КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 07.11.2022
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Даны различные ненулевые цифры a, b, c, d. Известно, что ни одно из чисел $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dabc}$ не имеет простых делителей, меньших 10. Чему может быть равна сумма этих четырёх четырёхзначных чисел?

2. На доске написано несколько различных неотрицательных чисел. Оказалось, что произведение любых двух выписанных чисел также есть на этой доске. Какое наибольшее количество чисел может быть написано?

3. Два равных отрезка AB и CD пересекаются в точке P. Точка M — середина отрезка BD. Оказалось, что точка M равноудалена от точек A и C. Докажите, что $AP = CP$.

4. Дан клетчатый квадрат 101×101. Внутри него выбирается квадрат 100×100. Внутри этого квадрата выбирается квадрат 99×99, и так далее, пока не будет выбран квадрат 1×1. Оказалось, что выбранный квадрат 1×1 совпадает с центральной клеткой исходного квадрата 101×101. Сколько существует таких последовательностей квадратов? Ответ не должен содержать знака многоточия.

5. Три фирмы по производству фурнитуры могут выполнить заказ: фирма А — за 600 дней, фирма Б — за 400 дней, фирма С — за 200 дней. Оплата работы: фирма А — 2000 руб/день, фирма Б — 4000 руб/день, фирма С — 10000 руб/день. Заказ могут выполнять и несколько фирм одновременно, скорость работы каждой фирмы не меняется. Неполный рабочий день оплачивается по цене полного. За какое наименьшее число дней можно выполнить весь заказ, распределяя работу между фирмами, имея бюджет в 1,5 млн рублей?

6. На столе стоит несколько гирь суммарного веса s. Назовём гирю *раздвоителем*, если после удаления её все остальные можно разбить на две группы, суммарный вес каждой из которых не больше $\frac{s}{2}$. Докажите, что вес самого большого раздвоителя больше суммы весов всех нераздвоителей.

7. Докажите, что если нечётное число $p > 1$ — простое, то среди любых $\frac{p+1}{2}$ различных натуральных чисел можно найти два числа, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя.

8. В стране из 1000 городов некоторые города соединены дорогами, по которым можно двигаться в обе стороны. Известно, что в этой стране нет циклического маршрута. При каком наибольшем k всегда можно выбрать k городов так, чтобы каждый выбранный город был соединен не более чем с двумя из остальных выбранных?