LXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЭТНОМИР, 25.10–31.10.2023

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

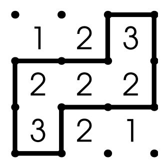
1. В связном графе с n вершинами каждое ребро содержится хотя бы в одном треугольнике. Найдите наименьшее возможное количество рёбер в этом графе.

2. На плоскости нарисован выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что на этой плоскости найдётся такая точка X, что квадрат расстояния от точки X до самой удалённой от неё вершины четырёхугольника $ABCD$ не превосходит

$$\frac{XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2}{2}.$$

3. На каждой из 2023 карточек написано натуральное число. Если число на одной из карточек равно сумме чисел на двух других карточках, это число можно умножить на любое натуральное число, большее 1. Докажите, что это удастся сделать только конечное число раз.

4. На прямоугольном листе в клетку нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки. В каждой клетке написано число, показывающее, сколько сторон этой клетки принадлежит ломаной. Докажите, что расстановка чисел в клетках однозначно определяет длину ломаной. Предполагается, что ломаная может проходить и по краю листа, но за пределами листа никаких чисел не пишут.



5. Пусть n — натуральное число,

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}.$$

Докажите, что $a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + \ldots - a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2 = a_n$.

6. В равнобокой трапеции $ABCD$ с условием $AD = AC$ на боковой стороне AB отмечена точка E — основание биссектрисы угла ACB. Докажите, что BD, высота трапеции из вершины C, перпендикуляр к AB в точке E пересекаются в одной точке.

7. Для натурального числа n обозначим через $f(n)$ сумму квадратов натуральных делителей числа n. Назовём натуральное число n *шестичным*, если оно равно произведению двух простых чисел, отличающихся на 6. Можно проверить, что если n — шестичное, то $f(n) = n^2 + 2n + 37$. Найдите все не шестичные n, для которых $f(n) = n^2 + 2n + 37$.

8. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y^2 = y^3+1$. Докажите, что $y + x^2 \leqslant x^3 + 1$.

LXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЭТНОМИР, 25.10–31.10.2023

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

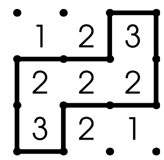
1. Оля расставила по кругу 200 пустых мисок. Раз в секунду она кладет кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, после чего кошка Кайя сдвигает лапкой один кусочек (не обязательно тот, который только что добавили!) из любой миски в соседнюю. Кайя хочет, чтобы через 200 секунд в какой-нибудь миске оказалось хотя бы 10 кусочков корма. Может ли она действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

2. На плоскости нарисован выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что на этой плоскости найдётся такая точка X, что квадрат расстояния от точки X до самой удалённой от неё вершины четырёхугольника $ABCD$ не превосходит

$$\frac{XA^2+XB^2+XC^2+XD^2}{2}.$$

3. На каждой из 2023 карточек написано натуральное число. Если число на одной из карточек равно сумме чисел на двух других карточках, это число можно умножить на любое натуральное число, большее 1. Докажите, что это удастся сделать только конечное число раз.

4. На прямоугольном листе в клетку нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки. В каждой клетке написано число, показывающее, сколько сторон этой клетки принадлежит ломаной. Докажите, что расстановка чисел в клетках однозначно определяет длину ломаной. Предполагается, что ломаная может проходить и по краю листа, но за пределами листа никаких чисел не пишут.



5. Пусть n — натуральное число,

$$(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}.$$

Найдите значение выражения $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \ldots + a_{2n-2}a_{2n-1} - a_{2n-1}a_{2n}$.

6. В равнобокой трапеции $ABCD$ с условием $AD = AC$ на боковой стороне AB отмечена точка E — основание биссектрисы угла ACB. Докажите, что BD, высота трапеции из вершины C, перпендикуляр к AB в точке E пересекаются в одной точке.

7. Для натурального числа n обозначим через $f(n)$ сумму квадратов натуральных делителей числа n. Назовём натуральное число n *шестичным*, если оно равно произведению двух простых чисел, отличающихся на 6. Можно проверить, что если n — шестичное, то $f(n) = n^2 + 2n + 37$. Найдите все не шестичные n, для которых $f(n) = n^2 + 2n + 37$.

8. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y^2 = y^3+1$. Докажите, что $y + x^2 \leqslant x^3 + 1$.

LXI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЭТНОМИР, 25.10–31.10.2023

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

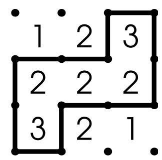
1. Оля расставила по кругу 200 пустых мисок. Раз в секунду она кладет кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, после чего кошка Кайя сдвигает лапкой один кусочек (не обязательно тот, который только что добавили!) из любой миски в соседнюю. Кайя хочет, чтобы через 200 секунд в какой-нибудь миске оказалось хотя бы 10 кусочков корма. Может ли она действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

2. На плоскости нарисован выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что на этой плоскости найдётся такая точка X, что квадрат расстояния от точки X до самой удалённой от неё вершины четырёхугольника $ABCD$ не превосходит

$$\frac{XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2}{2}.$$

3. На каждой из 2023 карточек написано натуральное число. Если число на одной из карточек равно сумме чисел на двух других карточках, это число можно умножить на любое натуральное число, большее 1. Докажите, что это удастся сделать только конечное число раз.

4. На прямоугольном листе в клетку нарисована замкнутая несамопересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки. В каждой клетке написано число, показывающее, сколько сторон этой клетки принадлежит ломаной. Докажите, что расстановка чисел в клетках однозначно определяет длину ломаной. Предполагается, что ломаная может проходить и по краю листа, но за пределами листа никаких чисел не пишут.



5. Пусть n — натуральное число,

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}.$$

Найдите значение выражения $a_0a_1 - a_1a_2 + a_2a_3 - \ldots + a_{2n-2}a_{2n-1} - a_{2n-1}a_{2n}$.

6. В квадрате $ABCD$ точка M — середина стороны BC. Точки X и Y лежат на сторонах AB и CD соответственно. Оказалось, что $\angle XMY = 90^\circ$. Докажите, что $BX + CY = XY$.

7. Для некоторого натурального числа $n > 100$ выписали в порядке возрастания все числа, меньшие $3n$ и взаимно простые с $3n$. Докажите, что сумма каких-то двух подряд стоящих чисел делится на 6.

8. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y^2 = y^3+1$. Докажите, что $y + x^2 \leqslant x^3 + 1$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.10.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Оля расставила по кругу 200 пустых мисок. Раз в секунду она кладет кусочек корма в одну из мисок по своему выбору, после чего кошка Кайя сдвигает лапкой один кусочек (не обязательно тот, который только что добавили!) из любой миски в соседнюю. Кайя хочет, чтобы через 200 секунд в какой-нибудь миске оказалось хотя бы 10 кусочков корма. Может ли она действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого?

2. На плоскости нарисован выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что на этой плоскости найдётся такая точка X, что квадрат расстояния от точки X до самой удалённой от неё вершины четырёхугольника $ABCD$ не превосходит

$$\frac{XA^2+XB^2+XC^2+XD^2}{2}.$$

3. На каждой из 2023 карточек написано натуральное число. Если число на одной из карточек равно сумме чисел на двух других карточках, это число можно умножить на любое натуральное число, большее 1. Докажите, что это удастся сделать только конечное число раз.

4. Петя и Вася играют на доске 100×100, по очереди расставляя в её клетки крестики и нолики (в каждой клетке не более одного символа). За один ход Петя ставит один крестик, а Вася — три нолика. Петя ходит первым. Может ли Вася играть так, чтобы ни в какой момент игры на доске не было три крестика «в ряд», то есть три подряд крестика в столбце или в строке (по диагонали не считается)?

5. Ненулевые числа a, a', b, b', c, c' таковы, что

$$\frac{a}{a'}+\frac{b'}{b}=1, \quad \frac{b}{b'}+\frac{c'}{c}=1.$$

Докажите, что $abc+a'b'c'=0$.

6. В квадрате $ABCD$ точка M — середина стороны BC. Точки X и Y лежат на сторонах AB и CD соответственно. Оказалось, что $\angle XMY = 90^\circ$. Докажите, что $BX+CY=XY$.

7. Для некоторого натурального числа $n>100$ выписали в порядке возрастания все числа, меньшие $3n$ и взаимно простые с $3n$. Докажите, что сумма каких-то двух подряд стоящих чисел делится на 6.

8. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y^2=y^3+1$. Докажите, что $y+x^2 \leqslant x^3+1$.