

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число  $n$ . Докажите, что любые  $2n$  последовательных натуральных чисел можно не менее чем  $n!$  способами разбить на  $n$  пар так, чтобы произведение чисел в каждой паре не являлось квадратом натурального числа.

2. Дано натуральное число  $t > 1$ . Найдите все натуральные числа  $n$ , удовлетворяющие одновременно двум условиям:

- у числа  $n$  не менее  $t + 2$  делителей;
- если выписать все делители  $n$  по возрастанию от 1 до  $n$ , то каждый делитель, начиная с  $(t + 1)$ -го, будет делиться на сумму  $t$  предыдущих делителей.

3. Рассмотрим 2024 различных простых числа  $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$  таких, что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{1012} = p_{1013} + p_{1014} + \dots + p_{2024}$ . Пусть  $A = p_1 p_2 \dots p_{1012}$  и  $B = p_{1013} p_{1014} \dots p_{2024}$ . Докажите, что  $|A - B| \geq 4$ .

4. Артур и Рената играют в игру на доске  $99 \times 99$ . У Артура есть две красные плитки, первоначально размещенные на клетках в левом нижнем и правом верхнем углах. У Ренаты есть две черные плитки, изначально размещенные на клетках в правом нижнем и левом верхнем углах. За ход игрок может выбрать одну из двух своих плиток и переместить ее на соседнюю по горизонтали или вертикали свободную клетку доски. Игроки ходят по очереди, начинает Артур. Артур выигрывает, если после некоторого количества ходов красные плитки окажутся в соседних по горизонтали или вертикали клетках. Сможет ли Рената помешать ему выиграть?

5. Натуральные числа от 1 до 1 000 разбили на две группы  $A$  и  $B$  по 500 чисел в каждой. Для каждой пары чисел  $a$  из  $A$ ,  $b$  из  $B$  выписали на доску разность  $a - b$ . Докажите, что какое-то число будет выписано на доску не менее 126 раз.

6. Давным-давно существовали марсиане трёх разных цветов: красного, зеленого и синего. Когда Марс был опустошен межгалактической войной, в живых осталось только по двое марсиан каждого цвета. Чтобы восстановить популяцию марсиан, они решили использовать машину, которая за одну операцию превращает либо красного и синего марсиан в 4 зеленых, либо синего и зеленого — в 5 красных, либо зеленого и красного — в 6 синих. Через несколько операций марсиан всех трёх цветов снова стало поровну. Через какое наименьшее количество операций это могло произойти?

7. Есть 1000 коробок, помеченных номерами 000, 001, 002, ..., 999. Номера 00000, 00001, 00002, ..., 99999 написаны на ста тысячах карточек, по одному на каждой. Класть карточку в коробку разрешается, если номер коробки можно получить, стерев две цифры из номера карточки. Например, можно положить карточку 03752 в коробку 072, но нельзя положить в коробку 025. Можно ли разложить все карточки по коробкам так, чтобы ровно три четверти всех коробок оказались пустыми?

8. Рассмотрим квадрат  $100 \times 100$  клеток. Каждая клетка окрашена в красный или синий цвет. Такая раскраска называется *правильной*, если каждая клетка соседствует по стороне с четным количеством красных клеток. Найдите количество правильных раскрасок. (Раскраски считаются различными, если хотя бы одна клетка имеет в них разный цвет.)

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вы прибыли в деревню, где есть 100 жителей, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), кто есть кто — неизвестно. Кроме того, пятеро из этих 100 жителей являются старейшинами (кто именно — неизвестно, однако известно, что все старейшины — рыцари, и что все жители старейшин знают). Вы можете спросить у любых пятерых человек: «Сколько старейшин среди вас пятерых?», и услышать ответ каждого из них. Можете ли вы гарантированно найти всех старейшин, задав несколько вопросов?

2. Дано натуральное число  $t > 1$ . Найдите все натуральные числа  $n$ , удовлетворяющие одновременно двум условиям:

- у числа  $n$  не менее  $t + 2$  делителей;
- если выписать все делители  $n$  по возрастанию от 1 до  $n$ , то каждый делитель, начиная с  $(t + 1)$ -го, будет делиться на сумму  $t$  предыдущих делителей.

3. Рассмотрим 2024 различных простых числа  $p_1, p_2, \dots, p_{2024}$  таких, что  $p_1 + p_2 + \dots + p_{1012} = p_{1013} + p_{1014} + \dots + p_{2024}$ . Пусть  $A = p_1 p_2 \dots p_{1012}$  и  $B = p_{1013} p_{1014} \dots p_{2024}$ . Докажите, что  $|A - B| \geq 4$ .

4. Артур и Рената играют в игру на доске  $99 \times 99$ . У Артура есть две красные плитки, первоначально размещенные на клетках в левом нижнем и правом верхнем углах. У Ренаты есть две черные плитки, изначально размещенные на клетках в правом нижнем и левом верхнем углах. За ход игрок может выбрать одну из двух своих плиток и переместить ее на соседнюю по горизонтали или вертикали свободную клетку доски. Игроки ходят по очереди, начинает Артур. Артур выигрывает, если после некоторого количества ходов красные плитки окажутся в соседних по горизонтали или вертикали клетках. Сможет ли Рената помешать ему выиграть?

5. По кругу равномерно расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа стул, либо на противоположный своему в круге стул. Сколько есть способов так перепрыгнуть, чтобы все стулья снова оказались заняты?

6. Давным-давно существовали марсиане трёх разных цветов: красного, зеленого и синего. Когда Марс был опустошен межгалактической войной, в живых осталось только по двое марсиан каждого цвета. Чтобы восстановить популяцию марсиан, они решили использовать машину, которая за одну операцию превращает либо красного и синего марсиан в 4 зеленых, либо синего и зеленого — в 5 красных, либо зеленого и красного — в 6 синих. Через несколько операций марсиан всех трёх цветов снова стало поровну. Через какое наименьшее количество операций это могло произойти?

7. Есть 100 коробок, помеченных номерами 00, 01, 02, ..., 99. Номера 000, 001, 002, ..., 999 написаны на тысяче карточек, по одной на каждой. Класть карточку в коробку разрешается, если номер коробки можно получить, стерев одну цифру из номера карточки. Например, разрешается положить карточку 037 в коробку 07, но не разрешается класть карточку 156 в коробку 65. Можно ли разложить все карточки по коробкам так, чтобы ровно половина всех коробок оказались пустыми?

8. Рассмотрим квадрат  $100 \times 100$  клеток. Каждая клетка окрашена в красный или синий цвет. Такая раскраска называется *правильной*, если каждая клетка соседствует по стороне с четным количеством красных клеток. Докажите, что правильных раскрасок четное количество. (Раскраски считаются различными, если хотя бы одна клетка имеет в них разный цвет.)

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024**  
**ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. Вы прибыли в деревню, где есть 100 жителей, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), кто есть кто — неизвестно. Кроме того, один из этих жителей является старостой (кто именно — неизвестно, и неизвестно, является староста рыцарем или лжецом; все жители знают, кто староста). Вы можете спросить у любых трех человек: «Есть ли среди вас троих староста?», и услышать ответ каждого из них. Можете ли вы гарантированно найти старосту, задав несколько вопросов?

2. Существует ли составное число  $n$  со следующим свойством: если  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$  — все натуральные делители  $n$ , то для любого натурального  $3 \leq i \leq k$  число  $d_i$  делится на число  $d_{i-1} + d_{i-2}$ ?

3. Пусть  $A$  и  $B$  — натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 2024. Какое наименьшее значение может принимать сумма цифр числа  $A + B$ ?

4. Артур и Рената играют в игру на доске  $99 \times 99$ . У Артура есть две красные плитки, первоначально размещенные на клетках в левом нижнем и правом верхнем углах. У Ренаты есть две черные плитки, изначально размещенные на клетках в правом нижнем и левом верхнем углах. За ход игрок может выбрать одну из двух своих плиток и переместить ее на соседнюю по горизонтали или вертикали свободную клетку доски. Игроки ходят по очереди, начинает Артур. Артур выигрывает, если после некоторого количества ходов красные плитки окажутся в соседних по горизонтали или вертикали клетках. Сможет ли Рената помешать ему выиграть?

5. По кругу равномерно расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа стул, либо на противоположный своему в круге стул. Сколько есть способов так перепрыгнуть, чтобы все стулья снова оказались заняты?

6. Давным-давно существовали марсиане трёх разных цветов: красного, зеленого и синего. Когда Марс был опустошен межгалактической войной, в живых осталось только по двое марсиан каждого цвета. Чтобы восстановить популяцию марсиан, они решили использовать машину, которая за одну операцию превращает либо красного и синего марсиан в 4 зеленых, либо синего и зеленого — в 5 красных, либо зеленого и красного — в 6 синих. Через несколько операций марсиан всех трёх цветов снова стало поровну. Через какое наименьшее количество операций это могло произойти?

7. Какое наибольшее число доминошек (прямоугольников из двух клеток) можно поместить на доску  $8 \times 17$ , чтобы никакие две не покрывали квадрат  $2 \times 2$ ?

8. Рассмотрим квадрат  $100 \times 100$  клеток. Каждая клетка окрашена в чёрный или белый цвет. Такая раскраска называется *чёрночётной*, если каждая клетка соседствует по стороне с чётным количеством чёрных клеток. Докажите, что количество чёрночётных раскрасок не превосходит  $2^{100}$ . (Раскраски считаются различными, если хотя бы одна клетка имеет в них разный цвет.)

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024**  
**ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. Вы прибыли в деревню, где есть 100 жителей, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), кто есть кто — неизвестно. Кроме того, один из этих жителей является старостой (кто именно — неизвестно, и неизвестно, является староста рыцарем или лжецом; все жители знают, кто староста). Вы можете спросить у любых трех человек: «Есть ли среди вас троих староста?», и услышать ответ каждого из них. Можете ли вы гарантированно найти старосту, задав несколько вопросов?

2. Даны 100 последовательных натуральных чисел, больших 1. Какое наибольшее количество из них могут быть взаимно просты с числом 2024?

3. Пусть  $A$  и  $B$  — натуральные числа, сумма цифр каждого из которых равна 2024. Какое наименьшее значение может принимать сумма цифр числа  $A + B$ ?

4. Артур и Рената играют в игру на доске  $99 \times 99$ . У Артура есть две красные плитки, первоначально размещенные на клетках в левом нижнем и правом верхнем углах. У Ренаты есть две черные плитки, изначально размещенные на клетках в правом нижнем и левом верхнем углах. За ход игрок может выбрать одну из двух своих плиток и переместить ее на соседнюю по горизонтали или вертикали свободную клетку доски. Игроки ходят по очереди, начинает Артур. Артур выигрывает, если после некоторого количества ходов красные плитки окажутся в соседних по горизонтали или вертикали клетках. Сможет ли Рената помешать ему выиграть?

5. По кругу равномерно расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа стул, либо на противоположный своему в круге стул. Сколько есть способов так перепрыгнуть, чтобы все стулья снова оказались заняты?

6. В Хогвартсе завелась волшебная машина. Помещённые туда два красных шарика превращаются в синий и белый, два синих — в белый и красный, два белых — в красный и синий. У Гарри Поттера есть 10 красных, 10 синих и 10 белых шариков. Сможет ли он с помощью волшебной машины преобразовать их в 9 красных, 10 синих и 11 белых?

7. Какое наибольшее число доминошек (прямоугольников из двух клеток) можно поместить на доску  $8 \times 17$ , чтобы никакие две не покрывали квадрат  $2 \times 2$ ?

8. Рассмотрим квадрат  $100 \times 100$  клеток. Каждая клетка окрашена в чёрный или белый цвет. Такая раскраска называется *чёрночётной*, если каждая клетка соседствует по стороне с чётным количеством чёрных клеток. Докажите, что количество чёрночётных раскрасок не превосходит  $2^{100}$ . (Раскраски считаются различными, если хотя бы одна клетка имеет в них разный цвет.)