КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 07.11.2022
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА. РЕШЕНИЯ

1. Даны различные ненулевые цифры a, b, c, d. Известно, что ни одно из чисел $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dabc}$ не имеет простых делителей, меньших 10. Чему может быть равна сумма этих четырёх четырёхзначных чисел?

Ответ. 22220. **Решение.** Заметим, что ни одна из цифр a, b, c, d не может быть четной или равняться 5, иначе число, которое на нее оканчивается, будет делиться на 2 или 5 соответственно. Остается 4 варианта цифр: 1, 3, 7, 9. Так как a, b, c, d — различные, то это именно такая четверка цифр в некотором порядке. Теперь перепишем $\overline{abcd} = 10^3a + 10^2b + 10c + d$. Расписав аналогично остальные числа и перегруппировав слагаемые, получим

$$\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc} = (a+b+c+d)(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 20 \cdot 1111 = 22220.$$

2. На доске написано несколько различных неотрицательных чисел. Оказалось, что произведение любых двух выписанных чисел также есть на этой доске. Какое наибольшее количество чисел может быть написано?

Ответ. 4. **Решение.** *Пример:* 0, $\frac{1}{2}$, 1, 2.

Оценка. Допустим, что на интервале $(0;1)$ выбраны хотя бы два числа. Рассмотрим произведение двух наименьших — оно не может быть записано на доске, так как тоже принадлежит интервалу $(0;1)$ и меньше каждого выбранного там числа.

Если на интервале $(1;+\infty)$ выбраны хотя бы два числа, то рассмотрим произведение двух наибольших. Оно больше каждого выписанного числа, значит, не написано на доске.

В обоих случаях мы получили противоречие, поэтому выписано не больше одного числа из интервалов $(0;1)$ и $(1;+\infty)$, а помимо них может быть ещё максимум два числа: 0 и 1, то есть не больше четырёх чисел.

3. Два равных отрезка AB и CD пересекаются в точке P. Точка M — середина отрезка BD. Оказалось, что точка M равноудалена от точек A и C. Докажите, что $AP = CP$.

Решение. Из условия следует, что треугольники AMB и CMD равны по трём сторонам ($AB = CD$, $BM = MD$, $AM = CM$). Тогда в них равны соответственные углы $\angle CDM = \angle ABM$. Следовательно, в треугольнике BPD равны углы при основании, и он равнобедренный, т.е. $BP = DP$. Вычитая, получаем $AP = AB - BP = CD - DP = CP$.

4. Дан клетчатый квадрат 101×101. Внутри него выбирается квадрат 100×100. Внутри этого квадрата выбирается квадрат 99×99, и так далее, пока не будет выбран квадрат 1×1. Оказалось, что выбранный квадрат 1×1 совпадает с центральной клеткой исходного квадрата 101×101. Сколько существует таких последовательностей квадратов? Ответ не должен содержать знака многоточия.

Ответ. $\left(C_{100}^{50}\right)^2$. **Решение.** Будем следить за центром квадрата. При выборе меньшего квадрата две его границы остаются на месте, две — смещаются на одну клетку. Следовательно, центр смещается на полклетки влево-вверх, влево-вниз, вправо-вверх или вправо-вниз. За 100 операций центр должен вернуться в исходное положение, поэтому сделает по 50 передвижений влево и вправо (C_{100}^{50} способов) и по столько же перемещений вверх и вниз. Так как мы должны скомбинировать все подходящие способы передвигать квадрат по вертикали и по горизонтали, ответом будет $\left(C_{100}^{50}\right)^2$.

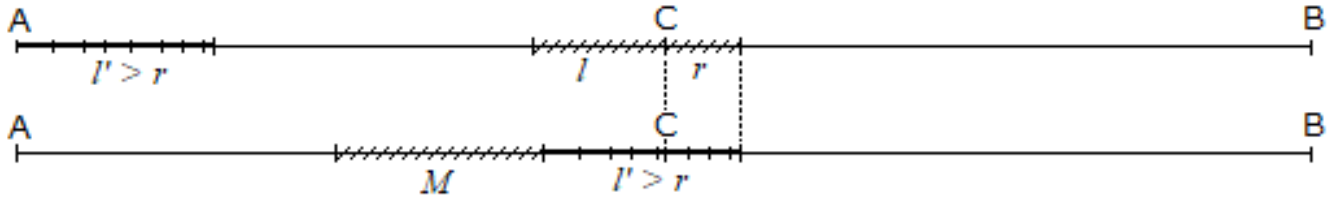
5. Три фирмы по производству фурнитуры могут выполнить заказ: фирма А — за 600 дней, фирма Б — за 400 дней, фирма С — за 200 дней. Оплата работы: фирма А — 2000 руб/день, фирма Б — 4000 руб/день, фирма С — 10000 руб/день. Заказ могут выполнять и несколько фирм одновременно, скорость работы каждой фирмы не меняется. Неполный рабочий день оплачивается по цене полного. За какое наименьшее число дней можно выполнить весь заказ, распределяя работу между фирмами, имея бюджет в 1,5 млн рублей?

Ответ. 215 дней. **Решение.** *Оценка.* Пусть мы оплатим работу фирм за a, b, c дней соответственно, а вся работа состоит из 1200 условных единиц (у.е.) изделий. Тогда фирмы за день делают 2, 3 и 6 у.е. изделий в день. Так как мы оплачиваем полный день, можно считать, что фирмы сделают не менее 1200 у.е., а заплатим мы не более 1500 тысяч рублей. Получаем два неравенства: $2a + 3b + 6c \geqslant 1200$, $2a + 4b + 10c \leqslant 1500$. Отсюда $b + 4c \leqslant 300$. Вычитая это из первого неравенства и деля на 2, получим $a + b + c \geqslant 450$. Наконец, из последних двух неравенств, $a \geqslant 150 + 3c$.

Из неравенства $b + 4c \leqslant 300$ получаем $c \leqslant 75$, и тогда a или b больше c, т.к. их сумма не меньше 450. Докажем, что не получится выполнить заказ быстрее, чем за 215 дней. Заметим, что при $c \leqslant 21$ выполнено $a + b \geqslant 429$, поэтому $\max(a; b) \geqslant 215$, а при $c \geqslant 22$ получим $a \geqslant 150 + 3 \cdot 22 = 216$. Оценка на 215 дней доказана. *Пример.* $a = b = 215$, $c = 21$. Произведено $215 \cdot (2 + 3) + 21 \cdot 6 = 1201$ у.е., потрачено $215 \cdot (2 + 4) + 21 \cdot 10 = 1500$ т. руб.

6. На столе стоит несколько гирь суммарного веса s. Назовём гирю *раздвоителем*, если после удаления её все остальные можно разбить на две группы, суммарный вес каждой из которых не больше $\frac{s}{2}$. Докажите, что вес самого большого раздвоителя больше суммы весов всех нераздвоителей.

Решение. Нарисуем отрезок AB длины s, пусть C — его середина. Гирю веса x будем изображать отрезком длины x. Тогда мы можем считать, что гири-отрезки выложены в ряд вплотную друг к другу и все вместе образуют разбиение отрезка AB. При таком взгляде на вещи гиря-отрезок Δ является раздвоителем, если можно так переставить «гири» в пределах отрезка AB, что точка C окажется на отрезке Δ.



Пусть M — наибольший раздвоитель, m — его длина. Допустим, что суммарная длина всех нераздвоителей больше либо равна m. Разложим гири так, чтобы точка C лежала на отрезке M, пусть $m = \ell + r$, где ℓ — длина $M \cap AC$, а r — длина $M \cap CB$. Пусть ℓ' — суммарная длина всех нераздвоителей, оказавшихся при этом раскладе на AC, r' — суммарная длина всех нераздвоителей, оказавшихся при этом раскладе на CB. В силу нашего предположения выполняется одно из неравенств $\ell' \geqslant r$ или $r' \geqslant l$ (или даже оба). Пусть для определенности выполняется неравенство $\ell' \geqslant r$. Мы можем считать, что все нераздвоители на отрезке AC расположены вплотную друг к другу и образуют отрезок λ длины ℓ'. Поменяем местами отрезки: λ поставим на место M, а остальные отрезки на AB и сам M сдвинем влево на ℓ' — в результате точка C окажется на отрезке λ (так как его длина ℓ' не меньше r). Но тогда точка C оказалась на одном отрезков-нераздвоителей (возможно, в качестве концевой точки), что невозможно, так как полученный расклад реализует этот отрезок как раздвоитель.

7. Докажите, что если нечётное число $p > 1$ — простое, то среди любых $\frac{p+1}{2}$ различных натуральных чисел можно найти два числа, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя.

Решение. Если все выбранные числа делятся на p, то, поделив их все на p нужное число раз, можно свести задачу к случаю, когда среди них есть число, не кратное p. Если среди выбранных чисел есть кратное p, скажем ap, и не кратное p, скажем b, то a делится на $d = \text{НОД}(ap, b)$. Следовательно, $(ap + b)/d \geqslant p$.

Итак, осталось разобрать случай, когда все числа не кратны p. Разобьем все ненулевые остатки по модулю p на пары противоположных: $(1, p-1)$, $(2, p-2)$, $\ldots$, $(\frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2})$. Всего таких пар $\frac{p-1}{2}$. Таким образом, среди выбранных найдутся два числа, a и b, остатки которых попадают в одну пару.

Если эти остатки различны, то сумма этих чисел кратна p, а НОД не кратен p. Тогда сумма этих чисел, разделённая на НОД, кратна p, а значит, не меньше p.

Если a и b дают одинаковые остатки при делении на p, то есть, $a = xp + r$ и $b = yp + r$, то число $a - b = (x - y)p$ делится на $\text{НОД}(a, b)$. (Здесь мы считаем, что $x > y$.) При этом p и $\text{НОД}(a, b)$ взаимно просты. Тогда $x - y$ делится на $\text{НОД}(a, b)$ и $x \geqslant x - y \geqslant \text{НОД}(a, b)$. Осталось заметить, что $(a + b)/\,\text{НОД}(a, b) \geqslant (x + y)p/x \geqslant p$.

8. В стране из 1000 городов некоторые города соединены дорогами, по которым можно двигаться в обе стороны. Известно, что в этой стране нет циклического маршрута. При каком наибольшем k всегда можно выбрать k городов так, чтобы каждый выбранный город был соединен не более чем с двумя из остальных выбранных?

Ответ. $k = 750$. **Решение.** *Пример.* Назовем *пауком* город, соединенный ровно с тремя другими, попарно не соединенными дорогами. Рассмотрим 250 пауков (всего 1000 городов). Если $k \geqslant 751$, то в одном из пауков выбраны все 4 города, что противоречит условию.

Оценка. Рассмотрим граф: вершины — города, рёбра — дороги. Если граф не связный, будем проводить по ребру между компонентами связности, пока он не станет связным. Ясно, что такая процедура не увеличит искомое число k и не добавит в граф циклы.

Итак, мы можем считать, что рассматриваемый граф — дерево. Индукцией по n докажем, что в дереве на n вершинах можно выбрать $k \geqslant 3n/4$ вершин так, чтобы выполнялось условие задачи. Такое множество вершин будем называть *хорошим*.

База: $n = 1, 2, 3, 4$ очевидна.

Переход: от всех меньших n к n. Подвесим дерево за вершину и рассмотрим вершину v самого нижнего уровня. Если у ее предка u не менее трёх потомков, то выкинем u и всех ее потомков.

В оставшемся дереве выберем хорошее множество и добавим всех потомков u. Полученное множество будет хорошим для исходного дерева, и в нём не менее $\frac{3}{4}(n-4)+3$ вершины.

Если у вершины u ровно 2 потомка v и w, то рассмотрим её предка t. Выкинем вершины u, v, w и t и, если понадобится, добавим рёбра для того, чтобы получилось дерево. В получившемся дереве выберем хорошее множество из не менее $\frac{3}{4}(n-4)$ вершин, после чего добавим к нему вершины u, v и w.

Итак, мы можем считать, что у любой вершины с нижнего уровня предок имеет степень ровно 2. Пусть v — вершина нижнего уровня, u — её предок, w — предок u. У всех потомков (не обязательно прямых) w степень 1 или 2. Если у w всего $k \geqslant 3$ потомков (не обязательно прямых). Выкинем w и всех её (не обязательно прямых) потомков. В оставшемся графе хорошее множество содержит не менее $3(n-k-1)/4$ вершин. Добавим в ним

всех k потомков w. Получим хорошее множество из не менее $3(n-k-1)/4+k \geqslant 3n/4$ вершин в исходном дереве.

Наконец, если $k \leqslant 2$, то единственные потомки w — это u и v. Пусть t — предок w. Выкинем вершины u, v, w и t. В получившемся графе выберем хорошее множество из не менее $\frac{3}{4}(n-4)$ вершин, после чего добавим к нему вершины u, v и w.

План второго решения. Будем доказывать по индукции, что ответ при $n = 4k + r$ равен $3k + r$, где $r = 0, 1, 2, 3$. Пример, доказывающий, что больше выбрать не получится, тот же, что и в предыдущем решении. *Базу* для $n = 1, 2, 3, 4$ проверяем руками.

Переход. Будем доказывать, что $3k + r$ вершин выбрать всегда можно. Для этого достаточно доказать, что в каждой компоненте связности получится выбрать хотя бы $3/4$ всех вершин. Подвесим граф и рассмотрим висячую вершину A с нижнего уровня. Если её предок B не имеет других висячих вершин, то откинем вершину A, для оставшегося графа применим предположение и добавим к выбранным вершинам A (степень B изначально не больше 2, поэтому с ней проблем не возникнет).

Если степень B равна 3, то есть помимо A есть ровно одна висячая вершина, то выкинем из графа B, две висячие вершины и прямого предка B. Для оставшегося графа применяем предположение индукции и добавляем вершины B и двух её потомков.

Если степень B не меньше 4, то есть у неё хотя бы 3 висячих потомка, то выкинем из графа B и всех её потомков (все они — висячие вершины в силу выбора самого низкого уровня), применим предположение индукции и выберем все висячие вершины, смежные с B.