МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–4 МЕСТА

1. Пусть p — простое число, x, y — натуральные числа, а последовательность (a_n) задана соотношениями

$$a_0 = a_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_{n+2} = x \cdot a_{n+1} + y \cdot a_n + 1 \quad \text{для всех целых } n \geqslant 0.$$

Докажите, что НОД(a_p, a_{p+1}) или равен 1, или больше $\sqrt{p}$.

2. Даны натуральные числа n и $j < n$. Рассмотрим все перестановки чисел от 1 до n. В перестановке $a_1a_2\ldots a_n$ разрешается поменять местами любые два соседних числа a_i и a_{i+1}, если $|a_i - a_{i+1}| \geqslant j$. Такую операцию будем называть *флипом.* Костя выписывает перестановки чисел от 1 до n на листе бумаги «в линеечку». Выписав очередную перестановку $a_1a_2\ldots a_n$ (из тех, что еще не были выписаны ранее), Костя в ту же строку выписывает все перестановки, которые из неё можно както получить, применяя флипы (эти перестановки тоже ранее выписаны не были). Сколько строк потребуется Косте, чтобы выписать все $n!$ перестановок?

3. В каждом зоопарке обитает ровно 100 видов животных. Зоопарки бывают двух типов: с вайфаем и без вайфая. Для любой пары зоопарков разного типа есть вид животных, который содержится в обоих зоопарках. Докажите, что все виды животных можно разделить на три непересекающихся списка так, чтобы в каждом зоопарке обитали животные не менее чем из двух списков.

4. В треугольнике ABC с углом $\angle C = 60^\circ$ сторона BC больше стороны AC. Точка $D \neq A$ на отрезке AC такова, что $AB = BD$, а точка $E \neq B$ на прямой BC такова, что $AB = AE$. Найдите величину угла $\angle DEC$.

5. Докажите, что существуют такие натуральные числа a и b, что ни одно из чисел $b+1, b+2, \ldots, b+100$ не делится ни на одно из чисел $a+1, a+2, \ldots, a+100$, но при этом $(b+1)(b+2)\ldots(b+100)$ делится на $(a+1)(a+2)\ldots(a+100)$.

6. Дано натуральное n. Докажите, что можно закрасить некоторые клетки бесконечной клетчатой плоскости в зелёный цвет так, чтобы любой прямоугольник из n клеток содержал нечётное число зелёных клеток.

7. Пусть A — множество всех натуральных чисел n таких, что расстояние от числа $n\sqrt{2023} - \frac{1}{3}$ до ближайшего целого не превосходит $\frac{1}{2023}$. Докажите, что уравнение

$$20x + 21y = 22z$$

не имеет решений в числах $x, y, z \in A$.

8. На сторонах BC, CA и AB равностороннего треугольника расположены равные отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 соответственно так, что точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат отрезкам BA_2, CB_2 и AC_2 соответственно. Прямые B_2C_1, C_2A_1 и A_2B_1 образуют в пересечении треугольник. Докажите, что отрезки B_2C_1, C_2A_1 и A_2B_1 пропорциональны сторонам этого треугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА; ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Последовательность $p_0, p_1, p_2, \ldots$ состоит из простых чисел, не обязательно различных. Предположим, что существуют такие целые числа $a_0, \ldots, a_d$, причем $a_d \neq 0$, что

$$a_0 p_n + a_1 p_{n+1} + \ldots + a_d p_{n+d} = 0$$

для всех n. Докажите, что в последовательности $p_0, p_1, p_2 \ldots$ конечное количество различных простых чисел.

2. Даны натуральные числа n и $j < n$. Рассмотрим все перестановки чисел от 1 до n. В перестановке $a_1 a_2 \ldots a_n$ разрешается поменять местами любые два соседних числа a_i и a_{i+1}, если $|a_i - a_{i+1}| \geqslant j$. Такую операцию будем называть *флипом.* Костя выписывает перестановки чисел от 1 до n на листе бумаги «в линеечку». Выписав очередную перестановку $a_1 a_2 \ldots a_n$ (из тех, что еще не были выписаны ранее), Костя в ту же строку выписывает все перестановки, которые из неё можно как-то получить, применяя флипы (эти перестановки тоже ранее выписаны не были). Сколько строк потребуется Косте, чтобы выписать все $n!$ перестановок?

3. В каждом зоопарке обитает ровно 100 видов животных. Зоопарки бывают двух типов: с вайфаем и без вайфая. Для любой пары зоопарков разного типа есть вид животных, который содержится в обоих зоопарках. Докажите, что все виды животных можно разделить на три непересекающихся списка так, чтобы в каждом зоопарке обитали животные не менее чем из двух списков.

4. В треугольнике ABC с углом $\angle C = 60^\circ$ сторона BC больше стороны AC. Точка $D \neq A$ на отрезке AC такова, что $AB = BD$, а точка $E \neq B$ на прямой BC такова, что $AB = AE$. Найдите величину угла $\angle DEC$.

5. Докажите, что существуют такие натуральные числа a и b, что ни одно из чисел $b+1, b+2, \ldots, b+100$ не делится ни на одно из чисел $a+1, a+2, \ldots, a+100$, но при этом $(b+1)(b+2)\ldots(b+100)$ делится на $(a+1)(a+2)\ldots(a+100)$.

6. Докажите, что можно закрасить некоторые клетки бесконечной клетчатой плоскости в зелёный цвет так, чтобы любой прямоугольник из 100 клеток содержал нечётное число зелёных клеток.

7. Пусть A — множество всех натуральных чисел n таких, что расстояние от числа $n\sqrt{2023} - \frac{1}{3}$ до ближайшего целого не превосходит $\frac{1}{2023}$. Докажите, что уравнение

$$20x + 21y = 22z$$

не имеет решений в числах $x, y, z \in A$.

8. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D, точка M — середина отрезка BD. Прямая AM пересекает сторону BC в точке E. Оказалось, что $AB = DE$ и $\angle BAE = 2\angle AEB$. Точка F отмечена на продолжении отрезка DE за точку E так, что $AB + AM = EF$. Докажите, что треугольник BMF — равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Последовательность $p_0, p_1, p_2, \ldots$ состоит из простых чисел, не обязательно различных. Предположим, что существуют такие целые числа $a_0, \ldots, a_d$, причем $a_d \neq 0$, что

$$a_0 p_n + a_1 p_{n+1} + \ldots + a_d p_{n+d} = 0$$

для всех n. Докажите, что в последовательности $p_0, p_1, p_2 \ldots$ конечное количество различных простых чисел.

2. Даны натуральные числа n и $j < n$. Рассмотрим все перестановки чисел от 1 до n. В перестановке $a_1 a_2 \ldots a_n$ разрешается поменять местами любые два соседних числа a_i и a_{i+1}, если $|a_i - a_{i+1}| \geqslant j$. Такую операцию будем называть *флипом.* Костя выписывает перестановки чисел от 1 до n на листе бумаги «в линеечку». Выписав очередную перестановку $a_1 a_2 \ldots a_n$ (из тех, что еще не были выписаны ранее), Костя в ту же строку выписывает все перестановки, которые из неё можно как-то получить, применяя флипы (эти перестановки тоже ранее выписаны не были). Сколько строк потребуется Косте, чтобы выписать все $n!$ перестановок?

3. На окружности расположено несколько точек. Некоторые пары этих точек соединены отрезками, каждый отрезок окрашен в один из 10 цветов. Оказалось, что из каждой точки выходит ровно по одному отрезку каждого цвета, причём одноцветные отрезки не имеют общих точек (даже концов). Докажите, что все точки можно разбить на две группы таким образом, чтобы отрезки соединяли только точки из разных групп.

4. В треугольнике ABC с углом $\angle C = 60^\circ$ сторона BC больше стороны AC. Точка $D \neq A$ на отрезке AC такова, что $AB = BD$, а точка $E \neq B$ на прямой BC такова, что $AB = AE$. Найдите величину угла $\angle DEC$.

5. Существуют ли попарно различные натуральные числа a, b, c, для которых числа $ab+1$, $bc+1$, $ca+1$ являются факториалами натуральных чисел?

6. Докажите, что можно закрасить некоторые клетки бесконечной клетчатой плоскости в зелёный цвет так, чтобы любой прямоугольник из 100 клеток содержал нечётное число зелёных клеток.

7. Пусть A — множество всех натуральных чисел n таких, что расстояние от числа $n\sqrt{2023} - \frac{1}{3}$ до ближайшего целого не превосходит $\frac{1}{2023}$. Докажите, что уравнение

$$20x + 21y = 22z$$

не имеет решений в числах $x, y, z \in A$.

8. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D, точка M — середина отрезка BD. Прямая AM пересекает сторону BC в точке E. Оказалось, что $AB = DE$ и $\angle BAE = 2\angle AEB$. Точка F отмечена на продолжении отрезка DE за точку E так, что $AB + AM = EF$. Докажите, что треугольник BMF — равнобедренный.

Математический бой №4. 31.10.2023
Старшая группа, третья лига

1. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b)$ делится на $a + 1$. Докажите, что если $b \leqslant a$, то b — полный квадрат.

2. Оля кормит кошку Кайю разными кормами. Срок годности открытой упаковки корма — 8 дней (т.е. любой упаковкой можно пользоваться в течение 8 дней с первого момента использования, считая исходный день). Кайя отказывается есть корм, если ела корм из той же упаковки вчера или позавчера. Какого наименьшего количества упаковок достаточно купить Оле, чтобы кормить ими Кайю в течение 366 дней?

3. На окружности расположено несколько точек. Некоторые пары этих точек соединены отрезками, каждый отрезок окрашен в один из 10 цветов. Оказалось, что из каждой точки выходит ровно по одному отрезку каждого цвета, причём одноцветные отрезки не имеют общих точек (даже концов). Докажите, что все точки можно разбить на две группы таким образом, чтобы отрезки соединяли только точки из разных групп.

4. В треугольнике ABC с углом $\angle C = 60^\circ$ сторона BC больше стороны AC. Точка $D \neq A$ на отрезке AC такова, что $AB = BD$, а точка $E \neq B$ на прямой BC такова, что $AB = AE$. Найдите величину угла $\angle DEC$.

5. Существуют ли попарно различные натуральные числа a, b, c, для которых числа $ab + 1$, $bc + 1$, $ca + 1$ являются факториалами натуральных чисел?

6. Докажите, что можно закрасить некоторые клетки бесконечной клетчатой плоскости в зелёный цвет так, чтобы любой прямоугольник из 100 клеток содержал нечётное число зелёных клеток.

7. Целые числа a, b и c отличны от нуля. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left(1 + \frac{a-1}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{c+1}{a}\right)^2.$$

8. В параллелограмме $ABCD$ $AB > AD$. На лучу BD отмечены точки X и Y так, что $CX = CB$ и $AY = AB$. Докажите, что $DX = DY$.