МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске написаны два различных натуральных числа $a > b$. За одну операцию можно заменить пару чисел (a, b) либо на $(ab, 1)$, либо на $(a + b, a - b)$. Можно ли из пары $(2, 1)$ при помощи нескольких операций получить пару $(2 \cdot 10^{100}, 10^{100})$?

2. Состоялся теннисный турнир между $2n + 1$ игроками. Каждый игрок сыграл с каждым другим игроком по одному разу, ничьих не было. Кроме того, перед началом турнира каждый игрок имел числовой рейтинг, причем не было двух игроков с одинаковым рейтингом. Оказалось, что существует ровно 200 матчей, в которых игрок с более низким рейтингом выиграл у игрока с более высоким рейтингом. Докажите, что существует игрок, выигравший не менее $n - 20$ и не более $n + 20$ матчей.

3. Существует ли натуральное число N, удовлетворяющее следующим трём условиям:
1. N делится на 2^{2023}, но не на 2^{2024},
2. N имеет только три различные цифры в записи, и ни одна из них не равна нулю,
3. хотя бы $99,9\%$ цифр числа N являются нечетными?

4. Пума и Ворон играют в игру. Перед началом игры на листе бумаги написано число 2023. Ходят по очереди, первый ход делает Пума. Ход состоит в замене написанного в данный момент числа x либо на $x + 1$, либо на x/p, где p — любой простой делитель x. Выигрывает тот, кто первым напишет единицу. Определите, кто выигрывает при правильной игре обоих игроков.

5. Найдите наименьшее целое число b, обладающее следующим свойством: для каждого способа окраски в зеленый цвет b клеток доски размером 12×12 можно разместить 11 слонов на 11 зеленых клетках так, чтобы никакие два слона не били друг друга.

6. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $(2p - q)^2 = 17p - 10q$.

7. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают все правила и смогут договориться о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах где каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превосходят 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:
1) Очень громко сказать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.
2) Сказать, у кого из кальмаров число на карточке больше.
Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе жарят. Как кальмарам договориться, чтобы выиграть и чтобы при этом сумма всех названных обоими кальмарами чисел не превышала 25?

8. Каждое натуральное число, не превосходящее 400, покрашено в красный или синий цвет. Обязательно ли верно хотя бы одно из следующих утверждений:
1. можно выбрать девять красных чисел таких, что сумма восьми наименьших из них меньше девятого.
2. можно выбрать десять синих чисел таких, что сумма девяти наименьших из них меньше десятого?

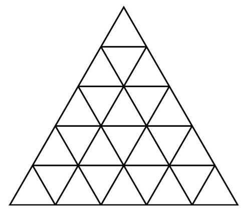
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написаны два различных натуральных числа $a > b$. За одну операцию можно заменить пару чисел (a, b) либо на $(ab, 1)$, либо на $(a+b, a-b)$. Можно ли из пары $(2, 1)$ при помощи нескольких операций получить пару $(2 \cdot 10^{100}, 10^{100})$?

2. Состоялся теннисный турнир между $2n + 1$ игроками. Каждый игрок сыграл с каждым другим игроком по одному разу, ничьих не было. Кроме того, перед началом турнира каждый игрок имел числовой рейтинг, причем не было двух игроков с одинаковым рейтингом. Оказалось, что существует ровно 200 матчей, в которых игрок с более низким рейтингом выиграл у игрока с более высоким рейтингом. Докажите, что существует игрок, выигравший не менее $n - 20$ и не более $n + 20$ матчей.

3. Существует ли трехзначное натуральное число $\overline{abc}$ с различными ненулевыми цифрами, такое, что для $k = 2023$ и для $k = 2025$ число $\overline{aa\ldots abb\ldots bcc\ldots c}$ (каждая цифра повторяется k раз) делится на $\overline{abc}$?

4. Петя и Вася взяли белый правильный треугольник, разлинованный на 36 одинаковых треугольничков, и играют в следующую игру. Они по очереди закрашивают по одному белому треугольничку, Петя — в красный цвет, Вася — в синий. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все треугольнички закрашены. Петя победит, если в конце игры найдётся **синяя** фигурка, состоящая из трех треугольничков, два из которых примыкают к третьему по стороне. Может ли Вася ему помешать?



5. Отметьте 48 клеток на доске 10×10 так, чтобы на них нельзя было расставить 7 небьющих друг друга слонов.

6. В магазине «Всё для Вашей кошки» продаются маленькие и большие пакетики с кормом, каждый из которых стоит натуральное число рублей. Маленький пакетик кошка Кайя съедает за один день, а большой — за три дня. Оля купила в этом магазине несколько маленьких и больших пакетиков с кормом, так что Кайе их хватит суммарно ровно на 300 дней. Если бы Оля все эти 300 дней кормила кошку маленькими пакетиками, это вышло бы на 101 рубль дороже. А на сколько дешевле вышло бы кормить кошку в течение 300 дней только большими пакетиками?

7. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают все правила и смогут договориться о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах где каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превосходят 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:
1) Очень громко сказать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.
2) Сказать, у кого из кальмаров число на карточке больше.
Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе жарят. Как кальмарам договориться, чтобы выиграть и чтобы при этом сумма всех названных обоими кальмарами чисел не превышала 25?

8. Каждое натуральное число, не превосходящее 400, покрашено в красный или синий цвет. Обязательно ли верно хотя бы одно из следующих утверждений:
1. можно выбрать девять красных чисел таких, что сумма восьми наименьших из них меньше девятого.
2. можно выбрать десять синих чисел таких, что сумма девяти наименьших из них меньше десятого?

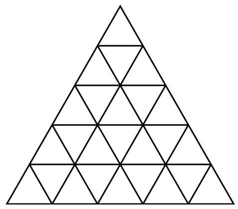
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На доске написаны два различных натуральных числа $a > b$. За одну операцию можно заменить пару чисел (a, b) либо на $(ab, 1)$, либо на $(a+b, a-b)$. Можно ли из пары $(2, 1)$ при помощи нескольких операций получить пару $(2 \cdot 10^{100}, 10^{100})$?

2. Состоялся теннисный турнир между 100 игроками. Каждый игрок сыграл с каждым другим игроком по одному разу, ничьих не было. Кроме того, перед началом турнира каждый игрок имел числовой рейтинг, причем не было двух игроков с одинаковым рейтингом. Оказалось, что существует ровно три матча, в которых игрок с более низким рейтингом выиграл у игрока с более высоким рейтингом. Докажите, что существует игрок, выигравший не менее 48 и не более 52 матчей.

3. Число называется *палиндромом*, если слева-направо оно читается также, как справа-налево. Например 12321 — палиндром. Назовём число *хорошим*, если хотя бы одна его цифра стоит на месте, которое она обозначает, например, число 20246 — хорошее, т.к. цифра 4 стоит на четвёртом месте. Найдите количество девятизначных хороших палиндромов.

4. Петя и Вася взяли белый треугольник, разлинованный на 36 одинаковых треугольничков, и играют в следующую игру. Они по очереди закрашивают по одному белому треугольничку, Петя — в красный цвет, Вася — в синий. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все треугольнички закрашены. Петя победит, если в конце игры найдутся два соседних по стороне **синих** треугольничка. Может ли Вася ему помешать?



5. Отметьте 48 клеток на доске 10×10 так, чтобы на них нельзя было расставить 7 небьющих друг друга слонов.

6. В магазине «Всё для Вашей кошки» продаются маленькие и большие пакетики с кормом, каждый из которых стоит натуральное число рублей. Маленький пакетик кошка Кайя съедает за один день, а большой — за три дня. При этом большой пакетик стоит дешевле, чем три маленьких, но дороже, чем два. Потратив 420 рублей, Оля купила в этом магазине несколько маленьких и больших пакетиков с кормом, так что Кайе их хватит суммарно на 100 дней. Сколько стоит каждый из пакетиков?

7. Два кальмара вынуждены участвовать в игре. Перед началом игры они узнают все правила и смогут договориться о своих действиях. Затем они будут заперты в соседних комнатах где каждому будет выдана карточка, на которой написано натуральное число. Известно, что числа на карточках различны и не превосходят 2023. Далее кальмары по очереди делают ходы. За ход можно сделать одно из двух действий:
1) Очень громко сказать любое натуральное число. Это число будет услышано другим кальмаром.
2) Сказать, у кого из кальмаров число на карточке больше.
Если во втором случае ответ верен, то кальмаров отпускают, иначе жарят. Как кальмарам договориться, чтобы выиграть и чтобы при этом сумма всех названных обоими кальмарами чисел не превышала 25?

8. Каждое натуральное число, не превосходящее 400, покрашено в красный или синий цвет. Обязательно ли верно хотя бы одно из следующих утверждений:
1. можно выбрать девять красных чисел таких, что сумма восьми наименьших из них меньше девятого.
2. можно выбрать десять синих чисел таких, что сумма девяти наименьших из них меньше десятого?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 30.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Можно ли заменить звёздочки $** * ** ** **$ различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось пять чисел, и каждое, начиная с третьего, было равно сумме двух предыдущих?

2. В ряд выложены десять карточек. На каждой написано два числа. Если на карточке, лежащей на k-ом месте написаны числа n и m, то одно из этих чисел написано на карточке, лежащей на $k+3$ месте (если карточка с такими номером существует), а другое — на карточке, лежащей на $k+5$ месте (если карточка с такими номером существует). Какое наибольшее количество разных чисел могло быть написано на карточках?

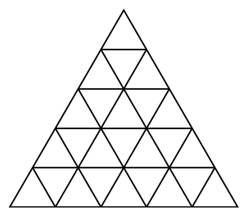
3. Назовём число *хорошим*, если хотя бы одна его цифра стоит на месте, которое она обозначает, например, число 20246 — хорошее, т.к. цифра 4 стоит на четвёртом месте. Сколько всего пятизначных хороших чисел?

4. Пума и Ворон играют в игру. Перед началом игры на листе бумаги написано число 2023. Ходят по очереди, первый ход делает Пума. Ход состоит в замене написанного в данный момент числа x либо на $x+1$, либо на x/p, где p — любой простой делитель x. Выигрывает тот, кто первым напишет единицу. Определите, кто выигрывает при правильной игре обоих игроков.

5. Отметьте 48 клеток на доске 10×10 так, чтобы на них нельзя было расставить 7 небьющих друг друга слонов.

6. В магазине «Всё для Вашей кошки» продаются маленькие и большие пакетики с кормом, каждый из которых стоит натуральное число рублей. Маленький пакетик кошка Кайя съедает за один день, а большой — за три дня. При этом большой пакетик стоит дешевле, чем три маленьких, но дороже, чем два. Потратив 420 рублей, Оля купила в этом магазине несколько маленьких и больших пакетиков с кормом, так что Кайе их хватит суммарно на 100 дней. Сколько стоит каждый из пакетиков?

7. Петя и Вася взяли белый треугольник, разлинованный на 36 одинаковых треугольничков, и играют в следующую игру. Они по очереди закрашивают по одному белому треугольничку, Петя — в красный цвет, Вася — в синий. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все треугольнички закрашены. Петя победит, если в конце игры найдутся два соседних по стороне **синих** треугольничка. Может ли Вася ему помешать?



8. Каждое натуральное число, не превосходящее 400, покрашено в красный или синий цвет. Обязательно ли верно хотя бы одно из следующих утверждений:

1. можно выбрать девять красных чисел таких, что сумма восьми наименьших из них меньше девятого.
2. можно выбрать десять синих чисел таких, что сумма девяти наименьших из них меньше десятого?