МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах AC и AB треугольника ABC соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O, пересекает отрезок BC_1 в точке X, а отрезок B_1C — в точке Y. Докажите, что $\frac{BX}{XC_1} > \frac{B_1Y}{YC}$.

2. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых число $\frac{(x+y)(xy-1)}{xy+1}$ — простое.

3. Все члены бесконечной возрастающей последовательности $a_1 < a_2 < \ldots$ положительны и меньше 1. Докажите, что существует число, которое встречается в последовательности $\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \frac{a_4}{4}, \ldots$ ровно один раз.

4. Аня и Боря договорились показать Васе фокус. Вася должен положить 2000 монет в ряд, как ему вздумается (каждая монета может лежать «орлом» или «решкой» вверх). После этого Боря добавляет в конец ряда 40 монет по своему усмотрению. Затем Вася, если хочет, может выбрать в ряду две соседние монеты, одна из которых лежит вверх «орлом», а другая — «решкой», и перевернуть каждую из них. После этого в комнату входит Аня, видит получившийся ряд из 2040 монет, и говорит, переворачивал ли Вася монеты и, если да, то какие. Как Ане и Боре заранее договориться, чтобы фокус точно удался?

5. Даны 100 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы для любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне или углу ячейках, их разность была не равна 1.

6. Пусть $n! = 2^m \cdot N$, где N — нечетно. Число n в двоичной системе счисления записывается с помощью k цифр, допишем к нему спереди два нуля. Выпишем все k наборов из трех подряд стоящих цифр двоичной записи n. Пусть наборы 011 и 100 встречаются среди них в сумме p раз, а наборы 101 и 110 — q раз. Докажите, что $N \equiv 3^p 7^q \pmod 8$.

7. Дима и Макар играют в карты. У них есть колода из 101 карты, на каждой карте написано число от 1 до 101, каждое число встречается ровно на одной карте. В начале игры Дима взял себе все карты с четными числами, а Макар — с нечетными. Каждый игрок сложил свои карты в стопку в произвольном порядке. На очередном ходу игроки открывают верхние карты в своих стопках, сравнивают числа на них, и тот, у кого число больше, забирает обе карты. Он кладет их в низ своей колоды, причем сначала кладет карту соперника, а под неё свою. Если у игрока заканчиваются карты, он проиграл. На десятом ходу были открыты карты 101 и 2. Докажите, что игра никогда не закончится.

8. Стороны в остроугольном треугольнике ABC таковы, что $BC < CA < AB$. На сторонах AC и AB выбраны точки K и L соответственно так, что $AK = AL = BC$. Серединные перпендикуляры к CK и BL пересекают прямую BC в точках P и Q соответственно. Отрезки KP и LQ пересекаются в точке M. Докажите, что $CK + KM = BL + LM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В выпуклом шестиугольнике $AMBCND$ противоположные стороны попарно параллельны. Известно, что $\angle A = 140^\circ$ и $\angle B = 130^\circ$. Докажите, что $2MN \leqslant AB + BC + CD + AD$.

2. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых число $\frac{(x+y)(xy-1)}{xy+1}$ — простое.

3. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что существует множество из k различных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ для которых выполнено равенство

$$\frac{n_1-1}{n_1} \cdot \frac{n_2-1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n_k-1}{n_k} = \frac{72}{2021}.$$

4. Аня и Боря договорились показать Васе фокус. Вася должен положить 100 монет в ряд, как ему вздумается (каждая монета может лежать «орлом» или «решкой» вверх). После этого Боря добавляет в конец ряда 101 монету по своему усмотрению. Затем Вася, если хочет, может выбрать в ряду две соседние монеты, одна из которых лежит вверх «орлом», а другая — «решкой», и перевернуть каждую из них. После этого в комнату входит Аня, видит получившийся ряд из 201 монеты, и говорит, переворачивал ли Вася монеты и, если да, то какие. Как Ане и Боре заранее договориться, чтобы фокус точно удался?

5. Даны 100 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы для любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне или углу ячейках, их разность была не равна 1.

6. Пусть $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k = n$ — все делители натурального числа n. Оказалось, что $n = a_3^3 - a_2^3$. Чему может быть равно n?

7. Дима и Макар играют в карты. У них есть колода из 101 карты, на каждой карте написано число от 1 до 101, каждое число встречается ровно на одной карте. В начале игры Дима взял себе все карты с четными числами, а Макар — с нечетными. Каждый игрок сложил свои карты в стопку в произвольном порядке. На очередном ходу игроки открывают верхние карты в своих стопках, сравнивают числа на них, и тот, у кого число больше, забирает обе карты. Он кладет их в низ своей колоды, причем сначала кладет карту соперника, а под неё свою. Если у игрока заканчиваются карты, он проиграл. На десятом ходу были открыты карты 101 и 2. Докажите, что игра никогда не закончится.

8. Стороны в остроугольном треугольнике ABC таковы, что $BC < CA < AB$. На сторонах AC и AB выбраны точки K и L соответственно так, что $AK = AL = BC$. Серединные перпендикуляры к CK и BL пересекают прямую BC в точках P и Q соответственно. Отрезки KP и LQ пересекаются в точке M. Докажите, что $CK + KM = BL + LM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В выпуклом шестиугольнике $AMBCND$ противоположные стороны попарно параллельны. Известно, что $\angle A = 140^\circ$ и $\angle B = 130^\circ$. Докажите, что $2MN \leqslant AB + BC + CD + AD$.

2. Найдите все пары целых чисел x, y таких, что $2xy$ — точный квадрат, а число $x^2 + y^2$ — простое.

3. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что существует множество из k различных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$ для которых выполнено равенство

$$\frac{n_1 - 1}{n_1} \cdot \frac{n_2 - 1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \frac{n_k - 1}{n_k} = \frac{72}{2021}.$$

4. Аня и Боря договорились показать Васе фокус. Вася должен положить 3 монеты в ряд, как ему вздумается (каждая монета может лежать «орлом» или «решкой» вверх). После этого Боря добавляет в конец ряда 2 монеты по своему усмотрению. Затем Вася, если хочет, может выбрать в ряду две соседние монеты, одна из которых лежит вверх «орлом», а другая — «решкой», и перевернуть каждую из них. После этого в комнату входит Аня, видит получившийся ряд из 5 монет, и говорит, переворачивал ли Вася монеты и, если да, то какие. Как Ане и Боре заранее договориться, чтобы фокус точно удался?

5. Даны 100 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы для любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне ячейках, их разность была не равна 1.

6. Пусть $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k = n$ — все делители натурального числа n. Оказалось, что $n = a_3^3 - a_2^3$. Чему может быть равно n?

7. Дима и Макар играют в карты. У них есть колода из 101 карты, на каждой карте написано число от 1 до 101, каждое число встречается ровно на одной карте. В начале игры Дима взял себе все карты с четными числами, а Макар — с нечетными. Каждый игрок сложил свои карты в стопку в произвольном порядке. На очередном ходу игроки открывают верхние карты в своих стопках, сравнивают числа на них, и тот, у кого число больше, забирает обе карты. Он кладет их вниз своей колоды, причем сначала кладет карту соперника, а под неё свою. Если у игрока заканчиваются карты, он проиграл. На 10-м ходу были открыты карты 101 и 2. Докажите, что на трехсотом ходу не могут быть открыты карты 101 и 22.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CF и BE. На отрезке BE нашлась такая точка P, что $BP = AC$. На продолжении отрезка CF за точку F нашлась такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что $AP \perp AQ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Точка D — середина стороны BC треугольника ABC. Точки E и F на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $\angle EDF = 90^\circ$. Докажите, что $BE+CF > EF$.

2. Серёжа придумал два положительных не целых числа a и b. Затем он подсчитал четыре выражения: $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, $\dfrac{a}{b}$. Докажите, что хотя бы одно из получившихся чисел не целое.

3. Существует ли 27 различных натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{27}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{n_1-1}{n_1}\cdot\frac{n_2-1}{n_2}\cdot\ldots\cdot\frac{n_{27}-1}{n_{27}}=\frac{72}{2021}?$$

4. Аня и Боря договорились показать Васе фокус. Вася должен положить 3 монеты в ряд, как ему вздумается (каждая монета может лежать «орлом» или «решкой» вверх). После этого Боря добавляет в конец ряда 2 монеты по своему усмотрению. Затем Вася, если хочет, может выбрать в ряду две соседние монеты, одна из которых лежит вверх «орлом», а другая — «решкой», и перевернуть каждую из них. После этого в комнату входит Аня, видит получившийся ряд из 5 монет, и говорит, переворачивал ли Вася монеты и, если да, то какие. Как Ане и Боре заранее договориться, чтобы фокус точно удался?

5. Даны 36 различных чисел (не обязательно целых). Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 6×6 так, чтобы для любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне ячейках, их разность была не равна 1.

6. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение четырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

7. На плоскости отмечено 10 точек. Докажите, что существует не более 90 равнобедренных прямоугольных треугольников с вершинами в этих точках.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CF и BE. На отрезке BE нашлась такая точка P, что $BP = AC$. На продолжении отрезка CF за точку F нашлась такая точка Q, что $CQ = AB$. Докажите, что $AP \perp AQ$.