МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 8.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральное число a назовем хорошим, если для любого натурального числа b такого, что a^a делится на b^b верно, что a делится на b. Может ли хорошее число оканчиваться на 0?

2. На столе стоят 30 гирь. Вес самой тяжелой гири не превосходит удвоенной суммы весов двух самых лёгких. Докажите, что гири можно разбить на 10 наборов из трёх штук так, чтобы веса любых двух наборов отличались не более, чем в два раза.

3. На доске 20×20 есть 400 единичных квадратов. Некоторые единичные отрезки, являющиеся сторонами этих квадратов, окрашены в синий цвет так, что у каждого единичного квадрата ровно одна сторона синяя. Найдите максимальное возможное количество синих единичных отрезков, являющихся сторонами квадратов.

4. Дима и Макар играют в карты. У них есть колода из 101 карты, на каждой карте написано число от 1 до 101, каждое число встречается ровно на одной карте. В начале игры Дима взял себе все карты с четными числами, а Макар — все карты с нечетными. Каждый игрок сложил свои карты в стопку в произвольном порядке. На очередном ходу игроки открывают верхние карты в своих стопках, сравнивают числа на них, и тот, у кого число больше, забирает себе обе карты. Он кладет их под низ своей колоды, причем сначала кладет карту соперника, а под неё свою. Если у кого-нибудь из игроков заканчиваются карты, игра заканчивается. На 10-м ходу были открыты карты 101 и 2. Докажите, что игра никогда не закончится.

5. В стране 25 городов, в том числе столица A и культурная столица B. Некоторые города соединены дорогами так, что из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого. Из каждого города, кроме A и B, выходит не более двух дорог. Известно, что в стране есть ровно 9 различных замкнутых маршрутов из трёх дорог и ровно 9 различных замкнутых маршрутов из четырёх дорог (два маршрута, проходящие по одним и тем же дорогам, считаются одинаковыми). Докажите, что есть дорога, соединяющая A и B.

6. Зритель кладет 2000 монет в ряд, как ему вздумается, так, чтобы каждая монета лежала «орлом» или «решкой» вверх. После этого в комнату входит ассистент фокусника, смотрит на этот ряд монет и добавляет в конец ряда 100 монет, как он захочет, так, чтобы каждая из них лежала «орлом» или «решкой». Затем зрителю разрешается взять две последовательные монеты в новом ряду из 2100 монет и поменять их местами (но не переворачивать их). После этого в комнату входит фокусник и видит получившийся ряд из 2100 монет. Ему нужно выбрать две последовательные монеты в увиденном ряду и поменять их местами. Фокус удался, если получившийся в итоге ряд будет таким же, как ряд до того, как зритель поменял местами монеты. Какую стратегию выбрать фокуснику и ассистенту чтобы фокус заведомо удался? (Фокусник и ассистент могут договориться о стратегии заранее.)

7. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение четырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

8. Для каких натуральных k существуют $3k$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма наименьших $2k$ из них равна сумме k остальных?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 8.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a, b и c таковы, что a^4 делится на bc^2, и b^3 делится на ac. Докажите, что ab делится на c.

2. На столе стоят 30 гирь. Вес самой тяжелой гири не превосходит удвоенной суммы весов двух самых лёгких. Докажите, что гири можно разбить на 10 наборов из трёх штук так, чтобы веса любых двух наборов отличались не более, чем в два раза.

3. На доске 20×20 есть 400 единичных квадратов. Некоторые единичные отрезки, являющиеся сторонами этих квадратов, окрашены в синий цвет так, что у каждого единичного квадрата ровно одна сторона синяя. Найдите максимальное возможное количество синих единичных отрезков, являющихся сторонами квадратов.

4. Дима и Макар играют в карты. У них есть колода из 101 карты, на каждой карте написано число от 1 до 101, каждое число встречается ровно на одной карте. В начале игры Дима взял себе все карты с четными числами, а Макар — все карты с нечетными. Каждый игрок сложил свои карты в стопку в произвольном порядке. На очередном ходу игроки открывают верхние карты в своих стопках, сравнивают числа на них, и тот, у кого число больше, забирает себе обе карты. Он кладет их под низ своей колоды, причем сначала кладет карту соперника, а под неё свою. Если у кого-нибудь из игроков заканчиваются карты, игра заканчивается. На 10-м ходу были открыты карты 101 и 2. Докажите, что игра никогда не закончится.

5. В стране девять городов, в том числе столица A и культурная столица B. Некоторые города соединены дорогами, причем из каждого города, кроме A и B, выходит не более двух дорог. Известно, что в стране есть ровно пять различных замкнутых маршрутов из четырёх дорог (два маршрута, проходящие по одним и тем же дорогам, считаются одинаковыми). Докажите, что есть дорога, соединяющая A и B.

6. Зритель кладет 100 монет в ряд, как ему вздумается, так, чтобы каждая монета лежала «орлом» или «решкой» вверх. После этого в комнату входит ассистент фокусника, смотрит на этот ряд монет и добавляет в конец ряда 101 монету, как он захочет, так, чтобы каждая из них лежала «орлом» или «решкой». Затем зрителю разрешается взять две последовательные монеты в новом ряду из 201 монеты и поменять их местами (но не переворачивать их). После этого в комнату входит фокусник и видит получившийся ряд из 201 монеты. Ему нужно выбрать две последовательные монеты в увиденном ряду и поменять их местами. Фокус удался, если получившийся в итоге ряд будет таким же, как ряд до того, как зритель поменял местами монеты. Какую стратегию выбрать фокуснику и ассистенту чтобы фокус заведомо удался? (Фокусник и ассистент могут договориться о стратегии заранее.)

7. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение четырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

8. Для каких натуральных k существуют $3k$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма наименьших $2k$ из них равна сумме k остальных?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 8.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Каких пятизначных палиндромов больше — делящихся на 5 или делящихся на 9? (Палиндром — это число, одинаково читающееся слева направо и справа налево.)

2. На столе лежит 9 гирь, и вес самой тяжелой гири не превосходит удвоенной суммы весов двух самых лёгких. Докажите, что гири можно разделить на наборы из трёх штук так, что веса любых двух наборов отличаются не более, чем в два раза.

3. На доске 18×18 есть 324 единичных квадрата. Можно ли окрасить в синий цвет ровно 196 отрезков, являющихся сторонами этих квадратов, так, чтобы у каждого единичного квадрата ровно одна сторона оказалась синей?

4. Дима и Макар играют в карты. У них есть колода из 101 карты, на каждой карте написано число от 1 до 101, каждое число встречается ровно на одной карте. В начале игры Дима взял себе все карты с четными числами, а Макар — все карты с нечетными. Каждый игрок сложил свои карты в стопку в произвольном порядке. На очередном ходу игроки открывают верхние карты в своих стопках, сравнивают числа на них, и тот, у кого число больше, забирает себе обе карты. Он кладет их под низ своей колоды, причем сначала кладет карту соперника, а под неё свою. Если у кого-нибудь из игроков заканчиваются карты, игра заканчивается. На 10-м ходу были открыты карты 101 и 2. Докажите, что игра никогда не закончится.

5. В стране девять городов, в том числе столица A и культурная столица B. Некоторые города соединены дорогами, причем из каждого города, кроме A и B, выходит не более двух дорог. Известно, что в стране есть ровно пять различных замкнутых маршрутов из четырёх дорог (два маршрута, проходящие по одним и тем же дорогам, считаются одинаковыми). Докажите, что есть дорога, соединяющая A и B.

6. Зритель кладет три монеты в ряд, как ему вздумается, так, чтобы каждая монета лежала «орлом» или «решкой» вверх. После этого в комнату входит ассистент фокусника, смотрит на этот ряд монет и добавляет в конец ряда две монеты, как он захочет, так, чтобы каждая из них лежала «орлом» или «решкой». Затем зрителю разрешается взять две последовательные монеты в новом ряду из пяти монет и поменять их местами (но не переворачивать их). После этого в комнату входит фокусник и видит получившийся ряд из пяти монет. Ему нужно выбрать две последовательные монеты в увиденном ряду и поменять их местами. Фокус удался, если получившийся в итоге ряд будет таким же, как ряд до того, как зритель поменял местами монеты. Какую стратегию выбрать фокуснику и ассистенту чтобы фокус заведомо удался? (Фокусник и ассистент могут договориться о стратегии заранее.)

7. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение четырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

8. Для каких натуральных k существуют $3k$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма наименьших $2k$ из них равна сумме k остальных?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 8.11.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Каких пятизначных палиндромов больше — делящихся на 5 или делящихся на 9? (Палиндром — это число, одинаково читающееся слева направо и справа налево.)

2. В ребусе буквами зашифрованы цифры (одинаковыми буквами одинаковые цифры, разными — разные). ЕЛЬ + ЕЛЬ + ... + ЕЛЬ = ЕЛЬНИК. Каким наименьшим и каким наибольшим может быть количество елей в ельнике? Иначе говоря, найдите наибольшее и наименьшее возможное количество слагаемых в левой части ребуса.

3. На доске 18×18 есть 324 единичных квадрата. Можно ли окрасить в синий цвет ровно 196 отрезков, являющихся сторонами этих квадратов, так, чтобы у каждого единичного квадрата ровно одна сторона оказалась синей?

4. Дима и Макар играют в карты. У них есть колода из 101 карты, на каждой карте написано число от 1 до 101, каждое число встречается ровно на одной карте. В начале игры Дима взял себе все карты с четными числами, а Макар — все карты с нечетными. Каждый игрок сложил свои карты в стопку в произвольном порядке. На очередном ходу игроки открывают верхние карты в своих стопках, сравнивают числа на них, и тот, у кого число больше, забирает себе обе карты. Он кладет их под низ своей колоды, причем сначала кладет карту соперника, а под неё свою. Если у кого-нибудь из игроков заканчиваются карты, игра заканчивается. На 10-м ходу были открыты карты 101 и 2. Докажите, что игра никогда не закончится.

5. В стране 20 городов и 23 дороги, соединяющие некоторые пары городов. Из каждого города, кроме столицы и культурной столицы, выходит не более двух дорог. Некоторые города соединены дорогами так, что из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого. Оказалось, что в стране нет ни одного циклического маршрута, проходящего только через одну из столиц (два маршрута, проходящие по одним и тем же дорогам, считаются одинаковыми). Сколько различных несамопересекающихся циклических маршрутов проходят через обе столицы?

6. В двух цехах поровну ткацких станков одинаковой производительности. Поступили два заказа на производство ткани — первый в два раза больше второго. Оба цеха в первый день работали над первым заказом. Во второй день первый цех продолжал работу, а второй переключился на второй заказ. К концу второго дня первый заказ был выполнен. В третий день над вторым заказом работали всего три станка и к концу дня закончили выполнение второго заказа. Сколько всего станков на фабрике?

7. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться произведение четырёхзначного числа, не содержащего в своей записи нулей, на его сумму цифр?

8. Для каких натуральных k сумма первых $2k$ натуральных чисел равна сумме последующих k чисел?