МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Про натуральные числа m, n, k известно, что $(9m + 10n)(10m + 11n) = k^2$. Найдите наименьшее возможное значение k.

2. Назовём *полоской* клетчатый прямоугольник, хотя бы одна из сторон которого равна 1. Мы хотим разбить клетки квадрата 99×99 на m непересекающихся полосок так, чтобы никакие две из этих m полосок не имели общей границы длины более 1. Полоски могут быть разных длин. Определите наименьшее m, для которого это возможно.

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ оказалось, что $\angle A = \angle C = \angle E = 90^\circ$, $BC = CD$ и $AB + DE = AE$. Найдите сумму углов $\angle ABE + \angle ACE + \angle ADE$.

4. Петя и Вася играют в игру. Изначально по кругу расставлены 1000 точек. Ребята по очереди (начинает Петя) соединяют точки отрезками своего цвета: Петя синим, Вася красным. Если две точки уже соединены отрезком, больше их соединять отрезком нельзя. Петя выигрывает, если появятся такие пять точек, что все десять соединяющих их отрезков синие. Может ли Вася ему помешать?

5. Пусть $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k = a$ и $1 = b_1 < b_2 < \ldots < b_\ell = b$ — все делители натуральных чисел a и b соответственно. Найдите a и b, если $a_{2021} + b_{2021} = a$ и $a_{2022} + b_{2022} = b$.

6. Даны различные простые числа p и q, а также положительное вещественное число $\alpha < 3$. Докажите, что для некоторого натурального k число $[k\alpha]$ меньше $2pq$ и делится хотя бы на одно из чисел p и q.

7. Докажите, что число $\frac{1}{2}(12345678^4 + 87654321^4 + 99999999^4)$ является квадратом некоторого натурального числа.

8. Найдите все натуральные n, для которых уравнение $m + 2S(m) = n$ имеет хотя бы одно натуральное решение. Через $S(m)$ обозначена сумма цифр числа m.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Про натуральные числа m, n, k известно, что $(9m + 10n)(10m + 11n) = k^2$. Найдите наименьшее возможное значение k.

2. На доске 99×99 отметили 2500 непересекающихся прямоугольников из трех клеток. Докажите, что какие-то два из них соприкасаются по отрезку длины не меньше 2.

3. Внутри квадрата $ABCD$ выбрали такую точку P, что $PB = BC$, $\angle PAB + \angle PDC = 90^\circ$. Найдите угол CPD.

4. Петя и Вася играют в игру. Изначально по кругу расставлены 1000 точек. Ребята по очереди (начинает Петя) соединяют точки отрезками своего цвета: Петя синим, Вася красным. Если две точки уже соединены отрезком, больше их соединять отрезком нельзя. Петя выигрывает, если появятся такие пять точек, что все десять соединяющих их отрезков синие. Может ли Вася ему помешать?

5. Луиза записала натуральное число, не содержащее нулей, но содержащее как минимум две разные цифры. Затем она также выписала все числа, которые могут быть получены путем перестановки цифр исходного числа. Какое максимальное значение может иметь наибольший общий делитель всех выписанных Луизой чисел (включая исходное)?

6. По окружности расположены 2022 кочки. Серёжа хочет покрасить все кочки в n цветов и посадить на n кочек по одной лягушке. Когда лягушек рассадили, они начинают прыгать. Каждую секунду все лягушки одновременно перепрыгивают со своей кочки на следующую по часовой стрелке. При каких n Серёжа может так покрасить кочки и рассадить лягушек, что в любой момент времени лягушки будут сидеть на кочках разных цветов?

7. Докажите, что число $\frac{1}{2}(12345678^4 + 87654321^4 + 99999999^4)$ является квадратом некоторого натурального числа.

8. Найдите все натуральные n, для которых уравнение $m + 2S(m) = n$ имеет хотя бы одно натуральное решение. Через $S(m)$ обозначена сумма цифр числа m.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 5. Точка A_1 лежит на стороне AD, причем $AA_1 = 1$. Точка B_1 лежит на стороне AB, причем $BB_1 = 1$. Точки C_1 и C_2 лежат на стороне BC, причем $BC_1 = 2$, $BC_2 = 3$. Точки D_1 и D_2 лежат на стороне CD, причем $CD_1 = 2$, $CD_2 = 3$. При пересечении прямые AC_1, A_1C_2, BD_1 и B_1D_2 образуют квадрат. Найдите его площадь.

2. Петя и Вася играют в игру. Изначально по кругу расставлено 200 точек. Ребята по очереди (начинает Петя) соединяют точки отрезками своего цвета: Петя — синим, Вася — красным. Если две точки уже соединены отрезком, больше их соединять отрезком нельзя. Петя выигрывает, если появятся такие четыре точки, что все шесть соединяющих их отрезков синие. Может ли Вася ему помешать?

3. Луиза записала натуральное число, используя две разные ненулевые цифры a и b (обе цифры присутствуют). Затем она выписала все числа, которые могут быть получены путем перестановки цифр исходного числа. Какое максимальное значение может иметь наибольший общий делитель всех выписанных Луизой чисел (включая исходное)?

4. Пусть $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k = a$ и $1 = b_1 < b_2 < \ldots < b_\ell = b$ — все делители различных натуральных чисел a и b соответственно. Найдите a и b, если $a_3 + b_3 = a$ и $a_4 + b_4 = b$.

5. В таблице 10×10 строки пронумерованы десятью различными натуральными числами из промежутка от 1 до 20, а столбцы — остальными десятью числами из этого же промежутка. В каждую клетку записали произведение номера столбца и строки, на пересечении которых она находится. Найдите наибольшую возможную сумму всех чисел в таблице.

6. Можно ли заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так, чтобы были выполнены все неравенства?

$$H < \frac{E}{P} < \frac{A}{B} < \frac{E}{H} < \frac{C}{T} < \frac{B}{O}.$$

7. Вовочка разрезал прямоугольник 4×7 клеток на фигурки двух видов — уголки из трех клеток и фигуры из 4 клеток вида буквы Т. Сколько могло получиться фигур из 4 клеток? Фигурки можно поворачивать.

8. Можно ли записать в ряд натуральные числа от 1 до 2022 включительно в таком порядке, чтобы сумма любых двух рядом стоящих чисел была простым числом?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 4. Точка A_1 лежит на стороне AD, причем $AA_1 = 1$. Точка B_1 лежит на стороне AB, причем $BB_1 = 1$. Точки C_1 и C_2 лежат на стороне BC, причем $BC_1 = C_1C_2 = 1$. Точки D_1 и D_2 лежат на стороне CD, причем $CD_1 = D_1D_2 = 1$. При пересечении прямые AC_1, A_1C_2, BD_1 и B_1D_2 образуют квадрат. Найдите его площадь.

2. Пусть $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k = a$ и $1 = b_1 < b_2 < \ldots < b_\ell = b$ — все делители различных натуральных чисел a и b соответственно. Найдите a и b, если $a_3 + b_3 = a$ и $a_4 + b_4 = b$.

3. В центре психологической разгрузки работают котики, собачки, зайчата и лошадки. Зайчат вдвое больше, чем лошадок. Собачки и зайчата составляют четверть от общего числа зверят, а лошадки и собачки — пятую часть. Докажите, что число котиков делится на 7.

4. В таблице 10×10 строки пронумерованы числами от 1 до 10, а столбцы — числами от 11 до 20. В каждую клетку записали произведение номера столбца и строки, на пересечении которых она находится. Чему может быть равна сумма всех чисел в таблице?

5. В стране 100 городов, никакие два из которых изначально не связаны авиалинией. Две авиакомпании Эль-Аль и Эль-Бель по очереди открывают новые двусторонние рейсы между какими-то двумя городами, ранее не связанными авиалинией (начинает Эль-Аль). В компании Эль-Аль хотят связать какие-нибудь семь городов круговым маршрутом, состоящим из рейсов их компании, и не проходящим ни по одному городу дважды. Может ли Эль-Бель этому помешать?

6. Можно ли заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так, чтобы были выполнены все неравенства?

$$H < \frac{E}{P} < \frac{A}{B} < \frac{E}{H} < \frac{C}{T} < \frac{B}{O}.$$

7. Вовочка разрезал прямоугольник 4×7 клеток на фигурки двух видов — уголки из трех клеток и фигуры из 4 клеток вида буквы Т. Сколько могло получиться фигур из 4 клеток? Фигурки можно поворачивать.

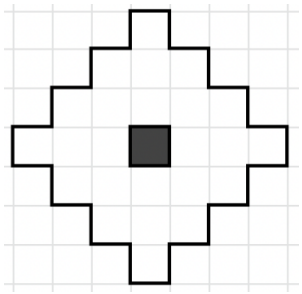
8. Если в программу ввести натуральное число, то она прибавляет к этому числу его удвоенную сумму цифр и печатает результат. Вова ввел в программу все числа от 1 до 100. Какие числа будут напечатаны программой?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 09.11.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА ВЫСШАЯ ЛИГА. РЕШЕНИЯ

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

Конкурс капитанов.



Вырежьте из фигурки на картинке (в центре — дырка) максимальное количество 4-клеточных фигурок в виде буквы Г. Приведите соответствующий пример.

Ответ. 4, пример проверять.

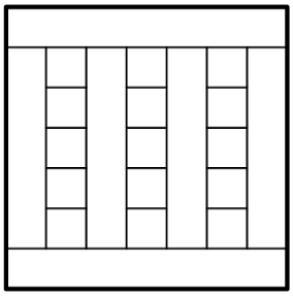
1. Про натуральные числа m, n, k известно, что $(9m + 10n)(10m + 11n) = k^2$. Найдите наименьшее возможное значение k.

Ответ. 380. **Решение.** *Оценка:* Сократив, если нужно, на НОД(m, n), мы можем решать задачу для НОД$(m, n) = 1$. Если НОД$(9m + 10n, 10m + 11n) = d$, то $m + n$ кратно d, $9(m + n)$ кратно d и, наконец, n кратно d. Аналогично, m кратно d, т.е. $d = 1$. Поэтому можно считать, что $9m + 10n = a^2$, $10m + 11n = b^2$. Ясно, что $b > a$, т.е. $b \geqslant a + 1$, и $10a^2/9 \geqslant b^2$. Подставив, получаем $10a^2/9 \geqslant (a+1)^2$. Преобразовывая, получаем $a^2 \geqslant 18a+9$ и $a \geqslant 18 + 9/a > 18$. Тогда $b \geqslant 20$ и $k = ab \geqslant 380$. *Пример:* $m = 29$, $n = 10$.

♦ Только пример: *2 балла.* Только оценка: *6 баллов.*

2. Назовём *полоской* клетчатый прямоугольник, хотя бы одна из сторон которого равна 1. Мы хотим разбить клетки квадрата 99×99 на m непересекающихся полосок так, чтобы никакие две из этих m полосок не имели общей границы длины более 1. Полоски могут быть разных длин. Определите наименьшее m, для которого это возможно.

Ответ. $52 + 49 \cdot 97 = 4805$. **Решение.** *Пример* для $n = 7$ изображен на картинке и естественным образом обобщается на любое нечетное число.



Оценка. Рассмотрим разбиение квадрата 99×99 на единичные квадратики, а затем начнем стирать границы некоторых квадратиков, пока не получим разбиение на m полосок. Так как любые две полоски имеют границу длины не более 1, то для каждого узла сетки мы стерли не более одного исходящего из него отрезка. Кроме того, мы не стирали отрезки из четырех угловых узлов (так как мы не стираем отрезки на границе квадрата). Теперь рассмотрим два узла, соседние с каким-то угловым. Мы должны оставить отрезок, исходящий хотя бы из одного из них внутрь квадрата, иначе образуется уголок, а не полоска. Итого, хотя бы у 8 узлов мы не стирали отрезки, а у оставшихся $100^2 - 8$ узлов мы стёрли не более чем по одному отрезку. То есть стёрто не более $5000 - 4 = 4996$ отрезков (поделили на 2, так как стёртые отрезки были посчитаны дважды). При стирании каждого отрезка мы уменьшаем количество полосок на 1. Следовательно, после стирания полосок будет не менее $99^2 - 4996 = 4805$.

♦ Только пример: *2 балла.* Только оценка: *4 балла.*