МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны натуральные числа m и n. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на несколько квадратов, длины сторон которых — натуральные числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма длин сторон этих квадратов? У каждого квадрата считается одна сторона.

2. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают правила и договариваются о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах, и каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превышают 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:

1) Очень громко назвать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.

2) Сказать, у кого из кальмаров на карточке большее число.

Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе — жарят. Найдите наименьшее натуральное N, при котором кальмары могут спастись (вне зависимости от того, какие у них карточки), и при этом сумма чисел, названных кальмарами, не превысит N.

3. Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде

$$a_1 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 2^3 + \ldots + a_k \cdot k^3$$

с некоторым натуральным k и коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_k$, каждый из которых равен 1, -1, 3 или -3.

4. Для несократимой дроби $\frac{a}{b}$ нашли такую дробь $\frac{c}{d}$, что $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, $c \leqslant a$, $d \leqslant b$ и разность $r = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ наименьшая возможная ($a > 1$, $b > 1$, c, d — натуральные числа). Докажите, что число $\frac{1}{r}$ целое.

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2 = 2(bc+ca+ab)$. Докажите неравенство:

$$\big|(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\big| \leqslant 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

6. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC, в котором $\angle B = 2\angle C$. Биссектриса угла $\angle ACB$ пересекает отрезок AM в точке D. Докажите, что $\angle MDC \leqslant 45^\circ$.

7. На столе лежат 54 кучки с 1, 2, ..., 53, 54 камнями. Разрешается выбрать любую кучку, подсчитать количество k имеющихся в ней камней и убрать по k камней из всех кучек, в которых камней не меньше k. В результате нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько камней в ней может быть?

8. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точки D и E — середины гипотенузы AC и катета AB соответственно. Точка F внутри треугольника ABC такова, что треугольник DEF равносторонний. Прямые BF и AC пересекаются в точке X, а прямые AF и BD — в точке Y. Докажите, что $DX = YD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Даны натуральные числа m и n. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на несколько квадратов, длины сторон которых — натуральные числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма длин сторон этих квадратов? У каждого квадрата считается одна сторона.

2. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают правила и договариваются о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах, и каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превышают 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:

1) Очень громко назвать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.

2) Сказать, у кого из кальмаров на карточке большее число.

Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе — жарят. Могут ли кальмары договориться так, чтобы им удалось спастись вне зависимости от того, какие у них карточки им выдадут, и при этом сумма чисел, названных кальмарами, не превышала 15?

3. Натуральные числа x и y таковы, что число $x^4 + y^4 - x^2y^2$ делится на число $(x+y)^2$. Докажите, что число x^2 делится на число $x+y$.

4. Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ с натуральными числителем и знаменателем такова, что $\frac{c}{d} < \frac{n}{n^2-1}$, $c \leqslant n$, $d \leqslant n^2-1$ и разность $r = \frac{n}{n^2-1} - \frac{c}{d}$ наименьшая возможная. Найдите эту дробь.

5. Вещественные (не обязательно положительные) числа a, b и c удовлетворяют соотношению $abc = 2$. Докажите, что среди трёх чисел $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$ и $2c - \frac{1}{a}$ не более двух чисел, больших 2.

6. В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ прямые AB и CE пересекаются в точке P. Найдите угол PDG. Напомним, что правильным называется семиугольник, у которого равны все стороны и равны все углы.

7. На столе лежат 54 кучки с 1, 2, …, 53, 54 камнями. Разрешается выбрать любую кучку, подсчитать количество k имеющихся в ней камней и убрать по k камней из всех кучек, в которых камней не меньше k. В результате нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько камней в ней может быть?

8. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точки D и E — середины гипотенузы AC и катета AB соответственно. Точка F внутри треугольника ABC такова, что треугольник DEF равносторонний. Прямые BF и AC пересекаются в точке X, а прямые AF и BD — в точке Y. Докажите, что $DX = YD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Даны натуральные числа m и n. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на несколько квадратов, длины сторон которых — натуральные числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма длин сторон этих квадратов? У каждого квадрата считается одна сторона.

2. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают правила и договариваются о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах, и каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превышают 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:

1) Очень громко назвать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.

2) Сказать, у кого из кальмаров на карточке большее число.

Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе — жарят. Могут ли кальмары договориться так, чтобы им удалось спастись вне зависимости от того, какие у них карточки им выдадут, и при этом сумма чисел, названных кальмарами, не превышала 25?

3. Натуральные числа x и y таковы, что число $x^4 + y^4 - x^2y^2$ делится на число $(x + y)^2$. Докажите, что число x^2 делится на число $x + y$.

4. Несократимая дробь $\frac{c}{d}$ с натуральными числителем и знаменателем такова, что $\frac{c}{d} < \frac{n}{n^2-1}$, $c \leqslant n$, $d \leqslant n^2 - 1$ и разность $r = \frac{n}{n^2-1} - \frac{c}{d}$ наименьшая возможная. Найдите эту дробь.

5. Вещественные (не обязательно положительные) числа a, b и c удовлетворяют соотношению $abc = 2$. Докажите, что среди трёх чисел $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$ и $2c - \frac{1}{a}$ не более двух чисел, больших 2.

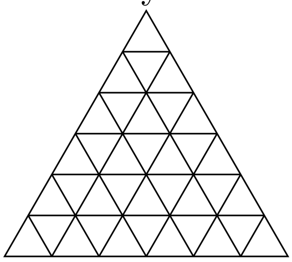
6. В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ прямые AB и CE пересекаются в точке P. Найдите угол PDG. Напомним, что правильным называется семиугольник, у которого равны все стороны и равны все углы.

7. На столе лежат 54 кучки с 1, 2, …, 53, 54 камнями. Разрешается выбрать любую кучку, подсчитать количество k имеющихся в ней камней и убрать по k камней из всех кучек, в которых камней не меньше k. В результате нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько камней в ней может быть?

8. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точки D и E — середины гипотенузы AC и катета AB соответственно. Точка F внутри треугольника ABC такова, что треугольник DEF равносторонний. Прямые BF и AC пересекаются в точке X, а прямые AF и BD — в точке Y. Докажите, что $DX = YD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Петя и Вася взяли белый правильный треугольник, разлинованный на 36 одинаковых правильных треугольничков, и играют в следующую игру. Они по очереди закрашивают по одному белому треугольничку: Петя — в красный цвет, Вася — в синий. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все треугольнички раскрашены. Петя победит, если в конце игры найдётся синий параллелограмм, состоящий из двух треугольничков. Может ли Вася ему помешать?



2. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают правила и договариваются о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах, и каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превышают 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:

1) Очень громко назвать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.

2) Сказать, у кого из кальмаров на карточке большее число.

Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе — жарят. Могут ли кальмары договориться так, чтобы им удалось спастись вне зависимости от того, какие у них карточки им выдадут, и при этом сумма чисел, названных кальмарами, не превышала 25?

3. Натуральные числа x и y таковы, что число $x^4 + y^4 - x^2y^2$ делится на число $(x+y)^2$. Докажите, что число x^2 делится на число $x+y$.

4. Решите в целых числах уравнение $a^2 + b = b^{2022}$.

5. Вещественные (не обязательно положительные) числа a, b и c удовлетворяют соотношению $abc = 2$. Докажите, что среди трёх чисел $2a - \frac{1}{b}$, $2b - \frac{1}{c}$ и $2c - \frac{1}{a}$ не более двух чисел, больших 2.

6. В правильном семиугольнике $ABCDEFG$ прямые AB и CE пересекаются в точке P. Найдите угол PDG. Напомним, что правильным называется семиугольник, у которого равны все стороны и равны все углы.

7. На столе лежат 54 кучки с 1, 2, …, 53, 54 камнями. Разрешается выбрать любую кучку, подсчитать количество k имеющихся в ней камней и убрать по k камней из всех кучек, в которых камней не меньше k. В результате нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько камней в ней может быть?

8. Точки X и Y отмечены на сторонах AC и BC треугольника ABC. Пусть M — середина XY. Оказалось, что $AX = MX = MC = MY = BY$. Найдите величину угла $\angle AMB$.