LIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Владимир, 06.11-12.11.2022

Командная олимпиада. Лига Старт.

1. Грю и Вектор воруют друг у друга пирамиды. Изначально у Грю на 96 пирамид больше, чем у Вектора. Каждую неделю Грю крадет четверть пирамид Вектора, а Вектор (в тот же момент) крадёт четверть пирамид Грю. У кого из воров через три недели будет больше пирамид, и на сколько?

2. Даны различные ненулевые цифры a, b, c, d. Известно, что ни одно из чисел $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dabc}$ не имеет простых делителей, меньших 10. Чему может быть равна сумма этих четырёх четырёхзначных чисел?

3. В ряд стоят 110 фишек, расстояние между любыми двумя соседними фишками равно 1. Костя переставил эти фишки на те же места (но в другом порядке). Докажите, что какие-то две фишки, находившиеся до перестановки на расстоянии не более 10, после перестановки оказались по-прежнему на расстоянии не более 10.

4. Натуральные числа покрасили в два цвета. Докажите, что можно выбрать шесть чисел одного цвета так, что если выписать выбранные числа в ряд в порядке возрастания, то разности любых двух соседних чисел в ряду будут степенями двойки (то есть числами вида 2^n, где n — натуральное). Эти степени двойки в разных парах соседей в ряду могут быть различны, но могут и совпадать.

5. В группе школьников некоторые знакомы между собой, а некоторые нет. Оказалось, что если какой-то школьник знаком хотя бы с 20 другими школьниками, то все его знакомые незнакомы между собой. Кроме того, если школьник незнаком хотя бы с 20 другими школьниками, то все его незнакомые знакомы между собой. Найдите максимальное возможное число школьников в такой группе.

6. На доску выписаны числа 1, 2, 3, …, 11. За один ход Дима стирает с доски числа a и b такие, что $a > 2b$, и записывает вместо них число $a - 2b$. После десяти ходов на доске осталось одно число. Какое наименьшее значение может принимать это число?

7. Каждая клетка доски 2022×2022 покрашена в черный или белый цвет. В некоторых клетках стоят хромые ферзи. Хромой ферзь с клетки A бьет клетку B, если клетки A и B находятся на одной линии (строке, столбце или диагонали) и все клетки этой линии от A до B включительно покрашены в один цвет. При каком наибольшем k можно покрасить доску и расставить на ней k хромых ферзей так, чтобы они не били друг друга?

8. На столе стоит несколько гирь суммарного веса s. Назовём гирю *раздвоителем*, если после её удаления все остальные гири можно разбить на две группы, суммарный вес каждой из которых не больше $\frac{s}{2}$. Докажите, что суммарный вес всех раздвоителей не меньше $\frac{s}{2}$.