МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральное число будем называть *абсолютно квадратным*, если сумма его цифр является квадратом натурального числа. Например, 13 является абсолютно квадратным, так как $1 + 3 = 2^2$, а 16 — нет. Существует ли кратное 9 и большее миллиарда число, которое не является суммой двух абсолютно квадратных натуральных чисел?

2. На одном берегу реки Нелли расположены 7 сёл, а на другом 57. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм "Сцилла" или "Харибда". Докажите, что можно выбрать или по два села на каждом берегу так, что все четыре линии между ними обслуживает фирма "Сцилла", или по шесть сёл на каждом берегу так, что все 36 линий между ними обслуживает фирма "Харибда".

3. Разрежьте квадрат на наименьшее количество прямоугольников, у каждого из которых меньшая сторона относится к большей стороне как $3 : 5$.

4. Дан набор из 64 натуральных чисел, сумма которых делится на 32. За одну операцию разрешается выбрать из них любые 32 числа и прибавить ко всем им одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более 63 таких операций.

5. Алиса и Боб играют в игру на доске 100×100. Ходят по очереди, начинает Алиса. Первоначально доска пуста. Своим ходом игрок выбирает целое число от 1 до 100^2, которое еще не записано на доске, и вписывает его в любую пустую клетку. Когда пустых клеток не остается, Алиса вычисляет сумму чисел в каждой строке, и ее результат равен максимальному из этих 100 чисел. Боб вычисляет сумму чисел в каждом столбце, и его результат равен максимальному из этих 100 чисел. Алиса выигрывает, если ее результат больше результата Боба, Боб выигрывает, если его результат больше результата Алисы. А при равенстве результатов Алисы и Боба объявляется ничья. Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия, и если есть, то у кого?

6. Натуральное число m разбили в сумму нескольких натуральных слагаемых (не обязательно различных). Оказалось, что сумма кубов этих слагаемых равна $6m$. При каких m такое могло быть?

7. В распоряжении мастера имеется k белых кубиков. На каждой грани каждого из этих кубиков мастер должен нарисовать одну из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$.
Определите наименьшее k, при котором мастер может нарисовать цифры так, что для любой последовательности из 300 цифр можно будет выбрать 300 кубиков и выложить их в ряд таким образом, чтобы цифры на верхних гранях кубиков образовывали эту последовательность. Цифры 6 и 9 на кубиках отличаются: они выглядят как $\underline{6}$ и $\underline{9}$.

8. У Камиллы есть колода из 99 карт, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 99$. Вначале она берет в руку 49 карт, а остальные кладет на стол так, чтобы были видны их номера. За один обмен она заменяет все карты в руке на выбранные ею 49 из 50 карт со стола. Докажите, что какие бы карты Камилла ни получила изначально, она может произвести не более 49 обменов так, чтобы в итоге получить на руке карты с номерами $1, 2, \ldots, 49$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральное число будем называть *абсолютно квадратным*, если сумма его цифр является квадратом натурального числа. Например, 13 является абсолютно квадратным, так как $1 + 3 = 2^2$, а 16 — нет. Существует ли большее миллиарда число, которое не является суммой двух абсолютно квадратных натуральных чисел?

2. На одном берегу реки Нелли расположены 4 села, а на другом N сёл. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм “Сцилла” или “Харибда”. При каком наибольшем N может так оказаться, что нет ни одного циклического маршрута, проходящего ровно по 4 сёлам и обслуживаемого моторками одной и той же фирмы?

3. Разрежьте квадрат на наименьшее количество прямоугольников, у каждого из которых меньшая сторона относится к большей стороне как $3 : 5$.

4. Дан набор из 2023 натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать из них любые два и одновременно увеличить или одновременно уменьшить их оба на одно и то же натуральное число так, чтобы числа все еще остались натуральными. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более 2025 таких операций.

5. Алиса и Боб играют в игру на доске 100×100. Ходят по очереди, начинает Алиса. Первоначально доска пуста. Своим ходом игрок выбирает целое число от 1 до 100^2, которое еще не записано на доске, и вписывает его в любую пустую клетку. Когда пустых клеток не остается, Алиса вычисляет сумму чисел в каждой строке, и ее результат равен максимальному из этих 100 чисел. Боб вычисляет сумму чисел в каждом столбце, и его результат равен максимальному из этих 100 чисел. Алиса выигрывает, если ее результат больше результата Боба, Боб выигрывает, если его результат больше результата Алисы. А при равенстве результатов Алисы и Боба объявляется ничья. Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия, и если есть, то у кого?

6. Может ли сумма нескольких (не обязательно различных) натуральных чисел равняться 3 миллионам, а сумма их кубов равняться 18 миллионам?

7. В распоряжении мастера имеется k белых кубиков. На каждой грани каждого из этих кубиков мастер должен нарисовать одну из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$.
Определите наименьшее k, при котором мастер может нарисовать цифры так, что для любой последовательности из 300 цифр можно будет выбрать 300 кубиков и выложить их в ряд таким образом, чтобы цифры на верхних гранях кубиков образовывали эту последовательность. Цифры 6 и 9 на кубиках отличаются: они выглядят как $\underline{6}$ и $\underline{9}$.

8. У Камиллы есть колода из 99 карт, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 99$. Вначале она берет в руку 49 карт, а остальные кладет на стол так, чтобы были видны их номера. За один обмен она заменяет все карты в руке на выбранные ею 49 из 50 карт со стола. Докажите, что какие бы карты Камилла ни получила изначально, она может произвести не более 49 обменов так, чтобы в итоге получить на руке карты с номерами $1, 2, \ldots, 49$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральное число будем называть *абсолютно квадратным*, если сумма его цифр является квадратом натурального числа. Например, 13 является абсолютно квадратным, так как $1 + 3 = 2^2$, а 16 — нет. Существует ли большее миллиарда число, которое не является суммой двух абсолютно квадратных натуральных чисел?

2. На одном берегу реки Нелли расположены 4 села, а на другом N сёл. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм “Сцилла” или “Харибда”. При каком наибольшем N может так оказаться, что нет ни одного циклического маршрута, проходящего ровно по 4 сёлам и обслуживаемого моторками одной и той же фирмы?

3. Разрежьте квадрат на наименьшее количество прямоугольников, у каждого из которых меньшая сторона относится к большей стороне как $3 : 5$.

4. Дан набор из N натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать из них любые два и одновременно увеличить или одновременно уменьшить их оба на одно и то же натуральное число так, чтобы числа все еще остались натуральными. При каких N такими операциями можно гарантировано сделать все числа одинаковыми?

5. Алиса и Боб играют в игру на доске 8×8. Ходят по очереди, начинает Алиса. Первоначально доска пуста. Своим ходом игрок выбирает целое число от 1 до 64, которое еще не записано на доске, и вписывает его в любую пустую клетку. Когда пустых клеток не остается, Алиса вычисляет сумму чисел в каждой строке, и ее результат равен максимальному из этих 8 чисел. Боб вычисляет сумму чисел в каждом столбце, и его результат равен максимальному из этих 8 чисел. Алиса выигрывает, если ее результат больше результата Боба, Боб выигрывает, если его результат больше результата Алисы. А при равенстве результатов Алисы и Боба объявляется ничья. Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия, и если есть, то у кого?

6. Может ли сумма нескольких (не обязательно различных) натуральных чисел равняться 3 миллионам, а сумма их кубов равняться 18 миллионам?

7. В распоряжении мастера имеется 450 белых кубиков. На каждой грани каждого из этих кубиков мастер должен нарисовать одну из цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$. Сможет ли мастер нарисовать цифры так, что для любой последовательности из 300 цифр можно будет выбрать 300 кубиков и выложить их в ряд, чтобы цифры на верхних гранях кубиков образовывали эту последовательность. Цифры 6 и 9 на кубиках отличаются: они выглядят как $\underline{6}$ и $\underline{9}$.

8. У Камиллы есть колода из 99 карт, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 99$. Вначале она берет в руку 49 карт, а остальные кладет на стол так, чтобы были видны их номера. За один обмен она заменяет все карты в руке на выбранные ею 49 из 50 карт со стола. Докажите, что какие бы карты Камилла ни получила изначально, она может произвести не более 49 обменов так, чтобы в итоге получить на руке карты с номерами $1, 2, \ldots, 49$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 9, но не делится на сумму цифр суммы своих цифр.

2. В стране 100 городов, и между каждой парой городов организована авиалиния. Министерство транспорта решило сократить расходы на обслуживание авиалиний. Если оказывается, что между какими-то пятью городами есть хотя бы пять авиалиний, то одну из этих линий закрывают при условии, что остаётся возможность летать из любого города в любой другой, возможно, с пересадками. Какое наименьшее число авиалиний может остаться в стране?

3. Разрежьте квадрат на наименьшее количество прямоугольников, у каждого из которых меньшая сторона относится к большей стороне как $3:5$.

4. Дан набор из 100 натуральных чисел. Разрешается выбрать из них любые 7 чисел и прибавить ко всем им одно и то же натуральное число. Докажите, что за несколько таких действий все числа можно сделать равными.

5. Алиса и Боб играют в игру на доске 8×8. Ходят по очереди, начинает Алиса. Первоначально доска пуста. Своим ходом игрок выбирает целое число от 1 до 64, которое еще не записано на доске, и вписывает его в любую пустую клетку. Когда пустых клеток не остается, Алиса вычисляет сумму чисел в каждой строке, и ее результат равен максимальному из этих 8 чисел. Боб вычисляет сумму чисел в каждом столбце, и его результат равен максимальному из этих 8 чисел. Алиса выигрывает, если ее результат больше результата Боба, Боб выигрывает, если его результат больше результата Алисы. А при равенстве результатов Алисы и Боба объявляется ничья. Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия, и если есть, то у кого?

6. Может ли сумма нескольких (не обязательно различных) натуральных чисел равняться 120, а сумма их кубов равняться 1800?

7. В распоряжении мастера имеется 450 белых кубиков. На каждой грани каждого из этих кубиков мастер должен нарисовать одну из цифр 0, 1, 2, …, 9. Сможет ли мастер нарисовать цифры так, что для любой последовательности из 300 цифр можно будет выбрать 300 кубиков и выложить их в ряд, чтобы цифры на верхних гранях кубиков образовывали эту последовательность. Цифры 6 и 9 на кубиках отличаются: они выглядят как $\underline{6}$ и $\underline{9}$.

8. У Камиллы есть колода из 16 карт, каждая из которых окрашена в один из четырёх цветов: белый, синий, красный и зелёный — по 4 карты каждого цвета. За один ход она может вынуть из колоды любое количество карт и положить их сверху колоды, не переворачивая и не меняя их взаимного порядка. Какого наименьшего количества ходов ей гарантированно хватит (не зависимо от расположения карт в колоде) для того, чтобы карты оказались лежащими по порядку сверху вниз: сначала белые, затем синие, затем красные и в конце зелёные?