Решения задач командной олимпиады 8 класса

1. *В спортивной секции 21 человек. На каждой из последних двух тренировок участники разбивались на три команды по 7 человек. Докажите, что есть три человека, которые оба раза были в одной команде.*

Решение. Возьмём 7 человек из одной команды в первый день. Во второй день эти 7 человек оказались в трёх каких-то командах. Тогда какие-то трое из них окажутся в одной команде. Эта тройка нам и подходит.

2. *Можно ли заполнить клетки таблицы* 2020×2020 *натуральными числами от 1 до 4 080 400 так, чтобы сумма чисел в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем сумма чисел во всех предыдущих строках?*

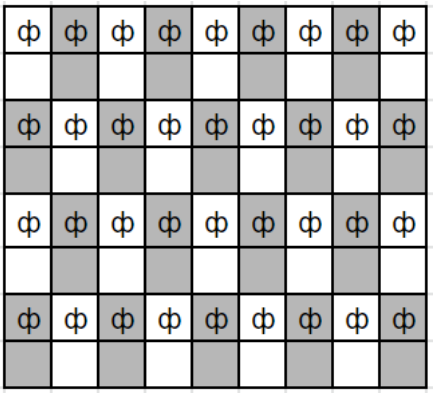
Ответ: нельзя. **Решение.** Пусть x — сумма чисел в первой строке. Тогда последовательно находим, что во второй строке сумма чисел равна $x+1$, в третьей — $2x+2$, в четвертой — $4x+4$, в пятой — $8x+8$. Очевидная закономерность — в $(k+2)$-й строке сумма равна $2^k x + 2^k$ — мгновенно доказывается по индукции. Но сумма чисел в таблице меньше $4\,080\,400^2 = 2020^4 < 2048^4 = 2^{44}$. Так что уже в 46-й строке сумма чисел окажется слишком велика.

3. *В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH и отмечены середины A_1, B_1 и C_1 сторон BC, CA и AB соответственно. Точка K симметрична точке B_1 относительно прямой BC. Докажите, что прямая C_1K делит отрезок HA_1 пополам.*

Решение. Из симметрии следует, что $KA_1 = B_1A_1$ и $KH = HB_1$. Так как B_1A_1 и C_1A_1 это средние линии треугольника ABC, а HC_1 и HB_1 это медианы прямоугольных треугольников ABH и ACH, то $KA_1 = B_1A_1 = \frac{1}{2}AB = HC_1$ и $KH = HB_1 = \frac{1}{2}AC = A_1C_1$. Следовательно, в четырёхугольнике KA_1C_1H противоположные стороны попарно равны. Значит, KA_1C_1H это параллелограмм, откуда и следует решение задачи.

4. *Каждую клетку доски* 2022×2022 *красят в чёрный или белый цвет. В некоторые клетки ставят хромых ферзей. Хромой ферзь с клетки A бьёт клетку B, если клетки A и B находятся на одной линии (горизонтали, вертикали или диагонали) и все клетки этой линии от A до B включительно покрашены в один цвет. При каком наибольшем k можно покрасить доску и расставить на ней k хромых ферзей так, чтобы они не били друг друга?*

Ответ: при $k = 2022 \cdot 1011$. **Решение.** Для начала докажем, что при таком k описанная ситуация возможна (часть *пример*). Разобьем всю доску на вертикальные доминошки и покрасим их в шахматном порядке. Ферзей поставим в верхние клетки всех доминошек. На рисунке изображен пример для доски 8×8.



Докажем теперь, что при большем k поставить k не бьющих друг друга ладей не удастся (часть *оценка*). Предположим противное. Разобьем доску на квадраты 2×2. Если ферзей больше, чем $2022 \cdot 1011$, то в какой-то квадрат разбиения попало хотя бы 3 ферзя. Значит, какие-то два ферзя в этом квадрате стоят на клетках одинакового цвета (так как ферзей 3, а цветов 2) и тогда они бьют друг друга, так как они соседи или по вертикали, или по горизонтали, или по диагонали. Противоречие.

5. *На столе стоит несколько гирь суммарного веса s. Назовём гирю раздвоителем, если после её удаления все остальные гири можно разбить на две группы, суммарный вес каждой из которых не больше $s/2$. Докажите, что вес самого большого раздвоителя больше суммы весов всех нераздвоителей.*

Решение. Нарисуем отрезок AB длины s, пусть C — его середина. Гирю веса x будем изображать отрезком длины x. Тогда мы можем считать, что гири-отрезки выложены в ряд вплотную друг к другу и все вместе образуют разбиение отрезка AB. При таком взгляде на вещи гиря-отрезок Δ является раздвоителем, если можно так переставить «гири» в пределах отрезка AB, что точка C окажется на отрезке Δ.

Пусть M — наибольший раздвоитель, m — его длина. Допустим, что суммарная длина всех нераздвоителей больше либо равна m. Разложим гири так, чтобы точка C лежала на отрезке M, пусть $m = \ell + r$, где ℓ — длина $M \cap AC$, а r — длина $M \cap CB$. Пусть ℓ' — суммарная длина всех нераздвоителей, оказавшихся при этом раскладе на AC, r' — суммарная длина всех нераздвоителей, оказавшихся при этом раскладе на CB. В силу нашего предположения выполняется одно из неравенств $\ell' \geqslant r$ или $r' \geqslant L$ (или даже оба). Пусть для определенности выполняется неравенство $\ell' \geqslant r$. Мы можем считать, что все неразвдоители на отрезке AC расположены вплотную друг к другу и образуют отрезок λ длины ℓ', примыкающий слева к отрезку M. Поменяем местами отрезки λ и M: для этого уберем отрезок λ, сдвинем отрезок M влево на ℓ' — он в результате целиком окажется на отрезке AC (так как величина сдвига ℓ' не меньше длины той части отрезка M, которая была на половине BC), а на освободившееся место вставим отрезок λ, не забыв восстановить его подразбиение на отрезки-нераздвоители. Теперь точка C оказалась на одном отрезков-нераздвоителей (возможно, в качестве концевой точки), что невозможно, так как полученный расклад реализует этот отрезок как раздвоитель.

6. *Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Перпендикуляр к AC, проведённый через точку X, пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что прямая YA_1 делит отрезок BH пополам.*

Решение. Обозначим точку пересечение YA_1 и BH за T. По теореме Менелая для треугольника ABH и прямой YT имеем $\dfrac{BT}{TH} = \dfrac{AA_1}{HA_1} \cdot \dfrac{YB}{AY}$. По теореме Фалеса можно продолжить равенство

$$\frac{BT}{TH} = \frac{AA_1}{HA_1} \cdot \frac{XH}{AX} = \frac{AA_1}{AX} : \frac{HA_1}{HX}.$$

Так как B_1B является биссектрисой треугольника $A_1B_1C_1$, то по теореме о внешней и внутренней биссектрисах для треугольника XB_1A_1 имеем

$$\frac{AA_1}{AX} = \frac{B_1A_1}{B_1X} = \frac{HA_1}{HX},$$

откуда и следует решение задачи.

7. *Нечётная раскраска графа – это такая раскраска множества его вершин в несколько цветов, что любые две соседние вершины покрашены в разный цвет и при этом для каждой вершины можно указать цвет, в который покрашено нечётное число её соседей. Барон Мюнхгаузен нарисовал граф и создал нечётную раскраску его вершин в 1022 цвета. «Вы можете мне не поверить, друзья, — говорит барон, — но на этом графе не существует нечётных раскрасок с меньшим числом цветов. Однако после того как я добавил всего одну вершину и соединил её с некоторыми вершинами этого графа, для нечётной раскраски мне понадобилось всего три цвета». Не обманывает ли нас барон?*

Ответ: не обманывает. **Решение.** Возьмем полный граф на 1022 вершинах, которые условно будем называть «толстыми». В середине каждого ребра поставим новую вершину (иными словами, мы заменяем каждое ребро этого графа на двузвенный путь). Новые вершины будем считать «тощими». Возьмём произвольную нечётную раскраску полученного графа. Для любых двух толстых вершин A и B рассмотрим тощую вершину C, соединенную с ними. Так как у вершины C в этом графе всего две соседние вершины (это как раз A и B), эти вершины должны быть окрашены в разный цвет. Итак, любые две толстые вершины должны быть разного цвета, следовательно, в раскраске используется не меньше 1022 цветов.

Теперь добавим к нашему графу одну новую вершину и соединим её со всеми тощими. На полученном графе нам хватит трёх цветов: все толстые вершины красим в красный цвет, тощие — в зелёный, новую — в синий. Эта раскраска удовлетворяет требованию нечётности, поскольку у каждой красной вершины 1021 зелёный сосед, у каждой зелёной имеется один синий сосед, а у синей вершины имеется $\frac{1}{2} \cdot 1022 \cdot 1021$, т.е. нечётное число зелёных соседей.

8. *Докажите, что нечётное число $p > 1$ — простое тогда и только тогда, когда среди любых $\frac{p+1}{2}$ различных натуральных чисел можно найти два числа, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя.*

Решение. Пусть p — простое. Если два числа a и b умножить на одно и то же число k, отношение их суммы к их наибольшему общему делителю не изменится. Поэтому достаточно доказать утверждение задачи для случая, когда $\frac{p+1}{2}$ чисел не имеют общего делителя.

Если среди данных $\frac{p+1}{2}$ чисел найдётся число a, кратное p, то найдётся и число b, не кратное p. Для этих двух чисел имеем $\frac{a+b}{(a,b)} > \frac{a}{(a,b)} \geqslant p$.

Если среди $\frac{p+1}{2}$ нет кратных p, то среди них можно найти два числа a и b, сумма или разность которых делится на p (в противном случае для каждого натурального $k \leqslant \frac{p-1}{2}$ среди наших чисел есть не более одного, дающего остаток k или $p-k$ при делении на p, то есть всего чисел не более $\frac{p-1}{2}$). Если $a+b$ кратно p, то $\frac{a+b}{(a,b)} \geqslant p$. А если $a-b$ кратно p, то $\frac{a+b}{(a,b)} > \frac{a-b}{(a,b)} \geqslant p$, что и требовалось.

Пусть теперь $p = xy$ — составное, x, $y > 1$. Рассмотрим тогда следующие $\frac{p+1}{2}$ чисел: первые x натуральных чисел (будем называть их маленькими) и все чётные числа от $x+1$ до $p-x = x(y-1)$ (таких чисел как раз $\frac{p-2x-1}{2}+1 = \frac{p+1}{2}-x$, будем называть их большими). Убедимся, что в этом наборе нет двух чисел, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя. Действительно, у таких чисел сумма должна быть не меньше p, то есть это либо x и $p-x$, либо два больших числа. Но в первом случае искомое отношение равно $\frac{p}{x} = y$, а во втором случае