МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 9.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. По окружности расположено 2022 кочки. Серёжа покрасил все кочки в n цветов и посадил на какие-то n из этих кочек по одной лягушке. После этого, каждую секунду все лягушки одновременно перепрыгивают со своей кочки на следующую по часовой стрелке. При каких n Серёжа мог так покрасить кочки и рассадить лягушек, чтобы в любой момент времени лягушки сидели на кочках разных цветов?

2. Дима написал в своем блокноте 5 различных неотрицательных чисел, а Оля тоже написала в своем блокноте 5 различных неотрицательных чисел (числа не обязательно целые). Затем каждый из них выписал на свою бумажку 10 чисел, получающиеся перемножением всех пар разных чисел из своего блокнота. Оказалось, что на бумажках у Димы и Оли написаны одинаковые наборы чисел. Верно ли, что в их блокнотах тоже были написаны одинаковые наборы чисел?

3. Луиза записала натуральное число, не содержащее нулей, но содержащее как минимум две разные цифры. Затем она также выписала все числа, которые могут быть получены путем перестановки цифр исходного числа. Какое максимальное значение может иметь наибольший общий делитель всех выписанных Луизой чисел (включая исходное)?

4. Петя и Вася играют в игру. Изначально по кругу расставлено 1000 точек. Ребята по очереди (начинает Петя) соединяют точки отрезками своего цвета: Петя синим, Вася красным (отрезки могут пересекаться). Если две точки уже соединены отрезком, больше их соединять отрезком нельзя. Петя выигрывает, если появятся такие пять точек, что все десять соединяющих их отрезков синие. Может ли Вася ему помешать?

5. Назовём *полоской* клетчатый прямоугольник, хотя бы одна из сторон которого равна 1. Мы хотим разбить клетки квадрата 99×99 на m полосок так, чтобы никакие две из этих m полосок не имели общей границы длины более 1. Полоски могут быть разных длин. Определите наименьшее m, для которого это возможно.

6. Найдите наименьшее натуральное k такое, что из любых k натуральных чисел можно выбрать четное число чисел, сумма которых делится на 2022.

7. В математическом кружке каждый участник либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет, либо хитрец. Хитрец говорит правду, если предыдущий человек сказал правду; врет, если предыдущий человек соврал; говорит, что угодно, если перед ним никто не говорит. Четыре члена кружка собрались вместе и последовательно сделали следующие утверждения:

1. Аня: «Среди нас ровно два лжеца».
2. Боря: «Аня — хитрец».
3. Ваня: «Если я уйду, то среди оставшихся рыцарей будет больше, чем лжецов».
4. Аня: «Если Ваня уйдет, то среди оставшихся лжецов будет не меньше, чем рыцарей».
5. Гоша: «Один плюс один равно три».

Определите, кем является каждый из ребят. Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

8. На доске написаны три числа: 900, 462 и 280. Можно делать следующие операции в произвольном порядке:

1. добавить на доску число, равное сумме или разности двух уже написанных;
2. добавить на доску число, равное половине какого-то из написанных чётных чисел;
3. добавить на доску число, кратное какому-нибудь из чисел на доске.

При каком наименьшем k можно написать на доске число 1, сделав k операций первого типа (и сколько угодно операций двух других типов)?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 9.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. По окружности расположено 100 кочек. Серёжа покрасил все кочки в 30 цветов и посадил на какие-то 30 из этих кочек по одной лягушке. После этого, каждую секунду все лягушки одновременно перепрыгивают со своей кочки на следующую по часовой стрелке. Мог ли Серёжа так покрасить кочки и рассадить лягушек, чтобы в любой момент времени лягушки сидели на кочках разных цветов?

2. Дима написал в своем блокноте 5 различных неотрицательных чисел, а Оля тоже написала в своем блокноте 5 различных неотрицательных чисел (числа не обязательно целые). Затем каждый из них выписал на свою бумажку 10 чисел, получающиеся перемножением всех пар разных чисел из своего блокнота. Оказалось, что на бумажках у Димы и Оли написаны одинаковые наборы чисел. Верно ли, что в их блокнотах тоже были написаны одинаковые наборы чисел?

3. Луиза записала натуральное число, не содержащее нулей, но содержащее как минимум две разные цифры. Затем она также выписала все числа, которые могут быть получены путем перестановки цифр исходного числа. Какое максимальное значение может иметь наибольший общий делитель всех выписанных Луизой чисел (включая исходное)?

4. В стране 100 городов, никакие два из которых изначально не связаны авиалинией. Две авиакомпании Эль-Аль и Эль-Бель по очереди открывают новые двусторонние рейсы между какими-то двумя городами, ранее не связанными авиалинией (начинает Эль-Аль). В компании Эль-Аль хотят связать какие-нибудь семь городов круговым маршрутом, состоящим из рейсов их компании, и не проходящим ни по одному городу дважды. Может ли Эль-Бель этому помешать?

5. Назовём *полоской* клетчатый прямоугольник, хотя бы одна из сторон которого равна 1. Можно ли разбить клетки квадрата 11×11 на 53 полоски так, чтобы никакие две из этих 53 полосок не имели общей границы длины более 1? Полоски могут быть разных длин.

6. В центре психологической разгрузки работают котики, собачки, зайчата и лошадки. Зайчат вдвое больше, чем лошадок. Собачки и зайчата составляют четверть от общего числа зверят, а лошадки и собачки — пятую часть. Докажите, что число котиков делится на 7.

7. В математическом кружке каждый участник либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет, либо хитрец. Хитрец говорит правду, если предыдущий человек сказал правду; врет, если предыдущий человек соврал; говорит, что угодно, если перед ним никто не говорит. Четыре члена кружка собрались вместе и последовательно сделали следующие утверждения:

1. Аня: «Среди нас ровно два лжеца».
2. Боря: «Аня — хитрец».
3. Ваня: «Если я уйду, то среди оставшихся рыцарей будет больше, чем лжецов».
4. Аня: «Если Ваня уйдет, то среди оставшихся лжецов будет не меньше, чем рыцарей».
5. Гоша: «Один плюс один равно три».

Определите, кем является каждый из ребят. Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

8. На доске написаны три числа: 900, 462 и 280. Можно делать следующие операции в произвольном порядке:

1. добавить на доску число, равное сумме или разности двух уже написанных;
2. добавить на доску число, равное половине какого-то из написанных чётных чисел;
3. добавить на доску число, кратное какому-нибудь из чисел на доске.

При каком наименьшем k можно написать на доске число 1, сделав k операций первого типа (и сколько угодно операций двух других типов)?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 9.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. По окружности расположено 100 кочек. Серёжа покрасил все кочки в 30 цветов и посадил на какие-то 30 из этих кочек по одной лягушке. После этого, каждую секунду все лягушки одновременно перепрыгивают со своей кочки на следующую по часовой стрелке. Мог ли Серёжа так покрасить кочки и рассадить лягушек, чтобы в любой момент времени лягушки сидели на кочках разных цветов?

2. Дима написал себе в блокнот 5 различных целых чисел, а Оля в свой блокнот тоже 5 различных целых чисел. Затем каждый из них выписал на свою бумажку 10 чисел, получающиеся перемножением всех пар разных чисел из своего блокнота. Оказалось, что на бумажках у Димы и Оли написаны одинаковые наборы чисел. Верно ли, что в их блокнотах тоже были написаны одинаковые наборы чисел?

3. Луиза записала натуральное число, состоящее только из троек и семёрок (обе цифры присутствуют). Затем она выписала все числа, полученные перестановкой цифр исходного числа. Какое максимальное значение может иметь наибольший общий делитель всех выписанных Луизой чисел?

4. В стране 100 городов, никакие два из которых изначально не связаны авиалинией. Две авиакомпании Эль-Аль и Эль-Бель по очереди открывают новые двусторонние рейсы между какими-то двумя городами, ранее не связанными авиалинией (начинает Эль-Аль). В компании Эль-Аль хотят связать какие-нибудь семь городов круговым маршрутом, состоящим из рейсов их компании, и не проходящим ни по одному городу дважды. Может ли Эль-Бель этому помешать?

5. Назовём *полоской* клетчатый прямоугольник, хотя бы одна из сторон которого равна 1. Можно ли разбить клетки квадрата 11×11 на 53 полоски так, чтобы никакие две из этих 53 полосок не имели общей границы длины более 1? Полоски могут быть разных длин.

6. В центре психологической разгрузки работают котики, собачки, зайчата и лошадки. Зайчат вдвое больше, чем лошадок. Собачки и зайчата составляют четверть от общего числа зверят, а лошадки и собачки — пятую часть. Докажите, что число котиков делится на 7.

7. В математическом кружке каждый участник либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет, либо хитрец. Хитрец говорит правду, если предыдущий человек сказал правду; врет, если предыдущий человек соврал; говорит, что угодно, если перед ним никто не говорит. Четыре члена кружка собрались вместе и последовательно сделали следующие утверждения:

1. Аня: «Среди нас ровно два лжеца».
2. Боря: «Аня — хитрец».
3. Ваня: «Если я уйду, то среди оставшихся рыцарей будет больше, чем лжецов».
4. Аня: «Если Ваня уйдет, то среди оставшихся лжецов будет не меньше, чем рыцарей».
5. Гоша: «Один плюс один равно три».

Определите, кем является каждый из ребят. Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

8. На доске написаны два числа: 224 и 176. Можно делать следующие операции в произвольном порядке:

1. добавить на доску число, равное сумме или разности двух уже написанных;
2. добавить на доску число, равное половине какого-то из написанных чётных чисел;
3. добавить на доску число, кратное какому-нибудь из чисел на доске.

При каком наименьшем k можно написать на доске число 1, сделав k операций первого типа (и сколько угодно операций двух других типов)?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 9.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. По окружности расположено 100 кочек. Серёжа покрасил все кочки в 30 цветов и посадил на какие-то 30 из этих кочек по одной лягушке. После этого, каждую секунду все лягушки одновременно перепрыгивают со своей кочки на следующую по часовой стрелке. Мог ли Серёжа так покрасить кочки и рассадить лягушек, чтобы в любой момент времени лягушки сидели на кочках разных цветов?

2. Дима написал на доске натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_7$. Затем он выписал на бумажку в порядке возрастания все суммы, получающиеся сложением трёх разных чисел с доски (все эти суммы оказались различны), и отдал эту бумажку Наде, а числа с доски стёр. Оказалось выписано 35 чисел $b_1 < b_2 < \ldots < b_{35}$. Может ли Надя по числам $b_1, b_2, \ldots, b_{35}$ определить, чему равна сумма $a_3 + a_4 + a_5$?

3. Луиза записала все натуральные числа, состоящие из одиннадцати троек и трёх семёрок. Найдите наибольший общий делитель всех выписанных Луизой чисел.

4. В стране 100 городов, никакие два из которых изначально не связаны авиалинией. Две авиакомпании Эль-Аль и Эль-Бель по очереди открывают новые двусторонние рейсы между какими-то двумя городами, ранее не связанными авиалинией (начинает Эль-Аль). В компании Эль-Аль хотят связать какие-нибудь семь городов круговым маршрутом, состоящим из рейсов их компании, и не проходящим ни по одному городу дважды. Может ли Эль-Бель этому помешать?

5. Полоской назовём клетчатый прямоугольник (возможно, квадрат), одна из сторон которого равна 1. Мы хотим разбить клетки прямоугольника 6×7 на 20 полосок так, чтобы никакие две из этих полосок не имели общей границы длины более 1. Полоски могут быть разных длин. Возможно ли это сделать?

6. В центре психологической разгрузки работают котики, собачки, зайчата и лошадки. Зайчат вдвое больше, чем лошадок. Собачки и зайчата составляют четверть от общего числа зверят, а лошадки и собачки — пятую часть. Докажите, что число котиков делится на 7.

7. В математическом кружке каждый участник либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет, либо хитрец. Хитрец говорит правду, если предыдущий человек сказал правду; врет, если предыдущий человек соврал; говорит, что угодно, если перед ним никто не говорит. Четыре члена кружка собрались вместе и последовательно сделали следующие утверждения:

1. Аня: «Среди нас ровно два лжеца».
2. Боря: «Аня — хитрец».
3. Ваня: «Если я уйду, то среди оставшихся рыцарей будет больше, чем лжецов».
4. Аня: «Если Ваня уйдет, то среди оставшихся лжецов будет не меньше, чем рыцарей».
5. Гоша: «Один плюс один равно три».

Определите, кем является каждый из ребят. Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

8. В написании первых 18 числительных (один, два, три, ...) используются 18 различных букв русского алфавита. Можно ли выбрать 18 различных букв — по одной из каждого числительного?