МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Незнайка написал несколько ненулевых целых чисел, произведение которых в 5 раз больше их суммы. Он написал ещё одно целое число и утверждает, что теперь произведение чисел в 6 раз больше их суммы. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

2. В треугольнике ABC на стороне AC отметили точки P и Q так, что $AP = 1$, $PQ = 9$, $QC = 4$. Оказалось, что $\angle ABC = 2\angle PBQ$. Докажите, что $|BC - AB| \geqslant 4$.

3. Даны 100 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих в соседних по стороне или углу ячейках, разность не была равна 1.

4. Натуральное число a назовем *хорошим*, если для любого натурального числа b такого, что a^a делится на b^b верно, что a делится на b. Может ли хорошее число оканчиваться на 0?

5. Аня и Боря договорились показать Васе фокус. Вася кладёт 2000 монет в ряд, как ему вздумается (каждая монета может лежать “орлом” или “решкой” вверх). После этого Боря добавляет в конец ряда 100 монет по своему усмотрению. Затем Вася выбирает в новом ряду две соседние монеты, и меняет их местами (но не переворачивать их). После этого в комнату входит Аня, видит получившийся ряд из 2100 монет. Ей нужно выбрать две последовательные монеты в увиденном ряду и поменять их местами так, чтобы получившийся ряд был таким же, как ряд до этого. Как Ане и Боре заранее договориться, чтобы фокус точно удался?

6. Найдите $\left[\dfrac{100^{101} + 101^{102} + \ldots + 2023^{2024}}{100^{100} + 101^{101} + \ldots + 2023^{2023}}\right]$. Как обычно, через $[x]$ обозначена целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

7. Найдите все пары простых чисел (p, q), для которых оба числа $p-q$ и $pq-q$ являются квадратами натуральных чисел.

8. Дан набор из 18 гирек, в котором суммарная масса шести самых тяжелых равна массе двенадцати самых лёгких. Докажите, что эти гирьки можно разбить на тройки так, чтобы массы троек отличались не более, чем в три раза.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Незнайка написал несколько ненулевых целых чисел, произведение которых в 5 раз больше их суммы. Он написал ещё одно целое число и утверждает, что теперь произведение чисел в 6 раз больше их суммы. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

2. В треугольнике ABC на стороне AC отметили точки P и Q так, что $AP = 1$, $PQ = 9$, $QC = 4$. Оказалось, что $\angle ABC = 2\angle PBQ$. Докажите, что $|BC - AB| \geqslant 4$.

3. Даны 100 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих в соседних по стороне или углу ячейках, разность не была равна 1.

4. Натуральное число a назовем *хорошим*, если для любого натурального числа b такого, что a^a делится на b^b верно, что a делится на b. Может ли хорошее число оканчиваться на 0?

5. Аня и Боря договорились показать Васе фокус. Вася кладёт 100 монет в ряд, как ему вздумается (каждая монета может лежать “орлом” или “решкой” вверх). После этого Боря добавляет в конец ряда 101 монету по своему усмотрению. Затем Вася выбирает в новом ряду две соседние монеты, и меняет их местами (но не переворачивать их). После этого в комнату входит Аня, видит получившийся ряд из 201 монеты. Ей нужно выбрать две последовательные монеты в увиденном ряду и поменять их местами так, чтобы получившийся ряд был таким же, как ряд до этого. Как Ане и Боре заранее договориться, чтобы фокус точно удался?

6. Найдите $\left[\dfrac{100^{101} + 101^{102} + \ldots + 2023^{2024}}{100^{100} + 101^{101} + \ldots + 2023^{2023}}\right]$. Как обычно, через $[x]$ обозначена целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

7. Найдите все пары натуральных чисел $x, y > 1$, для которых число $\dfrac{(x+y)(xy-1)}{xy+1}$ — простое.

8. Сколькими способами можно покрасить цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы в записи любого простого натурального числа нашлась не синяя цифра, а в записи любого составного натурального числа нашлась не зелёная цифра? В раскраске не обязательно должны быть использованы все три цвета.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Незнайка написал несколько ненулевых целых чисел, произведение которых в 5 раз больше их суммы. Он написал ещё одно целое число и утверждает, что теперь произведение чисел в 6 раз больше их суммы. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

2. Даны 100 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 10×10 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих в соседних по стороне или углу ячейках, разность не была равна 1.

3. Найдите наименьшее простое p такое, что $p^p - 1$ делится на 24.

4. Про взаимно простые натуральные числа a, b известно, что значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{15b}{4a}$ является целым числом. Найдите все такие пары $(a; b)$.

5. В стране всего 9 городов, в том числе столица A и культурная столица B. Некоторые города соединены дорогами (дорога соединяет два города напрямую), причем из каждого города, кроме A и B, выходит не более двух дорог. Известно, что в стране есть ровно пять различных замкнутых маршрутов из четырёх дорог (два маршрута, проходящие по одним и тем же дорогам, считаются одинаковыми). Докажите, что есть дорога, соединяющая A и B.

6. Сколькими способами можно покрасить цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы в записи любого простого натурального числа нашлась не синяя цифра, а в записи любого составного натурального числа нашлась не зелёная цифра? В раскраске не обязательно должны быть использованы все три цвета.

7. В два разных стакана Дима налил поровну воды. В первом стакане высота воды была равна 10 см, а во втором — 6 см. Тогда Дима перелил немного воды из первого стакана во второй так, чтобы уровни воды в стаканах уравнялись. Найдите высоту воды после переливания.

8. 120 пиратов нашли клад из 119 монет и разграбили его. Капитан, видя, что у кого-то из пиратов (или даже у самого капитана) 15 или более монет, заставляет этого пирата раздать все свои монеты другим, но не более чем по одной в руки. Докажите, что рано или поздно все пираты будут иметь менее 15 монет.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 08.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Незнайка написал несколько ненулевых целых чисел, произведение которых в 5 раз больше их суммы. Он написал ещё одно целое число и утверждает, что теперь произведение чисел в 6 раз больше их суммы. Могут ли слова Незнайки быть правдой?

2. Даны 25 различных действительных чисел. Докажите, что их можно расставить в клетках таблицы 5×5 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих в соседних по стороне или углу ячейках, разность не была равна 1.

3. Найдите наименьшее простое p такое, что $p^p - 1$ делится на 24.

4. Пусть a и b — натуральные числа, причём $a > b + 2$. Докажите, что найдутся различные натуральные числа c и d, что $ac + bd$ делится на $c + d$.

5. В стране всего 10 городов, в том числе столица A и культурная столица B. Некоторые города соединены дорогами (дорога соединяет два города напрямую), причем из A и B выходит по три дороги, а из всех остальных — по две дороги. Из любого города можно добраться до любого другого. Известно, что все замкнутые маршруты, в которых города не повторяются, содержат по четыре дороги. Докажите, что между A и B дороги нет.

6. Можно ли раскрасить цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы в записи любого простого натурального числа нашлась не синяя цифра, а в записи любого составного натурального числа нашлась не зелёная цифра, при этом все цвета должны быть использованы?

7. В два разных стакана Дима налил поровну воды. В первом стакане высота воды была равна 10 см, а во втором — 6 см. Тогда Дима перелил немного воды из первого стакана во второй так, чтобы уровни воды в стаканах уравнялись. Найдите высоту воды после переливания.

8. 120 пиратов нашли клад из 119 монет и разграбили его. Капитан, видя, что у кого-то из пиратов (или даже у самого капитана) 15 или более монет, заставляет этого пирата раздать все свои монеты другим, но не более чем по одной в руки. Докажите, что рано или поздно все пираты будут иметь менее 15 монет.