

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Число из одних девяток делится на 579. Докажите, что в записи частного не найдётся трёх последовательных цифр, образующих число, кратное 19.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C — тупые. На сторонах AB , BC , CD и DA отмечены точки K , L , M и N соответственно. Докажите, что периметр четырёхугольника $KLMN$ больше удвоенной длины диагонали AC .

3. Дано натуральное число n . Докажите, что для любого целого неотрицательного $k \leq 2^n - 1$ можно указать такие n чисел, среди сумм которых (по одному, два, ..., n чисел) ровно k положительных.

4. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка M такая, что $BM = BC$. Пусть прямые BM и AC пересекаются в точке K , а прямые DK и BC — в точке L . Докажите, что углы BML и DAM равны.

5. Дано натуральное $k > 1$. Найдите наибольшее натуральное t , обладающее следующим свойством: если выбраны t последовательных натуральных чисел, можно раскрасить все натуральные числа в k цветов так, чтобы никакое из выбранных чисел не было суммой двух разных чисел одного цвета.

6. Дана таблица $(n - 1) \times (n - 1)$ клеток. В некоторых из n^2 вершин клеток стоят хорошенькие стражницы. Каждая стражница наблюдает все вершины в двух перпендикулярных направлениях (в одну сторону по горизонтали и в одну сторону по вертикали), в том числе свою. (Стражница может стоять в вершине на стороне и смотреть вдаль.) Докажите, что можно расставить $4n - 4$ стражницы так, чтобы каждую вершину клетки наблюдало не более двух стражниц.

7. Дима выписал на доску 1000 чисел, не превосходящих N . Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если выписать на доску ещё хотя бы одно число, не превосходящее N , то это свойство нарушится. Докажите, что среди чисел, не превосходящих N , не более 1000 простых.

8. Про действительные числа a, b, c известно, что $ab + bc + ca = 1$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a(b^2 + 1)}{a + b} + \frac{b(c^2 + 1)}{b + c} + \frac{c(a^2 + 1)}{c + a}?$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Найдите все натуральные числа n , для которых в десятичной записи числа $n^5 + 79$ встречаются только единицы.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C — тупые. На сторонах AB , BC , CD и DA отмечены точки K , L , M и N соответственно. Докажите, что периметр четырёхугольника $KLMN$ больше удвоенной длины диагонали AC .

3. Дано натуральное число n . Докажите, что для любого целого неотрицательного $k \leq 2^n - 1$ можно указать такие n чисел, среди сумм которых (по одному, два, ..., n чисел) ровно k положительных.

4. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка M такая, что $BM = BC$. Пусть прямые BM и AC пересекаются в точке K , а прямые DK и BC — в точке L . Докажите, что углы BML и DAM равны.

5. В классе больше шести учеников. В каждый кружок ходит 6 человек. Оказалось, что любые два ученика ходят в точности на один общий кружок. Докажите, что в классе хотя бы 31 ученик.

6. Дана таблица $(n - 1) \times (n - 1)$ клеток. В некоторых из n^2 вершин клеток стоят хорошенькие стражницы. Каждая стражница наблюдает все вершины в двух перпендикулярных направлениях (в одну сторону по горизонтали и в одну сторону по вертикали), в том числе свою. (Стражница может стоять в вершине на стороне и смотреть вдаль.) Докажите, что можно расставить $4n - 4$ стражницы так, чтобы каждую вершину клетки наблюдало не более двух стражниц.

7. Дима выписал на доску несколько чисел, не превосходящих N . Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если выписать на доску ещё хотя бы одно число, не превосходящее N , то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется степень простого числа.

8. Про действительные числа a , b , c известно, что $ab + bc + ca = 1$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a(b^2 + 1)}{a + b} + \frac{b(c^2 + 1)}{b + c} + \frac{c(a^2 + 1)}{c + a}?$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021**СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. Найдите все натуральные числа n , для которых в десятичной записи числа $n^5 + 79$ встречаются только единицы.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и C равны. Докажите, что $|AB - CD| < AD$.

3. Дано натуральное число n . Докажите, что для любого целого неотрицательного $k \leq 2^n - 1$ можно указать такие n чисел, среди сумм которых (по одному, два, ..., n чисел) ровно k положительных.

4. Про равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) известно, что $\angle ABC = 36^\circ$. Длина биссектрисы, проведённой из вершины B , равна 10. Найдите длину высоты, проведённой из вершины A .

5. В классе больше шести учеников. В каждый кружок ходит 6 человек. Оказалось, что любые два ученика ходят в точности на один общий кружок. Докажите, что в классе хотя бы 31 ученик.

6. Дана таблица 9×9 клеток. В некоторых из 100 вершин клеток стоят хорошие стражницы. Каждая стражница наблюдает все вершины в двух перпендикулярных направлениях (в одну сторону по горизонтали и в одну сторону по вертикали), в том числе свою. (Стражница может стоять в вершине на стороне и смотреть вдаль. Стражница наблюдает через других стражниц.) Докажите, что можно расставить 36 стражниц так, чтобы каждую вершину клетки наблюдало не более двух стражниц.

7. Дима выписал на доску несколько чисел, не превосходящих N . Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если выписать на доску ещё хотя бы одно число, не превосходящее N , то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется степень простого числа.

8. Про действительные числа a, b, c известно, что $ab + bc + ca = 1$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a(b^2 + 1)}{a + b} + \frac{b(c^2 + 1)}{b + c} + \frac{c(a^2 + 1)}{c + a}?$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021**СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. Найдите наименьшее натуральное число m , для которого найдутся такие натуральные числа $n > k > 1$, что

$$\underbrace{11\dots1}_{n \text{ единиц}} = m \cdot \underbrace{11\dots1}_{k \text{ единиц}}.$$

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и C равны. Докажите, что $|AB - CD| < AD$.

3. У продавца на рынке есть 11 гирек различной массы. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих гирек продавец посчитал суммарную массу этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалась ровно одна пара равных. Докажите, что все гири можно разделить на две группы так, чтобы суммы масс гирь в группах были равны.

4. На продолжении стороны AB за точку B равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка P так, что $AB = BP$. На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка Q так, что $BC = CQ$. Прямая PC пересекает отрезок AQ в точке N . Докажите, что $CN = NQ$.

5. Дороти задумала натуральное число от 3 до 25 включительно. Аня назвала чётное число $n < 13$ и спросила, является ли число Дороти точным квадратом, является ли оно простым числом и делится ли оно на n ? Дороти не ответила на вопросы Ани, но сказала, что если она на них ответит, то Аня точно узнает число, которое загадала Дороти. Какое число могла загадать Дороти?

6. Дана таблица 9×9 клеток. В некоторых из 100 вершин клеток стоят хорошенькие стражницы. Каждая стражница наблюдает все вершины в двух перпендикулярных направлениях (в одну сторону по горизонтали и в одну сторону по вертикали), в том числе свою. (Стражница может стоять в вершине на стороне и смотреть вдаль. Стражница наблюдает через других стражниц.) Докажите, что можно расставить 36 стражниц так, чтобы каждую вершину клетки наблюдало не более двух стражниц.

7. Дима выписал на доску несколько чисел, не превосходящих N . Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если выписать на доску ещё хотя бы одно число, не превосходящее N , то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется степень простого числа.

8. Про действительные числа a, b, c известно, что $ab + bc + ca = 1$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a(b^2 + 1)}{a + b} + \frac{b(c^2 + 1)}{b + c} + \frac{c(a^2 + 1)}{c + a}?$$