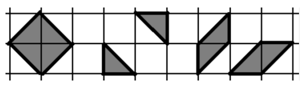
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

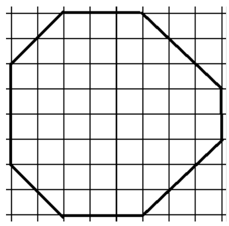
1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. На стороне AB отмечена точка E. Известно, что $AC = BD$ и $BE = CD$. Докажите, что $AD + DE < 2BD$.

2. Внутри квадрата со стороной 1 отмечено n^2 точек. Докажите, что существует замкнутая несамопересекающаяся ломаная длины не больше $10n$, проходящая через все отмеченные точки.

3. Игорь написал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 100$, именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает $2k$ чисел с начала ряда при некотором целом k и следующие за ними четыре числа a, b, c, d меняет на два числа $ac + bd$ и $ad + bc$ в любом порядке. Через 49 минут на доске остались 2 числа. Докажите, что они не зависят от порядка действий.

4. Назовем фигурой M_{ij} ($i, j \leqslant 4$) квадрат 8×8, у которого два левых угла обрезаны на i клеток, а два правых угла обрезаны на j клеток. Например, на рисунке приведена фигура M_{23}. При каких i, j фигуру M_{ij} можно разрезать на фигурки как на рисунке?





Фигурки запрещено поворачивать и переворачивать.

5. Существует ли натуральное число N, удовлетворяющее следующим трем условиям:

- N делится на 2^{2023}, но не делится на 2^{2024};
- N имеет только три различные цифры в записи, и ни одна из них не равна нулю;
- хотя бы 99,9% цифр числа N нечетны?

6. Петя расставил числа $1, 2, 3, \ldots, 9$ в клетки квадрата 3×3, каждое по одному разу. Затем Вася посчитал количество трехклеточных уголков внутри квадрата, сумма чисел в клетках которых делится на 3. Какое наибольшее количество могло получиться у Васи?

7. Найдите все натуральные числа a, b и c такие, что $\dfrac{(ab-1)(ac-1)}{bc}$ является квадратом целого числа.

8. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают все правила и смогут договориться о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах, и каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превышают 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:

- Очень громко сказать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.
- Сказать, у кого из кальмаров на карточке большее число.

Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе жарят. Как кальмарам договориться, чтобы выжить, и чтобы при этом сумма всех названных обоими кальмарами чисел не превышала 25?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В квадрате со стороной 1 отмечено 25 точек. Всегда ли существует замкнутая несамопересекающаяся ломаная, длина которой равна 6, проходящая через все отмеченные точки?

2. Игорь написал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 100$, именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает $2k$ чисел с начала ряда при некотором целом k и следующие за ними четыре числа a, b, c, d меняет на два числа $ac + bd$ и $ad + bc$ в любом порядке. Через 49 минут на доске остались 2 числа. Чему может быть равна сумма этих чисел?

3. Петя расставил числа $1, 2, 3, \ldots, 9$ в клетки квадрата 3×3, каждое по одному разу. Затем Вася посчитал количество трехклеточных уголков внутри квадрата, сумма чисел в клетках которых делится на 3. Какое наибольшее количество могло получиться у Васи?

4. На первой странице блокнота написано число 210. На каждой следующей странице пишут натуральные делители всех чисел, написанных на предыдущей (если некоторое число является делителем k чисел с предыдущей страницы, то его выписывают k раз). Сколько чисел будет выписано на 10-й странице? Ответ нужно дать в виде целого числа.

5. Саша придумал натуральные числа a, b и c такие, что

$$\frac{(ab-1)(ac-1)}{bc} = 2023.$$

Чему может быть равно a?

6. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают все правила и смогут договориться о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах, и каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превышают 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:

- Очень громко сказать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.
- Сказать, у кого из кальмаров на карточке большее число.

Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе жарят. Как кальмарам договориться, чтобы выжить, и чтобы при этом сумма всех названных обоими кальмарами чисел не превышала 25?

7. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка E. На луче CE отмечена точка H такая, что $\angle AHC = 90^\circ$. Лучи AH и CB пересекаются в точке M. Луч ME пересекает отрезок AD в точке K. Известно, что $\angle CEK = 70^\circ$. Найдите величину угла ECK.

8. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $(2p-q)^2 = 6p - q$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. В квадрате со стороной 1 отмечено 25 точек. Всегда ли существует замкнутая несамопересекающаяся ломаная, длина которой равна 6, проходящая через все отмеченные точки?

2. Про ненулевые числа x, y, z известно, что $xy = 2(x+y)$, $yz = 4(y+z)$, $zx = 8(z+x)$. Найдите эти числа.

3. Петя расставил числа $1, 2, 3, \ldots, 9$ в клетки квадрата 3×3, каждое по одному разу. Затем Вася посчитал количество трехклеточных уголков внутри квадрата, сумма чисел в клетках которых делится на 3. Какое наибольшее количество могло получиться у Васи?

4. На первой странице блокнота написано число 210. На каждой следующей странице пишут натуральные делители всех чисел, написанных на предыдущей (если некоторое число является делителем k чисел с предыдущей страницы, то его выписывают k раз). Сколько чисел будет выписано на 10-й странице? Ответ нужно дать в виде целого числа.

5. Для четырёхзначного числа $\overline{abcd}$ назовём *разбиением* сумму $2\cdot\overline{ab}+\overline{cd}$ (например, если $\overline{abcd} = 1107$, то его разбиение равно $2 \cdot 11 + 07 = 29$. Найдите все не более чем 4-значные натуральные числа n, для которых верно следующее: четырёхзначное число X делится на n тогда и только тогда, когда разбиение числа X делится на n.

6. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка E. На луче CE отмечена точка H такая, что $\angle AHC = 90°$. Лучи AH и CB пересекаются в точке M. Луч ME пересекает отрезок AD в точке K. Известно, что $\angle CEK = 70°$. Найдите величину угла ECK.

7. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $(2p - q)^2 = 6p - q$.

8. На столе в ряд лежат 2023 монеты: орёл, две решки, орёл, две решки, орёл, две решки и т.д. (последним лежит орёл). За один ход можно или убрать одну или несколько монет подряд, среди которых орлы и решки чередуются, или добавить такой чередующийся фрагмент в любое место ряда (остальные монеты сдвигаются так, чтобы снова получился один ряд). За какое наименьшее количество ходов по таким правилам можно убрать со стола все монеты?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Про ненулевые числа x, y, z известно, что $xy = 2(x+y)$, $yz = 4(y+z)$, $zx = 8(z+x)$. Найдите эти числа.

2. Петя расставил числа $1, 2, 3, \ldots, 9$ в клетки квадрата 3×3, каждое по одному разу. Затем Вася посчитал количество трехклеточных уголков внутри квадрата, сумма чисел в клетках которых делится на 3. Какое наибольшее количество могло получиться у Васи?

3. Класс, в котором учатся Аня и Боря, писал ЕГЭ. Средний балл по классу равен 64, но если считать без учёта Ани — то 63,2, а без учёта Бори — 65. Кроме того, известно, что Аня получила на ЕГЭ на 63 балла больше Бори. Сколько учеников в классе?

4. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка E. На луче CE отмечена точка H такая, что $\angle AHC = 90°$. Лучи AH и CB пересекаются в точке M. Луч ME пересекает отрезок AD в точке K. Известно, что $\angle CEK = 70°$. Найдите величину угла ECK.

5. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $(2p-q)^2 = 6p - q$.

6. На столе в ряд лежат 2023 монеты: орёл, две решки, орёл, две решки, орёл, две решки и т.д. (последним лежит орёл). За один ход можно или убрать одну или несколько монет подряд, среди которых орлы и решки чередуются, или добавить такой чередующийся фрагмент в любое место ряда (остальные монеты сдвигаются так, чтобы снова получился один ряд). За какое наименьшее количество ходов по таким правилам можно убрать со стола все монеты?

7. На доске было написано натуральное число n. В 12:02 его поделили на 2 и возвели в квадрат. В 12:03 новое число поделили на 3 и возвели в квадрат. Далее каждую минуту процесс повторялся: текущее число делили на количество минут и возводили в квадрат. В 12:20 число последний раз поделили на 20 и возвели в квадрат. При каком наименьшем n результат мог оказаться целым числом?

8. Петя и Вася взяли белый правильный треугольник, разлинованный на 25 одинаковых правильных треугольничков, и играют в следующую игру. Они по очереди закрашивают по одному белому треугольничку, Петя — в красный цвет, Вася — в синий. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все треугольнички раскрашены. Петя победит, если в конце игры найдётся синий параллелограмм, состоящий из двух треугольничков. Может ли Вася ему помешать?