МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На медиане AD треугольника ABC отмечена точка E. Точка F — проекция точки E на сторону BC. На отрезке EF отмечена точка M. Точки N и P — проекции точки M на прямые AC и AB соответственно. Докажите, что биссектрисы углов PMN и PEN параллельны.

2. Назовём *полоской* клетчатый прямоугольник, хотя бы одна из сторон которого равна 1. Мы хотим разбить клетки квадрата 99×99 на m непересекающихся полосок так, чтобы любые две из этих m полосок имели общую границу длины не более 1. Полоски могут быть разных длин. Определите наименьшее m, для которого это возможно.

3. Даны различные простые числа p и q, а также положительное вещественное число $\alpha < 3$. Докажите, что для некоторого натурального k число $[k\alpha]$ меньше $2pq$ и делится хотя бы на одно из чисел p и q.

4. Пусть M, N, K — середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC, соответственно. На отрезке MN выбрана точка P, а на отрезке NK — точка Q. Возможно ли одновременное выполнение соотношений $AP+AQ = BC$ и $BQ+CP = AB+AC$?

5. Произведение положительных чисел a, b, c, d равно 1. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant \max\left(a + b + c + d; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

6. Найдите все бесконечные строго возрастающие последовательности a_1, a_2, $\ldots$ натуральных чисел, в которых ни один член не равен сумме двух других (или удвоенному другому), и $a_k = 2k - 1$ для бесконечно многих k.

7. На доске 21×42 на некоторые клетки поставлены камни. На доску ставится робот, который умеет ходить в каждом из четырёх направлений. Однако менять направление робот может, только уперевшись в границу доски или в камень. Какое наименьшее количество камней надо поставить на доску, чтобы робот, стартовав с некоторой клетки в определенном направлении, мог обойти все клетки доски, не занятые камнями? В одной и той же клетке робот может побывать несколько раз.

8. На столе лежали несколько (больше трёх) карточек, на которых были написаны различные числа. Карточки переложили на те же места в другом порядке (то есть хотя бы одна изменила своё положение). Оказалось, что для каждых двух мест произведение чисел, лежавших на этих местах, не уменьшилось. Докажите, что сумма чисел на всех карточках равна нулю.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На продолжениях стороны AB правильного пятиугольника $ABCDE$ за точки A и B расположены точки F и G соответственно так, что $AG = BF = AC$. Докажите, что площадь треугольника FGD равна площади пятиугольника $ABCDE$.

2. Назовём *полоской* клетчатый прямоугольник, хотя бы одна из сторон которого равна 1. Мы хотим разбить клетки квадрата 99×99 на m непересекающихся полосок так, чтобы любые две из этих m полосок имели общую границу длины не более 1. Полоски могут быть разных длин. Определите наименьшее m, для которого это возможно.

3. Найдите все натуральные n, для которых уравнение $m + 2S(m) = n$ имеет хотя бы одно натуральное решение. Здесь $S(m)$ обозначает сумму цифр числа m.

4. Пусть M, N, K — середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC, соответственно. На отрезке MN выбрана точка P, а на отрезке NK — точка Q. Возможно ли одновременное выполнение соотношений $AP+AQ = BC$ и $BQ+CP = AB+AC$?

5. Произведение положительных чисел a, b, c, d равно 1. Докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant \max\left(a + b + c + d; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

6. Найдите все бесконечные строго возрастающие последовательности a_1, a_2, $\ldots$ натуральных чисел, в которых ни один член не равен сумме двух других (или удвоенному другому), и $a_k = 2k - 1$ для бесконечно многих k.

7. Нижняя строка таблицы 2×13 заполнена фишками, на которых в порядке возрастания слева направо написаны числа 1, 2, $\ldots$, 13. За один ход можно переместить фишку в соседнюю по стороне свободную клетку. За какое наименьшее количество ходов можно расположить фишки в тех же клетках в противоположном порядке?

8. На столе лежали несколько (больше трёх) карточек, на которых были написаны различные числа. Карточки переложили на те же места в другом порядке (то есть хотя бы одна изменила своё положение). Оказалось, что для каждых двух мест произведение чисел, лежавших на этих местах, не уменьшилось. Докажите, что сумма чисел на всех карточках равна нулю.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На продолжениях стороны AB правильного пятиугольника $ABCDE$ за точки A и B расположены точки F и G соответственно так, что $AG = BF = AC$. Докажите, что площадь треугольника FGD равна площади пятиугольника $ABCDE$.

2. На доске 99×99 расположены 2500 непересекающихся прямоугольников 1×3. Докажите, что какие-то два из них соприкасаются по отрезку длины не меньше 2.

3. Найдите все натуральные n, для которых уравнение $m + 2S(m) = n$ имеет хотя бы одно натуральное решение. Здесь $S(m)$ обозначает сумму цифр числа m.

4. На прямой отмечены точки A, B, C именно в таком порядке. Точки D и E в одной полуплоскости относительно прямой AB таковы, что ABD и BCE — равносторонние треугольники. Отрезки AE и BD пересекаются в точке G, а отрезки CD и BE — в точке H. Докажите, что $GH \parallel AC$.

5. По кругу по часовой стрелке выписаны действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}. Известно, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ выполняется равенство:

$$5a_{i+2} = 4a_{i+1} - 3a_i$$

($a_{102} = a_2$, $a_{101} = a_1$). Докажите, что все числа равны нулю.

6. В строго возрастающей последовательности натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$ ни один член не равен сумме двух других (или удвоенному другому), и $a_{1012} = 2023$. Докажите, что $a_1 = 1$ или $a_1 = 1012$.

7. Нижняя строка таблицы 2×13 заполнена фишками, на которых в порядке возрастания слева направо написаны числа 1, 2, $\ldots$, 13. За один ход можно переместить фишку в соседнюю по стороне свободную клетку. За какое наименьшее количество ходов можно расположить фишки в тех же клетках в противоположном порядке?

8. По окружности расположено 2022 кочки. Серёжа покрасил все кочки в n цветов и посадил на какие-то n из этих кочек по одной лягушке. После этого, каждую секунду все лягушки одновременно перепрыгивают со своей кочки на следующую по часовой стрелке. При каких n Серёжа мог так покрасить кочки и рассадить лягушек, чтобы в любой момент времени лягушки сидели на кочках разных цветов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На плоскости отмечены четыре точки A, B, C и D, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Может ли так быть, что в каждом из четырёх треугольников ABC, ABD, ACD и BCD все углы больше $45°$?

2. *Полоской* назовём клетчатый прямоугольник (возможно, квадрат), одна из сторон которого равна 1. Мы хотим разбить клетки прямоугольника 6×7 на 20 непересекающихся полосок так, чтобы никакие две из них не имели общего отрезка границы длины больше 1. Полоски могут быть разных длин. Возможно ли это сделать?

3. Найдите все натуральные числа $n > 1$, обладающие таким свойством:

> если натуральное число x взаимно просто с n, то и число $x + 101$ тоже взаимно просто с n.

4. На прямой отмечены точки A, B, C именно в таком порядке. Точки D и E в одной полуплоскости относительно прямой AB таковы, что ABD и BCE — равносторонние треугольники. Отрезки AE и BD пересекаются в точке G, а отрезки CD и BE — в точке H. Докажите, что $GH \parallel AC$.

5. По кругу по часовой стрелке выписаны действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}. Известно, что для всех $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ выполняется равенство:

$$5a_{i+2} = 4a_{i+1} + 3a_i$$

($a_{102} = a_2$, $a_{101} = a_1$). Докажите, что все числа равны нулю.

6. Пусть a, b, c — попарно различные числа. Сколько разных чисел может быть среди чисел $a + 2b$, $a + 2c$, $b + 2a$, $b + 2c$, $c + 2a$, $c + 2b$?

7. Нижняя строка таблицы 2×13 заполнена фишками, на которых в порядке возрастания слева направо написаны числа 1, 2, $\ldots$, 13. За один ход можно переместить фишку в соседнюю по стороне свободную клетку. За какое наименьшее количество ходов можно расположить фишки в тех же клетках в противоположном порядке?

8. По окружности расположено 100 кочек. Серёжа покрасил все кочки в 30 цветов и посадил на какие-то 30 из этих кочек по одной лягушке. После этого, каждую секунду все лягушки одновременно перепрыгивают со своей кочки на следующую по часовой стрелке. Мог ли Серёжа так покрасить кочки и рассадить лягушек, чтобы в любой момент времени лягушки сидели на кочках разных цветов?