МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Все стороны выпуклого многоугольника имеют длину не более 1. Докажите, что все его стороны и все диагонали можно покрасить в два цвета так, чтобы суммарные длины отрезков каждого цвета отличались не более чем на 1.

2. Дан набор из 64 натуральных чисел, сумма которых делится на 32. Разрешается выбрать из них любые 32 числа и прибавить ко всем ним одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более 63 таких операций.

3. Алиса и Боб играют в игру на доске 100×100. Ходят по очереди, начинает Алиса. Первоначально доска пуста. Своим ходом игрок выбирает целое число от 1 до 100^2, которое еще не записано на доске, и вписывает его в любую пустую клетку. Когда пустых клеток не остается, Алиса вычисляет сумму чисел в каждой строке, и ее результат равен максимальному из этих 100 чисел. Боб вычисляет сумму чисел в каждом столбце, и его результат равен максимальному из этих 100 чисел. Алиса выигрывает, если ее результат больше результата Боба, Боб выигрывает, если его результат больше результата Алисы, иначе ничья. Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия, и если есть, то у кого?

4. В 12:00 папа с Максимом и одним велосипедом на двоих вышли из магазина домой. Максим может идти вприпрыжку со скоростью 2 км в час или ехать на велосипеде со скоростью 5 км в час. Папа может ехать на велосипеде со скоростью 10 км в час или идти пешком со скоростью 4 км в час. Вдвоем на велосипеде они ехать не могут. Мама перестанет волноваться, когда оба окажутся дома. Папа и Максим хотят, чтобы мама поскорее перестала волноваться. Во сколько перестанет волноваться мама, если расстояние от дома до магазина равно 3 км?

5. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D, на стороне AC — точка E, а на отрезке CD — точка F. Оказалось, что $AB = CD = CE$ и $AE = BD = CF$. Докажите, что $\angle ADE = \angle BFD$.

6. Натуральное число m разбили на сумму нескольких натуральных слагаемых $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (не обязательно различных). Оказалось, что $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 6m$. При каких m такое могло произойти?

7. На одном берегу реки Нелли расположены 7 сёл, а на другом — 57. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует катер одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать либо по два села на каждом берегу так, что все четыре линии между ними обслуживает фирма «Сцилла», либо по шесть сёл на каждом берегу так, что все 36 линий между ними обслуживает фирма «Харибда».

8. Найдите все натуральные a и b, для которых

$$\frac{1}{\text{НОК}(a^2, b^3)} + \frac{1}{\text{НОК}(b^2, a^3)} = \frac{1}{2023ab}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Все стороны выпуклого многоугольника имеют длину не более 1. Докажите, что все его стороны и все диагонали можно покрасить в два цвета так, чтобы суммарные длины отрезков каждого цвета отличались не более чем на 1.

2. Дан набор из 64 натуральных чисел, сумма которых чётна. Разрешается выбрать из них любые 2 числа и прибавить к ним одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более 63 таких операций.

3. В 12:00 папа с Максимом и одним велосипедом на двоих вышли из магазина домой. Максим может идти вприпрыжку со скоростью 2 км в час или ехать на велосипеде со скоростью 5 км в час. Папа может ехать на велосипеде со скоростью 10 км в час или идти пешком со скоростью 4 км в час. Вдвоем на велосипеде они ехать не могут. Мама перестанет волноваться, когда оба окажутся дома. Папа и Максим хотят, чтобы мама поскорее перестала волноваться. Во сколько перестанет волноваться мама, если расстояние от дома до магазина равно 3 км?

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D, на стороне AC — точка E, а на отрезке CD — точка F. Оказалось, что $AB = CD = CE$ и $AE = BD = CF$. Докажите, что $\angle ADE = \angle BFD$.

5. Натуральное число m разбили на сумму нескольких натуральных слагаемых $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (не обязательно различных). Оказалось, что $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 6m$. При каких m такое могло произойти?

6. На одном берегу реки Нелли расположены 7 сёл, а на другом — 57. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует катер одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать либо по два села на каждом берегу так, что все четыре линии между ними обслуживает фирма «Сцилла», либо по шесть сёл на каждом берегу так, что все 36 линий между ними обслуживает фирма «Харибда».

7. Квадрат 5×5 покрывают по клеточкам несколькими Z-тетрамино (четырёхклеточные фигурки в виде буквы Z) так, что никакая клетка не покрыта более чем двумя фигурами. При этом Z-тетрамино не вылезают за границы квадрата. Какое наименьшее количество клеток квадрата может остаться непокрытыми ни одной фигуркой?

8. Найдите все натуральные a и b такие, что НОД(a^2, b^3) + НОД$(b^2, a^3) = ab$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Все стороны выпуклого многоугольника имеют длину не более 1. Докажите, что все его стороны и все диагонали можно покрасить в два цвета так, чтобы суммарные длины отрезков каждого цвета отличались не более чем на 1.

2. Дан набор из 64 натуральных чисел, сумма которых чётна. Разрешается выбрать из них любые 2 числа и прибавить к ним одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более 63 таких операций.

3. Папа с Максимом и одним велосипедом на двоих возвращаются из магазина домой. Максим может идти вприпрыжку со скоростью 2 км в час или ехать на велосипеде со скоростью 5 км в час. Папа может ехать на велосипеде со скоростью 10 км в час или идти пешком со скоростью 4 км в час. Вдвоем на велосипеде они ехать не могут. Расстояние от магазина до дома равно 3 км. Могут ли они добраться до дома быстрее, чем за 43 минуты?

4. Натуральное число m разбили на сумму нескольких натуральных слагаемых $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (не обязательно различных). Оказалось, что $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 6m$. При каких m такое могло произойти?

5. На левом берегу реки Нелли расположены 3 села, а на правом — 25. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать два села на одном берегу и 5 сёл на другом так, что все десять линий между ними обслуживает одна и та же фирма.

6. Квадрат 5×5 покрывают по клеточкам несколькими Z-тетрамино (четырёхклеточные фигурки в виде буквы Z) так, что никакая клетка не покрыта более чем двумя фигурами. При этом Z-тетрамино не вылезают за границы квадрата. Какое наименьшее количество клеток квадрата может остаться непокрытыми ни одной фигуркой?

7. Найдите все натуральные a и b такие, что $\text{НОД}(a^2, b^3) + \text{НОД}(b^2, a^3) = ab$.

8. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC = DE$, $AE = CD$, $\angle A = \angle D = 75^\circ$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 105^\circ$, $\angle E = 135^\circ$. Найдите величину угла $\angle ACE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Папа с Максимом и одним велосипедом на двоих возвращаются из магазина домой. Максим может идти вприпрыжку со скоростью 2 км в час или ехать на велосипеде со скоростью 5 км в час. Папа может ехать на велосипеде со скоростью 10 км в час или идти пешком со скоростью 4 км в час. Вдвоем на велосипеде они ехать не могут. Расстояние от магазина до дома равно 3 км. Могут ли они добраться до дома быстрее, чем за 43 минуты?

2. Может ли сумма нескольких (не обязательно различных) натуральных чисел равняться 120, а сумма их кубов равняться 1000?

3. На левом берегу реки Нелли расположены 3 села, а на правом — 25. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать два села на одном берегу и 5 сёл на другом так, что все десять линий между ними обслуживает одна и та же фирма.

4. Квадрат 5×5 покрывают по клеточкам несколькими Z-тетрамино (четырёхклеточные фигурки в виде буквы Z) так, что никакая клетка не покрыта более чем двумя фигурами. При этом Z-тетрамино не вылезают за границы квадрата. Какое наименьшее количество клеток квадрата может остаться непокрытыми ни одной фигуркой?

5. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC = DE$, $AE = CD$, $\angle A = \angle D = 75^\circ$, $\angle B = 150^\circ$, $\angle C = 105^\circ$, $\angle E = 135^\circ$. Найдите величину угла $\angle ACE$.

6. Разрежьте квадрат на наименьшее количество прямоугольников с отношением сторон $3 : 5$.

7. У Камилы есть колода из 99 карт, пронумерованных числами $1, 2, \ldots, 99$. Вначале она берет в руку 49 случайных карт, а остальные кладет на стол так, чтобы были видны их номера. За один обмен она заменяет все карты в руке на выбранные ею 49 из 50 карт со стола. Докажите, что Камила может произвести не более 49 обменов и в итоге получить на руке карты $1, 2, \ldots, 49$.

8. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}$ в порядке возрастания, при этом разности между соседними числами одинаковы. Также известно, что

$$1 \leqslant a_1 \leqslant 10; \quad 13 \leqslant a_2 \leqslant 20; \quad 241 \leqslant a_{15} \leqslant 250.$$

Чему может быть равно a_{14}? Как обычно, найдите все варианты и докажите, что других нет.