МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–4 МЕСТО

1. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c, наименьшее общее кратное которых вчетверо меньше, чем $ab + bc + ca$.

2. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата $10^{100} \times 10^{100}$ так, чтобы в любом прямоугольнике из 300 клеток было нечётное число отмеченных?

3. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D, точка M — середина отрезка BD. Прямая AM пересекает сторону BC в точке E. Оказалось, что $AB = DE$ и $\angle BAE = 2\angle AEB$. Точка F отмечена на продолжении отрезка DE за точку E так, что $AB + AM = EF$. Докажите, что треугольник BMF — равнобедренный.

4. В классе из 24 школьников каждому выставляется оценка по пяти предметам, причем одна из трех возможных. Докажите, что если 23 из этих школьников получили свои оценки, то последнего можно оценить так, чтобы его оценка отличалась от оценки любого другого школьника хотя бы по двум предметам.

5. На доске написано натуральное число m. За один ход число m заменяется на сумму числа m и квадрата наибольшего собственного делителя m. Могло ли после 2023 шага на доске остаться число $1001^{2023} - 1$?

6. Даны 5556 равнобедренных треугольников, у каждого одна вершина покрашена в белый цвет, одна — в синий, одна — в красный. Сумма углов при синих вершинах равна миллиону градусов, сумма углов при красных равна x градусов. Найдите все возможные значения x.

7. На пиратском корабле есть 101 пират: капитан и команда из 100 человек. Каждый из них, включая капитана, имеет изначально ровно одну золотую монету. Капитан вносит предложения по перераспределению монет, а команда голосует по этим предложениям. Капитан не участвует в голосовании. По каждому предложению каждый член команды голосует «за», если в результате предложения он получает монеты, «против», если теряет монеты, и пасует в противном случае. Если «за» проголосовало строго больше членов экипажа, чем «против», предложение вступает в силу. Капитан может сделать любое количество предложений, одно за другим. Какое наибольшее количество монет может накопить капитан?

8. Целые числа a, b и c отличны от нуля. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(1 + \frac{a-1}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{c+1}{a}\right)^2.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТО. ПЕРВАЯ ЛИГА, ФИНАЛ

1. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c, наименьшее общее кратное которых вчетверо меньше, чем $ab + bc + ca$.

2. Дан треугольник ABC с углом $\angle A = 120^\circ$. Внутри треугольника отмечены точки D и E так, что точка E лежит на отрезке DC. При этом треугольник ADE — равносторонний, $DC = BE$, $\angle BED = 10^\circ$. Найдите величину угла ACE.

3. В классе из 24 школьников каждому выставляется оценка по пяти предметам, причем одна из трех возможных. Докажите, что если 23 из этих школьников получили свои оценки, то последнего можно оценить так, чтобы его оценка отличалась от оценки любого другого школьника хотя бы по двум предметам.

4. На доске написано натуральное число m. За один ход число m заменяется на сумму числа m и квадрата наибольшего собственного делителя m. Могло ли после 2023 шага на доске остаться число $1001^{2023} - 1$?

5. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата 16×16 так, чтобы в любом прямоугольнике из 12 клеток было нечётное число отмеченных?

6. Даны 5556 равнобедренных треугольников, у каждого одна вершина покрашена в белый цвет, одна — в синий, одна — в красный. Сумма углов при синих вершинах равна миллиону градусов, сумма углов при красных равна x градусов. Найдите все возможные значения x.

7. На пиратском корабле есть 101 пират: капитан и команда из 100 человек. Каждый из них, включая капитана, имеет изначально ровно одну золотую монету. Капитан вносит предложения по перераспределению монет, а команда голосует по этим предложениям. Капитан не участвует в голосовании. По каждому предложению каждый член команды голосует «за», если в результате предложения он получает монеты, «против», если теряет монеты, и пасует в противном случае. Если «за» проголосовало строго больше членов экипажа, чем «против», предложение вступает в силу. Капитан может сделать любое количество предложений, одно за другим. Какое наибольшее количество монет может накопить капитан?

8. Целые числа a, b и c отличны от нуля. Найдите наименьшее возможное значение выражения
$$\left(1 + \frac{a-1}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{c+1}{a}\right)^2.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТО

1. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c, наименьшее общее кратное которых вчетверо меньше, чем $ab + bc + ca$.

2. Дан треугольник ABC с углом $\angle A = 120°$. Внутри треугольника отмечены точки D и E так, что точка E лежит на отрезке DC. При этом треугольник ADE — равносторонний, $DC = BE$, $\angle BED = 10°$. Найдите величину угла ACE.

3. На доске написано натуральное число m. За один ход число m заменяется на сумму числа m и квадрата наибольшего собственного делителя числа m. Могло ли после 2023-го шага на доске оказаться число $2023! + 2$?

4. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата 16×16 так, чтобы в любом прямоугольнике из 12 клеток было нечётное число отмеченных?

5. Даны 5556 равнобедренных треугольников, у каждого одна вершина покрашена в белый цвет, одна — в синий, одна — в красный. Сумма углов при синих вершинах равна миллиону градусов, сумма углов при красных равна x градусов. Найдите все возможные значения x.

6. В классе, состоящем из 23 школьников, каждому выставляется оценка по пяти предметам, причем одна из трех возможных. Докажите, что если 22 из этих школьников получили свои оценки, то последнего можно оценить так, чтобы его оценки отличались от оценок любого другого школьника хотя бы по двум предметам.

7. На пиратском корабле есть 101 пират: капитан и команда из 100 человек. Каждый из них, включая капитана, имеет изначально ровно одну золотую монету. Капитан вносит предложения по перераспределению монет, а команда голосует по этим предложениям. Капитан не участвует в голосовании. По каждому предложению каждый член команды голосует «за», если в результате предложения он получает монеты, «против», если теряет монеты, и пасует в противном случае. Если «за» проголосовало строго больше членов экипажа, чем «против», предложение вступает в силу. Капитан может сделать любое количество предложений, одно за другим. Какое наибольшее количество монет может накопить капитан?

8. Целые числа a и b отличны от нуля. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(1 + \frac{a+1}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^2.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан треугольник ABC с углом $\angle A = 120^\circ$. Внутри треугольника отмечены точки D и E так, что точка E лежит на отрезке DC. При этом треугольник ADE — равносторонний, $DC = BE$, $\angle BED = 10^\circ$. Найдите величину угла ACE.

2. На доске написано натуральное число m. За один ход число m заменяется на сумму числа m и квадрата наибольшего собственного делителя числа m. Могло ли после 2023-го шага на доске оказаться число $2023! + 2$?

3. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата 16×16 так, чтобы в любом прямоугольнике из 12 клеток было нечётное число отмеченных?

4. Даны 5556 равнобедренных треугольников, у каждого одна вершина покрашена в белый цвет, одна — в синий, одна — в красный. Сумма углов при синих вершинах равна миллиону градусов, сумма углов при красных равна x градусов. Найдите все возможные значения x.

5. В классе, состоящем из 23 школьников, каждому выставляется оценка по пяти предметам, причем одна из трех возможных. Докажите, что если 22 из этих школьников получили свои оценки, то последнего можно оценить так, чтобы его оценки отличались от оценок любого другого школьника хотя бы по двум предметам.

6. У Петеньки есть 2023 игрушки и 2023 коробки. Все коробки стоят в ряд слева направо. Изначально все игрушки лежат в самой левой коробке. Петенька усердно работает: за один раз он вынимает из какой-нибудь коробки 3 игрушки и раскладывает их по одной в какие-то 3 разные коробки справа. Какое наибольшее количество игрушек может собрать Петенька в самой правой коробке?

7. Целые числа a и b отличны от нуля. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(1 + \frac{a+1}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^2.$$

8. Пусть $d(n)$ — количество натуральных делителей натурального числа n. Например, $d(12) = 6$. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$ такие, что $d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leqslant 8$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. На отрезке BC отмечена точка E такая, что $CD = DE$. Докажите, что $AD + AC = CE$.

2. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата 16×16 так, чтобы в любом прямоугольнике из 12 клеток было нечётное число отмеченных?

3. У Петеньки есть 2023 игрушки и 2023 коробки. Все коробки стоят в ряд слева направо. Изначально все игрушки лежат в самой левой коробке. Петенька усердно работает: за один раз он вынимает из какой-нибудь коробки 3 игрушки и раскладывает их по одной в какие-то 3 разные коробки справа. Какое наибольшее количество игрушек может собрать Петенька в самой правой коробке?

4. Целые числа a и b отличны от нуля. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(1 + \frac{a+1}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{b}{a}\right)^2.$$

5. Разрежьте какой-нибудь треугольник на 4 меньших треугольника так, чтобы среди углов этих четырёх треугольников встретились все углы 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°, 100° и 110°.

6. Пусть $d(n)$ — количество натуральных делителей натурального числа n. Например, $d(12) = 6$. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$ такие, что $d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leqslant 8$.

7. На столе стоят 10 гирь. Каждая весит натуральное число килограммов, не превышающее 10. Любые 4 из них можно разложить на две равные по весу кучи. Докажите, что все 10 гирь можно разложить на две равные по весу кучи.

8. Для какого наименьшего чётного k не существует k-значного числа, состоящего из нечётных цифр, сумма цифр которого равна степени десятки?