

Решения личной олимпиады. Юниоры.

1. Вася вводит в компьютер длинное число, не содержащее нулей в своей записи. Однако, на его компьютере западают клавиши цифр, поэтому при нажатии на любую цифру она вводится два раза. Изначально цифр нет. За одну операцию можно поставить курсор в любое место и нажать на любую цифру. Вася проделал 100 таких операций, и у него получилось 200-значное число. Может ли оно быть простым?

Решение. Любое такое число будет делиться на 11, поскольку наборы цифр в четных и нечетных разрядах у него совпадают.

2. Дан правильный 64-угольник P , а также шесть 33-угольников с вершинами в его вершинах. Докажите, что можно повернуть некоторые из этих 33-угольников так, чтобы в объединении они покрыли все вершины P .

Решение. Будем последовательно добавлять 33-угольники, и следить, сколько вершин 64-угольника мы еще не покрыли. После добавления первого 33-угольника останется покрыть $31 = 2^5 - 1$ вершину. Далее докажем по индукции, что можно действовать так, чтобы если на прошлом ходу оставалось $2^k - 1$ непокрытых вершин, то добавив один 33-угольник, останется не более $2^{k-1} - 1$ непокрытых вершин. Рассмотрим все 64 положения, которыми можно разместить очередной 33-угольник. Предположим, от противного, что в каждом из этих положений из $2^k - 1$ непокрытых вершин покрывается менее 2^{k-1} . Тогда в сумме всеми этими сдвигами покрывается не более $64 \cdot (2^{k-1} - 1)$ непокрытых вершин. С другой стороны, каждая из 33 вершин 33-угольника при всех возможных сдвигах покроет все $2^k - 1$ непокрытых, а значит в сумме они покроют $33(2^k - 1)$ вершин. Получаем противоречие: $64 \cdot (2^{k-1} - 1) > 33(2^k - 1) \iff 32 \cdot 2^k - 64 > 33 \cdot 2^k - 33$, что очевидно неверно. Проведя такие рассуждения для всех шести 33-угольников, получим, что они в объединении оставляют непокрытыми не более $2^0 - 1 = 0$ вершин, т.е. все вершины покрыты.

3. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω . Диагонали трапеции пересекаются в точке K . На лучах KA и KB выбраны точки X и Y соответственно так, что отрезок XY касается ω в своей середине Z . Докажите, что Z лежит на продолжении средней линии трапеции $ABCD$.

Решение. Степени точек X и Y относительно ω равны (поскольку равны $XZ^2 = YZ^2$), значит $XA \cdot XC = YB \cdot YD$. Но поскольку $AC = BD$ (из равнобедренности вписанной трапеции $ABCD$), получаем, что $AX = BY$. Пусть M — середина AB . Тогда $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} = 2\overrightarrow{MZ}$, и поскольку $AX = BY$ получаем, что \overrightarrow{MZ} параллелен биссектрисе угла $\angle AKB$, которая, в свою очередь, параллельна основаниям трапеции $ABCD$, а значит и ее средней линии. В таком случае, Z лежит на средней линии.

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ с положительными коэффициентами таков, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет ровно три корня. Докажите, что дискриминант этого трёхчлена больше 16.

Решение. Заметим, что у $f(x)$ есть два различных корня (иначе у $f(f(x))$ их не более двух). Поскольку коэффициенты положительны, это означает, что оба корня отрицательные — пусть это $-a$ и $-b$, а $f(x) = c(x+a)(x+b)$ с положительными a, b, c . Пусть при этом $a > b$. Тогда заметим, что то, что у $f(f(x))$ три различных корня, означает просто то, что минимум $f(x)$ равен меньшему из корней. То есть $-a =$

$c(\frac{-a-b}{2} + a)(\frac{-a-b}{2} + b) = c(a-b)(b-a)/4$, то есть $4a = c(a-b)^2$. Дискриминант при этом равен $c^2((a+b)^2 - 4ab) = c^2(a-b)^2 = \frac{16a^2}{(a-b)^2}$, что больше 16, поскольку $a > b > 0$.

5. Ребра полного графа на n вершинах покрашены в три цвета так, что нашлось остовное дерево каждого из трёх цветов. Докажите, что найдется разноцветный треугольник.

Решение. Рассмотрим минимальный такой граф, в котором нет разноцветного треугольника. Удалим произвольную вершину A . Граф распадется на компоненты связности по 1 цвету C_1, \dots, C_k . Между любыми двумя C_i и C_j все ребра должны быть одного и того же (2 или 3) цвета, иначе найдется искомый разноцветный треугольник. Пусть B и C соединены с A ребрами цвета 2 и 3 соответственно.

Пусть B и C лежат в разных компонентах связности по 1 цвету, скажем $B \in C_1$, $C \in C_2$. НУО все ребра между C_1 и C_2 имеют цвет 2. Тогда рассмотрим вершину $D \in C_1$, соединенную с A ребром 1 цвета. Треугольник ACD — искомый.

Пусть B и C лежат в одной компоненте связности по 1 цвету, скажем в C_1 . Возьмем произвольную другую компоненту C_2 , и в ней выберем вершину D , соединенную с A ребром 1 цвета. НУО все ребра между C_1 и C_2 имеют цвет 2. Тогда треугольник ACD — искомый.

6. Натуральные числа m и n таковы, что $\sqrt{2} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ и m чётно. Докажите, что для $\left| \frac{\ell}{k} - \sqrt{2} \right| < \frac{m}{n} - \sqrt{2}$ для некоторых $\ell < m$ и $k < n$.

Решение. Положим $k = \frac{m}{2}$ (по условию это целое число) и $\ell = n$. Очевидно, $k < n$ (поскольку $\frac{2k}{n} = \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2$ и $\ell = n < m$ (поскольку $\frac{m}{n} > \sqrt{2} > 1$). Осталось доказать, что $\left| \frac{n}{k} - \sqrt{2} \right| < \frac{2k}{n} - \sqrt{2}$. Для этого заметим, что

$$\left| \frac{n}{k} - \sqrt{2} \right| = \frac{|n - k\sqrt{2}|}{k} = \frac{|n\sqrt{2} - 2k|}{k\sqrt{2}} < \frac{|n\sqrt{2} - 2k|}{n} = \left| \frac{2k}{n} - \sqrt{2} \right| = \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right|$$

(единственное неравенство в этой выкладке опирается на то, что по условию $k\sqrt{2} > n$).

7. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$. Касательная в точке M к окружности (BMC) пересекает сторону AB в точке E и биссектрису угла ABM в точке F . Оказалось, что $BE = BF$. В окружности (AEM) проведен диаметр AA' , а в треугольнике $A'BF$ — высота $A'H$. Найдите BH/AB .

Ответ. $1/2$. **Решение.** Из условия следует, что $\triangle EBM \sim \triangle BMC$. Поэтому биссектриса ML треугольника MBC равна его стороне MB . Продлим AD и MB до пересечения в точке P . Поскольку $DM = MC$ и $AD \parallel BC$ мы получаем, что $BM = MP = ML$, поэтому $\angle DPL = 90^\circ = \angle PLB$. Также $\angle APB = \angle MBC = \angle MEB$, поэтому точка P лежит на окружности (AEM) , а тогда точка A' лежит на PL . Поскольку $\angle A'EB = \angle A'HB = \angle A'LB = 90^\circ$ мы получаем, что в окружность с диаметром BA' вписан четырехугольник $LBEN$.

Заметим, что $\angle EML = \angle EMB + \angle BML = \angle CML + \angle MCL = \angle MLB$, поэтому на прямой EM лежит точка C' , симметричная C относительно серединного перпендикуляра к отрезку ML . В силу симметрии, $MC = C'L$, а также $\angle MC'L = \angle MCL = 180^\circ - \angle EBL$. Получается, что точка C' также лежит на окружности $(LBEN)$. Эта окружность симметрична относительно серединного перпендикуляра ℓ к отрезку BL , причем $\angle MLC' = \angle CML = \angle BML = \angle MBH$, поэтому при симметрии относительно ℓ меняются местами отрезки BH и LC' . Итого, $BH = LC' = MC = CD/2 = AB/2$, поэтому $BH/AB = 1/2$.