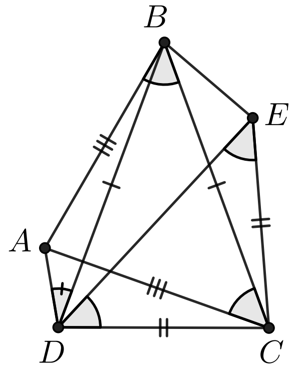
## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
## ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** На плоскости дана замкнутая 23-звенная ломаная. Может ли так оказаться, что все ее звенья из точки $A$ видны под углом $1^\circ$, а из точки $B$ видны под углом $23^\circ$? Говорят, что отрезок $XY$ виден под углом $\alpha$ из точки $O$, если $\angle XOY = \alpha$.

**2.** Дима раскрасил числа $1, 2, 3, \ldots, 2023$ в $k$ цветов. Оказалось, что наименьшее число первого цвета равно количеству чисел второго цвета, наименьшее число второго цвета равно количеству чисел третьего цвета, $\ldots$, наименьшее число $k$-ого цвета равно количеству чисел первого цвета. Найдите все возможные значения $k$.

**3.** Равнобедренные треугольники $ABC$ и $CDE$ с равными углами при основании расположены на плоскости так, что $BC = BD$ (см. рисунок). Оказалось, что $\angle ADB = 30^\circ$. Найдите угол $BEC$.




**4.** Каждая клетка квадрата $n \times n$ может быть покрашена в белый или черный цвет. За один ход можно выбрать 4 клетки, являющиеся вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки, и перекрасить их в противоположный цвет. Для какого наибольшего $k$ можно найти $k$ различных раскрасок квадрата так, чтобы ни одну из выбранных раскрасок нельзя было бы привести ни к одной другой с помощью выбранных операций?

**5.** В шахматном турнире каждая пара участников сыграла друг с другом не более одного раза. Если два участника $A$ и $B$ не сыграли друг с другом, то ровно два других участника в течение турнира сыграли и с $A$, и с $B$. Более того, никакие 4 участника не сыграли между собой ровно 5 партий. Докажите, что каждый участник сыграл одинаковое количество партий.

**6.** На каждой из 100 карточек написано натуральное число. Если число $a$ на одной из карточек равно сумме чисел на двух других карточках, то $a$ можно умножить на любое натуральное число, большее 1, и записать результат вместо числа $a$. Докажите, что эту операцию удастся сделать только конечное число раз.

**7.** Натуральные числа $a, b, c, d, k$ таковы, что

$$k = \frac{ab}{cd} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2}.$$

Докажите, что число $k$ — точный квадрат.

**8.** Паша придумал натуральное число, состоящее из различных ненулевых цифр, делящееся на 41. Дима заметил, что в этом числе можно поменять две цифры местами так, чтобы результат тоже делился на 41. Какое наименьшее количество цифр могло быть в Пашином числе?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
## ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** На плоскости дана замкнутая 23-звенная ломаная. Может ли так оказаться, что все ее звенья из точки $A$ видны под углом $1^\circ$, а из точки $B$ видны под углом $23^\circ$? Говорят, что отрезок $XY$ виден под углом $\alpha$ из точки $O$, если $\angle XOY = \alpha$.

**2.** Дима раскрасил числа 1, 2, 3, ..., 2023 в $k$ цветов. Оказалось, что наименьшее число первого цвета равно количеству чисел второго цвета, наименьшее число второго цвета равно количеству чисел третьего цвета, ..., наименьшее число $k$-ого цвета равно количеству чисел первого цвета. Найдите наибольшее возможное значение $k$.

**3.** Дана таблица $100 \times 100$ с единицами на главной диагонали и нулями в остальных клетках. На каждом шаге разрешается выбрать две строки и заменить каждую из них строкой, полученной в результате следующей операции: новая строка имеет единицу на $i$-й позиции тогда и только тогда, когда ровно в одной из двух выбранных строк на $i$-й позиции стоит единица; и ноль — в противном случае. Можно ли несколькими такими операциями добиться того, чтобы все клетки таблицы стали заполнены единицами?

**4.** Натуральные числа $a, b, c, d, k$ таковы, что

$$k = \frac{ab}{cd} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2}.$$

Докажите, что число $k$ — точный квадрат.

**5.** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ (шестиугольник называется *правильным*, если все его стороны равны, а все углы по $120^\circ$). Снаружи шестиугольника построены квадраты $ABKL$ и $DEMN$. Найдите величину угла $LNM$.

**6.** Паша придумал натуральное число, состоящее из различных ненулевых цифр, делящееся на 41. Дима заметил, что в этом числе можно поменять две цифры местами так, чтобы результат тоже делился на 41. Какое наименьшее количество цифр могло быть в Пашином числе?

**7.** Саша задумал 4 различных положительных числа. Докажите, что он может заменить звездочки в выражении $(* - *^2)(*^2 - *)$ на задуманные числа (каждое число используется по одному разу) так, чтобы значение выражения не было положительным.

**8.** Некоторую клетчатую фигуру Вася разбил на $L$-тетрамино (4-клеточные фигуры в виде буквы $L$), а Петя — на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Могло ли в Петином разбиении вертикальных доминошек оказаться ровно на 50 больше, чем горизонтальных?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
## ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** На плоскости дана замкнутая ломаная. Может ли так оказаться, что все ее звенья из точки $A$ видны под углом $1°$, а из точки $B$ видны под углом $23°$? Говорят, что отрезок $XY$ виден под углом $\alpha$ из точки $O$, если $\angle XOY = \alpha$.

**2.** Можно ли натуральные числа от 1 до 50 включительно раскрасить в 9 цветов так, чтобы наименьшее число первого цвета равнялось количеству чисел второго цвета, наименьшее число второго цвета равнялось количеству чисел третьего цвета, $\ldots$, наименьшее число девятого цвета равнялось количеству чисел первого цвета?

**3.** Натуральные числа $a, b, c, d, k$ таковы, что

$$k = \frac{ab}{cd} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2}.$$

Докажите, что число $k$ — точный квадрат.

**4.** Для некоторого натурального числа $n > 100$ выписали в порядке возрастания все натуральные числа, меньшие $3n$ и взаимно простые с $3n$. Докажите, что сумма каких-то двух подряд стоящих чисел делится на 3.

**5.** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ (шестиугольник называется *правильным*, если все его стороны равны, а все углы по $120°$). Снаружи шестиугольника построены квадраты $ABKL$ и $DEMN$. Найдите величину угла $LNM$.

**6.** Паша придумал натуральное число, состоящее из различных ненулевых цифр, делящееся на 41. Дима заметил, что в этом числе можно поменять две цифры местами так, чтобы результат тоже делился на 41. Какое наименьшее количество цифр могло быть в Пашином числе?

**7.** Оля расставила по кругу 200 пустых мисок. Раз в секунду она кладет новый кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, после чего кошка Кайя перекладывает один кусочек (не обязательно тот, который только что добавили!) из любой миски в соседнюю. Кайя хочет, чтобы через 200 секунд в какой-нибудь миске оказалось хотя бы 10 кусочков корма. Может ли она действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

**8.** Некоторую клетчатую фигуру Вася разбил на $L$-тетрамино (4-клеточные фигуры в виде буквы $L$), а Петя — на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Могло ли в Петином разбиении вертикальных доминошек оказаться ровно на 50 больше, чем горизонтальных?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
## ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** Можно ли натуральные числа от 1 до 50 включительно раскрасить в 9 цветов так, чтобы наименьшее число первого цвета равнялось количеству чисел второго цвета, наименьшее число второго цвета равнялось количеству чисел третьего цвета, ..., наименьшее число девятого цвета равнялось количеству чисел первого цвета?

**2.** Положительные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что

$$\frac{ab}{c} = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - 1}.$$

Докажите, что произведение каких-то двух чисел равно третьему.

**3.** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ (шестиугольник называется *правильным*, если все его стороны равны, а все углы по $120°$). Снаружи шестиугольника построены квадраты $ABKL$ и $DEMN$. Найдите величину угла $LNM$.

**4.** Паша придумал натуральное число, состоящее из различных ненулевых цифр, делящееся на 41. Дима заметил, что в этом числе можно поменять две цифры местами так, чтобы результат тоже делился на 41. Какое наименьшее количество цифр могло быть в Пашином числе?

**5.** Оля расставила по кругу 200 пустых мисок. Раз в секунду она кладет новый кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, после чего кошка Кайя перекладывает один кусочек (не обязательно тот, который только что добавили!) из любой миски в соседнюю. Кайя хочет, чтобы через 200 секунд в какой-нибудь миске оказалось хотя бы 10 кусочков корма. Может ли она действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

**6.** Шесть команд сыграли однокруговой турнир (каждая команда играет с каждой по одному разу), в котором за победу даётся 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. Пять команд набрали 13, 12, 8, 5, 1 очков соответственно. Сколько могла набрать последняя? Укажите все варианты.

**7.** Найдите наименьшее натуральное $N$ такое, что в бесконечной последовательности дробей $\dfrac{N+2023}{23}, \dfrac{N+2024}{24}, \dfrac{N+2025}{25}, \ldots$ ровно 2 целых числа.

**8.** На картинке нарисованы два квадрата, сторона одного вдвое меньше стороны другого. По контуру маленького квадрата бегает Вася, а по контуру большого — Петя. Они бегают с постоянными, но различными скоростями. Ребята стартуют в точке А. Вася бежит налево, а Петя бежит направо. Однажды ребята встретились в точке Б. Может ли оказаться, что Вася и Петя никогда больше не встретятся в точке А?