

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 26.10.2023

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Можно ли разрезать квадрат на 4 различных треугольника так, чтобы из них можно было сложить без дырок и наложений прямоугольник (использовав все 4 треугольника), одна сторона которого в два раза больше другой?

2. В ряд стоят несколько человек, каждый из которых является либо рыцарем, всегда говорящим правду, либо лжецом, всегда говорящим неправду, либо хитрецом, говорящим правду тогда и только тогда, когда он стоит рядом с рыцарем. Каждый из стоящих в ряду сказал, что во всём ряду слева и справа от него поровну хитрецов. Докажите, что если среди стоящих есть хитрецы, то есть и хитрецы, стоящие рядом.

3. В некотором стозначном числе X без нулей, единиц, восьмёрок и девяток в записи к первой, третьей, пятой, ..., 99-ой слева цифрам прибавили по двойке и получили число A . Из второй, четвёртой, шестой, ..., 100-ой слева цифры числа X вычли по двойке и получили число B . Оказалось, что A делится на B . Чему могло быть равно число X ?

4. Сумма чисел x , y и z (не обязательно целых) равна 1. Докажите, что произведение чисел $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ неотрицательно.

5. Простое число p назовем *стандартным*, если существуют различные натуральные числа $1 < a, b < p/2$ такие, что $ab - 2$ делится на p . Докажите, что существует лишь конечное число простых не стандартных чисел.

6. Вера выложила в ряд 2023 монеты, чередуя решки и орлы, начиная и заканчивая решкой: РОРОРОРОР...РОР (Р — решка, О — орел). За один ход Вера может перевернуть одну монету ряда, соблюдая следующие правила. В первый ход Вера может перевернуть любую из монет. Во все последующие ходы Вера может переворачивать только монету, соседнюю с той, которую она перевернула предыдущим ходом (монета не является соседней сама себе). Определите наименьшее возможное количество ходов, за которое Вера сможет перевернуть все монеты орлом вверх.

7. Вася хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x < 2^{99}$, через минуту оно заменяется на число $x^2 + 2^{99}$, а если число $x \geq 2^{99}$, то через минуту оно уменьшается ровно вдвое. Может ли Вася написать на доске число так, чтобы оно всегда оставалось целым?

8. Точка M — середина боковой стороны AB , а точка N — середина боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC . Точка D на отрезке AM выбрана так, что $\angle CND = 90^\circ$. Луч CD пересекает прямую MN в точке E . Точка F отмечена на отрезке CN таким образом, что $BF = CE$. Докажите, что из отрезков DE , DF и MN можно сложить треугольник.