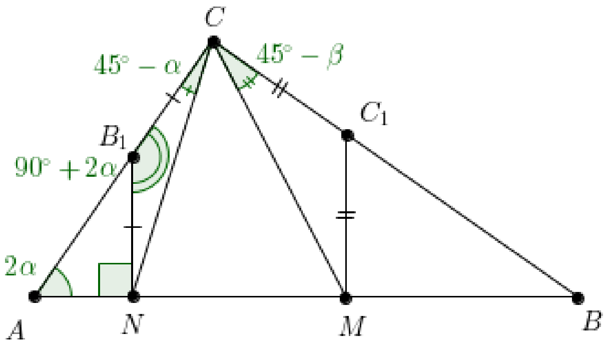
Решения задач командной олимпиады 8 класса

1. *В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C биссектрисы углов A и B пересекают противоположные катеты в точках A_1 и B_1 соответственно. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на гипотенузу из точек A_1 и B_1 соответственно. Найдите $\angle MCN$.*

Ответ: 45°. **Решение.** Пусть $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle CBA = 2\beta$. Так как $\angle ACB = 90^\circ$, то $\alpha + \beta = 45^\circ$. Прямоугольные треугольники BCB_1 и BNB_1 равны по общей гипотенузе и острому углу, откуда $B_1N = B_1C$. Угол $\angle CB_1N$ является внешним для треугольника B_1AN, а значит, он равен $90^\circ + 2\alpha$. Из равнобедренного треугольника CB_1N получаем, что $\angle B_1CN = 45^\circ - \alpha$. Аналогично, $\angle A_1CM = 45^\circ - \beta$. Отсюда

$$\angle MCN = 90^\circ - \angle B_1CN - \angle A_1CM = \\ = 90^\circ - (45^\circ - \beta) + (45^\circ - \alpha) = \alpha + \beta = 45^\circ.$$



2. *Решите в вещественных числах систему уравнений*

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\min\{x,y\} + \frac{2}{3}\max\{x,y\} = 2023, \\ \frac{1}{3}\min\{y,z\} + \frac{2}{3}\max\{y,z\} = 2024, \\ \frac{1}{3}\min\{z,x\} + \frac{2}{3}\max\{z,x\} = 2025. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2024$, $y = 2021$, $z = 2025{,}5$. **Решение.** Пусть наименьшее из чисел x, y, z равно a, наибольшее c, а оставшееся b. Тогда левые части трёх уравнений равны $(a+2b)/3$, $(a+2c)/3$ и $(b+2c)/3$, а поскольку $a+2b \leqslant a+2c \leqslant b+2c$, получаем, что $y \leqslant x \leqslant z$ и $y+2x = 3\cdot 2023$, $y+2z = 3\cdot 2024$, $x+2z = 3\cdot 2025$. Поэтому $3y = (y+2x)+2(y+2z)-2(x+2z) = 3\cdot 2021$, откуда $y = 2021$, значит, $x = 2024$ и $z = 2025{,}5$.

3. *В каждой клетке прямоугольной таблицы 1000×1000 стоит рыцарь или лжец. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжёт. Каждый заявил, что в клетках, соседних с его клеткой по стороне, стоит поровну лжецов и рыцарей. Может ли на доске быть ровно 2023 рыцаря?*

Ответ: Нет. **Решение.** Заметим, что у клеток, стоящих на границе, но не в углу, три соседних по стороне клетки. Значит, в них могут стоять только лжецы. Следовательно, и в углах могут стоять только лжецы. У остальных клеток ровно 4 соседние по стороне клеток. Значит, у любого рыцаря должно быть два соседа рыцаря и два соседа лжеца. Тогда все рыцари разбиваются на циклы, причём длина каждого цикла чётна. Действительно, при прохождении любого цикла мы сделаем одинаковое число шагов вверх и вниз и одинаковое число шагов влево и вправо. Следовательно, рыцарей в такой таблице может быть только чётное количество.

4. *Дано натуральное число n. Последовательность x_0, x_1, x_2, $\ldots$ определена равенствами*

$$x_0 = 0, \qquad x_{k+1} = \left[\frac{n-(x_1+x_2+\ldots+x_k)}{2}\right].$$

Докажите, что лишь конечное количество x_k не равно нулю, и что сумма всех ненулевых членов последовательности равна $n-1$. Как обычно, через $[a]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее a.

Решение 1. Рассмотрим сумму $s_k = x_0+x_1+\ldots+x_k$. Очевидно, если $s_k \leqslant n-1$, то $0 \leqslant x_{k+1} = \left[\frac{n-s_k}{2}\right] \leqslant \frac{n-s_k}{2} < n-s_k$, то есть $s_{k+1} = s_k + x_{k+1} < n$, значит, $s_{k+1} \leqslant n-1$. Поскольку $s_0 = 0$, числа s_k не убывают, а поскольку все $s_k \leqslant n-1$, с какого-то момента они и не возрастают, то есть $x_k = 0$ при достаточно больших k.

С другой стороны, если $s_k \leqslant n-2$, то $x_{k+1} = \left[\frac{n-s_k}{2}\right] \geqslant 1$, поэтому финальное значение s_k больше $n-2$. Так как оно не больше $n-1$, оно равно $n-1$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Докажем утверждение задачи индукцией по n. При $n=1$ оно проверяется непосредственно.

Пусть утверждение доказано для всех натуральных чисел, меньших некоторого $n>1$. Разберём два случая. Если $n = 2s$ — чётное число, то $x_1 = s$ и $x_{k+1} = \left[\frac{s-(x_2+x_3+\ldots+x_k)}{2}\right]$ при $k \geqslant 1$. Иными словами, последовательность x_0, x_1, x_2, $\ldots$ отличается от аналогичной последовательности для числа s вставкой числа s. Поскольку в последовательности для числа s есть лишь конечное число ненулевых членов и их сумма равна $s-1$, в последовательности для n ненулевых членов также конечное число (на 1 больше) и их сумма равна $2s-1 = n-1$. Если $n = 2s+1$ — чётное число, то $x_1 = s$ и $x_{k+1} = \left[\frac{s+1-(x_2+x_3+\ldots+x_k)}{2}\right]$ при $k \geqslant 1$. Так же, как и в предыдущем случае, находим, что последовательность (x_k) отличается от последовательности для числа $s+1$ вставкой числа s, то есть в ней также конечное число ненулевых членов, сумма которых равна $s+s = 2s = n-1$, что и требовалось доказать.

5. *Дано натуральное число n. В Ёжгороде имеется центральная площадь и n периферийных площадей, а также n улиц, соединяющих центральную площадь с периферийными. Мэр хочет создать Реестр городских объектов, записав в строчку названия всех улиц и площадей. Регламент требует, чтобы название каждой улицы стояло в Реестре правее названий обеих площадей, которые она соединяет. Сколькими способами мэр может составить Реестр?*

Ответ: $2^n \cdot (n!)^2$ последовательностей. **Решение.** Докажем это индукцией по n. База $n = 1$ очевидна.

Индукционный переход $n \to (n+1)$. Последняя запись в реестре города с $(n+1)$ улицей — это название некоторой улицы. Уберем эту запись, а периферийную площадь этой улицы, упомянутую в реестре ранее, выделим красным цветом. Красная запись может находиться в любом месте оставшегося реестра. При ее удалении получается реестр города с n улицами. Значит, для составления реестра в городе с $(n+1)$ улицей можно

— выбрать периферийную площадь, которую мы будем считать красной (это можно сделать $n+1$ способами),

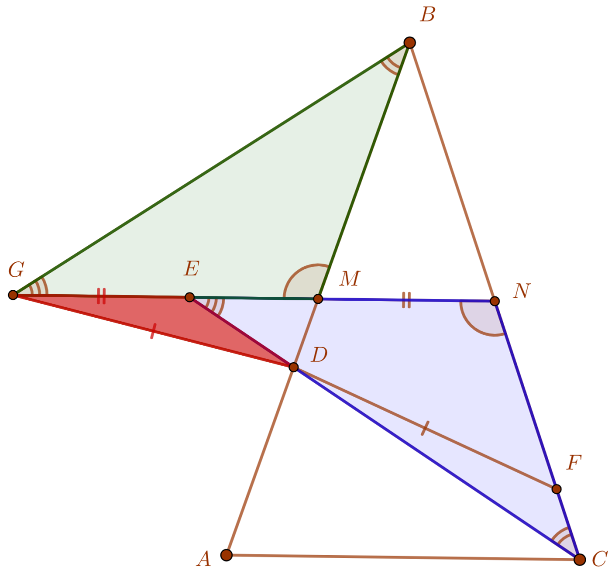
— взять реестр остальной части города с n улицами (по индукционному предположению имеется $2^n(n!)^2$ вариантов такого реестра),

— в любое место этого реестра вставить запись о красной площади ($2(n+1)$ вариантов)

— и добавить в конец запись о красной улице.

Очевидно, варианты выбора, упомянутые в трех скобках в предыдущем предложении, делаются независимо и приводят к разным итоговым вариантам реестра. Это дает нам $(n+1) \cdot 2^n(n!)^2 \cdot 2(n+1) = 2^{n+1}\big((n+1)!\big)^2$ вариантов, что и требуется для шага индукции.

6. *Точка M — середина боковой стороны AB, а точка N — середина боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC. Точка D на отрезке AM выбрана так, что $\angle CND = 90°$. Луч CD пересекает прямую MN в точке E. Точка F отмечена на отрезке CN таким образом, что $BF = CE$. Докажите, что из отрезков DE, DF и MN можно сложить треугольник.*



Решение. Отметим на луче ME такую точку G, что $MG = EN$. Заметим, что $\angle GMB = \angle ENC$ и $MB = NC$. Тогда по первому признаку равны треугольники GMB и ENC. Из этого следует, что $\angle DCF = \angle DBG$. Из равнобедренности треугольника BDC (в нём медиана совпадает с высотой) следует, что $\angle DCF = \angle DBF$. Следовательно, треугольники DBG и DBF равны по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, равны отрезки GD и DF. Осталось заметить, что $GE = GM - EM = EN - EM = MN$. Мы получили треугольник GED, стороны которого равны нужным отрезкам.

7. *Вася выбрал натуральное m и хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x < 2^m$, через минуту оно заменится на число $x^2 + 2^m$, а если число $x \geqslant 2^m$, то через минуту оно уменьшится ровно вдвое. При каких m Вася может написать на доске такое число, что оно всегда будет оставаться целым?*

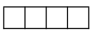
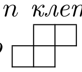
Ответ: при $m = 2$. **Решение.** Очевидно, если число на доске нечётно, то через минуту или две оно перестанет быть целым. Таким образом, число на доске должно всегда оставаться чётным. Рассмотрим его наибольший нечётный делитель (то есть нечётное число d такое, что число на доске равно $2^k d$ при некотором натуральном k). Этот делитель d должен всегда быть меньше 2^{m-1} (иначе Вася будет делить его на 2, пока не получит нечётное число d). Отсюда следует, что m не может быть равно 1.

Предположим, что $d \neq 1$. Докажем, что через какое-то время на доске появится число с нечётным делителем, бóльшим d. Действительно, пока число на доске не меньше 2^m, Вася делит его на 2. Поэтому в какой-то момент на доске появится число $2^k d < 2^m$ (при этом, очевидно, $k < m$), которое перейдёт в число $2^{2k}d^2 + 2^m$.

Если $m < 2k$, то у полученного числа есть нечётный делитель $2^{2k-m}d + 1 > d$. Если $m > 2k$, то у него есть нечётный делитель $d^2 + 2^{m-2k}$. Наконец, если $m = 2k$, то у него есть нечётный делитель $\frac{d^2+1}{2} > d$. Таким образом, на доске будут появляться числа со сколь угодно большими нечётными делителями, что, как мы видели, невозможно.

Итак, наибольший нечётный делитель числа на доске должен быть всегда равен 1, то есть на доске всегда написана степень двойки. Поскольку на доске не реже, чем раз в два хода, бывают числа, не меньшие 2^m, единственное число, меньшее 2^m, которое там появляется, равно 2^{m-1}. Следовательно, $(2^{m-1})^2 + 2^m$ — степень двойки, откуда $m = 2m - 2$ и $m = 2$.

При $m = 2$ на доске можно написать, например, 2, и тогда на доске будут чередоваться числа 2, 8 и 4.

8. *Ацтекский диамант ранга n — это клетчатая фигура «ромбик» из $2n(n+1)$ клеток, вдоль каждой «стороны» которого расположено n клеток. При каких n ацтекский диамант ранга n можно разрезать на прямые тетрамино*  *и S-тетрамино*  *(фигурки можно поворачивать и переворачивать)?*

Ответ: только при $n \equiv 0, 3 \pmod 4$. **Решение.** Ацтекский диамант ранга n состоит из $(2n+1)$ диагональных рядов клеток, идущих слева снизу вправо вверх. В этих рядах имеется попеременно n или $(n+1)$ клеток. Покрасим эти ряды в 0-й, 1-й, 2-й, 3-й цвета (периодически). Тогда, как нетрудно проверить, для каждой прямой тетраминошки или S-тетраминошки *сумма* цветов накрытых клеток равна $2 \pmod 4$. Площадь диаманта равна $2n(n+1)$, число фигурок — $n(n+1)/2$, таким образом, при $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ число фигурок нечетно и сумма всех цветов в диаманте должна быть равна $2 \pmod 4$, а при $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ сумма всех цветов равна $0 \pmod 4$. Но прямой подсчет показывает, что в указанной раскраске сумма всех цветов при всех n равна $0 \pmod 4$. Значит, при $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ разрезать диамант на требуемые фигурки невозможно. Для остальных n такое разрезание существует и строится без проблем.