

Личная олимпиада. Старшая группа. Решения.

1. На биссектрисе угла A неравнобедренного остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка P , что $\angle APB = 60^\circ$. На продолжении отрезка AP за точку P отмечена точка Q такая, что $BP = PQ$. На луче BP выбрана точка S такая, что $CS = QS$. Докажите, что $\angle CSQ = \angle BAC + 60^\circ$.

Решение. Отметим точку B' , симметричную B относительно прямой AP . Тогда $\angle B'PA = \angle BPA = 60^\circ$. При этом $\angle SPQ = 60^\circ = \angle SPB'$ и $B'P = PB = PQ$. Тогда треугольники $B'PS$ и QPS равны по двум сторонам и углу между ними. Получаем $SB' = SQ = SC$. То есть S — центр описанной окружности треугольника $CB'Q$, откуда $\frac{1}{2}\angle CSQ = \angle CB'Q = 180^\circ - \angle QB'A = 180^\circ - \angle QBA$. Из равнобедренности треугольника PBQ находим $\angle AQB = 30^\circ$. Имеем $\angle QBA = 180^\circ - (\frac{1}{2}\angle BAC + 30^\circ)$. Откуда $\angle CSQ = 2 \cdot (180^\circ - \angle QBA) = 2 \cdot (30^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC) = \angle BAC + 60^\circ$, что и требовалось.

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число; положим $k = 2^n - 1$. Докажите, что остаток от деления числа $2^{\varphi(k)} - 1$ на k^2 равен $k\varphi(k)/n$. (Напомним, что для натурального числа d через $\varphi(d)$ обозначается количество натуральных чисел, не превосходящих d и взаимно простых с d .)

Решение. Заметим, что n является показателем 2 по модулю k . С другой стороны по теореме Эйлера $2^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, откуда $\varphi(k) = tn$ для некоторого натурального t . При этом $2^n = k + 1$. Теперь понятно, что

$$2^{\varphi(k)} - 1 - k\varphi(k)/n = 2^{tn} - 1 - kt = (k + 1)^t - 1 - kt = k^t + tk^{t-1} + \dots + C_t^2 k^2$$

делится на k^2 , что и требовалось доказать.

3. Дано натуральное число n . Множество S трёхбуквенных слов в n -буквенном алфавите таково, что, если написать подряд два (не обязательно различных) слова из S , на стыке нельзя будет найти слово из S (например, на стыке слов abc и def можно найти только слова bcd и cde). Найдите наибольшее возможное количество слов в S .

Ответ: $(n^3 - n)/3$. **Решение.** Докажем, что $|S| \leq (n^3 - n)/3$. Из условия следует, что S не содержит слов с тремя одинаковыми буквами, так как на стыке слов aaa и aaa есть слово aaa . Остальные $n^3 - n$ слов разобьём на группы по три слова, отличающиеся циклическим сдвигом: abc , bca и cab (возможно, две из трёх букв a , b и c равны). В каждой такой группе можно выбрать не более одного такого слова. Действительно, если $abc \in S$, то $abcabc$ содержит на стыке и bca , и cab . Следовательно, $|S| \leq (n^3 - n)/3$.

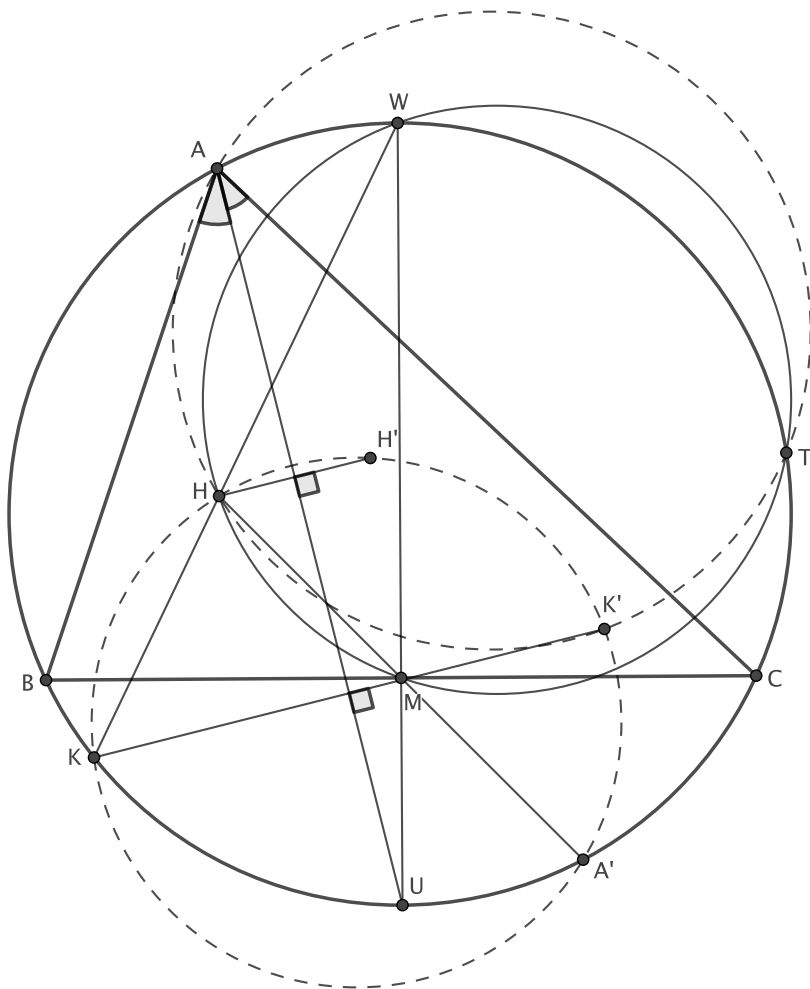
Теперь докажем, что можно выбрать $(n^3 - n)/3$ слов, удовлетворяющих условию. Пронумеруем буквы алфавита от 1 до n . Для буквы a обозначим через $f(a)$ её номер. Добавим в S из каждой группы слов abc , bca и cab слово, у которого $f(b) \leq f(a)$, $f(b) < f(c)$ (здесь среди букв a , b и c хотя бы две различных). Докажем, что выбранное множество S подходит. Пусть $abc, xyz \in S$. Тогда на стыке в слове $abcxyz$ образуются два слова bzx и sxy . Из выбора слов в S имеем: $f(b) < f(c)$, из-за чего слово bzx не лежит в S , и $f(y) \leq f(x)$, из-за чего слово sxy не лежит в S . Следовательно, S содержит $(n^3 - n)/3$ слов и подходит под условие.

4. Илья выбирает приведённый многочлен $P(x)$ степени 101, а также 10101 различных вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{10101}$. Затем он выписывает на доске числа $x_1, x_2, \dots, x_{10101}$ красным маркером, а также все 10101 чисел $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{10101})$ в произвольном порядке — синим. Задача Лёни — восстановить по этим данным многочлен $P(x)$. Может ли Илья сделать задачу Лёни невыполнимой?

Ответ: Нет, не может. **Решение.** Рассмотрим многочлен $P(x) = (x - 10101)x^{100}$. Тогда $P(0) = 0 = P(10101)$. Пусть $Q(x) = P(x + 1)$. Тогда $Q(0) = P(1), Q(1) = P(2), \dots, Q(10100) = P(10101) = P(0)$. То есть у многочленов P и Q набор значений в точках $0, 1, \dots, 10100$ совпадают. Следовательно, для $x_i = i - 1$ по набору значений $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{10100})$ нельзя будет однозначно восстановить многочлен, так как существуют два многочлена $P \neq Q$, подходящие под эти данные.

5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC , вписанном в окружность Ω , отмечены ортоцентр H , середина M стороны BC и середина W дуги BAC окружности Ω . Прямая WH вторично пересекает Ω в точке K . Точка K' симметрична K относительно биссектрисы угла BAC . Докажите, что окружности (AHK') , (WHM) и Ω пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть точка A' диаметрально противоположна A на окружности Ω , а точка H' симметрична H относительно биссектрисы угла BAC . Поскольку A , A' и H' лежат на одной прямой и $HH' \parallel AW$, имеем $\angle(A'K, KH) = \angle(A'A, AW) = \angle(A'H', H'H)$, откуда точки K , H , H' и A' лежат на одной окружности. Точка K' тоже лежит на этой окружности, так как $KHH'K'$ — равнобедренная трапеция.



Пусть окружности (WHM) и Ω пересекаются в точках W и T , а точка U диаметрально противоположна W на окружности Ω . Поскольку H , M и A' лежат на одной прямой и $AU \parallel WA'$, имеем $\angle(AK', K'H) = \angle(AK', K'K) + \angle(KK', K'H) = \angle(K'K, KA) + \angle(KA', A'H) = 90^\circ + \angle(UA, AK) + \angle(KA', A'H) = 90^\circ + \angle(UA', A'K) + \angle(KA', A'H) = 90^\circ + \angle(UA', A'H) = \angle(WA', A'H) = \angle(AU, MH) = \angle(AU, UW) + \angle(WM, MH) = \angle(AT, TW) + \angle(WT, TH) = \angle(AT, TH)$, что и требовалось.

6. Дано натуральное число $n \geq 3$. В государстве в ходу монеты достоинством $1, 2, \dots, n$ тугриков. При каком наименьшем натуральном k верно следующее утверждение: из любой группы монет общим достоинством в $2k$ тугриков можно выделить несколько монет общим достоинством в k тугриков?

Ответ: $k = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$.

Решение. Обозначим $D = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$. Пусть для числа k утверждение верно. Докажем, что k делится на любое натуральное $i \leq n$. Пусть число $2k$ при делении на i даёт остаток r . Тогда сумму в $2k$ можно набрать монетами по i и одной монетой в r (она не нужна, если $r = 0$). По утверждению, эту сумму можно разделить на две группы монет суммарного достоинства по k . Но одна из этих групп будет состоять лишь из монет по i ; значит, k делится на i .

Из доказанного следует, что k делится на D и потому не меньше D . Осталось доказать, что это значение k подходит. Для этого приведём алгоритм, позволяющий набрать сумму в D из произвольной кучи монет общим достоинством в $2D$.

В каждый момент некоторые монеты будут лежать в куче, а некоторые мы отложим в кошелёк. Обозначим текущее суммарное достоинство монет в куче через S . Когда мы перекаладываем монеты в кошелёк, мы всегда будем перекаладывать их по одной, при этом S всегда будет делиться на достоинство перекаладываемой монеты. Это означает, что, если в некоторый момент S станет не больше D , оно станет равным D , то есть мы добьёмся требуемого (и прекратим заниматься перекаладыванием).

В каждый момент времени будем считать достоинство t *существенным*, если в куче лежит хотя бы $t - 1$ монета этого достоинства. В нашем процессе в начале каждого шага S будет делиться на наибольшее существенное достоинство, если оно есть. В начале процесса это выполнено.

Пусть в некоторый момент есть хотя бы два существенных достоинства, и два наибольших из них — это $p > q$; тогда S кратно p . Выберем натуральное $j \leq q \leq p - 1$ такое, что $S/p \equiv j \pmod{q}$. Тогда переложим j монет достоинством p в кошелёк; после этого S станет кратным pq , а наибольшее существенное достоинство станет равным или p , или q , то есть наше условие останется выполненным. Шаг алгоритма в этом случае завершён.

Если осталось лишь одно существенное достоинство p , то просто будем перекаладывать монеты достоинством p в кошелёк.

В результате, если процесс остановился, а в кошельке ещё не набралась требуемая сумма, то все достоинства стали несущественными. Но тогда S не превосходит

$$\begin{aligned} n(n-2) + (n-1)(n-3) + \dots + 2 \cdot 0 &= \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6} < \\ &< \frac{n(n-1)(n-2)}{3} < \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \leq \text{НОК}(n, n-1, n-2) \leq D. \end{aligned}$$

Это значит, что алгоритм должен был закончить работу до этого момента. Противоречие.

7. *Непустое множество X , состоящее из вещественных чисел, таково, что при любых $s, t \in X$ числа $s + t$ и $s - t$ также лежат в X . На множестве X задана функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Известно, что для любых $a, b, c \in X$ выполнены равенства $f(2a) = 2f(a)$ и $f(a) = f(-a)$, а также неравенство*

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(a + b + c) \geq f(a + b) + f(b + c) + f(c + a).$$

Докажите, что для любых $a, b, c \in X$ выполнено неравенство

$$f(a + b) + f(b + c) + f(c + a) + f(a + b + c) \geq f(a) + f(b) + f(c).$$

Решение. Для произвольных $x, y, z \in X$, подставим в неравенство из условия $a = x + y$, $b = x + z$, и $c = -x$:

$$f(x + y) + f(x + z) + f(x) + f(x + y + z) \geq f(2x + y + z) + f(z) + f(y).$$

Сложив это неравенство по всем циклическим перестановкам x, y, z , получаем:

$$\begin{aligned} 2(f(x + y) + f(x + z) + f(y + z)) + 3f(x + y + z) &\geq \\ &\geq f(2x + y + z) + f(x + 2y + z) + f(x + y + 2z) + f(x) + f(y) + f(z). \end{aligned} \quad (1)$$

Далее, для $a = 2x + y + z$, $b = -(x + y + z)$, $c = y + z$, неравенство из условия становится:

$$f(2x + y + z) + f(x + y + z) + f(y + z) + f(x + y + z) \geq 2f(x) + 2f(x + y + z),$$

что упрощается до:

$$f(2x + y + z) + f(y + z) \geq 2f(x).$$

Суммируя это выражение по циклическим перестановкам x, y, z , получаем:

$$f(2x + y + z) + f(x + 2y + z) + f(x + y + 2z) + f(x + y) + f(x + z) + f(y + z) \geq 2(f(x) + f(y) + f(z)).$$

Сложив это выражение с (1), имеем:

$$3(f(x + y) + f(x + z) + f(y + z)) + 3f(x + y + z) \geq 3(f(x) + f(y) + f(z)),$$

что после сокращения на 3 даёт требуемое.