МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО В ГРУППЕ

1. Найдите наибольшее натуральное k, для которого существует перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2022})$ натуральных чисел от 1 до 2022 такая, что хотя бы для k различных i с условием $1 \leqslant i \leqslant 2022$ число $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_i}{1 + 2 + \ldots + i}$ — целое, большее 1.

2. На какое наименьшее количество непересекающихся множеств можно разбить числа 1, 2, …, 2022 так, чтобы в каждом множестве либо все числа были попарно взаимно просты, либо все числа попарно имели общий множитель, больший 1.

3. При каких натуральных m и n, больших 2, в таблице $m \times n$ можно провести в некоторых (возможно, во всех) клетках по одной диагонали так, чтобы из каждой вершины квадратиков 1×1 выходило чётное число отрезков? Стороны клеток тоже считаются отрезками.

4. Паша, Оля и Саша играли в тетрис. Тот, кто побеждал в очередном раунде, получал одно очко, остальные — по 0. Побеждает тот, кто первым наберём 101 очко. Оле очень не везло: у неё всё ещё было 0 очков, когда один из остальных двух участников уже набрал 100. Но потом она собралась с силами и победила, при этом у Паши и Саши было по 100 очков. Сколько существует последовательностей побед, при которых такое могло произойти?

5. Точка M — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Отрезки MD и AC пересекаются в точке K, а отрезки AM и BK — в точке L. Найдите угол ALB.

6. Найдите четыре различных числа a, b, c и d, больших миллиона, таких, что: $a + bc$ делится на d, $b + cd$ делится на a, $c + da$ делится на b и $d + ab$ делится на c.

7. Когда хотя бы двое аборигенов племени Буянов, незнакомых между собой, собираются в одном месте, они обязательно дерутся, но если среди собравшихся есть знакомые, драться никто не будет. На берегу реки собралось несколько аборигенов. Они все смогли переправиться через реку с помощью двухместной лодки (на ней может переправляться один или два человека), и нигде — ни в лодке, ни на одном из берегов — никто не подрался. (Когда лодка пристает к берегу, из неё сначала все выходят на берег. На берегах они стоят кучей, разбежаться некуда.) $n \geqslant 6$ аборигенов переправились через реку без драк. На том берегу к ним присоединилось ещё несколько аборигенов. Докажите, что все аборигены могут переправиться обратно без драк.

8. Найдите все такие простые числа p, что число

$$3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$$

имеет не более 6 натуральных делителей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 3 МЕСТО В ГРУППЕ

1. Найдите наибольшее натуральное k, для которого существует перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2022})$ натуральных чисел от 1 до 2022 такая, что хотя бы для k различных i с условием $1 \leqslant i \leqslant 2022$ число $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_i}{1 + 2 + \ldots + i}$ — целое, большее 1.

2. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 1001 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 1001. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x, y, меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x, а на второй — число y. При каком наименьшем M такое могло случиться?

4. Паша, Оля и Саша играли в тетрис. Тот, кто побеждал в очередном раунде, получал одно очко, остальные — по 0. Побеждает тот, кто первым наберём 101 очко. Оле очень не везло: у неё всё ещё было 0 очков, когда один из остальных двух участников уже набрал 100. Но потом она собралась с силами и победила, при этом у Паши и Саши было по 100 очков. Сколько существует последовательностей побед, при которых такое могло произойти?

5. Точка M — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Отрезки MD и AC пересекаются в точке K, а отрезки AM и BK — в точке L. Найдите угол ALB.

6. Найдите четыре различных числа a, b, c и d, больших миллиона, таких, что: $a + bc$ делится на d, $b + cd$ делится на a, $c + da$ делится на b и $d + ab$ делится на c.

7. Когда хотя бы двое аборигенов племени Буянов, незнакомых между собой, собираются в одном месте, они обязательно дерутся, но если среди собравшихся есть знакомые, драться никто не будет. На берегу реки собралось несколько аборигенов. Они все смогли переправиться через реку с помощью двухместной лодки (на ней может переправляться один или два человека), и нигде — ни в лодке, ни на одном из берегов — никто не подрался. (Когда лодка пристает к берегу, из неё сначала все выходят на берег. На берегах они стоят кучей, разбежаться некуда.) $n \geqslant 6$ аборигенов переправились через реку без драк. На том берегу к ним присоединилось ещё несколько аборигенов. Докажите, что все аборигены могут переправиться обратно без драк.

8. Найдите все такие простые числа p, что число

$$3^p + 4^p + 5^p + 9^p - 98$$

имеет не более 6 натуральных делителей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите наибольшее натуральное k, для которого существует перестановка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2022})$ натуральных чисел от 1 до 2022 такая, что хотя бы для k различных i с условием $1 \leqslant i \leqslant 2022$ число $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_i}{1 + 2 + \ldots + i}$ — целое, большее 1.

2. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 1001 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 1001. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x, y, меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x, а на второй — число y. При каком наименьшем M такое могло случиться?

4. Паша, Оля и Саша играли в тетрис. Тот, кто побеждал в очередном раунде, получал одно очко, остальные — по 0. Побеждает тот, кто первым наберём 101 очко. Оле очень не везло: у неё всё ещё было 0 очков, когда один из остальных двух участников уже набрал 100. Но потом она собралась с силами и победила, при этом у Паши и Саши было по 100 очков. Сколько существует последовательностей побед, при которых такое могло произойти?

5. Точка M — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Отрезки MD и AC пересекаются в точке K, а отрезки AM и BK — в точке L. Найдите угол ALB.

6. Найдите все решения уравнения $-\dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{2} = \{x\}$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и наибольшим целым числом, не превосходящим x.

7. Когда хотя бы двое аборигенов племени Буянов, незнакомых между собой, собираются в одном месте, они обязательно дерутся, но если среди собравшихся есть знакомые, драться никто не будет. На берегу реки собралось несколько аборигенов. Они все смогли переправиться через реку с помощью двухместной лодки (на ней может переправляться один или два человека), и нигде — ни в лодке, ни на одном из берегов — никто не подрался. (Когда лодка пристает к берегу, из неё сначала все выходят на берег. На берегах они стоят кучей, разбежаться некуда.) Среди аборигенов был не знакомый ни с кем. Каково наименьшее число аборигенов?

8. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$\text{НОД}(a; b) + \text{НОД}(b; c) + \text{НОД}(a; c) = \frac{a + b + c}{2}.$$

Докажите, что хотя бы одно из трёх чисел делится на другое.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ — перестановка натуральных чисел от 1 до 20. Какое наибольшее количество среди 20 дробей

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_1+a_2}{1+2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{1+2+3}, \ldots, \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}}{1+2+3\ldots+20}$$

могут оказаться целыми числами, большими 1?

2. У Нади есть M карточек. На каждой стороне каждой карточки Надя написала натуральное число, меньшее 1000. Оказалось, что для любых двух различных натуральных чисел x, y, меньших 1000, можно предъявить две карточки, что на одной из них написано число x, а на второй — число y. При каком наименьшем M такое могло случиться?

3. Паша, Оля и Саша играли в тетрис. Тот, кто побеждал в очередном раунде, получал одно очко, остальные — по 0. Побеждает тот, кто первым наберём 101 очко. Оле очень не везло: у неё всё ещё было 0 очков, когда Саша уже набрал 100. Но потом она собралась с силами и победила, при этом у Паши и Саши было по 100 очков. Сколько существует последовательностей побед, при которых такое могло произойти?

4. Найдите четыре различных числа a, b, c и d, больших миллиона, таких, что: $a + bc$ делится на d, $b + cd$ делится на a, $c + da$ делится на b и $d + ab$ делится на c.

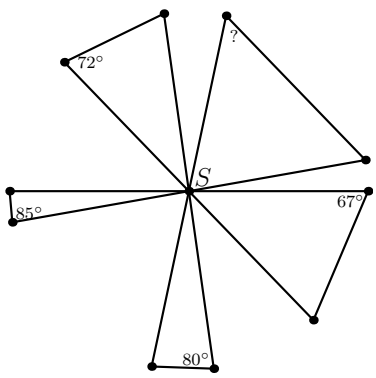
5. Когда хотя бы двое аборигенов племени Буянов, незнакомых между собой, собираются в одном месте, они обязательно дерутся, но если среди собравшихся есть знакомые, драться никто не будет. На берегу реки собралось несколько аборигенов. Они все смогли переправиться через реку с помощью двухместной лодки (на ней может переправляться один или два человека), и нигде — ни в лодке, ни на одном из берегов — никто не подрался. (Когда лодка пристает к берегу, из неё сначала все выходят на берег. На берегах они стоят кучей, разбежаться некуда.) Среди аборигенов был не знакомый ни с кем. Каково наименьшее число аборигенов?

6. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$\text{НОД}(a;b) + \text{НОД}(b;c) + \text{НОД}(a;c) = \frac{a+b+c}{2}.$$

Докажите, что хотя бы одно из трёх чисел делится на другое.

7. Крылья старой ветряной мельницы образованы пятью равными отрезками, середины которых совпадают с точкой S. Четыре угла даны на рисунке ($72°$, $85°$, $80°$, $67°$). Найдите величину угла, отмеченного вопросительным знаком.



8. Среди 120 одинаковых по виду монет две фальшивые, весящие одинаково, но отличающиеся по весу от настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно найти двадцать настоящих монет?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ — перестановка натуральных чисел от 1 до 10. Какое наибольшее количество среди 10 дробей

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_1+a_2}{1+2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{1+2+3}, \ldots, \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{10}}{1+2+3\ldots+10}$$

могут оказаться целыми числами, большими 1?

2. У пяти белок было 2022 ореха. 1 января они притащили еще 2 ореха, 2 января — 4 ореха, 3 января — 6 орехов, и далее пополняли запас каждый день на 2 ореха больше, чем в предыдущий день. Но однажды белки поссорились и захотели поделить запас орехов поровну. В какие летние дни они смогут это сделать?

3. Павлин и Воробей играют в игру. Перед ними ряд из 2022 единиц. За один ход Павлин в правом конце ряда может приписать цифру 1 или цифру 2. Воробей же может стереть одну или две самые левые цифры. Если в результате игры все цифры сотрёт Воробей, то игра оканчивается вничью. Проигрывает же тот, кто получит число, делящееся на 3, или число, которое было написано ранее. Поддаваться друг другу никто не желает. Кто победит при правильной игре?

4. Клетчатый прямоугольник 5×6 разрезали на прямоугольники 2×3 и уголки из трёх клеток так, что никакие два уголка не образуют прямоугольник 2×3. Какое наименьшее число прямоугольников 2×3 может быть использовано?

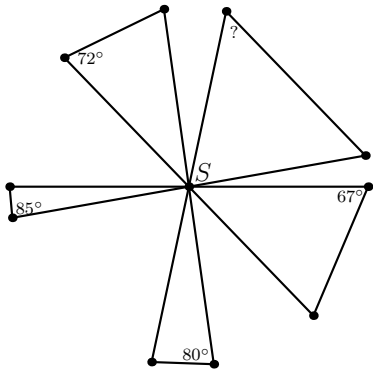
5. Вдоль кольцевой дороги стоят 10 солдат. Командир может скомандовать двум солдатам сдвинуться на расстояние d, одному — по часовой стрелке, другому — против. Расстояние d может меняться с каждым приказом. Докажите, что не более, чем за 20 приказов командир может расставить солдат равномерно, т.е. так, чтобы расстояния между любыми двумя соседними солдатами были равны.

6. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$\text{НОД}(a;b) + \text{НОД}(b;c) + \text{НОД}(a;c) = \frac{a+b+c}{2}.$$

Докажите, что хотя бы одно из трёх чисел делится на другое.

7. Крылья старой ветряной мельницы образованы пятью равными отрезками, середины которых совпадают с точкой S. Четыре угла даны на рисунке ($72°$, $85°$, $80°$, $67°$). Найдите величину угла, отмеченного вопросительным знаком.



8. Среди 120 одинаковых по виду монет две фальшивые, весящие одинаково, но отличающиеся по весу от настоящих. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно найти двадцать настоящих монет?