МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Можно ли выбрать в 1000-элементном множестве 444 трехэлементных подмножества так, чтобы объединение любых пяти выбранных подмножеств содержало не менее 12 элементов?

2. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x, y, меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x, а на второй — число y. При каком наименьшем M такое могло случиться?

3. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб каждым ходом прыгает на расстояние, равное длине блока, в котором он находится, причем направо из синей клетки и налево из красной. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. При каком наименьшем k можно закрасить k клеток полоски синим цветом, а остальные красным так, чтобы краб за несколько ходов мог добраться из самой левой клетки в самую правую?

4. Сережа записал на доску 4000 различных натуральных чисел. Дима каждую минуту проделывает следующую операцию: разбивает все числа на доске на пары так, чтобы в каждой паре числа были различны. В каждой паре два исходных числа стирает, а вместо них записывает на доску их сумму и их разность (всегда из большего вычитается меньшее). Ровно через трое суток на доске оказались записаны 4000 подряд идущих чисел. Докажите, что ни одно из них не совпадает с числами, которые были написаны на доске Сережей.

5. Назовём число *красивым* если оно имеет вид $133\ldots3$ (хотя бы одна тройка). Вера и Алиса играют в игру. Сначала Алиса выписывает на доску ненулевую цифру. Затем, начиная с Веры, они по очереди приписывают в конец уже имеющегося числа по одной цифре (теперь уже 0 можно приписывать). Игра продолжается, пока число на доске не станет 2022-значным. Вера выигрывает, если полученное число делится хотя бы на одно красивое число, иначе выигрывает Алиса. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

6. Числа от 1 до 100 выписали в ряд в некотором порядке. Натуральное число $k \leqslant 100$ называется *прекрасным*, если сумма первых k чисел в ряду равна k^2. Какое наибольшее количество прекрасных чисел может быть?

7. На доску 10×10 собирается приземлиться космический корабль. Вам известно, что корабль имеет форму прямоугольника 1×5 и приземлившись, займет в точности 5 клеток доски. Вы можете заранее поставить в некоторые клетки доски фарфоровые чашки (в каждую клетку можно ставить любое количество чашек). Когда корабль приземлится, он разобьет все чашки, которые находятся в клетках, на которые он приземлился. Вы не увидите, куда именно приземлится корабль, но по звуку сможете определить, сколько чашек разбилось. Какое наименьшее количество чашек можно поместить на доску, чтобы гарантированно определить хотя бы одну клетку, занятую кораблем?

8. Найдите четыре различных числа a, b, c и d, больших миллиона, таких, что: $a+bc$ делится на d, $b+cd$ делится на a, $c+da$ делится на b и $d+ab$ делится на c.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Среди 100 одинаковых по виду монет есть три фальшивые, весящие одинаково, но отличающиеся по весу от настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно найти десять настоящих монет?

2. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x, y, меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x, а на второй — число y. При каком наименьшем M такое могло случиться?

3. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб каждым ходом прыгает на расстояние, равное длине блока, в котором он находится, причем направо из синей клетки и налево из красной. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. Можно ли закрасить все клетки полоски так, чтобы все блоки имели длину не менее 100, и чтобы краб смог из какой-то клетки совершить путешествие, побывав на каждой клетке?

4. Сережа записал на доску 4000 различных натуральных чисел. Дима каждую минуту проделывает следующую операцию: разбивает все числа на доске на пары так, чтобы в каждой паре числа были различны. В каждой паре два исходных числа стирает, а вместо них записывает на доску их сумму и их разность (всегда из большего вычитается меньшее). Ровно через трое суток на доске оказались записаны 4000 подряд идущих чисел. Докажите, что ни одно из них не совпадает с числами, которые были написаны на доске Сережей.

5. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 1001 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 1001. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Числа от 1 до 100 переставили в некотором порядке. Натуральное число k называется *прекрасным*, если сумма первых k чисел этой перестановки равна $k^2 + k$. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могло одновременно оказаться прекрасными?

7. На доску 10×10 собирается приземлиться космический корабль. Вам известно, что корабль имеет форму прямоугольника 1×5 и приземлившись, займет в точности 5 клеток доски. Вы можете заранее поставить в некоторые клетки доски фарфоровые чашки (в каждую клетку можно ставить любое количество чашек). Когда корабль приземлится, он разобьет все чашки, которые находятся в клетках, на которые он приземлился. Вы не увидите, куда именно приземлится корабль, но по звуку сможете определить, сколько чашек разбилось. Какое наименьшее количество чашек можно поместить на доску, чтобы гарантированно определить хотя бы одну клетку, занятую кораблем?

8. Найдите все такие четверки натуральных чисел a, b, c, d, что одновременно выполнены три условия: $a + 100bc$ делится на cd, $b + 100cd$ делится на da, $c + 100da$ делится на ab.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Среди 120 одинаковых по виду монет две фальшивые, весящие одинаково, но отличающиеся по весу от настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно найти двадцать настоящих монет?

2. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x, y, меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x, а на второй — число y. При каком наименьшем M такое могло случиться?

3. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб каждым ходом прыгает на расстояние, равное длине блока, в котором он находится, причем направо из синей клетки и налево из красной. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. Можно ли закрасить все клетки полоски так, чтобы все блоки имели длину не менее 100, и чтобы краб смог из какой-то клетки совершить путешествие, побывав на каждой клетке?

4. Сережа записал на доску 4000 различных натуральных чисел. Дима каждую минуту проделывает следующую операцию: разбивает все числа на доске на пары так, чтобы в каждой паре числа были различны. В каждой паре два исходных числа стирает, а вместо них записывает на доску их сумму и их разность (всегда из большего вычитается меньшее). Ровно через трое суток на доске оказались записаны 4000 подряд идущих чисел. Докажите, что ни одно из них не совпадает с числами, которые были написаны на доске Сережей.

5. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 2022 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 2022. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Числа от 1 до 100 переставили в некотором порядке. Натуральное число k называется *прекрасным*, если сумма первых k чисел этой перестановки равна $k^2 + k$. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могло одновременно оказаться прекрасными?

7. На доску 10×10 собирается приземлиться космический корабль. Вам известно, что корабль имеет форму прямоугольника 1×5 и приземлившись, займет в точности 5 клеток доски. Вы можете заранее поставить в некоторые клетки доски фарфоровые чашки (в каждую клетку можно ставить любое количество чашек). Когда корабль приземлится, он разобьет все чашки, которые находятся в клетках, на которые он приземлился. Вы не увидите, куда именно приземлится корабль, но по звуку сможете определить, сколько чашек разбилось. Какое наименьшее количество чашек можно поместить на доску, чтобы гарантированно определить хотя бы одну клетку, занятую кораблем?

8. Найдите все такие четверки натуральных чисел a, b, c, d, что одновременно выполнены четыре условия: $a + 2022bc$ делится на cd, $b + 2022cd$ делится на da, $c + 2022da$ делится на ab, $d + 2022ab$ делится на bc.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Среди 33 одинаковых по виду монет две фальшивые, весящие одинаково, но отличающиеся по весу от настоящих. Можно ли меньше, чем за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

2. Дистанция гонки Формула 1 состоит из 20 одинаковых кругов. Пилот проходит каждый следующий круг на 1 секунду дольше предыдущего, в связи с износом резины шин. В конце каждого круга пилот может поменять резину на новую. На смену резины тратится 20 секунд, но после смены пилот проходит очередной круг за то же время, что и самый первый круг. Сколько раз надо поменять резину, чтобы пройти дистанцию за наименьшее время?

3. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб каждым ходом прыгает на расстояние, равное длине блока, в котором он находится, причем направо из синей клетки и налево из красной. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. Можно ли закрасить все клетки полоски так, чтобы краб из какой-то клетки совершил путешествие, побывав на каждой клетке?

4. Найдите сумму цифр десятичной записи произведения $33\ldots3 \times 66\ldots6$, если каждый сомножитель состоит из 100 одинаковых цифр.

5. Назовём расстановку 100 ладей на доске 100×100 *правильной*, если никакие две ладьи не бьют друг друга. Существуют ли две различные правильные расстановки, одна из которых получается из другой одновременным перемещением всех ладей ходом коня?

6. В стране 1000 городов, некоторые из них соединены дорогами (между каждыми двумя городами не более одной дороги). Между любыми пятью городами есть не более трех дорог. Каково наибольшее возможное количество дорог в стране?

7. На доску 10×10 собирается приземлиться космический корабль. Вам известно, что корабль имеет форму прямоугольника 1×5 и приземлившись, займет в точности 5 клеток доски. Вы можете заранее поставить в некоторые клетки доски фарфоровые чашки (в каждую клетку можно ставить любое количество чашек). Когда корабль приземлится, он разобьет все чашки, которые находятся в клетках, на которые он приземлился. Вы не увидите, куда именно приземлится корабль, но по звуку сможете определить, сколько чашек разбилось. Какое наименьшее количество чашек можно поместить на доску, чтобы гарантированно определить хотя бы одну клетку, занятую кораблем?

8. В десятизначном числе, делящемся на 90, цифры заменили буквами, одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Получилось слово ХРИЗАНТЕМА. Из какого количества чисел такое могло произойти?