МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Назовём последовательность из букв А и Б *антипалиндромом*, если при записи её в обратном порядке и замене букв А и Б друг на друга, получается исходная последовательность. Например, последовательность АББААБ — антипалиндром. Назовём *весом* антипалиндрома произведение позиций, на которых стоит буква А. Например, стоимость антипалиндрома АББААБ равна $1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$. Найдите сумму стоимостей всех антипалиндромов длины 2022.

2. На сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E на прямую BF пересекает прямую BC в точке P. Перпендикуляр из точки F на прямую BE пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

3. *L-луч* с началом в точке P — это фигура на плоскости, состоящая из горизонтального или вертикального отрезка PC и луча CB, где угол излома $\angle PCB = 90°$. На плоскости дано $2n$ синих и $2m$ красных точек с целыми координатами, причем все $4n + 4m$ их координат различны. Также отмечена точка P с нецелыми координатами. Докажите, что из точки P можно так выпустить два L-луча PC_1B_1 и PC_2B_2, что плоскость будет разбита этими лучами на две части, в каждой из которых ровно n синих и m красных точек.

4. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб, находящийся в некоторой клетке полоски, может сделать ход по следующему правилу: если он сидит в блоке размера m и этот блок синий, то он перемещается на m клеток вправо, а если блок красный, то на m клеток влево. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. При каком наименьшем k можно закрасить k клеток полоски синим цветом, а остальные — красным так, чтобы краб за несколько ходов мог добраться из самой левой клетки в самую правую?

5. Рассмотрим все возможные тройки вещественных чисел x, y, z такие, что $xyz = 1$ и $x+y+z = 0$. При каких натуральных n значение суммы $S_n = x^n + y^n + z^n$ у всех таких троек одинаково?

6. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) выбраны точки P и Q такие, что $\angle BPC = \frac{3}{2} \cdot \angle BAC$, $BP = AQ$ и $AP = CQ$. Докажите, что $AP = PQ$.

7. Пусть a, m и n — натуральные числа, причём a больше 1. Докажите, что число $(a+1)^m + a^n$ делится на число $a^2 + a + 1$ тогда и только тогда, когда m нечётно и $m + n$ делится на 3.

8. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до n по одному разу. Они по очереди подчеркивают ещё не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на n. Для каждого натурального n определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовём последовательность из букв А и Б *антипалиндромом*, если при записи её в обратном порядке и замене букв А и Б друг на друга, получается исходная последовательность. Например, последовательность АББААБ — антипалиндром. Назовём *весом* антипалиндрома произведение позиций, на которых стоит буква А. Например, стоимость антипалиндрома АББААБ равна $1 \cdot 4 \cdot 5 = 20$. Найдите сумму стоимостей всех антипалиндромов длины 2022.

2. На сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E на прямую BF пересекает прямую BC в точке P. Перпендикуляр из точки F на прямую BE пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

3. Пусть a_n — это количество всевозможных множеств F, состоящих из натуральных чисел и обладающих двумя свойствами: 1) количество элементов множества F не превосходит наименьшего элемента множества F; 2) наибольший элемент F равен n. Найдите a_{20}.

4. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб, находящийся в некоторой клетке полоски, может сделать ход по следующему правилу: если он сидит в блоке размера m и этот блок синий, то он перемещается на m клеток вправо, а если блок красный, то на m клеток влево. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. При каком наименьшем k можно закрасить k клеток полоски синим цветом, а остальные — красным так, чтобы краб за несколько ходов мог добраться из самой левой клетки в самую правую?

5. Рассмотрим всевозможные тройки вещественных чисел x, y, z такие, что $xyz = 1$ и $x + y + z = 0$. При каких натуральных n значение суммы $S_{3n} = x^{3n} + y^{3n} + z^{3n}$ у всех таких троек одинаково?

6. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC с углом $\angle ABC = 60^\circ$ выбрана точка M так, что $AB + BM = AC + CM$. Найдите величину угла $\angle CAM$.

7. Пусть a, m и n — натуральные числа, причём a больше 1. Докажите, что число $(a+1)^m + a^n$ делится на число $a^2 + a + 1$ тогда и только тогда, когда m нечётно и $m + n$ делится на 3.

8. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до n по одному разу. Они по очереди подчеркивают ещё не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на n. Для каждого натурального n определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все четвёрки положительных чисел (a, b, c, d) такие, что

$$4 \cdot \min\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \cdot \min\left(\frac{c^2}{d}, \frac{d^2}{c}\right) = \big(\max(a+b, c+d)\big)^2.$$

2. На сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно. Перпендикуляр из точки E на прямую BF пересекает прямую BC в точке P. Перпендикуляр из точки F на прямую BE пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

3. Пусть a_n — это количество всевозможных множеств F, состоящих из натуральных чисел и обладающих двумя свойствами: 1) количество элементов множества F не превосходит наименьшего элемента множества F; 2) наибольший элемент F равен n. Найдите a_{20}.

4. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб, находящийся в некоторой клетке полоски, может сделать ход по следующему правилу: если он сидит в блоке размера m и этот блок синий, то он перемещается на m клеток вправо, а если блок красный, то на m клеток влево. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. При каком наименьшем k можно закрасить k клеток полоски синим цветом, а остальные — красным так, чтобы краб за несколько ходов мог добраться из самой левой клетки в самую правую?

5. Найдите четыре различных натуральных числа a, b, c и d, больших 10^{2022}, таких, что $a + bc$ делится на d, $b + cd$ делится на a, $c + da$ делится на b и $d + ab$ делится на c.

6. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC с углом $\angle ABC = 60^\circ$ выбрана точка M так, что $AB + BM = AC + CM$. Найдите величину угла $\angle CAM$.

7. Пусть a, m и n — натуральные числа, причём a больше 1. Докажите, что число $(a+1)^m + a^n$ делится на число $a^2 + a + 1$ тогда и только тогда, когда m нечётно и $m + n$ делится на 3.

8. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 1001 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 1001. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 11.11.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ — перестановка натуральных чисел от 1 до 20. Какое наибольшее количество чисел среди 20 дробей

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_1+a_2}{1+2}, \frac{a_1+a_2+a_3}{1+2+3}, \ldots, \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}}{1+2+3\ldots+20}$$

могут оказаться целыми числами, большими 1?

2. Точка M — середина гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC. Точки P и Q на отрезках AM и MB соответственно таковы, что $PQ = CQ$. Докажите, что $AP \leqslant 2MQ$.

3. На доску 10×10 собирается приземлиться космический корабль. Вам известно, что корабль имеет форму прямоугольника 1×5 и приземлившись, займет в точности 5 клеток доски. Вы можете заранее поставить в некоторые клетки доски фарфоровые чашки (в каждую клетку можно ставить любое количество чашек). Когда корабль приземлится, он разобьет все чашки, которые находятся в клетках, на которые он приземлился. Вы не увидите, куда именно приземлится корабль, но по звуку сможете определить, сколько чашек разбилось. Какое наименьшее количество чашек можно поместить на доску, чтобы гарантированно определить хотя бы одну клетку, занятую кораблем?

4. Каждая клетка полоски 1×2022 покрашена в синий или красный цвет. Назовем *блоком* последовательность идущих подряд одноцветных клеток, слева и справа от которой находятся или концы полоски, или клетки другого цвета. Краб каждым ходом прыгает на расстояние, равное длине блока, в котором он находится, причем направо из синей клетки и налево из красной. Если такой ход выводит за пределы полоски, то ход не совершается и движение заканчивается. Можно ли закрасить все клетки полоски так, чтобы краб из какой-то клетки совершил путешествие, побывав на каждой клетке?

5. Найдите все такие четверки натуральных чисел a, b, c, d, что одновременно выполнены три условия: $a + 100bc$ делится на cd, $b + 100cd$ делится на da, $c + 100da$ делится на ab.

6. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC с углом $\angle ABC = 60^\circ$ выбрана точка M так, что $AB + BM = AC + CM$. Найдите величину угла $\angle CAM$.

7. Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что число $4^m + 3^n$ делится на 13 тогда и только тогда, когда m нечётно и $m + n$ делится на 3.

8. Перед Алисой и Верой выписаны все натуральные числа от 1 до 2022 по одному разу. Они по очереди подчеркивают еще не подчеркнутые числа (начинает Алиса). Игрок проигрывает, если после его хода произведение всех подчеркнутых чисел впервые поделилось на 2022. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?