

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 25.10.2021

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В турнире по бадминтону участвовало 16 спортсменов. Каждые двое сыграли не более одной игры, при этом ничьих не было. После окончания турнира оказалось, что все игроки одержали различное количество побед. Докажите, что все участники потерпели различное количество поражений.

2. Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b , что наибольший общий делитель чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ равен $a + b$.

3. В треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC . Точка D на стороне AC такова, что $DM \perp BC$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке X . Оказалось, что $2BX = AC$. Докажите, что X — середина отрезка AM .

4. В корзинах K_1, \dots, K_n лежат шары цветов C_1, \dots, C_n . Известно, что для каждого цвета можно разделить корзины на две кучи так, что в кучах поровну шаров этого цвета. Докажите, что найдется такое число m , что в корзине K_m не более половины шаров имеют цвет C_m .

5. Для каждого натурального m докажите неравенство

$$\left| \{\sqrt{m}\} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{8(\sqrt{m} + 1)}.$$

Напомним, что $\{x\}$ — это *дробная часть числа x* , она равна $x - [x]$, где $[x]$ — *целая часть числа x* , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x .