LXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЭТНОМИР, 25.10–31.10.2023

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 26.10.2023
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C биссектрисы углов A и B пересекают противоположные катеты в точках A_1 и B_1 соответственно. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на гипотенузу из точек A_1 и B_1 соответственно. Найдите $\angle MCN$.

2. Решите в вещественных числах систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\min\{x,y\}+\frac{2}{3}\max\{x,y\}=2023, \\ \frac{1}{3}\min\{y,z\}+\frac{2}{3}\max\{y,z\}=2024, \\ \frac{1}{3}\min\{z,x\}+\frac{2}{3}\max\{z,x\}=2025. \end{cases}$$

3. В каждой клетке прямоугольной таблицы 1000×1000 стоит рыцарь или лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжёт. Каждый заявил, что в клетках, соседних с его клеткой по стороне, стоит поровну лжецов и рыцарей. Может ли на доске быть ровно 2023 рыцаря?

4. Дано натуральное число n. Последовательность x_0, x_1, x_2, $\ldots$ определена равенствами

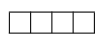
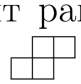
$$x_0=0, \qquad x_{k+1}=\left[\frac{n-(x_1+x_2+\ldots+x_k)}{2}\right].$$

Докажите, что лишь конечное количество x_k не равно нулю, и что сумма всех ненулевых членов последовательности равна $n-1$. Как обычно, через $[a]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее a.

5. Дано натуральное число n. В Ёжгороде имеется центральная площадь и n периферийных площадей, а также n улиц, соединяющих центральную площадь с периферийными. Мэр хочет создать Реестр городских объектов, записав в строчку названия всех улиц и площадей. Регламент требует, чтобы название каждой улицы стояло в Реестре правее названий обеих площадей, которые она соединяет. Сколькими способами мэр может составить Реестр?

6. Точка M — середина боковой стороны AB, а точка N — середина боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC. Точка D на отрезке AM выбрана так, что $\angle CND=90^\circ$. Луч CD пересекает прямую MN в точке E. Точка F отмечена на отрезке CN таким образом, что $BF=CE$. Докажите, что из отрезков DE, DF и MN можно сложить треугольник.

7. Вася выбрал натуральное m и хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x<2^m$, через минуту оно заменится на число x^2+2^m, а если число $x\geqslant 2^m$, то через минуту оно уменьшится ровно вдвое. При каких m Вася может написать на доске такое число, что оно всегда будет оставаться целым?

8. *Ацтекский диамант ранга* n — это клетчатая фигура «ромбик» из $2n(n+1)$ клеток, вдоль каждой «стороны» которого расположено n клеток (на рисунке показан диамант ранга 3). При каких n ацтекский диамант ранга n можно разрезать на прямые тетрамино  и S-тетрамино  (фигурки можно поворачивать и переворачивать)?