МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 – 4 МЕСТА

1. На столе в ряд лежит 10 000 000 печенек. Малыш и Карлсон играют в игру. Ходят по очереди, начинает Малыш. Он своим ходом кладёт изюминку на одну из печенек, на которой ещё не лежит изюминка (может и не класть). Карлсон своим ходом съедает 10 крайних печенек слева или 10 крайних печенек справа. Может ли Малыш играть так, чтобы последние 10 печенек, которые съест Карлсон, все были с изюминками, как бы ни играл Карлсон?

2. На столе стоят 10 гирь. Любые 4 из них можно разложить на две равные по весу кучи. Докажите, что все 10 гирь можно разложить на две равные по весу кучи.

3. На пиратском корабле есть 101 пират: капитан и команда из 100 пиратов. Каждый пират, включая капитана, имеет изначально ровно одну золотую монету. Капитан вносит предложение по перераспределению монет, а команда голосует, перераспределить деньги или нет. Капитан не участвует в голосовании. Член команды голосует «за» перераспределение, если в результате этого перераспределения у него становится больше монет, чем было, «против», если становится меньше, и воздерживается, если количество монет у него не меняется. Если «за» проголосовало строго больше членов команды, чем «против», предложение вступает в силу. После этого капитан вносит новое предложение, и так далее, пока капитан не остановится. Какое наибольшее количество монет может накопить у себя капитан?

4. На окружности расположено несколько точек. Некоторые пары этих точек соединены отрезками, каждый отрезок окрашен в один из 10 цветов. Оказалось, что из каждой точки выходит ровно по одному отрезку каждого из цветов, причём одноцветные отрезки не имеют общих точек (даже концов). Докажите, что все точки можно разбить на две группы таким образом, чтобы отрезки соединяли только точки из разных групп.

5. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата $10^{100} \times 10^{100}$ так, чтобы в любом прямоугольнике из 300 клеток было нечётное число отмеченных клеток?

6. В равенстве $1 \star 2 \star 3 \star 4 \star 5 \star \cdots \star 60 \star 61 \star 62 = 2023$ вместо каждой звездочки надо поставить один из знаков «$+$» (плюс), «$-$» (минус), «$\times$» (умножить) так, чтобы равенство стало верным. Какое наименьшее количество знаков «$\times$» может быть использовано?

7. Верно ли, что для любого $k > 1$ найдется k-значное число n такое, что все цифры n нечетны, и $S(S(n)) = 2$? Через $S(x)$ мы обозначаем сумму цифр числа x.

8. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. Фокуснику завязывают глаза, и после этого зритель выписывает на доску последовательность из 1025 нулей и единиц. Помощник, видя что написал зритель, выбирает любое место в этой последовательности и объявляет вслух номер места и какой символ стоит в последовательности зрителя на этом месте. После этого фокусник, который слышал, что сказал помощник, должен назвать 10 мест последовательности (не считая названного помощником) и для каждого из этих мест угадать число, которое на нём стоит. Как помощнику и фокуснику договориться заранее, чтобы фокус удался?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023

ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5 – 8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 – 6 МЕСТА

1. Оля кормит кошку Кайю разными кормами. Срок годности открытой упаковки корма — 8 дней (т.е. любой упаковкой можно пользоваться в течение 8 дней с первого момента использования, считая исходный день). Кайя отказывается есть корм, если ела корм из той же упаковки вчера или позавчера. Какого наименьшего количества упаковок достаточно купить Оле, чтобы кормить ими Кайю в течение 366 дней?

2. На столе стоят 10 гирь. Любые 4 из них можно разложить на две равные по весу кучи. Докажите, что все 10 гирь можно разложить на две равные по весу кучи.

3. На пиратском корабле есть 101 пират: капитан и команда из 100 пиратов. Каждый пират, включая капитана, имеет изначально ровно одну золотую монету. Капитан вносит предложение по перераспределению монет, а команда голосует, перераспределить деньги или нет. Капитан не участвует в голосовании. Член команды голосует «за» перераспределение, если в результате этого перераспределения у него становится больше монет, чем было, «против», если становится меньше, и воздерживается, если количество монет у него не меняется. Если «за» проголосовало строго больше членов команды, чем «против», предложение вступает в силу. После этого капитан вносит новое предложение, и так далее, пока капитан не остановится. Какое наибольшее количество монет может накопить у себя капитан?

4. Пусть n нечетное натуральное число. Имеется n стрелок, расположенных слева направо так, что каждая стрелка указывает либо влево, либо вправо. Докажите, что существует ровно одна стрелка, на которую указывает ровно столько стрелок, на сколько указывает она.

5. Можно ли отметить некоторые клетки квадрата $10^{100} \times 10^{100}$ так, чтобы в любом прямоугольнике из 300 клеток было нечётное число отмеченных клеток?

6. В равенстве $1 \star 2 \star 3 \star 4 \star 5 \star \cdots \star 60 \star 61 \star 62 = 2023$ вместо каждой звездочки надо поставить один из знаков «$+$» (плюс), «$-$» (минус), «$\times$» (умножить) так, чтобы равенство стало верным. Какое наименьшее количество знаков «$\times$» может быть использовано?

7. Верно ли, что для любого $k > 1$ найдется k-значное число n такое, что все цифры n нечетны, и $S(S(n)) = 2$? Через $S(x)$ мы обозначаем сумму цифр числа x.

8. В классе, состоящем из 23 школьников, каждому выставляются оценки по пяти предметам, причем каждая оценка это пятерка, четверка или тройка. Докажите, что если 22 из этих школьников получили свои оценки, то последнего можно оценить так, чтобы его оценки отличались от оценок любого другого школьника хотя бы по двум предметам.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023

ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 – 8 МЕСТА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 – 6 МЕСТА

1. Оля кормит кошку Кайю разными кормами. Срок годности открытой упаковки корма — 8 дней (т.е. любой упаковкой можно пользоваться в течение 8 дней с первого момента использования, считая исходный день). Кайя отказывается есть корм, если ела корм из той же упаковки вчера или позавчера. Какого наименьшего количества упаковок достаточно купить Оле, чтобы кормить ими Кайю в течение 900 дней?

2. На столе стоят 10 гирь. Любые 4 из них можно разложить на две равные по весу кучи по две гири в каждой. Докажите, что все 10 гирь равны по весу.

3. На пиратском корабле есть 101 пират: капитан и команда из 100 пиратов. Каждый пират, включая капитана, имеет изначально ровно одну золотую монету. Капитан вносит предложение по перераспределению монет, а команда голосует, перераспределить деньги или нет. Капитан не участвует в голосовании. Член команды голосует «за» перераспределение, если в результате этого перераспределения у него становится больше монет, чем было, «против», если становится меньше, и воздерживается если количество монет у него не меняется. Если «за» проголосовало строго больше членов команды, чем «против», предложение вступает в силу. После этого капитан вносит новое предложение, и так далее, пока капитан не остановится. Сможет ли капитан собрать у себя 90 монет?

4. Комплект домино состоит из 28 костяшек, на каждой из которых две цифры от 0 до 6 во всевозможных комбинациях. Старуха Шапокляк решила украсть две костяшки из полного комплекта домино, чтобы оставшиеся нельзя было выложить в цепочку по правилам домино. Сколькими способами она может это сделать?

5. Можно ли отметить некоторые клетки таблицы 12×12 таким образом, чтобы в любом прямоугольнике из 4 клеток было нечётное число отмеченных?

6. В равенстве $1 \star 2 \star 3 \star 4 \star 5 \star \cdots \star 60 \star 61 \star 62 = 2023$ вместо каждой звездочки надо поставить один из знаков «$+$» (плюс), «$-$» (минус), «$\times$» (умножить) так, чтобы равенство стало верным. Какое наименьшее количество знаков «$\times$» может быть использовано?

7. Пусть $d(n)$ — количество натуральных делителей натурального числа n. Например, $d(12) = 6$. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$ такие, что $d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leqslant 8$.

8. Пусть n нечетное натуральное число. Имеется n стрелок, расположенных слева направо так, что каждая стрелка указывает либо влево, либо вправо. Докажите, что существует хотя бы одна стрелка, на которую указывает ровно столько стрелок, на сколько указывает она.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 31.10.2023
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 – 8 МЕСТА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Петя пишет на трёх карточках по одному натуральному числу, а Вася дважды проделывает такую операцию: выбрасывает какие-то две карточки, а на новой карточке пишет сумму, разность или произведение выброшенных чисел. В результате двух этих операций остается одно число. Это число несколько раз подряд делят на 2, пока результат оказывается целым числом. Петя даёт Васе столько конфет, сколько раз удастся произвести деление. Сможет ли Вася получить хотя бы 3 конфеты, независимо от того, какие числа написал на карточках Петя?

2. На столе стоят 10 гирь. Каждая весит натуральное число килограммов, не превышающее 10. Любые 4 из них можно разложить на две равные по весу кучи. Докажите, что все 10 гирь можно разложить на две равные по весу кучи.

3. На пиратском корабле есть 101 пират: капитан и команда из 100 пиратов. Каждый пират, включая капитана, имеет изначально ровно одну золотую монету. Капитан вносит предложение по перераспределению монет, а команда голосует, перераспределить деньги или нет. Капитан не участвует в голосовании. Член команды голосует «за» перераспределение, если в результате этого перераспределения у него становится больше монет, чем было, «против», если становится меньше, и воздерживается если количество монет у него не меняется. Если «за» проголосовало строго больше членов команды, чем «против», предложение вступает в силу. После этого капитан вносит новое предложение, и так далее, пока капитан не остановится. Сможет ли капитан собрать у себя 90 монет?

4. Комплект домино состоит из 28 костяшек, на каждой из которых две цифры от 0 до 6 во всевозможных комбинациях. Старуха Шапокляк решила украсть две костяшки из полного комплекта домино, чтобы оставшиеся нельзя было выложить в цепочку по правилам домино. Сколькими способами она может это сделать?

5. Можно ли отметить некоторые клетки таблицы 12×12 таким образом, чтобы в любом прямоугольнике из 4 клеток было нечётное число отмеченных?

6. На доске 7×8 лежат несколько доминошек. Каждая занимает две соседние по стороне клетки. Если оказывается, что у каких-то двух свободных клеток доски, имеющих общую сторону, не менее трёх соседних по стороне клеток занято, то на эти две клетки кладётся доминошка. Можно ли изначально расположить на доске пять доминошек так, чтобы затем можно было последовательно заполнить все оставшиеся клетки доски?

7. Верно ли, что для любого чётного k существует k-значное число состоящее из нечётных цифр, сумма цифр которого равна степени десятки?

8. Найдите наименьшее k, при котором можно заполнить таблицу $3 \times k$ натуральными числами такими, что:
1. В каждом столбце одно из чисел равно сумме двух других.
2. Каждое из натуральных чисел от 1 до 12 встречается хотя бы один раз в каждой строке.