

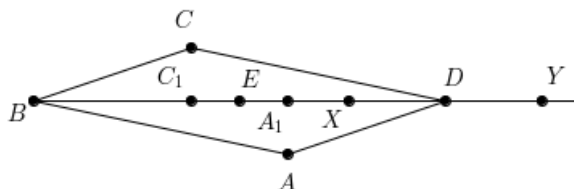
Решения задач командной олимпиады 8 класса

1. Маша выписывает в тетрадку числа: сначала наименьшее нечётное число — 1, потом два следующих чётных числа — 2, 4, потом три следующих нечётных числа — 5, 7, 9, потом четыре следующих чётных числа — 10, 12, 14, 16 и т. д. Напишет ли она число 2024?

Ответ: Нет. **Решение.** Заметим, что на i -м шаге в зависимости от чётности i мы или выписываем i чётных чисел и пропускаем $i - 1$ нечётных чисел, или выписываем i нечётных чисел и пропускаем $i - 1$ чётных чисел. Значит, на каждом шаге последнее записанное число на $2i - 1$ больше предыдущего. Значит, последнее число на n -м шаге равно n^2 . Действительно, последнее число на 1-м шаге написано 1^2 , а если последнее число на $(n - 1)$ -м шаге равно $(n - 1)^2$, то последнее число на n -м шаге равно $(n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2$. Значит, последнее число на 45 шаге равно $45^2 = 2025$, а перед этим было выписано число 2023. То есть число 2024 никогда не будет выписано.

2. Дан параллелограмм $ABCD$ с большей стороной AB . На луче BD отмечены отличные от B точки X и Y так, что $CX = CB$ и $AY = AB$. Докажите, что $DX = DY$.

Решение. Пусть A_1 и C_1 — проекции соответственно A и C на BD . Параллелограмм симметричен относительно своего центра E . Поэтому точки A_1 и C_1 симметричны относительно E . Отсюда $BA_1 - BE = BE - BC_1$. Из равнобедренного треугольника BCX : $BX = 2BC_1$ и аналогично $BY = 2BA_1$. Имеем



$$BY - BD = 2BA_1 - 2BE = 2(BA_1 - BE) = 2(BE - BC_1) = 2BE - 2BC_1 = BD - BX.$$

Получили равенство $BY - BD = BD - BX$, из которого следует требуемое $DX = DY$.

3. Дано натуральное число n . Алиса и Боб по очереди вписывают в клетки клетчатой доски $2n \times 2n$ различные положительные числа, начинает Алиса. В каждую клетку можно вписать только одно число. После того как таблица заполнена, в каждой строке и в каждом столбце закрашивают клетку с наибольшим числом (одна клетка может быть закрашена несколько раз). Докажите, что Боб может играть так, чтобы в итоге было закрашено не меньше $3n$ клеток.

Решение. Приведём стратегию Боба. Пусть Алиса поставила число x в клетку с координатами (i, j) . Если i чётно, то Боб поставит число, большее x , в клетку с координатами $(i - 1, j)$. Если i нечётно, то Боб поставит число, меньшее x , в клетку с координатами $(i + 1, j)$. Тогда в каждом столбце наибольшее число будет стоять на нечётной позиции, а значит, в каждой чётной строке будет отмечено число, не отмеченное ни в каком столбце. Следовательно, будет отмечено не менее $2n + n = 3n$ чисел.

4. Дано натуральное число $n > 1$. Натуральное число m , $1 \leq m \leq n - 1$, назовем регулярным, если найдется натуральное число x , для которого

$$m^2x \equiv m \pmod{n}.$$

Докажите, что количество регулярных чисел равно числу всевозможных правильных несократимых дробей вида k/d , где d пробегает все делители n , удовлетворяющие свойству $\text{НОД}(d, n/d) = 1$.

Решение. Условие $m^2x \equiv m \pmod{n}$ равносильно тому, что $m^2x - m = m(mx - 1) \div n$ (*). Так как $\text{НОД}(m, mx - 1) = 1$, то отсюда следует, что всякое регулярное число m обладает свойством:

каждый его простой множитель p либо не входит в разложение n ,
либо p входит в разложение m в степени, не меньшей чем в разложение n .

И наоборот, всякое число, меньшее n и обладающее указанным свойством, регулярно. Действительно, если $m = m_1m_2$, $n = n_1n_2$, где $m_1 \div n_1$ и $\text{НОД}(n_1, n_2) = \text{НОД}(m_2, n) = \text{НОД}(n_2, m) = 1$, то для обеспечения делимости (*) мы подберем x , обладающий свойством $(mx - 1) \div n_2$ (из линейного представления наибольшего общего делителя чисел m и n_2). Осталось каждому числу m сопоставить правильную дробь $\frac{m}{n}$, которая после сокращения превращается в несократимую дробь $\frac{(m_1/n_1)m_2}{n_2} = \frac{k}{d}$ требуемого в условии вида. Это взаимно однозначное соответствие, поскольку легко задать обратное отображение: для дроби $\frac{k}{d}$, удовлетворяющей свойству $\text{НОД}(d, n/d) = 1$, полагаем $n_2 = d$, $n_1 = n/d$, $m = kn_1$.

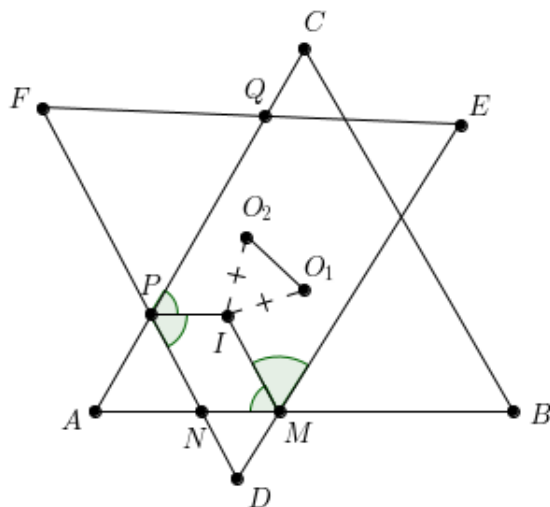
5. Некоторые участники турнира дружат между собой, и у каждого есть хотя бы один друг. Каждому участнику турнира выдали футболку, на которой написано количество его друзей на турнире. Докажите, что хотя бы у одного участника среднее арифметическое чисел на футболках его друзей не меньше, чем среднее арифметическое чисел на всех футболках.

Решение. Пусть у i -го математика ($i = 1, \dots, N$) n_i друзей, и пусть $s_i = \frac{n_i + \dots}{n_i}$, где сумма в числителе берется по всем t , которые дружат с i . Предположим противное: каждое s_i меньше, чем среднее количество друзей, тогда $S = s_1 + s_2 + \dots + s_N$ меньше $2E$ (удвоенного количества ребер-дружб). Переставив слагаемые в сумме S , видим, что S равно сумме $\left(\frac{n_i}{n_i} + \frac{n_i}{n_i}\right)$ по всем E парам ребер-дружб $i - t$. Каждая такая скобка не меньше 2 (как сумма взаимно обратных положительных чисел), поэтому $S \geq 2E$. Противоречие.

6. Точки O_1 и O_2 — центры равных равносторонних треугольников ABC и DEF . Отрезок AB пересекает отрезки DE и DF в точках M и N соответственно, а отрезок AC пересекает отрезки DF и EF в точках P и Q соответственно; точка N лежит на отрезках AM и PD , точка P лежит на отрезках FN и AQ . Биссектрисы углов EMN и DPQ пересекаются в точке I , а биссектрисы углов FNM и EQP пересекаются в точке J . Докажите, что $IJ \perp O_1O_2$.

Решение 1. Достаточно показать, что $IO_1 = IO_2$, так как тогда аналогично будем иметь $JO_1 = JO_2$, а значит, IJ будет серединным перпендикуляром к O_1O_2 .

Пусть I' — центр поворота φ , переводящего точку E в точку B , а точку D в точку A . Тогда I' лежит на прямой, содержащей (внутренние) биссектрисы вертикальных углов AME и BMD , т.е. на прямой MI . Так как наши треугольники равны, тот же поворот φ переводит DEF в BAC , и значит D в точку A и F в точку C . Аналогично рассуждаем и понимаем, что I' лежит на прямой PI . Значит, $I' = I$. Теперь $IO_1 = IO_2$ очевидно, так как при повороте φ центр O_2 треугольника DEF переводит в центр O_1 треугольника ABC .



Решение 2. Опять же будем понимать, что I лежит на серединном перпендикуляре к O_1O_2 . В треугольниках DMN и APN есть два равных вертикальных угла и два угла по 60° . Значит, $\angle DMN = \angle APN$, откуда $\angle IMN = \angle IME = \angle IPN = \angle IPQ$. Значит, четвёрка точек D, M, I, P и четвёрка точек A, P, I, M лежат на одной окружности. Следовательно, все пять точек D, M, I, P, A лежат на одной окружности. Пусть без ограничения общности $\angle IAM = \angle IDM > 30^\circ$. Тогда из того, что $IA = ID$ (хорды, на которые опираются равные углы DMI и API), $O_1A = O_2D$ (радиусы описанных окружностей равных треугольников) и $\angle IAO_1 = \angle IAN - \angle NAO_1 = \angle IAN - 30^\circ = \angle IDM - \angle MDO_2 = \angle IDO_2$ следует, что треугольники IAO_1 и IDO_2 равны. Значит, $IO_1 = IO_2$.

7. В каждой клетке таблицы $(2n + 1) \times 2$ написано вещественное число. В каждой из $2n + 1$ строк сумма модулей чисел равна 1. Барон Мюнхгаузен может выбрать несколько строк и поменять знаки у всех чисел, стоящих в этих строках. После этого вычисляются суммы b_1 и b_2 чисел в столбцах. Барон утверждает, что для любой таблицы он сможет добиться выполнения неравенства $|b_1| + |b_2| \leq 1$. Не обманывает ли нас барон?

Ответ: не обманывает. **Решение.** Поскольку барон может менять знаки строк, мы можем считать, что изначально в каждой строке таблицы второе число положительно. Для наглядности каждую строку (x, y) будем представлять себе как вектор в плоскости (отложенный от начала координат). Изначально концы всех векторов расположены на отрезках AB и BC . Требуется доказать, что можно так назначить знаки векторов, что их сумма будет лежать в ромбе $ABCD$.

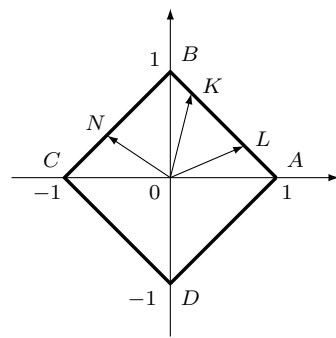
Алгоритм действий барона зададим по индукции. База индукции, $n = 1$, т.е. имеется три вектора $\vec{OK}, \vec{OL}, \vec{ON}$. Если точки K, L и N лежат на одном отрезке AB или BC (пусть на AB именно в таком порядке), тогда вектор $\vec{OK} - \vec{OL} + \vec{ON} = \vec{KL} + \vec{ON} = \vec{OX}$, где $X \in AB$. Предположим, что не все три точки лежат на одной прямой. Пусть K и L лежат на отрезке AB (причем K выше L), а точка N — на отрезке BC (случай, когда все три точки лежат на отрезке AB , оставляем читателю). В этом случае вектор $\vec{KL} = \vec{OL} - \vec{OK}$ лежит на отрезке AB и направлен вправо вниз, и тогда сумма $\vec{ON} + \vec{OL} - \vec{OK}$ лежит в ромбе $ABCD$.

Переход. Пусть имеется нечётное число векторов (не меньше пяти). По принципу Дирихле концы трех или более из них лежат на отрезке AB . Тогда выберем среди них два вектора, обозначим их \vec{OK} и \vec{OL} , так, чтобы длина разности \vec{KL} была не больше половины отрезка AB . По предположению индукции, мы можем назначить знаки остальных векторов так, чтобы их сумма лежала в ромбе. Добавляя к этой сумме вектор \vec{KL} или $-\vec{KL}$, мы добьемся требуемого.

Комментарий. Методическая комиссия турнира не предполагает, что участники турнира должны быть знакомы с понятием вектора. Задача может быть решена без использования этого понятия. Однако методкомиссия считает, что участникам полезно прочитать решение, приведённое выше.

8. Дано натуральное $k < 100$ и выпуклый 100-угольник. Петя проводит в нём несколько диагоналей, не пересекающихся по внутренним точкам. После этого Вася должен покрасить k вершин 100-угольника. При этом любой двузвенный путь, каждое ребро в котором — сторона или проведенная Петей диагональ, должен содержать отмеченную вершину. При каком наименьшем k Вася всегда сможет это сделать?

Ответ: 50. **Решение.** *Пример.* Пронумеруем вершины 100-угольника числами от 0 до 99. Проведём диагонали $(0, 2), (2, 4), \dots, (96, 98), (98, 0)$. Докажем, что для выполнения условия придется отметить хотя бы 50 вершин. Разобьём вершины на пары $(0, 1), (2, 3), \dots, (98, 99)$. Если для какого-то i в паре $(2i, 2i + 1)$ не отмечено ни одной вершины, то, рассматривая двузвенные пути $(2i - 2, 2i, 2i + 1)$ и $(2i - 1, 2i, 2i + 1)$, получаем, что вершины $2i - 2$ и $2i - 1$ отмечены (индексы берутся по модулю 99). Тогда в паре или есть хотя бы одна отмеченная вершина, или в предыдущей паре отмечены обе вершины. Следовательно, отмечено не менее 50 вершин.



Оценка. Дополним набор непересекающихся диагоналей до триангуляции 100-угольника. Докажем индукцией по n , что в триангуляции $2n$ -угольника можно отметить n вершин так, чтобы любой двузвенный путь содержал отмеченную вершину. База $n = 2$ очевидна. Индукционный переход: пусть дана триангуляция $2(n + 1)$ -угольника. Пронумеруем вершины от 0 до $2n + 1$. Покрасим все вершины степени два (из которых не проведены диагонали, только стороны) в белый цвет, а остальные — в чёрный. Две соседние вершины многоугольника не могут быть белыми. Если среди любых двух соседних вершин есть белая, то белых и чёрных по $n + 1$. В этом случае можно отметить все чёрные вершины и условие будет выполнено.

Предположим, что есть стороны 100-угольника, у которых по два чёрных конца. Каждая такая сторона принадлежит одному из треугольников триангуляции, и две другие стороны этого треугольника — диагонали, назовем их *боковыми* сторонами. Среди всех треугольников, имеющих сторону с двумя черными концами, рассмотрим треугольник с самой короткой боковой стороной. Без ограничения общности можно считать, что это сторона треугольника с вершинами i , $i + 1$, j , соединяющая вершины $i + 1$ и j . Тогда вершина j — чёрная, а между $i + 1$ и j нет двух соседних чёрных вершин, иначе получим противоречие с минимальностью при выборе вершин i и $i + 1$. Значит, вершины $i + 2, i + 4, i + 6, \dots, j - 1$ белые, а $i + 1, i + 3, \dots, j - 2, j$ — чёрные (все индексы по модулю $2n + 2$). В частности, $j - i$ нечётно. Отметим вершину i и вершины $i + 3, i + 5, \dots, j - 2, j$. Получается, что мы отметили $\frac{j-i+1}{2}$ вершин — ровно половину вершин в триангуляции многоугольника P с вершинами $i, i + 1, i + 2, \dots, j$ — и любой двузвенный путь в нем содержит отмеченную вершину. Удалим все вершины многоугольника P вместе со всеми исходящими из них диагоналями, соединим вершины $i - 1$ и $j + 1$, и добавим отрезки между оставшимися вершинами так, чтобы получилась некоторая триангуляция Q получившегося многоугольника. По предположению индукции мы можем отметить половину вершин в Q так, чтобы любой двузвенный путь содержал отмеченную вершину. Вернём вершины $i, i + 1, \dots, j$. Так как вершины i и j отмечены, то любой двузвенный путь, не содержащий ни одной из них, лежит или полностью в P , или полностью в Q . Но в многоугольниках P и Q условие выполнено. Переход доказан.