МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1–4 МЕСТА

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки M и N соответственно так, что $AN + BN = AB + CN$ и $AM + CM = AC + BM$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке S. Докажите, что $\angle NSC < 60^\circ$.

2. Найдите все пары натуральных чисел (x, y) таких, что число $x^2 + y^2$ является общим делителем чисел $x^5 + y$ и $y^5 + x$.

3. Каждый из 100 человек отправил кому-то другому из этих 100 человек письмо. Известно, что, если выбрать любых 40 человек, среди них найдутся отправитель и получатель одного и того же письма. При каком наименьшем k заведомо можно выбрать k писем так, чтобы каждый из 100 человек оказался либо отправителем, либо получателем хотя бы одного из этих писем?

4. Даны три натуральных числа x, y, z, для которых НОД$(x, y, z) = 1$. Для них выполнены условия

$$\begin{aligned} yz(x+y+z) &\text{ делится на } x;\\ xz(x+y+z) &\text{ делится на } y;\\ xy(x+y+z) &\text{ делится на } z;\\ xyz &\text{ делится на } x+y+z. \end{aligned}$$

Докажите, что $xyz(x + y + z)$ — точный квадрат.

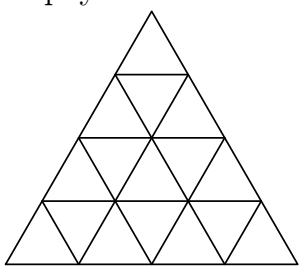
5. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 2022 шарика. Каждым ходом Петя может взять 1, 2 или 4 шарика, а Вася 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз Петя брал 2 шарика. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{xy+1}{x+1} = \frac{yz+1}{y+1} = \frac{zx+1}{z+1}.$$

Обязательно ли они все должны быть равны?

7. Правильный треугольник разбит на n^2 правильных треугольничков. Сколькими способами из получившейся картинки можно удалить маленький треугольничек так, чтобы остаток можно было разрезать на трапеции из трех маленьких треугольничков?



8. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ нашли сумму его наибольшего и наименьшего элементов (если в множестве один элемент, его считают и наибольшим, и наименьшим). Найдите среднее арифметическое всех найденных чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА, ФИНАЛ

1. В треугольнике ABC угол A в три раза больше, чем угол C. На стороне BC отметили такую точку D, что $\angle ADC = 2\angle C$. Докажите, что $AB + AD = BC$.

2. Найдите все пары натуральных чисел (x, y) таких, что число $x^2 + y^2$ является общим делителем чисел $x^5 + y$ и $y^5 + x$.

3. В городе 10 перекрёстков, пары перекрёстков соединены не более, чем одной односторонней дорогой. Известно, что, выехав с любого перекрёстка по любой дороге, на него можно будет вернуться, проехав по трём дорогам. Вдоль некоторой дороги (не на перекрёстке) стоит администрация. С любого перекрёстка можно добраться до администрации. При каком наименьшем k обязательно верно, что с любого перекрёстка можно доехать до администрации и вернуться, проехав не более, чем по k дорогам?

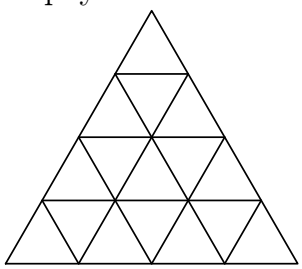
4. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 2022 шарика. Каждым ходом Петя может взять 1, 2 или 4 шарика, а Вася 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз Петя брал 2 шарика. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

5. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{xy+1}{x+1} = \frac{yz+1}{y+1} = \frac{zx+1}{z+1}.$$

Обязательно ли они все должны быть равны?

6. Правильный треугольник разбит на n^2 правильных треугольничков. Сколькими способами из получившейся картинки можно удалить маленький треугольничек так, чтобы остаток можно было разрезать на трапеции из трех маленьких треугольничков?



7. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ нашли сумму его наибольшего и наименьшего элементов (если в множестве один элемент, его считают и наибольшим, и наименьшим). Найдите среднее арифметическое всех найденных чисел.

8. Назовем *апгрейдом* натурального числа с ненулевыми цифрами такое число, которое получается из исходного заменой всех его единиц на двойки, двоек на тройки, и т.д., девяток на единицы. Известно, что 100-значное число N делится на 11, и что если число N последовательно проапгрейдить 7 раз, то все 7 полученных в процессе чисел тоже будут делиться на 11. Верно ли, что восьмой апгрейд числа N обязательно делится на 11?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC угол A в три раза больше, чем угол C. На стороне BC отметили такую точку D, что $\angle ADC = 2\angle C$. Докажите, что $AB + AD = BC$.

2. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие условию: разность любых двух различных собственных делителей числа n также является делителем числа n. Натуральный делитель числа n называется *собственным*, если он отличен от n и 1.

3. В городе 10 перекрёстков, пары перекрёстков соединены не более, чем одной односторонней дорогой. Известно, что, выехав с любого перекрёстка по любой дороге, на него можно будет вернуться, проехав по трём дорогам. Вдоль некоторой дороги (не на перекрёстке) стоит администрация. С любого перекрёстка можно добраться до администрации. При каком наименьшем k обязательно верно, что с любого перекрёстка можно доехать до администрации и вернуться, проехав не более, чем по k дорогам?

4. Транспортная компания взимает плату, равную $30l + 40w + 50h$ рублей, за перевозку коробки размера $l \times w \times h$ в сантиметрах. Клиент сам может выбрать, что назвать длиной l, что — шириной w, а что — высотой h, чтобы сосчитать цену перевозки. Клиент обнаружил, что он двумя разными способами может выбрать длину/ширину/высоту так, чтобы стоимость перевозки стала равна 810 рублей, двумя разными способами может выбрать длину/ширину/высоту так, чтобы стоимость перевозки стала равна 870 рублей. Ни одна из граней коробки не является квадратом. Найдите площадь поверхности коробки.

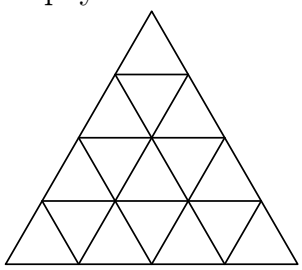
5. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 2022 шарика. Каждым ходом Петя может взять 1, 2 или 4 шарика, а Вася 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз Петя брал 2 шарика. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{xy+1}{x+1} = \frac{yz+1}{y+1} = \frac{zx+1}{z+1}.$$

Обязательно ли они все должны быть равны?

7. Правильный треугольник разбит на n^2 правильных треугольничков. Сколькими способами из получившейся картинки можно удалить маленький треугольничек так, чтобы остаток можно было разрезать на трапеции из трех маленьких треугольничков?



8. Назовем *апгрейдом* натурального числа с ненулевыми цифрами такое число, которое получается из исходного заменой всех его единиц на двойки, двоек на тройки, и т.д., девяток на единицы. Известно, что 100-значное число N делится на 11, и что если число N последовательно проапгрейдить 7 раз, то все 7 полученных в процессе чисел тоже будут делиться на 11. Верно ли, что восьмой апгрейд числа N обязательно делится на 11?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие условию: разность любых двух различных собственных делителей числа n также является делителем числа n. Натуральный делитель числа n называется *собственным*, если он отличен от n и 1.

2. На столе лежат 10 кучек камней. В первой кучке 1 камень, во второй — 2, и т.д. до десятой, в которой 10 камней. За один ход Петя может выбрать две кучки, в которых в сумме 11 или 12 камней, и переложить произвольное количество камней из одной в другую. Какое наибольшее количество кучек, в которых ровно по 5 камней, может получить Петя?

3. Серёжа хочет выписать на доску в некотором порядке все цифры от 1 до 9, а затем добавить несколько нулей в места до, после и между цифрами так, чтоб сумма любых четырёх подряд идущих цифр являлась простым числом. В каком порядке Серёже нужно выписать цифры от 1 до 9, чтобы количество нулей, которое он мог бы добавить для осуществления своей задумки, было наибольшим из возможных?

4. В городе 10 перекрёстков, пары перекрёстков соединены не более, чем одной односторонней дорогой. Известно, что, выехав с любого перекрёстка по любой дороге, на него можно будет вернуться, проехав по трём дорогам. Вдоль некоторой дороги (не на перекрёстке) стоит администрация. С любого перекрёстка можно добраться до администрации. При каком наименьшем k обязательно верно, что с любого перекрёстка можно доехать до администрации и вернуться, проехав не более, чем по k дорогам?

5. Транспортная компания взимает плату, равную $30l + 40w + 50h$ рублей, за перевозку коробки размера $l \times w \times h$ в сантиметрах. Клиент сам может выбрать, что назвать длиной l, что — шириной w, а что — высотой h, чтобы сосчитать цену перевозки. Клиент обнаружил, что он двумя разными способами может выбрать длину/ширину/высоту так, чтобы стоимость перевозки стала равна 810 рублей, двумя разными способами может выбрать длину/ширину/высоту так, чтобы стоимость перевозки стала равна 870 рублей. Ни одна из граней коробки не является квадратом. Найдите площадь поверхности коробки.

6. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 999 шариков. Каждым ходом Петя может взять 1, 2 или 4 шарика, а Вася 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик и сколько раз Петя брал 2 шарика. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

7. Квадратная таблица 8×8 заполнена числами от 1 до 64, каждое число использовано по одному разу. Докажите, что найдутся хотя бы четыре квадратика 2×2, в каждом из которых сумма чисел не меньше 100. Квадратики могут накладываться друг на друга.

8. Правильный треугольник разбит линиями, параллельными его сторонам, на 100 правильных треугольничков. Вася закрасил один из треугольничков, ни одна из вершин которого не лежит на сторонах исходного треугольника. Докажите, что фигуру из остальных 99 треугольничков можно разрезать на трапеции из трех маленьких треугольничков.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие условию: разность любых двух различных делителей числа n, меньших n, также является делителем числа n.

2. На столе лежат 10 кучек камней. В первой кучке 1 камень, во второй — 2, и т.д. до десятой, в которой 10 камней. За один ход Петя может выбрать две кучки, в которых в сумме 11 или 12 камней, и переложить произвольное количество камней из одной в другую. Какое наибольшее количество кучек, в которых ровно по 5 камней, может получить Петя?

3. Артём в центр поля ставит фишку. Затем он смещает её на 1 сантиметр в некотором направлении, затем на 2 сантиметра в направлении, перпендикулярном первому смещению, затем на 3 сантиметра в направлении, перпендикулярном второму смещению, и так далее. Он сделал $n > 1$ смещений и оказалось, что он передвинул фишку на целое число сантиметров от её изначального положения. При каком наименьшем n это возможно?

4. Дан граф с $n \geqslant 3$ вершинами, в котором проведены все возможные ребра. Ребра покрашены в 3 цвета так, что все цвета встречаются, и для любых трёх вершин три ребра, соединяющие их, либо все одного цвета, либо все разных цветов. Для каких n такая раскраска существует?

5. Серёжа хочет выписать на доску в некотором порядке все цифры от 1 до 9, а затем добавить несколько нулей в места до, после и между цифрами так, чтоб сумма любых четырёх подряд идущих цифр являлась простым числом. В каком порядке Серёже нужно выписать цифры от 1 до 9, чтобы количество нулей, которое он мог бы добавить для осуществления своей задумки, было наибольшим из возможных?

6. Есть два одинаковых правильных шестиугольника. Можно ли их разрезать на несколько частей (в сумме не более 6) так, чтобы из всех этих частей можно было сложить равносторонний треугольник?

7. У Оли есть несколько красных, синих и зелёных конфеток. Известно, что общее количество красных и зелёных конфеток на 38% больше, синих. Также общее количество синих и зелёных на 150% больше, чем красных. На сколько процентов количество синих и красных конфеток больше, чем зелёных?

8. Квадратная таблица 8×8 заполнена числами от 1 до 64, каждое число использовано по одному разу. Докажите, что найдутся хотя бы четыре квадратика 2×2, в каждом из которых сумма чисел не меньше 100. Квадратики могут накладываться друг на друга.