МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 2022 шарика. Каждым ходом Петя может взять 1, 2 или 4 шарика, а Вася 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз Петя брал 2 шарика. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. Сто мудрецов проходят испытание. Им на головы наденут колпаки каких-то цветов (цвета заранее не известны), каждый мудрец видит цвета всех колпаков, кроме своего. По команде все одновременно называют число. Если хоть кто-то из мудрецов угадал общее количество колпаков цвета своего колпака, то всех отпускают. Как мудрецам заранее договориться действовать так, чтобы гарантировано всех отпустили?

3. Дано натуральное число N. Для чисел 1, 2, ..., N, выписанных в некотором порядке, будем получившийся ряд называть *плохим*, если в нём найдутся два несоседних числа $A > B$ такие, что между A и B в ряду стоят только числа, меньшие A и большие B. Например, ряд 3, 1, 2, 4 — плохой, так как между числами 1 и 4 стоят только числа, большие 1 и меньшие 4. А ряд 1, 4, 2, 3 не является плохим. Сколько существует различных рядов, не являющихся плохими?

4. Надя выписала себе в блокнот 3000 натуральных чисел, не превосходящих 8000. И Сережа выписал себе в блокнот 3000 натуральных чисел, не превосходящих 8000. (Какие-то числа могут быть записаны сразу в оба блокнота.) Верно ли, что всегда можно выбрать одно из Надиных чисел и одно из Серёжиных таким образом, чтобы их сумма была квадратом натурального числа?

5. Дан граф с $n \geqslant 3$ вершинами, в котором проведены все возможные ребра. Мы хотим покрасить каждое ребро в один из четырех цветов так, чтобы все четыре цвета встречались, и для любых трёх вершин три ребра, соединяющие их, были либо все одного цвета, либо все разных цветов. Для какого наибольшего n такая раскраска существует?

6. У Нади есть доска 9×9 клеток. Она говорит, что две клетки являются друзьями, если они либо имеют общую сторону, либо они находятся на противоположных концах одной строки или одного столбца (на доске у каждой клетки есть 4 друга). Надя раскрасила каждую клетку в один из трех цветов: зеленый, синий или красный. В каждой клетке написано число по следующим правилам:

1. В зелёной клетке — число её красных друзей плюс удвоенное число её синих друзей.
2. В красной клетке — число её синих друзей плюс удвоенное число её зелёных друзей.
3. В синей клетке — число её зелёных друзей плюс удвоенное число её красных друзей.

Какую максимальную сумму записанных в клетках чисел могла получить Надя?

7. Назовем *апгрейдом* натурального числа с ненулевыми цифрами такое число, которое получается из исходного заменой всех его единиц на двойки, двоек на тройки, и т.д., девяток на единицы. Известно, что натуральное число N делится на 11, и что если число N последовательно проапгрейдить 7 раз, то все 7 полученных в процессе чисел тоже будут делиться на 11. Какой остаток при делении на 11 может давать восьмой апгрейд числа N?

8. У натурального числа $n > 1$ выписали все его натуральные делители $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$, включая 1 и само число n. Затем Оля выписала на доску следующие $2m$ чисел:

$$d_1, d_2, \ldots, d_m, d_1 + d_2, d_2 + d_3, \ldots, d_{m-1} + d_m, K,$$

где K — натуральное число. Оказалось, что на доске каждый делитель числа K выписан ровно один раз. Для каких чисел n такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-2 МЕСТА

1. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 2022 шарика. Каждым ходом Петя может взять 1, 2 или 4 шарика, а Вася 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз Петя брал 2 шарика. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. Сто мудрецов проходят испытание. Им на головы наденут колпаки каких-то цветов (цвета заранее не известны), каждый мудрец видит цвета всех колпаков, кроме своего. По команде все одновременно называют число. Если хоть кто-то из мудрецов угадал общее количество колпаков цвета своего колпака, то всех отпускают. Как мудрецам заранее договориться действовать так, чтобы гарантировано всех отпустили?

3. Дано натуральное число N. Для чисел 1, 2, ..., N, выписанных в некотором порядке, будем получившийся ряд называть *плохим*, если в нём найдутся два несоседних числа $A > B$ такие, что между A и B в ряду стоят только числа, меньшие A и большие B. Например, ряд 3, 1, 2, 4 — плохой, так как между числами 1 и 4 стоят только числа, большие 1 и меньшие 4. А ряд 1, 4, 2, 3 не является плохим. Сколько существует различных рядов, не являющихся плохими?

4. Дима записал в блокноте 59 различных натуральных чисел. Оля к каждому из Диминых чисел прибавила 58 и записала полученные 59 чисел в свой блокнот. Могут ли произведения Диминых 59 чисел и Олиных 59 чисел отличаться ровно в 59 раз?

5. Дан граф с $n \geqslant 3$ вершинами, в котором проведены все возможные ребра. Мы хотим покрасить каждое ребро в один из четырех цветов так, чтобы все четыре цвета встречались, и для любых трёх вершин три ребра, соединяющие их, были либо все одного цвета, либо все разных цветов. Для какого наибольшего n такая раскраска существует?

6. У Нади есть доска 9×9 клеток. Она говорит, что две клетки являются друзьями, если они либо имеют общую сторону, либо они находятся на противоположных концах одной строки или одного столбца (на доске у каждой клетки есть 4 друга). Надя раскрасила каждую клетку в один из трех цветов: зеленый, синий или красный. В каждой клетке написано число по следующим правилам:

1. В зелёной клетке — число её красных друзей плюс удвоенное число её синих друзей.
2. В красной клетке — число её синих друзей плюс удвоенное число её зелёных друзей.
3. В синей клетке — число её зелёных друзей плюс удвоенное число её красных друзей.

Какую максимальную сумму записанных в клетках чисел могла получить Надя?

7. Назовем *апгрейдом* натурального числа с ненулевыми цифрами такое число, которое получается из исходного заменой всех его единиц на двойки, двоек на тройки, и т.д., девяток на единицы. Известно, что натуральное число N делится на 11, и что если число N последовательно проапгрейдить 7 раз, то все 7 полученных в процессе чисел тоже будут делиться на 11. Какой остаток при делении на 11 может давать восьмой апгрейд числа N?

8. У натурального числа $n > 1$ выписали все его натуральные делители $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$, включая 1 и само число n. Затем Оля выписала на доску следующие $2m$ чисел:

$$d_1, d_2, \ldots, d_m, d_1 + d_2, d_2 + d_3, \ldots, d_{m-1} + d_m, K,$$

где K — натуральное число. Оказалось, что на доске каждый делитель числа K выписан ровно один раз. Для каких чисел n такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА
ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-2 МЕСТА

1. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 2022 шарика. Каждым ходом Петя может взять 1, 2 или 4 шарика, а Вася 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз Петя брал 2 шарика. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. Вера выписала 2023 строки длины 2022, каждая строка состоит из нулей и единиц. Алиса хочет записать строку из 2022 нулей и единиц, которая не совпадает ни с одной вериной строкой. Она может задавать Вере вопросы вида «Какое число стоит на i-ом месте k-ой строки?» Следующий вопрос Алиса задает, узнав ответ на предыдущий. Через какое наименьшее число вопросов Алиса гарантированно сможет написать свою строку?

3. Костя хочет выписать в ряд числа 1, 2, 3, ..., 100 в некотором порядке. Назовём ряд *плохим* если в нём найдутся два не соседних числа $A > B$ такие, что между A и B в ряду стоят только числа, меньшие A и большие B. Например, ряд (из четырёх чисел) 3, 1, 2, 4 — плохой, так как между числами 1 и 4 стоят только числа, большие 1 и меньшие 4. А ряд 1, 4, 2, 3 не является плохим. Докажите, что количество способов выписать ряд, не являющийся плохим, делится на 4.

4. Дима записал в блокноте 59 различных натуральных чисел. Оля к каждому из Диминых чисел прибавила 58 и записала полученные 59 чисел в свой блокнот. Могут ли произведения Диминых 59 чисел и Олиных 59 чисел отличаться ровно в 59 раз?

5. Дан граф с $n \geqslant 3$ вершинами, в котором проведены все возможные ребра. Мы хотим покрасить каждое ребро в один из четырех цветов так, чтобы все четыре цвета встречались, и для любых трёх вершин три ребра, соединяющие их, были либо все одного цвета, либо все разных цветов. Для какого наибольшего n такая раскраска существует?

6. У Нади есть доска 9×9 клеток. Она говорит, что две клетки являются друзьями, если они либо имеют общую сторону, либо они находятся на противоположных концах одной строки или одного столбца (на доске у каждой клетки есть 4 друга). Надя раскрасила каждую клетку в один из трех цветов: зеленый, синий или красный. В каждой клетке написано число по следующим правилам:

1. В зелёной клетке — число её красных друзей плюс удвоенное число её синих друзей.
2. В красной клетке — число её синих друзей плюс удвоенное число её зелёных друзей.
3. В синей клетке — число её зелёных друзей плюс удвоенное число её красных друзей.

Какую максимальную сумму записанных в клетках чисел могла получить Надя?

7. Назовем *апгрейдом* натурального числа с ненулевыми цифрами такое число, которое получается из исходного заменой всех его единиц на двойки, двоек на тройки, и т.д., девяток на единицы. Известно, что натуральное число N делится на 11, и что если число N последовательно проапгрейдить 7 раз, то все 7 полученных в процессе чисел тоже будут делиться на 11. Какой остаток при делении на 11 может давать восьмой апгрейд числа N?

8. У натурального числа $n > 1$ выписали все его натуральные делители $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$, включая 1 и само число n. Затем Оля выписала на доску следующие $2m$ чисел:

$$d_1, d_2, \ldots, d_m, d_1 + d_2, d_2 + d_3, \ldots, d_{m-1} + d_m, K,$$

где K — натуральное число. Оказалось, что на доске каждый делитель числа K выписан ровно один раз. Для каких чисел n такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА
ТРЕТЬЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-2 МЕСТА

1. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 333 шарика. Каждым ходом можно взять 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз брал 2. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. Вера выписала 2023 строки длины 2022, каждая строка состоит из нулей и единиц. Алиса может задавать Вере вопросы вида «Какое число стоит на i-ом месте k-ой строки?» Следующий вопрос Алиса задает, узнав ответ на предыдущий. Сможет ли Алиса записать строку из 2022 нулей и единиц, которая не совпадает ни с одной вериной строкой, задав 2077 вопросов?

3. Костя хочет выписать в ряд числа 1, 2, 3, ..., 100 в некотором порядке. Назовём ряд *плохим* если в нём найдутся два не соседних числа $A > B$ такие, что между A и B в ряду стоят только числа, меньшие A и большие B. Например, ряд (из четырёх чисел) 3, 1, 2, 4 — плохой, так как между числами 1 и 4 стоят только числа, большие 1 и меньшие 4. А ряд 1, 4, 2, 3 не является плохим. Докажите, что количество способов выписать ряд, не являющийся плохим, делится на 4.

4. Дима записал в блокноте 59 различных натуральных чисел. Оля к каждому из Диминых чисел прибавила 58 и записала полученные 59 чисел в свой блокнот. Могут ли произведения Диминых 59 чисел и Олиных 59 чисел отличаться ровно в 59 раз?

5. Существует ли 101 различное целое число, сумма любых 100 из которых является кубом целого числа?

6. У Нади есть доска 9×9 клеток. Она говорит, что две клетки являются друзьями, если они либо имеют общую сторону, либо они находятся на противоположных концах одной строки или одного столбца (на доске у каждой клетки есть 4 друга). Надя раскрасила каждую клетку в один из трех цветов: зеленый, синий или красный. В каждой клетке написано число по следующим правилам:

1. В зелёной клетке — число её красных друзей плюс удвоенное число её синих друзей.
2. В красной клетке — число её синих друзей плюс удвоенное число её зелёных друзей.
3. В синей клетке — число её зелёных друзей плюс удвоенное число её красных друзей.

Какую максимальную сумму записанных в клетках чисел могла получить Надя?

7. Назовем *апгрейдом* натурального числа с ненулевыми цифрами такое число, которое получается из исходного заменой всех его единиц на двойки, двоек на тройки, и т.д., девяток на единицы. Известно, что натуральное число N делится на 11, и что если число N последовательно проапгрейдить 7 раз, то все 7 полученных в процессе чисел тоже будут делиться на 11. Какой остаток при делении на 11 может давать восьмой апгрейд числа N?

8. Найдите все простые числа p и q такие, что числа $2p+q$, $2p+q^2$, $2q+p$ и $2q+p^2$ тоже простые.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 12.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА

1. Петя и Вася играют в игру. Перед ними лежат 333 шарика. Каждым ходом можно взять 1 или 2 шарика (ходы делают по очереди, начинает Петя). Когда ходы больше делать нельзя, они подсчитывают, сколько раз Петя брал 1 шарик, и сколько раз брал 2. Если эти числа равны, то выигрывает Петя, а если различны, то Вася. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

2. Вера выписала 2023 строки длины 2022, каждая строка состоит из нулей и единиц. Алиса может задавать Вере вопросы вида «Какое число стоит на i-ом месте k-ой строки?» Следующий вопрос Алиса задает, узнав ответ на предыдущий. Сможет ли Алиса записать строку из 2022 нулей и единиц, которая не совпадает ни с одной вериной строкой, задав 2077 вопросов?

3. Из куба $3 \times 3 \times 3$, сложенного из 27 единичных кубиков, удалили центральный кубик вместе со всеми шестью кубиками, имеющими с ним общую грань. Какова площадь поверхности получившейся фигуры?

4. На стадионе собралось 10000 болельщиков. Оказалось, что у каждого ровно 7 знакомых на стадионе, и любой болельщик может передать привет любому другому по цепочке, в которой привет передаётся от знакомого к знакомому. Какое наибольшее количество попарно незнакомых болельщиков можно выбрать из присутствующих на стадионе?

5. Глава семьи — дедушка. Он инвалид, потерял в войну ногу. С ним живут его сын с женой и несколько их детей (внуков дедушки). Любимцы семьи — кот Василий, попугай Кеша и сколько-то рыбок в аквариуме. Всего в квартире можно насчитать 16 голов и 17 ног. Сколько в квартире хвостов?

6. В каждой клетке полоски 2×2022 клеток стоит либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, никогда не говорящий правду. Каждый произнёс фразу: «В клетках, имеющих с моей общую сторону, все лжецы.» Какое наименьшее число рыцарей может стоять на доске?

7. Назовем *апгрейдом* натурального числа с цифрами, большими единицы, такое число, которое получается из исходного заменой всех его двоек на тройки, троек на четвёрки и т.д., восьмёрок на девятки, девяток на двойки. Известно, что 7-значное число N делится на 9, и что если его последовательно проапгрейдить k раз, то все полученные в процессе числа тоже будут делится на 9. Найдите наибольшее возможное k.

8. 25 спортсменов разного роста выстроились квадратом 5×5. В каждой строке выбрали среднего по росту. Средним по росту среди выбранных оказался Николай. Оказалось, что есть ровно n спортсменов, которые выше Николая. Найдите наибольшее возможное значение n?