МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a, b, c и r, s, t таковы, что

$$ab + 1 = r^2, \quad ac + 1 = s^2, \quad bc + 1 = t^2.$$

Докажите, что среди чисел rt/s, rs/t, st/r хотя бы одно нецелое.

2. На одном берегу реки Нелли расположено 7 сёл, а на другом — 57. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать либо по два села на каждом берегу так, что все четыре линии между ними обслуживает фирма «Сцилла», либо по шесть сёл на каждом берегу так, что все 36 линий между ними обслуживает фирма «Харибда».

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle BCD$. Лучи DA и CB пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P параллельно AB, пересекает прямую BD в точке T. Докажите, что $\angle ACB = \angle PCT$.

4. Дан набор из $2n$ натуральных чисел, сумма которых кратна n. Разрешается выбрать n чисел и прибавить ко всем одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более $2n - 1$ таких операций.

5. Положительные вещественные числа x, y, z таковы, что $x^4 - 23x^2 + 1 = 0$, $y^4 - 223y^2 + 1 = 0$, $z^4 - 2023z^2 + 1 = 0$. Докажите, что для некоторого целого n

$$x^2y^2z^2 - nxyz + 1 = (xy + 1)(yz + 1)(zx + 1).$$

6. Пусть n, m — натуральные числа, $n < m$. Костя взял 2^m карточек и выписал все подмножества множества $\{1, 2, \ldots, m\}$, каждое — на лицевой стороне отдельной карточки. Оказалось, что как ни разложи эти карточки на две кучи, всегда удается выбрать в одной из куч 2^n карточек и выписать на их обратных сторонах все подмножества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (по одному на карточке) так, что записи на всех выбранных карточках окажутся *согласованными*: для любых двух карточек (A, a), (B, b) (где A, B — множества на лицевых сторонах, a, b — на обратных) верно, что если $a \subset b$, то $A \subset B$. Докажите, что $m \geqslant 2n$.

7. В треугольнике ABC точка K — середина стороны AB, а точка L на стороне AC такова, что $AL = LC + CB$. Докажите, что $\angle KLB = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $AC = 3CB$.

8. О возрастающих последовательностях натуральных чисел a_1, a_2, … и b_1, b_2, … известно, что в первой последовательности все числа попарно взаимно просты, и при каждом натуральном k число

$$\frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_k}}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}}$$

целое. Докажите, что $a_k = b_k$ при всех натуральных k.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a, b, c и r, s, t таковы, что

$$ab+1=r^2,\quad ac+1=s^2,\quad bc+1=t^2.$$

Докажите, что среди чисел rt/s, rs/t, st/r хотя бы одно нецелое.

2. На одном берегу реки Нелли расположено 7 сёл, а на другом — 57. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать либо по два села на каждом берегу так, что все четыре линии между ними обслуживает фирма «Сцилла», либо по шесть сёл на каждом берегу так, что все 36 линий между ними обслуживает фирма «Харибда».

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ABC = \angle BCD$. Лучи DA и CB пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P параллельно AB, пересекает прямую BD в точке T. Докажите, что $\angle ACB = \angle PCT$.

4. Дан набор из $2n$ натуральных чисел, сумма которых кратна n. Разрешается выбрать n чисел и прибавить ко всем одно и то же натуральное число. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более $6n$ таких операций.

5. Положительные вещественные числа x, y, z таковы, что $x^4-23x^2+1=0$, $y^4-223y^2+1=0$, $z^4-2023z^2+1=0$. Докажите, что для некоторого целого n

$$x^2y^2z^2-nxyz+1=(xy+1)(yz+1)(zx+1).$$

6. Пусть n, m — натуральные числа, $n<m$. Костя взял 2^m карточек и выписал все подмножества множества $\{1,2,\ldots,m\}$, каждое — на лицевой стороне отдельной карточки. Оказалось, что как ни разложи эти карточки на две кучи, всегда удается выбрать в одной из куч 2^n карточек и выписать на их обратных сторонах все подмножества $\{1,2,\ldots,n\}$ (по одному на карточке) так, что записи на всех выбранных карточках окажутся *согласованными*: для любых двух карточек (A,a), (B,b) (где A, B — множества на лицевых сторонах, a, b — на обратных) верно, что если $a\subset b$, то $A\subset B$. Докажите, что $m\geqslant 2n$.

7. В треугольнике ABC точка K — середина стороны AB, а точка L на стороне AC такова, что $AL=LC+CB$. Докажите, что $\angle KLB=90^\circ$ тогда и только тогда, когда $AC=3CB$.

8. Среди шестизначных чисел нашлось такое N, что среднее арифметическое цифр числа N^4 равно 5. Чему может равняться сумма цифр числа N^4?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число n^2+n+1 нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел, разность которых меньше $2\sqrt{n}$.

2. На одном берегу реки Нелли расположено 4 села, а на другом — 15. Между каждыми двумя сёлами, находящимися на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать либо по два села на каждом берегу так, что все четыре линии между ними обслуживает фирма «Сцилла», либо по три села на каждом берегу так, что все девять линий между ними обслуживает фирма «Харибда».

3. На стороне BC бумажного квадрата BC выбрана точка P. Квадрат сложили вдоль прямой AP так, что точка B попала в точку B', равноудаленную от точек C и D. Чему может быть равен угол $CB'D$?

4. Дан набор из 2023 натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа и одновременно увеличить или одновременно уменьшить оба на одно и то же натуральное число так, чтобы числа все еще оставались натуральными. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более 2025 таких операций.

5. Положительные вещественные числа a и b таковы, что $a^4 - 23a^2 + 1 = 0$, $b^4 - 223b^2 + 1 = 0$. Докажите, что

$$(a+b)^2 + 20ab = (a+b)(b+1)(a+1).$$

6. Пусть n — натуральное число. Костя взял 2^{2n-1} карточек и выписал все подмножества множества $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, каждое — на лицевой стороне отдельной карточки. Верно ли, что как ни разложи эти карточки на две кучи, всегда удается выбрать в одной из куч 2^n карточек и выписать на их обратных сторонах все подмножества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (по одному на карточке) так, что записи на всех выбранных карточках окажутся *согласованными*: для любых двух карточек (A, a), (B, b) (где A, B — записи на лицевых сторонах, a, b — на обратных) выполняется правило: если $a \subset b$, то $A \subset B$.

7. В треугольнике ABC точка K — середина стороны AB, а точка L на стороне AC такова, что $AL = LC + CB$. Докажите, что $\angle KLB = 90°$ тогда и только тогда, когда $AC = 3CB$.

8. Среди шестизначных чисел нашлось такое N, что среднее арифметическое цифр числа N^4 равно 5. Чему может равняться сумма цифр числа N^4?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 27.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число n^2+n+1 нельзя представить в виде произведения двух натуральных чисел, разность которых меньше $2\sqrt{n}$.

2. На одном берегу реки Нелли расположено 3 села, а на другом — 25. Между каждыми двумя сёлами, расположенными на разных берегах, курсирует моторка одной из фирм «Сцилла» или «Харибда». Докажите, что можно выбрать выбрать два села на одном берегу и 5 сёл на другом так, что все десять линий между ними обслуживает одна и та же фирма.

3. На стороне BC бумажного квадрата BC выбрана точка P. Квадрат сложили вдоль прямой AP так, что точка B попала в точку B', равноудаленную от точек C и D. Чему может быть равен угол $CB'D$?

4. Дан набор из 2023 натуральных чисел. За одну операцию разрешается выбрать любые два числа и одновременно увеличить или одновременно уменьшить оба на одно и то же натуральное число так, чтобы числа все еще оставались натуральными. Докажите, что можно сделать все числа равными, выполнив не более 2025 таких операций.

5. Положительные вещественные числа a и b таковы, что $a^4 - 23a^2 + 1 = 0$, $b^4 - 223b^2 + 1 = 0$. Докажите, что

$$(a+b)^2 + 20ab = (a+b)(b+1)(a+1).$$

6. Алиса и Боб играют в игру на доске 8×8. Ходят по очереди, начинает Алиса. Первоначально доска пуста. Своим ходом игрок выбирает целое число от 1 до 64, которое еще не записано на доске, и вписывает его в любую пустую клетку. Когда пустых клеток не остается, Алиса вычисляет сумму чисел в каждой строке, и ее результат равен максимальному из этих 8 чисел. Боб вычисляет сумму чисел в каждом столбце, и его результат равен максимальному из этих 8 чисел. Выигрывает тот, чей результат больше. Есть ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия?

7. В треугольнике ABC точка K — середина стороны AB, а точка L на стороне AC такова, что $AL = LC + CB$. Докажите, что $\angle KLB = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $AC = 3CB$.

8. Среди шестизначных чисел нашлось такое N, что среднее арифметическое цифр числа N^4 равно 5. Чему может равняться сумма цифр числа N^4?