МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 и 3 МЕСТА

1. В течение года Саша устраивал приёмы гостей, на которых были a_1, a_2, …, a_n человек соответственно. В конце года Саша посчитал, сколько есть человек, которые были хотя бы на одном приёме, хотя бы на двух, …, хотя бы на n приёмах. У него получились числа b_1, b_2, …, b_n. Докажите, что $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant a_1 a_2 \ldots a_n$.

2. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Точки P, Q — середины отрезков CD и BE соответственно. Прямые, проходящие через P, Q перпендикулярно ℓ, пересекают серединные перпендикуляры к AC и AB в точках M, N соответственно. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

3. Все вершины графа имеют степень 3 или 4, причём количество вершин степени 4 больше четверти количества вершин степени 3. Докажите, что рёбра этого графа можно так раскрасить в красный, жёлтый, зелёный и белый цвета, чтобы не все рёбра были белыми и в каждой вершине степени 3 сходились либо три белых ребра, либо одно красное, одно жёлтое и одно зелёное.

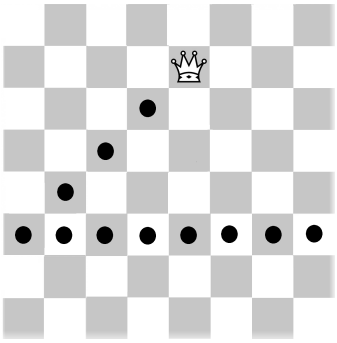
4. Подобные треугольники OFT и NOT расположены так, что порядок обхода соответственных вершин один и тот же, а $FANO$ – параллелограмм. Докажите, что $OF \cdot ON = OA \cdot OT$.

5. Множества A и B содержат по 750 натуральных чисел из диапазона от 1 до 2022 включительно. Может ли так быть, что ни одно из чисел вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$, не является точным квадратом?

6. Неотрицательные числа x_1, x_2, …, x_n таковы, что $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n$, $n > 1$. Докажите, что для произвольных неотрицательных вещественных чисел y_1, y_2, …, y_n найдутся i, j такие, что $x_i + y_j - x_{j+1} y_{i+1} \geqslant 1$ (мы считаем $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$).

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 2021^{2021}$, $0 \leqslant a_k < k$ при всех натуральных $k > 1$, $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k+1} a_k$ кратно k при всех натуральных k. Найдите член последовательности с номером 2021^{2022}.

8. Два человека играют в игру «Фферзя в уугол» на доске 1001×2001, горизонтали которой пронумерованы числами от 1 до 1001 снизу вверх, а вертикали — числами от 1 до 2001 слева направо. Ферзь изначально находится в правом верхнем углу. Ход состоит в том, что ферзя сдвигают или вниз, или влево, или влево-вниз на любое число клеток. Кроме того, имеется еще один вариант хода — если ферзь, двигаясь влево-вниз, может дойти до края доски, он после этого имеет право повернуть и двигаться *перпендикулярно краю* (внутрь доски) с тем, однако, ограничением, что сумма координат клетки, где он остановится, должна быть меньше суммы координат клетки, с которой он начал ход (см. рис.). Выигрывает тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол. Кто выиграет — начинающий или его соперник?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА

1. В течение года Саша устраивал приёмы гостей, на которых были a_1, a_2, …, a_n человек соответственно. В конце года Саша посчитал, сколько есть человек, которые были хотя бы на одном приёме, хотя бы на двух, …, хотя бы на n приёмах. У него получились числа b_1, b_2, …, b_n. Докажите, что $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant a_1 a_2 \ldots a_n$.

2. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Точки P, Q — середины отрезков CD и BE соответственно. Прямые, проходящие через P, Q перпендикулярно ℓ, пересекают серединные перпендикуляры к AC и AB в точках M, N соответственно. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

3. Каждый из 100 человек послал кому-то другому из этих 100 человек письмо. Известно, что если выбрать из них любых 40 человек, то в этой компании найдутся и отправитель, и получатель одного письма. При каком наименьшем k заведомо можно выбрать k писем так, чтобы каждый из 100 человек оказался либо отправителем, либо получателем хотя бы одного из этих писем?

4. Подобные треугольники OFT и NOT расположены так, что порядок обхода соответственных вершин один и тот же, а $FANO$ – параллелограмм. Докажите, что $OF \cdot ON = OA \cdot OT$.

5. Множества A и B содержат по 3000 натуральных чисел из диапазона от 1 до 8000 включительно. Может ли так быть, что ни одно из чисел вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$ не является точным квадратом?

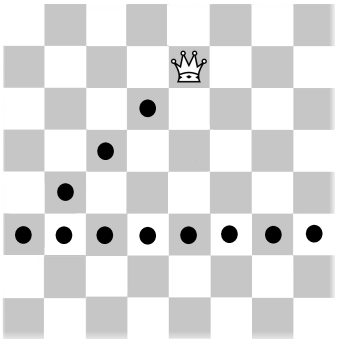
6. Существует ли бесконечная последовательность a_1, a_2, …отличных от нуля вещественных чисел такая, что

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$$

при всех натуральных n и $a_{2023} = -2022$?

7. О целых числах a_0, a_1, …, a_{99} известно, что для всех k от 0 до 99 выполняются неравенства $-k \leqslant a_k \leqslant 99-k$. Докажите, что или одно из a_k равно нулю, или сумма нескольких из a_k равна 0.

8. Два человека играют в игру «Фферзя в уугол» на доске 1001×2001, горизонтали которой пронумерованы числами от 0 до 1000 снизу вверх, а вертикали — числами от 0 до 2000 слева направо. Ферзь изначально находится в правом верхнем углу. Ход состоит в том, что ферзя сдвигают вниз, или влево, или влево-вниз на любое число клеток. Кроме того, имеется еще один вариант хода — если ферзь, двигаясь влево-вниз, может дойти до края доски, он после этого имеет право повернуть и двигаться *перпендикулярно краю* (внутрь доски) с тем, однако, ограничением, что сумма координат клетки, где он остановится, должна быть меньше суммы координат клетки, с которой он начал ход (см. рис.). Выигрывает тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол. Кто выиграет — начинающий или его соперник?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В течение года Саша устраивал приёмы гостей, на которых были a_1, a_2, …, a_n человек соответственно. В конце года Саша посчитал, сколько есть человек, которые были хотя бы на одном приёме, хотя бы на двух, …, хотя бы на n приёмах. У него получились числа b_1, b_2, …, b_n. Докажите, что $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant a_1 a_2 \ldots a_n$.

2. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Точки P, Q — середины отрезков CD и BE соответственно. Прямые, проходящие через P, Q перпендикулярно ℓ, пересекают серединные перпендикуляры к AC и AB в точках M, N соответственно. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

3. Каждый из 100 человек послал кому-то другому из этих 100 человек письмо. Известно, что, если выбрать из них любых 40 человек, то в этой компании найдутся и отправитель, и получатель одного письма. При каком наименьшем k заведомо можно выбрать k писем так, чтобы каждый из 100 человек оказался либо отправителем, либо получателем хотя бы одного из этих писем?

4. Подобные треугольники OFT и NOT расположены так, что порядок обхода соответственных вершин один и тот же, а $FANO$ – параллелограмм. Докажите, что $OF \cdot ON = OA \cdot OT$.

5. Множества A и B содержат по 3000 натуральных чисел из диапазона от 1 до 8000 включительно. Может ли так быть, что ни одно из чисел вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$ не является точным квадратом?

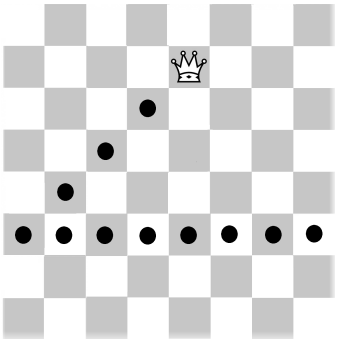
6. Существует ли бесконечная последовательность a_1, a_2, … отличных от нуля вещественных чисел такая, что

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$$

при всех натуральных n и $a_{2023} = -2022$?

7. О целых числах a_0, a_1, …, a_{99} известно, что для всех k от 0 до 99 выполняются неравенства $-k \leqslant a_k \leqslant 99-k$. Докажите, что или одно из a_k равно нулю, или сумма нескольких из a_k равна 0.

8. Два человека играют в игру «Фферзя в уугол» на доске 1001×2001, горизонтали которой пронумерованы числами от 0 до 1000 снизу вверх, а вертикали — числами от 0 до 2000 слева направо. Ферзь изначально находится в правом верхнем углу. Ход состоит в том, что ферзя сдвигают вниз, или влево, или влево-вниз на любое число клеток. Кроме того, имеется еще один вариант хода — если ферзь, двигаясь влево-вниз, может дойти до края доски, он после этого имеет право повернуть и двигаться *перпендикулярно краю* (внутрь доски) с тем, однако, ограничением, что сумма координат клетки, где он остановится, должна быть меньше суммы координат клетки, с которой он начал ход (см. рис.). Выигрывает тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол. Кто выиграет — начинающий или его соперник?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ нашли сумму его наибольшего и наименьшего элементов (если в множестве один элемент, его считают и наибольшим, и наименьшим). Найдите среднее арифметическое всех найденных чисел.

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120°$. Биссектрисы AP, BQ и CR треугольника ABC пересекаются в точке I. Перпендикуляр из точки P на CR пересекает AC в точке S, перпендикуляр из точки R на AP пересекает AC в точке T. Докажите, что $QT = QS$.

3. Каждый из 100 человек послал кому-то другому из этих 100 человек письмо. Известно, что, если выбрать из них любых 40 человек, то в этой компании найдутся и отправитель, и получатель одного письма. При каком наименьшем k заведомо можно выбрать k писем так, чтобы каждый из 100 человек оказался либо отправителем, либо получателем хотя бы одного из этих писем?

4. Подобные треугольники OFT и NOT расположены так, что порядок обхода соответственных вершин один и тот же, а $FANO$ – параллелограмм. Докажите, что $OF \cdot ON = OA \cdot OT$.

5. Множества A и B содержат по 3000 натуральных чисел из диапазона от 1 до 8000 включительно. Может ли так быть, что ни одно из чисел вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$ не является точным квадратом?

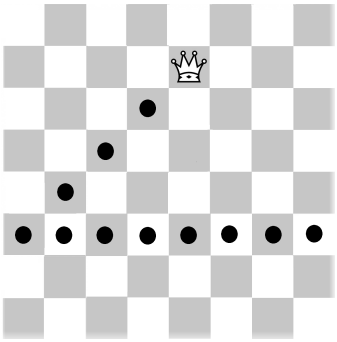
6. Существует ли бесконечная последовательность a_1, a_2, $\ldots$ отличных от нуля вещественных чисел такая, что

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3$$

при всех натуральных n и $a_{2023} = -2022$?

7. О целых числах a_0, a_1, $\ldots$, a_{99} известно, что для всех k от 0 до 99 выполняются неравенства $-k \leqslant a_k \leqslant 99-k$. Докажите, что или одно из a_k равно нулю, или сумма нескольких из a_k равна 0.

8. Два человека играют в игру «Фферзя в уугол» на доске 1001×2001, горизонтали которой пронумерованы числами от 0 до 1000 снизу вверх, а вертикали — числами от 0 до 2000 слева направо. Ферзь изначально находится в правом верхнем углу. Ход состоит в том, что ферзя сдвигают вниз, или влево, или влево-вниз на любое число клеток. Кроме того, имеется еще один вариант хода — если ферзь, двигаясь влево-вниз, может дойти до края доски, он после этого имеет право повернуть и двигаться *перпендикулярно краю* (внутрь доски) с тем, однако, ограничением, что сумма координат клетки, где он остановится, должна быть меньше суммы координат клетки, с которой он начал ход (см. рис.). Выигрывает тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол. Кто выиграет — начинающий или его соперник?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Квадратная таблица 8×8 заполнена числами от 1 до 64, каждое число использовано по одному разу. Докажите, что найдутся хотя бы четыре квадратика 2×2, в каждом из которых сумма чисел не меньше 100. Квадратики могут накладываться друг на друга.

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$. Биссектрисы AP, BQ и CR треугольника ABC пересекаются в точке I. Перпендикуляр из точки P на CR пересекает AC в точке S, перпендикуляр из точки R на AP пересекает AC в точке T. Докажите, что $QT = QS$.

3. В графе наибольшая степень вершины равна 7. Верно ли, что ребра можно раскрасить в 7 цветов так, что ребра всякого цикла длины 4 в этом графе будут покрашены в разные цвета? Для каждой вершины все примыкающие к ней ребра должны быть разного цвета.

4. На стороне BC квадрата $ABCD$ отмечена точка X. На продолжении отрезка CD за точку D отмечена точка Y такая, что $BX = YD$. Докажите, что середина отрезка XY лежит на диагонали BD.

5. Вдоль кольцевой дороги на расстоянии 1 км друг от друга расположены 100 автозаправок, принадлежащих 100 различным компаниям. К автозаправкам подъехали 100 бензовозов этих же 100 компаний, по одному к каждой заправке. Правда, бензовозы всё перепутали и каждый подъехал не к своей заправке. Каждый водитель подсчитал, сколько километров ему нужно проехать по часовой стрелке до своей автозаправки. Может ли так быть, что для каждых двух водителей, находящихся в соседних автозаправках, их числа отличаются ровно на 1?

6. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определена по правилу: для каждого $k \geqslant 3$: если $a_{k-2} > a_{k-1}$, то $a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$, если же $a_{k-2} \leqslant a_{k-1}$, то последовательность заканчивается. Какое наибольшее значение может принимать n, если $a_1 = 1000$?

7. Найдите все возможные тройки натуральных чисел (a, b, c), которые удовлетворяют условиям $a = \text{НОД}(b, c) + 3$, $b = \text{НОД}(a, c) + 3$, $c = \text{НОД}(a, b) + 3$.

8. Десять мудрецов проходят испытание. Им на головы надевают колпаки каких-то цветов (цвета заранее неизвестны), каждый мудрец видит цвета всех колпаков, кроме своего. По команде все одновременно называют число. Если хоть кто-то из мудрецов угадал общее количество колпаков цвета своего колпака, то всех отпускают. Как мудрецам заранее договориться действовать так, чтобы гарантировано всех отпустили?