LXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЭТНОМИР, 25.10-31.10.2023

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. *Поезд въезжает в туннель длиной 300 м, двигаясь с постоянной скоростью. От момента въезда передней части поезда в туннель до момента въезда задней части поезда в туннель проходит 10 секунд. После этого поезд мгновенно тормозит и дальше двигается со скоростью, в полтора раза меньше исходной. В итоге поезд полностью выезжает из туннеля ещё через 50 секунд. Какова длина поезда?*

Ответ: 90 метров. **Решение.** Если бы поезд всё время ехал со скоростью после торможения, то от момента въезда в туннель передней части поезда до момента въезда задней части прошло бы 15 секунд и за это время поезд проехал расстояние, равное своей длине. Но по условию, за 50 секунд поезд проезжает расстояние, равное длине туннеля, т.е. 300м. Следовательно, длина поезда равна $300 \cdot (15/50) = 90$ метров.

2. *В компании из 100 человек любые десять человек имеют общего знакомого среди остальных. Докажите, что любые пять человек из этой компании имеют не менее шести общих знакомых среди остальных.*

Решение. Предположим, что нашлись пять человек, которые имеют не более пяти общих знакомых. Рассмотрим десятку, содержащую этих пятерых человек и ВСЕХ их общих знакомых. По условию выбранные 10 человек имеют общего знакомого, но тогда мы нашли ещё одного общего знакомого для пятерых человек. Противоречие.

3. *Дано некоторое стозначное число X без нулей, единиц, восьмёрок и девяток в записи. К его первой, третьей, пятой, ..., 99-ой слева цифрам прибавили по двойке и получили число A. Из второй, четвёртой, шестой, ..., сотой слева цифры числа X вычли по двойке и получили число B. Оказалось, что A делится на B. Чему могло быть равно число X?*

Ответ: $X = 242424\ldots424$. **Решение.** Заметим, что число $A - B$ состоит из ста двоек и делится на стозначное число B. В частном $(A - B)/B$ не могло получиться 2, поскольку тогда первая цифра числа X была бы единицей, и не могло получиться больше 2, поскольку число B тогда было бы не стозначным. Значит, частное равно 1, B состоит из ста двоек, откуда и получается ответ.

4. *По кругу расположены 100 кочек, на 10 из них сидит по одной лягушке. Лягушки пронумерованы числами от 1 до 10. По команде все лягушки одновременно прыгают: лягушка номер 1 прыгает на соседнюю с ней кочку справа или слева, лягушка номер 2 прыгает через одну кочку направо или налево, и так далее, лягушка номер 10 прыгает через 9 кочек направо или налево. После нескольких команд оказалось, что на каждой кочке побывала хотя бы одна лягушка. Докажите, что хотя бы одна лягушка дважды побывала на одной и той же кочке.*

Решение. Предположим противное. Очевидно, каждая лягушка все свои прыжки совершала в одном направлении, иначе она бы какую-то кочку посетила два раза. Рассмотрим лягушку номер 10. Если бы она сделала 10 прыжков, то она бы вернулась на ту кочку, с которой начинала движение. Следовательно, всего было 9 команд, и каждая из 100 кочек была посещена ровно 1 раз. Вернемся к лягушке 10. Она посетила 10 кочек и прыгала через 9 кочек. Кочки, которые она посетила, разбивают окружность на 10 равных дуг. Лягушка номер 1 стартовала на одной из этих дуг, и 9 раз прыгала на соседнюю кочку в одном и том же направлении. Но тогда она обязана была посетить один из концов дуги — кочку, которую посещала лягушка 10. Противоречие с тем, что каждая кочка посещена ровно 1 раз.

5. *Алёна написала четыре различных положительных числа, причём произведение двух самых больших из них равно самому маленькому. Оказалось, что если она одновременно заменит каждое из чисел на удвоенное произведение всех остальных, то получит тот же самый набор чисел. Докажите, что все числа Алёны больше $1/2$.*

Решение. Пусть числа Алены $a < b < c < d$. Тогда $2abc < 2abd < 2acd < 2bcd$, поэтому $c = 2acd = 2a^2 > a$, откуда $a > 1/2$.

6. *В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит рыцарь или лжец. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт. Каждый заявил, что в клетках, соседних с его клеткой по стороне, стоит поровну лжецов и рыцарей. Может ли на доске быть ровно 2023 рыцаря?*

Ответ: Нет. **Решение.** Заметим, что клетки, лежащие на границе квадрата, но не в углу, имеют по три соседа, поэтому в них не могут находиться рыцари. А значит, и в угловых клетках не могут находиться рыцари, так как в клетках, соседних с угловыми, нет рыцарей. Следовательно, все рыцари находятся во внутренних клетках таблицы, и у каждого рыцаря ровно два соседа рыцаря. Рассмотрим граф, в котором вершины — рыцари, а ребра — соседства. В этом графе все вершины имеют степень 2, поэтому он является объединением простых циклов. Осталось заметить, что каждый цикл обязан иметь четную длину (если покрасить доску в шахматную раскраску, то при обходе цикла цвета клеток чередуются). Таким образом, рыцарей обязательно четное число, а значит их не может быть ровно 2023.

7. *Вера выложила в ряд* 2023 *монеты, чередуя решки и орлы, начиная с решки: РОРОРОРОР...РОР (Р — решка, О — орел).*

За один ход Вера может перевернуть одну монету ряда, соблюдая следующие правила. Первым ходом Вера может перевернуть любую из монет. Во все последующие ходы Вера может переворачивать только монету, соседнюю с той, которую она перевернула предыдущим ходом (монета не является соседней сама себе). Определите наименьшее возможное количество ходов, за которое Вера сможет перевернуть все монеты орлом вверх.

Ответ: 4044. **Решение.** Пронумеруем монеты от 1 до 2023. Очевидно, что Вера должна перевернуть каждую нечетную монету нечетное число раз, а каждую четную - четное. Сначала мы докажем следующее утверждение.

Утверждение: ни одна четная монета не может быть перевернута ноль раз.

Доказательство: если некоторая монета никогда не переворачивается, то либо ни одна из монет слева от нее не переворачивается, либо ни одна из монет справа от нее не переворачивается. Но для каждой четной монеты с обеих от неё сторон существуют нечетные монеты, которые должны быть перевёрнуты хотя бы один раз: противоречие.

Поэтому всего должно быть не менее $2 \cdot 1011 = 2022$ переворотов четных монет. Кроме того, номера переворачиваемых монет должны чередоваться между четными и нечетными, поэтому всего должно быть не менее 2021 переворотов нечетных монет. Однако у нас есть дополнительное условие, что каждая нечетная монета переворачивается нечетное число раз, а поскольку нечетных монет четное число (1012), то и переворотов нечетных должно быть четное число, следовательно, их нужно не менее 2022, что дает суммарно не менее 4044 переворотов монет.

Для построения конструкции надо перевернуть монеты с номерами 2,1,2,3 в таком порядке. Затем перевернём $4m$, $4m+1$, $4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ для $m = 1, 2, \ldots, 505$ в таком порядке. Это дает ровно $8 \cdot 505 + 4 = 4044$ переворота.

8. *Вася хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x < 2^{99}$, через минуту оно заменяется на число $x^2 + 2^{99}$, а если число $x \geqslant 2^{99}$, то через минуту оно уменьшается ровно вдвое. Может ли Вася написать на доске число так, чтобы оно всегда оставалось целым?*

Ответ: не может. **Решение.** Нечётным корнем натурального числа a будем называть такое нечётное число t, что $a = 2^k \cdot t$. Заметим, что когда число на доске делится на 2, его нечётный корень не меняется. А когда к квадрату числа прибавляется 2^{99}, то получается число $2^{2k} \cdot t^2 + 2^{99}$. Число $2k$ либо меньше, либо больше, чем 99. В первом случае получается число $2^{2k} \cdot (t^2 + 2^{99-2k})$, во втором — $2^{99} \cdot (2^{2k-99} \cdot t^2 + 1)$. В обоих случаях нечётный корень числа увеличился. Следовательно, нечётный корень всё время увеличивается и когда-нибудь станет больше, чем 2^{99}. Но тогда его придётся делить на 2 и получится нецелое число.