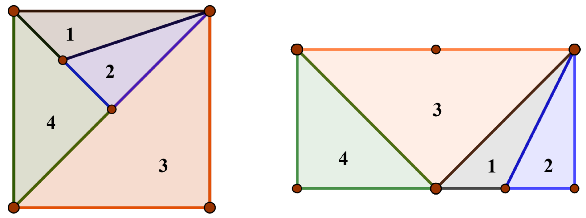
КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 26.10.2023
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА. РЕШЕНИЯ

1. Можно ли разрезать квадрат на 4 различных треугольника так, чтобы из них можно было сложить без дырок и наложений прямоугольник (использовав все 4 треугольника), одна сторона которого в два раза больше другой?

И. Ефремов

Решение. Пример возможного разрезания нарисован на картинке.



2. В ряд стоят несколько человек, каждый из которых является либо рыцарем, всегда говорящим правду, либо лжецом, всегда говорящим неправду, либо хитрецом, говорящим правду тогда и только тогда, когда он стоит рядом с рыцарем. Каждый из стоящих в ряду сказал, что во всём ряду слева и справа от него поровну хитрецов. Докажите, что если среди стоящих есть хитрецы, то есть и хитрецы, стоящие рядом.

П. Пикалов

Решение. Предположим, что среди стоящих в ряду человек есть рыцарь. Докажем, что рядом с ним не могут стоять ни лжецы, ни хитрецы.

Пусть рядом с рыцарем стоит лжец. Тогда для него тоже количество хитрецов слева и справа одинаково, и этот лжец скажет правду.

Пусть рядом с рыцарем стоит хитрец. Тогда этот хитрец должен говорить правду, но для него количество хитрецов слева и справа уже не может быть одинаковым (он ведь не учитывает самого себя).

Таким образом, рыцарь может стоять только рядом с рыцарями, и мы получаем, что все стоящие в ряду — рыцари, тогда доказывать нечего.

Предположим теперь, что среди стоящих в ряду нет рыцаря. Сразу отметим, что все хитрецы в такой ситуации будут лгать. Если хитрецов нечётное количество, то центральный скажет правду, чего не может быть. Поэтому хитрецов чётное количество, обозначим его через $2k > 0$ (если хитрецов 0, то доказывать нечего). Рассмотрим k-го и $(k+1)$-го хитрецов. Между ними не может стоять лжец, так как он бы сказал правду. Значит, эти двое хитрецов стоят рядом, что и требовалось доказать.

3. В некотором стозначном числе X без нулей, единиц, восьмёрок и девяток в записи к первой, третьей, пятой, …, 99-ой слева цифрам прибавили по двойке и получили число A. Из второй, четвёртой, шестой, …, 100-ой слева цифры числа X вычли по двойке и получили число B. Оказалось, что A делится на B. Чему могло быть равно число X?

С. Берлов

Ответ. $X = 242424\ldots424$. **Решение.** Заметим, что число $A - B$ состоит из ста двоек и делится на стозначное число B. В частном не могло получиться 2, поскольку тогда первая цифра числа X были бы единицей и не могло получиться больше 2, поскольку число B тогда было бы не стозначным. Значит, B состоит из ста двоек, откуда и получается ответ.

4. Сумма чисел x, y и z (не обязательно целых) равна 1. Докажите, что произведение чисел $x + yz$, $y + zx$ и $z + xy$ неотрицательно.

сообщил Л. Самойлов

Решение. Заметим, что $x + yz = (1 - y - z) + yz = (1 - y)(1 - z)$. Аналогичное равенство верно для других двух выражений. Следовательно, произведение равняется $(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2$, что неотрицательно.

5. Простое число p назовем *стандартным*, если существуют различные натуральные числа $1 < a, b < p/2$ такие, что $ab - 2$ делится на p. Докажите, что существует лишь конечное число простых не стандартных чисел.

И. Ефремов

Решение. Докажем, что все простые $p > 11$ являются стандартными. Если p дает остаток 1 при делении на 3, то $p + 2 = \dfrac{p+2}{3} \cdot 3$. При этом $\dfrac{p+2}{3} < \dfrac{p}{2}$, поэтому достаточно взять $a = \dfrac{p+2}{3}$, $b = 3$. Если же p дает остаток 2 при делении на 3, то $2p + 2 = \dfrac{p+1}{3} \cdot 6$. Тогда можно взять $a = \dfrac{p+1}{3}$, $b = 6$.

6. Вера выложила в ряд 2023 монеты, чередуя решки и орлы, начиная и заканчивая решкой: РОРОРОРОР. . . РОР (Р — решка, О — орел). За один ход Вера может перевернуть одну монету ряда, соблюдая следующие правила. В первый ход Вера может перевернуть любую из монет. Во все последующие ходы Вера может переворачивать только монету, соседнюю с той, которую она перевернула предыдущим ходом (монета не является соседней сама себе). Определите наименьшее возможное количество ходов, за которое Вера сможет перевернуть все монеты орлом вверх.

USA TSTST 2023, shortlist

Ответ. 4044. **Решение.** Пронумеруем монеты от 1 до 2023. Очевидно, что Вера должна перевернуть каждую нечетную монету нечетное число раз, а каждую четную — четное. Сначала мы докажем следующее утверждение. Утверждение: ни одна четная монета не может быть перевернута ноль раз. Доказательство: Если некоторая монета никогда не переворачивается, то либо ни одна из монет слева от нее не переворачивается, либо ни одна из монет справа от нее не переворачивается. Но для каждой четной монеты с обеих ее сторон существуют нечетные монеты, которые должны быть перевёрнуты хотя бы один раз: противоречие. Поэтому всего должно быть не менее $2\lfloor 2023/2 \rfloor = 2022$ переворотов четных монет. Кроме того, номера переворачиваемых монет должны чередоваться между четными и нечетными, поэтому всего должно быть не менее 2021 переворотов нечетных монет. Однако у нас есть дополнительное условие, что каждая нечетная монета переворачивается нечетное число раз, а поскольку нечетных монет четное число (1012), то и переворотов нечетных должно быть четное число, следовательно, их нужно не менее 2022, что дает суммарно не менее 4044 переворотов монет. Для построения конструкции надо перевернуть 2,1,2,3 в таком порядке. Затем перевернём $4m$, $4m + 1$, $4m$, $4m + 1$, $4m + 2$, $4m + 1$, $4m + 2$, $4m + 3$ для $m = 1, 2, \ldots, 505$ в таком порядке. Это дает ровно $8 \cdot 505 + 4 = 4044$ переворотов.

7. Вася хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x < 2^{99}$, через минуту оно заменяется на число $x^2 + 2^{99}$, а если число $x \geqslant 2^{99}$, то через минуту оно уменьшается ровно вдвое. Может ли Вася написать на доске число так, чтобы оно всегда оставалось целым?

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть на доске написано число $a = 2^k \cdot t$, где t — нечётное число, которое в дальнейшем будем называть нечётным корнем натурального числа. Заметим, что если во время замены число на доске уменьшается вдвое, то его нечётный корень не меняется. Если же к его квадрату прибавляется 2^{99}, то получается число $2^{2k} \cdot t^2 + 2^{99}$. Число $2k$ либо меньше, либо больше, чем 99. В первом случае получается число $2^{2k} \cdot (t^2 + 2^{99-2k})$, во втором — $2^{99} \cdot (2^{2k-99} \cdot t^2 + 1)$. В обоих случаях нечётный корень числа увеличился. Так как делить на 2 и постоянно получать целые числа мы не можем, нечётный корень раз в какое-то время обязательно увеличивается. Поэтому он когда-нибудь станет больше, чем 2^{99}. Но тогда его придётся делить на 2, и получится нецелое число.

8. Точка M — середина боковой стороны AB, а точка N — середина боковой стороны BC равнобедренного треугольника ABC. Точка D на отрезке AM выбрана так, что $\angle CND = 90°$. Луч CD пересекает прямую MN в точке E. Точка F отмечена на отрезке CN таким образом, что $BF = CE$. Докажите, что из отрезков DE, DF и MN можно сложить треугольник.

А. Кузнецов

Решение. Отметим на луче ME такую точку G, что $MG = EN$. Заметим, что $\angle GMB = \angle ENC$ и $MB = NC$. Тогда по первому признаку равны треугольники GMB и ENC. Из этого следует, что $\angle DCF = \angle DBG$. Из равнобедренности треугольника BDC (в нём медиана совпадает с высотой) следует, что $\angle DCF = \angle DBF$. Следовательно, по первому признаку равны треугольники DBG и DBF. Таким образом, равны отрезки GD и DF. Осталось заметить, что $GE = GM - EM = EN - EM = MN$. Мы получили треугольник GED, стороны которого равны нужным отрезкам.