LIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Владимир, 06.11-12.11.2022

Командная олимпиада. Лига Старт.

1. *Грю и Вектор воруют друг у друга пирамиды. Изначально у Грю на 96 пирамид больше, чем у Вектора. Каждую неделю Грю крадет четверть пирамид Вектора, а Вектор (в тот же момент) крадёт четверть пирамид Грю. У кого из воров через три недели будет больше пирамид, и на сколько?*

Ответ: У Грю пирамид больше на 12. **Решение.** Если в какой-то момент у Грю x пирамид, а у Вектора y пирамид, то через неделю у Грю будет $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y$, а у Вектора — $\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}x$ пирамид. И разница между количеством пирамид будет равна $\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y\right) - \left(\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{2}(x-y)$. То есть разница уменьшается в 2 раза. А значит через три недели разница будет равна $96/8 = 12$.

2. *Даны различные ненулевые цифры a, b, c, d. Известно, что ни одно из чисел $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dabc}$ не имеет простых делителей, меньших 10. Чему может быть равна сумма этих четырёх четырёхзначных чисел?*

Ответ: 22220. **Решение.** Заметим, что ни одна из цифр a, b, c, d не может быть четной или равняться 5, иначе число, которое на нее оканчивается будет делиться на 2 или 5, соответственно. Остается 4 варианта цифр: 1, 3, 7, 9. Так как a, b, c, d — различные, то это именно эта четверка цифр в некотором порядке. Теперь перепишем $\overline{abcd} = 10^3a + 10^2b + 10c + d$. Расписав аналогично остальные числа и перегруппировав слагаемые, получим

$$\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc} = (a+b+c+d)(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 20 \cdot 1111 = 22220.$$

3. *В ряд стоят 110 фишек, расстояние между любыми двумя соседними фишками равно 1. Костя переставил эти фишки на те же места (но в другом порядке). Докажите, что какие-то две фишки, находившиеся до перестановки на расстоянии не более 10, после перестановки оказались по-прежнему на расстоянии не более 10.*

Решение. Рассмотрим первые 11 фишек в изначальном ряду. Заметим, что между любыми двумя из них расстояние не больше 10. Тогда после перестановки расстояние между любыми двумя из них должно быть хотя бы 11. Но тогда расстояние между двумя крайними из них хотя бы $10 \cdot 11 = 110$, а должно быть не более 109.

4. *Натуральные числа покрасили в два цвета. Докажите, что можно выбрать шесть чисел одного цвета так, что если выписать выбранные числа в ряд в порядке возрастания, то разности любых двух соседних чисел в ряду будут степенями двойки (то есть числами вида 2^n, где n — натуральное). Эти степени двойки в разных парах соседей в ряду могут быть различны, но могут и совпадать.*

Решение. Будем последовательно получать более длинную цепочку одноцветных чисел. Пусть мы уже нашли цепочку чисел $b_1 < \ldots < b_k$, которая удовлетворяет условию. Мы хотим приписать к ней ещё одно число. Если это нельзя сделать, то все числа $b_k + 2$, $b_k + 4$, $b_k + 8$, ... покрашены в цвет, отличный от цвета этой цепочки. Так как цвета всего два, то все числа $b_k + 2$, $b_k + 4$, $b_k + 8$, ... одноцветны, а тогда первые шесть из них удовлетворяют условию задачи.

5. *В группе школьников некоторые знакомы между собой, а некоторые нет. Оказалось, что если какой-то школьник знаком хотя бы с 20 другими школьниками, то все его знакомые незнакомы между собой. Кроме того, если школьник незнаком хотя бы с 20 другими школьниками, то все его незнакомые знакомы между собой. Найдите максимальное возможное число школьников в такой группе.*

Ответ: 40 школьников. **Решение.** Пример. Пусть в группе 20 девочек и 20 мальчиков. Все девочки знакомы со всеми мальчиками, но никакие девочки не знакомы друг с другом и никакие мальчики не знакомы друг с другом. Легко видеть, что такая группа удовлетворяет условию.

Оценка. Предположим, что у какого-то школьника A есть хотя бы 21 знакомый B_1, B_2, $\ldots$, B_{21}. По условию, все его знакомые незнакомы. Но тогда у школьника B_1 есть 20 незнакомых B_2, $\ldots$, B_{21} и они незнакомы друг с другом. Противоречие. Следовательно, у каждого школьника не более 20 знакомых и, аналогично, не более 20 незнакомых. Тогда школьников всего не более 41. Осталось доказать, что невозможен случай, когда школьников ровно 41. Пусть так. Тогда у школьника A ровно 20 знакомых B_1, B_2, $\ldots$, B_{20} и ровно 20 незнакомых C_1, C_2, $\ldots$, C_{20}. Причем все B_i попарно незнакомы, а все C_i попарно знакомы. У B_1 также должно быть ровно 20 знакомых, которые незнакомы между собой. Он уже знает A и не знает никого из B_i. Следовательно, он знаком с хотя бы 19 школьниками из C_i. Но C_i попарно знакомы. Противоречие.

6. *На доску выписаны числа* 1, 2, 3, $\ldots$, 11. *За один ход Дима стирает с доски числа a и b такие, что $a > 2b$, и записывает вместо них число $a - 2b$. После десяти ходов на доске осталось одно число. Какое наименьшее значение может принимать это число?*

Ответ: 3. **Решение.** Оценка. Заметим, что $a - 2b$ имеет такой же остаток от деления на 3, что и $a+b$. Следовательно, при Диминых операциях остаток суммы всех чисел от деления на 3 не изменяется. Изначально сумма всех чисел равна $11 \cdot 12/2 = 66$, то есть делится на 3. Значит и в конце останется число, делящееся на 3. Так как Дима выписывает только положительные числа, то число на доске должно быть не меньше 3.

Пример. Проделаем следующие замены:

$$(11, 1) \to 9, \quad (5, 2) \to 1, \quad (7, 3) \to 1, \quad (9, 4) \to 1.$$

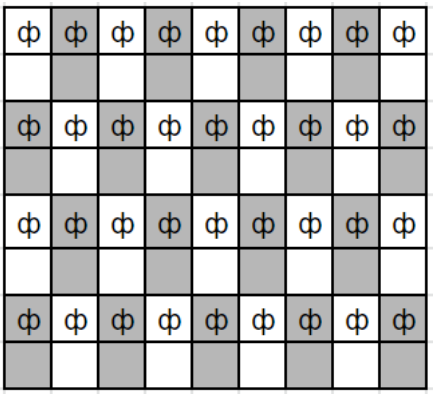
На доске останется набор чисел 6, 8, 10, 9, 1, 1, 1. Затем проделаем операции

$$(6, 1) \to 4, \quad (9, 1) \to 7.$$

На доске останется набор 8, 10, 1, 4, 7. Далее делаем операцию $(10, 4) \to 2$. На доске набор 8, 1, 7, 2. Делаем операцию $(8, 2) \to 4$. На доске набор 1, 7, 4. Делаем операцию $(4, 1) \to 2$. На доске набор 7, 2. Наконец, делаем операцию $(7, 2) \to 3$. Победа!

7. *Каждая клетка доски* 2022×2022 *покрашена в черный или белый цвет. В некоторых клетках стоят хромые ферзи. Хромой ферзь с клетки A бьет клетку B, если клетки A и B находятся на одной линии (строке, столбце или диагонали) и все клетки этой линии от A до B включительно покрашены в один цвет. При каком наибольшем k можно покрасить доску и расставить на ней k хромых ферзей так, чтобы они не били друг друга?*

Ответ: $2022 \cdot 1011$. **Решение.** Пример. Разобьем всю доску на вертикальные доминошки и покрасим их в шахматном порядке. Ферзей поставим в верхние клетки всех доминошек. На рисунке изображен пример для доски 8×8. Подходят и другие модификации этого примера: можно незанятые ферзями клетки покрасить как попало, скажем, все в черный цвет.



Оценка. Разобьем доску на квадраты 2×2. Если ферзей больше, чем $2022 \cdot 1011$, то в какой-то квадрат разбиения попало хотя бы 3 ферзя. Значит, какие-то два ферзя в этом квадрате стоят на клетках одного и того же цвета (так как ферзей 3, а цветов 2). Но тогда эти два ферзя бьют друг друга, так как они соседи или по вертикали, или по горизонтали, или по диагонали. Противоречие.

8. *На столе стоит несколько гирь суммарного веса s. Назовём гирю раздвоителем, если после её удаления все остальные гири можно разбить на две группы, суммарный вес каждой из которых не больше $\frac{s}{2}$. Докажите, что суммарный вес всех раздвоителей не меньше $\frac{s}{2}$.*

Решение. Предположим, что суммарный вес раздвоителей меньше $s/2$. Поместим все гири, являющиеся раздвоителями в одну группу (их суммарный вес меньше $s/2$). Все нераздвоители предварительно поместим во вторую группу. Начнем по очереди перекладывать нераздвоители из второй группы в первую. Остановимся в тот момент, когда суммарный вес первой группы впервые станет не меньше, чем $s/2$. Рассмотрим ту гирю, которую мы положили в первую группу на последнем шаге. Вместе с ней первая группа стала весить не меньше $s/2$. Следовательно, вторая группа теперь весит не более $s/2$. С другой стороны, до того, как мы положили эту гирю в первую группу, первая группа также весила не более $s/2$. Следовательно, рассматриваемая нами гиря является раздвоителем, так как мы смогли предъявить для неё разбиение на две группы. Но эта гиря изначально находилась во второй группе, куда мы поместили все НЕраздвоители. Противоречие.