

Личная олимпиада. Старшая группа. Довывод.

1. На биссектрисе угла A неравнобедренного остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка P , что $\angle APB = 60^\circ$. На продолжении отрезка AP за точку P отмечена точка Q такая, что $BP = PQ$. На луче BP выбрана точка S такая, что $CS = QS$. Докажите, что $\angle CSQ = \angle BAC + 60^\circ$.

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число; положим $k = 2^n - 1$. Докажите, что остаток от деления числа $2^{\varphi(k)} - 1$ на k^2 равен $k\varphi(k)/n$. (Напомним, что для натурального числа d через $\varphi(d)$ обозначается количество натуральных чисел, не превосходящих d и взаимно простых с d .)

3. Дано натуральное число n . Множество S трёхбуквенных слов в n -буквенном алфавите таково, что, если написать подряд два (не обязательно различных) слова из S , на стыке нельзя будет найти слово из S (например, на стыке слов abc и def можно найти только слова bcd и cde). Найдите наибольшее возможное количество слов в S .

4. Илья выбирает приведённый многочлен $P(x)$ степени 101, а также 10101 различных вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{10101}$. Затем он выписывает на доске числа $x_1, x_2, \dots, x_{10101}$ красным маркером, а также все 10101 чисел $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_{10101})$ в произвольном порядке — синим. Задача Лёни — восстановить по этим данным многочлен $P(x)$. Может ли Илья сделать задачу Лёни невыполнимой?

Личная олимпиада. Старшая группа. Вывод.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC , вписанном в окружность Ω , отмечены ортоцентр H , середина M стороны BC и середина W дуги BAC окружности Ω . Прямая WH вторично пересекает Ω в точке K . Точка K' симметрична K относительно биссектрисы угла BAC . Докажите, что окружности (AHK') , (WHM) и Ω пересекаются в одной точке.

6. Дано натуральное число $n \geq 3$. В государстве в ходу монеты достоинством $1, 2, \dots, n$ тугриков. При каком наименьшем натуральном k верно следующее утверждение: *из любой группы монет общим достоинством в $2k$ тугриков можно выделить несколько монет общим достоинством в k тугриков?*

7. Непустое множество X , состоящее из вещественных чисел, таково, что при любых $s, t \in X$ числа $s + t$ и $s - t$ также лежат в X . На множестве X задана функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Известно, что для любых $a, b, c \in X$ выполнены равенства $f(2a) = 2f(a)$ и $f(a) = f(-a)$, а также неравенство

$$f(a) + f(b) + f(c) + f(a + b + c) \geq f(a + b) + f(b + c) + f(c + a).$$

Докажите, что для любых $a, b, c \in X$ выполнено неравенство

$$f(a + b) + f(b + c) + f(c + a) + f(a + b + c) \geq f(a) + f(b) + f(c).$$