

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2020

ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. У Сережи есть набор из 100 палочек, длины которых равны $2001, 2002, \dots, 2100$. Каждая палочка покрашена в красный или синий цвет, причём сумма длин красных палочек равна сумме длин синих палочек. Сережа разрезал палочки так, что полученные палочки стало можно разбить на пары, в каждой из которых одна красная и одна синяя палочка равной длины. Докажите, что для этого ему понадобилось не менее 50 разрезов (каждую палочку можно резать несколько раз).

2. На окружности отмечено 2020 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 99 или через 100 отмеченных точек. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

3. 11 студентов написали тест. Учитель проверил работы и заметил, что для любых двух вопросов теста найдутся хотя бы 6 студентов, каждый из которых ответил правильно ровно на один из этих двух вопросов. Докажите, что в тесте было не более 12 вопросов.

4. В клетках таблицы 8×8 расставлены натуральные числа. Докажите, что у некоторых из этих чисел можно сменить знак таким образом, чтобы каждое из чисел отличалось по знаку от суммы чисел, стоящих в соседних с ним (по стороне или углу) клетках. (Ноль считается отличающимся по знаку от любого ненулевого числа).

5. Рассмотрим все 9-значные числа, получающиеся перестановками цифр от 1 до 9. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма 9 таких чисел (не обязательно различных)?

6. У нумизмата есть 100 монет, пронумерованных числами от 1 до 100. Ему известно, что из этих монет 50 — настоящие и 50 — фальшивые, но неизвестно, какие именно. Нумизмат обратился к эксперту, чтобы выяснить, какие из его монет настоящие. Нумизмат может отдавать на экспертизу три монеты, после чего эксперт выбирает две из них по своему усмотрению и сообщает нумизмату, сколько монет из этих двух настоящие. Нумизмат видит, какие две монеты выбрал эксперт, эксперт всегда отвечает честно. Может ли нумизмат за несколько таких экспертиз про каждую свою монету понять, настоящая она или фальшивая, независимо от действий эксперта?

7. Серёжа выписал в ряд все натуральные делители некоторого натурального числа N в порядке возрастания. Оказалось, что для любых двух соседних чисел в этом ряду N делится и на разность этих чисел. Докажите, что для любых соседних чисел $a > b$ в этом ряду ab делится на $a - b$.

8. В ряд стоят 50 пустых корзин. Вася каждую минуту выбирает 11 стоящих подряд корзин и кладёт во все эти корзины по одному пирожку. Оказалось, что через несколько минут в каких-то k корзинах стало поровну пирожков. Какое наибольшее значение может принимать k ?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2020

ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. У Сережи есть набор из 100 палочек, длины которых равны $2001, 2002, \dots, 2100$. Каждая палочка покрашена в красный или синий цвет, причём сумма длин красных палочек равна сумме длин синих палочек. Сережа разрезал палочки так, что полученные палочки стало можно разбить на пары, в каждой из которых одна красная и одна синяя палочка равной длины. Докажите, что для этого ему понадобилось не менее 50 разрезов (каждую палочку можно резать несколько раз).

2. На окружности отмечено 2020 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 99 или через 100 отмеченных точек. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

3. 64 студента написали тест. Учитель проверил работы и заметил, что для любых двух вопросов теста хотя бы 32 студента ответили правильно ровно на один из этих двух вопросов. Может ли в тесте быть хотя бы 14 вопросов?

4. В клетках таблицы 9×9 расставлены целые ненулевые числа. Докажите, что можно сменить знак не более чем у 40 чисел так, чтобы число в каждой клетке отличалось по знаку от суммы чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. (Ноль считается отличающимся по знаку от любого ненулевого числа).

5. Рассмотрим все 9-значные числа, получающиеся перестановками цифр от 1 до 9. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма 9 таких чисел (не обязательно различных)?

6. У нумизмата есть 100 монет, пронумерованных числами от 1 до 100. Ему известно, что из этих монет 50 — настоящие и 50 — фальшивые, но неизвестно, какие именно. Нумизмат обратился к эксперту, чтобы выяснить, какие из его монет настоящие. Нумизмат может отдавать на экспертизу три монеты, после чего эксперт выбирает две из них по своему усмотрению и сообщает нумизмату, сколько монет из этих двух настоящие. Нумизмат видит, какие две монеты выбрал эксперт, эксперт всегда отвечает честно. Может ли нумизмат за несколько таких экспертиз про каждую свою монету понять, настоящая она или фальшивая, независимо от действий эксперта?

7. Серёжа выписал в ряд все натуральные делители некоторого натурального числа N в порядке возрастания. Оказалось, что для любых двух соседних чисел в этом ряду N делится и на разность этих чисел. Докажите, что для любых соседних чисел $a > b$ в этом ряду ab делится на $a - b$.

8. В ряд стоят 1000 пустых корзин. Вася каждую минуту выбирает 23 стоящие подряд корзины и кладёт во все эти корзины по одному пирожку. Может ли через несколько минут в каких-то 990 корзинах оказаться поровну пирожков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2020

ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. У Сережи есть набор из 100 палочек, длины которых равны $2001, 2002, \dots, 2100$. Каждая палочка покрашена в красный или синий цвет, причём сумма длин красных палочек равна сумме длин синих палочек. Сережа разрезал палочки так, что полученные палочки можно разбить на пары, в каждой из которых одна красная и одна синяя палочка равной длины. Докажите, что для этого ему понадобилось не менее 50 разрезов (каждую палочку можно резать несколько раз).

2. На окружности отмечено 2020 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 99 или через 100 отмеченных точек. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

3. В стране 100 сенаторов, у каждого из которых ровно 4 помощника. Сенаторы и их помощники состоят в комитетах. Комитет может состоять либо из 5 сенаторов, либо из 4 сенаторов и 4 помощников, либо из 2 сенаторов и 12 помощников. Каждый сенатор состоит в пяти комитетах, а каждый помощник — в трёх. Сколько всего комитетов в стране?

4. В клетках таблицы 9×9 расставлены целые ненулевые числа. Докажите, что можно сменить знак не более чем у 40 чисел так, чтобы число в каждой клетке отличалось по знаку от суммы чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. (Ноль считается отличающимся по знаку от любого ненулевого числа).

5. Рассмотрим все 9-значные числа, получающиеся перестановками цифр от 1 до 9. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма трёх таких чисел?

6. У нумизмата есть 100 монет, пронумерованных числами от 1 до 100. Ему известно, что из этих монет 70 — настоящие и 30 — фальшивые, но неизвестно, какие именно. Нумизмат обратился к эксперту, чтобы выяснить, какие из его монет настоящие. Нумизмат может отдавать на экспертизу семь монет, после чего эксперт выбирает две из них по своему усмотрению и сообщает нумизмату, сколько монет из этих двух настоящие. Нумизмат видит, какие две монеты выбрал эксперт, эксперт всегда отвечает честно. Может ли нумизмат за несколько таких экспертиз хотя бы про 90 своих монет понять, настоящие они или фальшивые?

7. Серёжа выписал в ряд все натуральные делители некоторого натурального числа N в порядке возрастания. Оказалось, что для любых двух соседних чисел в этом ряду N делится и на разность этих чисел. Докажите, что для любых соседних чисел $a > b$ в этом ряду ab делится на $a - b$.

8. В ряд стоят 600 пустых корзин. Вася каждую минуту выбирает 11 стоящих подряд корзин и кладёт во все эти корзины по одному пирожку. Может ли через несколько минут ровно в каких-то 595 корзинах оказаться поровну пирожков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2020

ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Имеется набор из шести красных палочек с длинами 3, 5, 7, 9, 11 и 13 см и шести синих палочек с длинами 6, 6, 8, 8, 10, 10. Маша хочет разрезать палочки так, чтобы их можно было разбить на пары, в каждой из которых одна красная и одна синяя палочка равной длины. Какое наименьшее число разрезов для этого понадобится?

2. На окружности отмечено 2020 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 99 или через 100 отмеченных точек. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

3. Замените наименьшее возможное число букв в ребусе

ОДИН+ОДИН+ПЯТЬ=СЕМЬ,

чтобы он имел решение.

4. В клетках таблицы 9×9 расставлены целые ненулевые числа. Докажите, что можно сменить знак у не более чем 40 чисел так, чтобы каждое из чисел отличалось по знаку от суммы чисел, стоящих в соседних с ним по стороне клетках. (Ноль считается отличающимся по знаку от любого ненулевого числа).

5. Рассмотрим все 9-значные числа, получающиеся перестановками цифр от 1 до 9. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма трёх таких чисел?

6. У нумизмата есть 100 монет, пронумерованных числами от 1 до 100. Ему известно, что из этих монет 70 — настоящие и 30 — фальшивые, но неизвестно, какие именно. Нумизмат обратился к эксперту, чтобы выяснить, какие из его монет настоящие. Нумизмат может отдавать на экспертизу семь монет, после чего эксперт выбирает две из них по своему усмотрению и сообщает нумизмату, сколько монет из этих двух настоящие. Нумизмат видит, какие две монеты выбрал эксперт, эксперт всегда отвечает честно. Может ли нумизмат за несколько таких экспертиз хотя бы про 90 своих монет понять, настоящие они или фальшивые?

7. В стране 100 сенаторов, у каждого из которых ровно 4 помощника. Сенаторы и их помощники состоят в комитетах. Комитет может состоять либо из 5 сенаторов, либо из 4 сенаторов и 4 помощников, либо из 2 сенаторов и 12 помощников. Каждый сенатор состоит в пяти комитетах, а каждый помощник — в трёх. Сколько всего комитетов в стране?

8. В ряд стоят 50 пустых корзин. Вася каждую минуту выбирает 11 стоящих подряд корзин и кладёт во все эти корзины по одному пирожку. Может ли через несколько минут в каких-то 49 корзинах оказаться поровну пирожков?