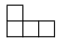
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Каждое двузначное число окрашено в один из k цветов, причём все цвета присутствуют. При каком минимальном значении k можно гарантированно утверждать, что найдутся три числа a, b и c разных цветов, такие что у a и b одинаковая цифра единиц, а у b и c — одинаковая цифра десятков?

2. Для некоторого натурального числа $n > 100$ выписали в порядке возрастания все числа, меньшие $3n + 1$ и взаимно простые с $3n + 1$. Докажите, что сумма каких-то двух подряд стоящих чисел делится на 3.

3. В шахматном турнире каждая пара участников сыграла друг с другом не более одного раза. Если два участника A и B не сыграли друг с другом, то ровно два других участника в течение турнира сыграли и с A, и с B. Более того, никакие 4 участника не сыграли между собой ровно 5 партий. Докажите, что любые два участника сыграли поровну партий.

4. Дима раскрасил числа 1, 2, 3, $\ldots$, 2023 в k цветов. Оказалось, что наименьшее число первого цвета равно количеству чисел второго цвета, наименьшее число второго цвета равно количеству чисел третьего цвета, $\ldots$, наименьшее число k-ого цвета равно количеству чисел первого цвета. Найдите наибольшее возможное значение k.

5. Некоторую клетчатую фигуру Вася разбил на фигурки вида  (такие фигурки можно поворачивать и переворачивать), а Петя — на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Могло ли в петином разбиении вертикальных доминошек оказаться ровно на 50 больше, чем горизонтальных?

6. Дана таблица 100×100 с единицами на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, и нулями во всех остальных клетках. За один шаг разрешается выбрать две строки и заменить каждую из них строкой, полученной в результате следующей операции: для всех i от 1 до 100 новая строка имеет единицу на i-ой позиции, если в выбранных строках числа на i-ой позиции различаются, и ноль, если совпадают. Можно ли несколькими такими шагами добиться того, чтобы все клетки таблицы стали заполнены единицами?

7. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Существуют ли различные натуральные числа a и b такие, что $a + 2023S(a) = b + 2023S(b)$?

8. У Адама есть секретное натуральное число x, которое пытается узнать Ева. На каждом шаге Ева выбирает натуральное число n и задает вопрос *“является ли число $x + n$ натуральной степенью простого числа?”*. Каждый следующий вопрос Ева задает, услышав ответ на предыдущий. Докажите, что Ева может узнать число x, задав конечное число вопросов.

LXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЭТНОМИР, 25.10 – 31.10.2023

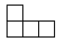
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Каждое двузначное число окрашено в один из k цветов, причём все цвета присутствуют. При каком минимальном значении k можно гарантированно утверждать, что найдутся три числа a, b и c разных цветов, такие что у a и b одинаковая цифра единиц, а у b и c — одинаковая цифра десятков?

2. Для некоторого натурального числа n выписали в порядке возрастания все числа, меньшие $3n$ и взаимно простые с $3n$. Докажите, что сумма каких-то двух подряд стоящих чисел делится на 3.

3. Оля расставила по кругу 200 пустых мисок. Оля и ее кошка Кайя ходят по очереди, начинает Оля. Каждым своим ходом Оля кладет кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, а Кайя сдвигает лапкой один кусочек (не обязательно тот, который только что добавили!) из любой миски в соседнюю. Кайя хочет, чтобы после ее 200-го хода в какой-нибудь миске оказалось хотя бы 10 кусочков корма. Может ли она действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

4. Дима раскрасил числа 1, 2, 3, $\ldots$, 2023 в k цветов. Оказалось, что наименьшее число первого цвета равно количеству чисел второго цвета, наименьшее число второго цвета равно количеству чисел третьего цвета, $\ldots$, наименьшее число k-ого цвета равно количеству чисел первого цвета. Найдите наибольшее возможное значение k.

5. Некоторую клетчатую фигуру Вася разбил на фигурки вида  (такие фигурки можно поворачивать и переворачивать), а Петя — на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Могло ли в петином разбиении вертикальных доминошек оказаться ровно на 50 больше, чем горизонтальных?

6. Дана таблица 100×100 с единицами на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, и нулями во всех остальных клетках. За один шаг разрешается выбрать две строки и заменить каждую из них строкой, полученной в результате следующей операции: для всех i от 1 до 100 новая строка имеет единицу на i-ой позиции, если в выбранных строках числа на i-ой позиции различаются, и ноль, если совпадают. Можно ли несколькими такими шагами добиться того, чтобы все клетки таблицы стали заполнены единицами?

7. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Существуют ли различные натуральные числа a и b такие, что $a + 2023S(a) = b + 2023S(b)$?

8. Адам загадал секретное натуральное число x от 1 до 1000, которое пытается за несколько шагов узнать Ева. На каждом шаге Ева выбирает натуральное число n от 1 до 500 и узнает у Адама, на какую максимальную степень двойки делится число $x+n$. Каждый следующий вопрос Ева задает, услышав ответ на предыдущий. Может ли Ева действовать так, чтобы гарантированно определить число Адама после 20 вопросов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Несколько двузначных чисел образуют *цепочку*, если в разряде единиц первого числа стоит та же цифра, что в разряде десятков второго, в разряде единиц второго числа стоит та же цифра, что в разряде десятков третьего, в разряде единиц третьего — та же, что в разряде десятков четвёртого, и т.д. Какую самую длинную цепочку можно составить из различных чисел, кратных трём?

2. Для некоторого натурального числа n выписали в порядке возрастания все числа, меньшие $3n$ и взаимно простые с $3n$. Докажите, что сумма каких-то двух подряд стоящих чисел делится на 3.

3. Оля расставила по кругу 15 пустых мисок. Оля и ее кошка Кайя ходят по очереди (начинает Оля). Каждым своим ходом Оля кладет кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, а Кайя сдвигает лапкой этот кусочек в одну из соседних мисок. После 60-ого своего хода Кайя подходит к одной из мисок с наибольшим количеством кусочков и съедает их. Какое наибольшее количество кусочков Кайя сможет гарантировано съесть?

4. Дима раскрасил числа 1, 2, 3, …, 2023 в k цветов. Оказалось, что наименьшее число первого цвета равно количеству чисел второго цвета, наименьшее число второго цвета равно количеству чисел третьего цвета, …, наименьшее число k-ого цвета равно количеству чисел первого цвета. Найдите наибольшее возможное значение k.

5. Некоторую клетчатую фигуру Вася разбил на доминошки (прямоугольники из двух клеток), причём вертикальных доминошек у Васи получилось на одну больше, чем горизонтальных. После чего Петя разбил на доминошки ту же самую клетчатую фигуру. Могло ли в петином разбиении горизонтальных доминошек быть на одну больше, чем вертикальных?

6. Дана таблица 10×10 с единицами на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, и нулями во всех остальных клетках. За один шаг разрешается выбрать две строки и заменить каждую из них строкой, полученной в результате следующей операции: для всех i от 1 до 10 новая строка имеет единицу на i-ой позиции, если в выбранных строках числа на i-ой позиции различаются, и ноль, если совпадают. Можно ли несколькими такими шагами добиться того, чтобы все клетки таблицы стали заполнены единицами?

7. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Существуют ли различные натуральные числа a и b, такие, что $a + S(a) = b + S(b)$?

8. Адам загадал секретное натуральное число x от 1 до 1023, которое пытается за несколько шагов узнать Ева. На каждом шаге Ева выбирает натуральное число n и узнает у Адама, на какую максимальную степень двойки делится число $x + n$. Каждый следующий вопрос Ева задает, услышав ответ на предыдущий. Может ли Ева действовать так, чтобы гарантированно определить число Адама после нескольких вопросов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Несколько двузначных чисел образуют *цепочку*, если в разряде единиц первого числа стоит та же цифра, что в разряде десятков второго, в разряде единиц второго числа стоит та же цифра, что в разряде десятков третьего, в разряде единиц третьего — та же, что в разряде десятков четвёртого, и т.д. Какую самую длинную цепочку можно составить из различных чисел, кратных трём?

2. Для некоторого натурального числа n выписали в порядке возрастания все числа, меньшие $3n$ и взаимно простые с $3n$. Докажите, что сумма каких-то двух подряд стоящих чисел делится на 3.

3. В волейболе игра идёт до трёх выигранных партий. За победу со счётом по партиям $3:0$ или $3:1$ даётся 3 очка, сопернику — 0. За победу со счётом $3:2$ даётся 2 очка, а сопернику — 1 очко. В турнире играли 3 команды: Умные, Весёлые и Находчивые. Каждая с каждой сыграла по 5 игр. Могло ли так получиться, что Весёлые выиграли больше всех партий, Находчивые одержали больше всех побед, а Умные набрали больше всех очков?

4. Оля расставила по кругу 12 пустых мисок. Оля и ее кошка Кайя ходят по очереди (начинает Оля). Каждым своим ходом Оля кладет кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, а Кайя может сдвинуть лапкой этот кусочек в одну из соседних мисок, а может ничего не делать. После 60-ого своего хода Кайя подходит к одной из мисок с наибольшим количеством кусочков и съедает их. Сможет ли Кайя гарантированно съесть 15 кусочков?

5. Некоторую клетчатую фигуру Вася разбил на доминошки (прямоугольники из двух клеток), причём вертикальных доминошек у Васи получилось на одну больше, чем горизонтальных. После чего Петя разбил на доминошки ту же самую клетчатую фигуру. Могло ли в петином разбиении горизонтальных доминошек быть на одну больше, чем вертикальных?

6. Назовём «ёжиком» семиклеточную фигуру, получающуюся из клетчатого квадрата 3×3 удалением двух его противоположных угловых клеток. Можно ли из какого-нибудь клетчатого квадрата вырезать по границам клеток несколько «ёжиков», чтобы доля «обрезков» (оставшихся от квадрата клеток) составляла меньше 1 процента площади этого квадрата?

7. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр числа n. Существуют ли различные натуральные числа a и b, такие, что $a + S(a) = b + S(b)$?

8. Натуральное число умножили на 9 и получили это же число, записанное в обратном порядке. Найдите все такие числа, меньшие миллиона.