$ , поэтому искомое отличие равно нулю. Если же среди них есть нули, то все числа — нули или единицы. В случае  $a = d = 1$  выражения  $a^2 + ad + d^2$  и  $a + d$  отличаются на 1, во всех остальных случаях они равны. Оба ответа достигаются, например, при  $a = c = 1, b = d = 0$  и  $a = d = 1$  и  $b = c = 0$ .

3. Параллелограммы  $ABCD$  и  $AEFG$  расположены на плоскости так, что  $DE = CF$ . Прямые  $BG, DE$  и  $CF$ , пересекаясь, ограничивают треугольник  $\Delta$ . Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

**Решение.** Поскольку четырехугольники  $AEFG$  и  $ABCD$  — параллелограммы, то

$$\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}.$$

Значит, существует такой треугольник  $XYZ$ , что  $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{BG}$ , в частности,  $XY = DE = CF = YZ$ . Кроме того, стороны треугольников  $XYZ$  и  $\Delta$  параллельны, поэтому эти треугольники подобны, и раз треугольник  $XYZ$  равнобедренный, то треугольник  $\Delta$  тоже равнобедренный, что и требовалось.

4. На клетчатой доске  $a \times b$  закрашили несколько непересекающихся (в том числе по углу!) доминошек. Найдите все пары  $(a, b)$ , для которых оставшуюся часть доски всегда можно разбить на доминошки (независимо от того, какие именно доминошки закрашены).

**Ответ.** Обе стороны четны, или какая-то из сторон равна 2. **Решение.** Если обе стороны нечетны, то очевидно остаток на доминошки не разбить. Если обе четны — разобьем на

квадраты  $2 \times 2$ , и заметим, что каждый из квадратов  $2 \times 2$  пересекается не более чем с одной доминошкой. Если он вообще не содержит доминошек — разобьем его на две. Если содержит ровно одну — разобьем оставшиеся в нем 2 клетки на одну доминошку. Если пересекается с доминошкой ровно по одной клетке — рассмотрим соседний с ним квадрат  $2 \times 2$ , который содержит вторую клетку рассмотренной доминошки. Оставшиеся в этих двух квадратах 6 клеток разобьем на три доминошки. Прделав такую операцию со всеми квадратами  $2 \times 2$  получим требуемое. Если прямоугольник  $2 \times b$ , то докажем требуемое индукцией по  $b$ . База  $b = 1$  или  $b = 2$  очевидна. Переход от  $b - 1$  к  $b$ . Рассмотрим две клетки, примыкающие к стороне длины 2. Если они обе свободны — объединим их в доминошку и применим индукционное предположение к оставшейся части доски  $2 \times (b - 1)$ . Если одна занята, другая свободна, то в примыкающем к этой стороне квадрате  $2 \times 2$  должны быть свободны обе оставшиеся клетки — объединим их в доминошку, и снова продолжим по индукционному предположению для  $2 \times (b - 2)$ . Если же обе крайние клетки заняты, то они заняты одной и той же доминошкой и мы можем снова воспользоваться индукционным предположением для  $2 \times (b - 1)$ . Для доски  $1 \times n$  где  $n \geq 3$  расположим одну доминошку на расстоянии 1 от угловой клетки и сразу получим, что остаток на доминошки не разбивается. Наконец, пусть стороны разной четности, не умаляя общности в таблице  $2k + 1$  строк и хотя бы 3 столбца (случаи когда столбцов 1 или 2 уже разобраны выше). Закрасим доминошки горизонтально в строках с нечетными номерами, чтобы каждая занимала одну клетку во 2 слева столбце, и одну в 3 слева столбце. Тогда в 1 столбце получим противоречие ходом от угла.

**5.** Положительные рациональные числа  $a, b, c$  и натуральные числа  $k, m, n$  таковы, что  $abc = 1$  и число  $a^k + b^m + c^n$  — целое. Докажите, что если число  $a$  записать в виде несократимой дроби, то ее числитель будет точной степенью натурального числа (выше первой).

**Решение.** Пусть  $a = \frac{a_1}{a_2}$  — представление в виде несократимой дроби. Покажем, что для любого простого  $p$  его степень вхождения в  $a_1$  кратна  $\frac{m+n}{(m,n)} > 1$ . Обозначим за  $v_p(s)$  — степень вхождения простого  $p$  в натуральное  $s$ , а степень вхождения простого в дробь определим как  $v_p(\frac{s}{t}) = v_p(s) - v_p(t)$ . Пусть  $v_p(a) > 0$ . Известно, что  $0 = v_p(1) = v_p(abc) = v_p(a) + v_p(b) + v_p(c)$ , значит, хотя бы одно из чисел  $v_p(b), v_p(c)$  отрицательно. Заметим, что для любых рациональных  $x, y, z$  выполнено  $v_p(x + y + z) \geq \min\{v_p(x), v_p(y), v_p(z)\}$ , при этом, если среди чисел  $v_p(x), v_p(y), v_p(z)$  ровно одно число принимает минимальное значение, то неравенство строгое. Из условия  $0 \leq v_p(a^k + b^m + c^n)$ , а  $\min\{k \cdot v_p(a), m \cdot v_p(b), n \cdot v_p(c)\} < 0$ , поскольку хотя бы одна из степеней вхождения отрицательна. Значит, среди чисел  $k \cdot v_p(a), m \cdot v_p(b), n \cdot v_p(c)$  хотя бы два числа принимают минимальное значение. Отсюда  $m \cdot v_p(b) = n \cdot v_p(c) < 0$ . Тогда существует натуральное  $s$  такое, что  $v_p(b) = -s \frac{n}{(m,n)}, v_p(c) = -s \frac{m}{(m,n)}$ , откуда  $v_p(a) = -v_p(b) - v_p(c) = s \frac{m+n}{(m,n)}$ .

**6.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ . Лучи  $CB$  и  $DA$  пересекаются в точке  $Q$ . Окружность, описанная около треугольника  $APB$ , вторично пересекает отрезки  $AD$  и  $BC$  в точках  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Окружность, описанная около треугольника  $CPD$ , вторично пересекает отрезки  $B_1C$  и  $A_1D$  в точках  $C_1$  и  $D_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $A_1C_1, B_1D_1$  и  $QO$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Обозначим через  $M$  и  $N$  середины отрезков  $AD$  и  $BC$ , через  $M_1$  и  $N_1$  — середины отрезков  $A_1D_1$  и  $B_1C_1$  через  $R$  — точку пересечения отрезков  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$ .

Расстояние от точки  $X$  до прямой  $\ell$  условимся обозначать  $d(X, \ell)$ .

Из вписанности четырехугольников  $ABB_1A_1$ ,  $ABCD$  и  $CDD_1C_1$  мы получаем, что  $\angle A_1D_1C_1 = \angle C_1CD = \angle QAB = \angle BB_1A_1$ , поэтому четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  тоже вписанный. Обозначим  $\angle ABP = \angle PCD = \alpha$ ,  $\angle PAB = \angle PDC = \beta$ . В силу вписанности  $A_1PBA$  и  $D_1PCD$  мы получаем, что  $\angle D_1A_1P = \alpha = \angle A_1D_1P$ , поэтому  $A_1P = PD_1$ . Аналогично,  $\angle PB_1C_1 = \beta = \angle PC_1B_1$  и  $PB_1 = PC_1$ . Значит, точка  $P$  лежит на серединных перпендикулярах к непараллельным сторонам  $A_1D_1$  и  $B_1C_1$  вписанного четырехугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , а потому является его центром описанной окружности, в частности,  $PD_1 = PC_1$ .

Из сказанного выше следует, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  острые, поэтому точка  $O$  лежит внутри угла  $AQB$ , а тогда  $\angle DOM = \alpha$  и  $\angle CON = \beta$ . Тогда подобны прямоугольные треугольники  $PD_1M_1$  и  $DOM$ ;  $PC_1N_1$  и  $CON$ , откуда следует равенство отношений

$$\frac{D_1M_1}{OM} = \frac{PD_1}{OD} = \frac{PC_1}{OC} = \frac{C_1N_1}{ON} \Rightarrow \frac{d(O, AD)}{d(O, BC)} = \frac{OM}{ON} = \frac{D_1M_1}{C_1N_1} = \frac{A_1D_1}{B_1C_1}.$$

Поскольку четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  — вписанный, то  $\triangle A_1RD_1 \sim \triangle B_1RC_1$ . Значит,  $\frac{d(R, AD)}{d(R, BC)} = \frac{A_1D_1}{B_1C_1} = \frac{d(O, AD)}{d(O, BC)}$ , и точки  $O, R$  обе лежат внутри угла  $\angle AQB$ , поэтому точки  $Q, O$  и  $R$  лежат на одной прямой, что и требовалось.

7. Сумма положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  равна 100. Докажите, что

$$\frac{x_1^6}{x_1^4 + x_2x_3} + \frac{x_2^6}{x_2^4 + x_3x_4} + \dots + \frac{x_{99}^6}{x_{99}^4 + x_{100}x_1} + \frac{x_{100}^6}{x_{100}^4 + x_1x_2} \geq 50.$$

**Решение.** Заметим, что

$$\frac{a^6}{a^4 + bc} = a^2 - \frac{a^2bc}{a^4 + bc} \geq a^2 - \frac{a^2bc}{2a^2\sqrt{bc}} = a^2 - \frac{\sqrt{bc}}{2} \geq a^2 - \frac{b+c}{4}.$$

Применяя эту оценку к каждому слагаемому левой части, мы получаем, что вся сумма не меньше

$$x_1^2 - \frac{x_1 + x_2}{4} + x_2^2 - \frac{x_2 + x_3}{4} + \dots + x_{100}^2 - \frac{x_{100} + x_1}{4} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 - 50.$$

Остается оценить сумму квадратов, используя неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_{100}^2}{100}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_{100}}{100} = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 \geq 100.$$

8. Дано натуральное число  $k$ . В начале игры в ряд случайным образом выкладывают  $2k + 1$  монет. Каждая монета с вероятностью  $1/2$  лежит орлом вверх, с вероятностью  $1/2$  — решкой. Двое игроков делают ходы по очереди. За ход игрок может забрать несколько подряд лежащих монет, начиная с самой левой. При этом, если самая левая монета лежит решкой вверх, то среди выбранных обязательно должно оказаться нечетное число монет, лежащих решкой вверх. Если же самая левая монета лежит орлом вверх, то среди выбранных обязательно должно оказаться нечетное число монет, лежащих орлом вверх. Побеждает тот, кому достается последняя монета. Какова вероятность того, что у первого игрока есть выигрышная стратегия?

**Ответ.**  $\frac{3}{4} - \frac{1}{2^{k+1}}$ .

**Решение.** Пронумеруем монеты слева направо числами от 1 до  $2k + 1$  и разобьем все, кроме первой, на пары  $(2t, 2t + 1)$ . Заметим, что если в парах суммарно четное число орлов и решек, то как бы ни лежала первая монета, начинающий выигрывает за один ход, забирая себе все монеты, будем называть такую позицию *тривиальной*. Таких расстановок половина от общего числа, поскольку переворачиванием последней монеты исходные позиции разбиваются на пары, состоящие из тривиальной и нетривиальной. Получается  $2^{2k}$  исходных позиций, в которых побеждает первый.

Далее рассмотрим ситуацию, когда в парах нечетное число орлов и решек. Ясно, что проигрывает тот игрок, который ходит в тривиальную позицию. Для удобства будем считать этот момент концом игры. Рассмотрим нетривиальные позиции следующих двух типов: тип Р — начинается с решки, за ней нечетное число орлов и решек, тип О — начинается с орла, за ним нечетное число орлов и решек. Рассмотрим позицию типа Р. Пусть из нее можно сделать ход в некоторую другую нетривиальную позицию. Мы должны взять нечетное число решек, поэтому полученная нетривиальная позиция должна начинаться с орла. Таким образом, в этой позиции, за исключением первой монеты, нечетное число орлов и решек, то есть эта позиция типа О. Из сказанного выше также следует, что ход в нетривиальную позицию типа О с меньшим числом монет мы всегда можем сделать. Аналогично, из позиции типа О возможен ход в нетривиальную позицию (с меньшим числом монет), если и только если эта позиция типа Р. Исходная позиция обязательно типа Р или типа О. Получается, что если из позиций таких типов самая правая имеет тот же тип, что и начальная, выигрывает второй, в противном случае — первый.

Рассмотрим последнюю пару  $(2j, 2j + 1)$ , в которой монеты лежат разными сторонами вверх. Отметим, что такая пара точно найдется, поскольку всего в парах нечетное число орлов и решек. Тогда  $2j - 1$  — последняя нетривиальная позиция типа О или Р. Значит, если первая и  $2j - 1$  монеты лежат одинаково, выигрывает второй, а иначе — первый. В частности, при  $j = 1$  побеждает второй игрок, таких позиций  $2^{k+1}$  (первую монету и каждую из  $2k$  пар можно выбрать двумя способами), а все остальные  $2^{2k} - 2^{k+1}$  позиций разбиваются на пары, отличающиеся переворотом первой монеты (в одном случае побеждает первый, в другом второй), откуда мы получаем  $2^{2k-1} - 2^k$  нетривиальных выигрышных исходных позиций. Остается посчитать искомую вероятность:  $(2^{2k} + 2^{2k-1} - 2^k)/2^{2k+1} = 3/4 - 2^{-k-1}$ .