

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 – 4 МЕСТА

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, для которых числа $1, 2, 3, \dots, n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы произведение попарных сумм чисел первого цвета было равно произведению попарных сумм чисел второго цвета.

2. Ёжик стоит в левой нижней клетке квадрата $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Он может перемещаться на одну клетку вверх либо на одну клетку вправо. В итоге он хочет попасть в правую верхнюю клетку таким образом, чтобы две клетчатые области, на которые его маршрут разбил доску, состояли из четного числа клеток (одна из областей может быть пустая). Докажите, что у ёжика есть ровно $\frac{C_{4n}^{2n} + C_{2n}^n}{2}$ способов проложить такой маршрут.

3. Найдите все простые p , для которых найдутся натуральные числа a и b такие, что

$$p = a^2 + b^2 + ab, \quad a^2 + b^2 + 25 = 15ab.$$

4. Назовем натуральное число n *двожким*, если остаток от деления любой степени двойки на n — тоже степень двойки. Может ли двоичное число быть степенью натурального числа выше первой?

5. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

6. Оля записала натуральное число, состоящее из $2k$ цифр. Затем она поменяла местами части числа, состоящие из первых k и последних k цифр. В результате число увеличилось ровно в 6 раз. Чему может быть равно k ?

7. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D , а на стороне AC — точки E и F , причем $AB = AD = BE = DF$. Оказалось, что $AE = CF$. Чему может быть равен наименьший из углов треугольника ABC ?

8. Рассмотрим граф, в котором 1024 вершины — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 10, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные рёбра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более чем 18, в котором красные и синие рёбра чередуются.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

**МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА,
ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–4 МЕСТА**

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, для которых числа $1, 2, 3, \dots, n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы произведение попарных сумм чисел первого цвета было равно произведению попарных сумм чисел второго цвета.

2. В белой таблице размером 100×100 какие-то 900 клеток окрашены в чёрный цвет так, что в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно девять клеток. Найдите наименьшее натуральное число k , при котором всегда можно перекрасить k чёрных клеток обратно в белый цвет так, чтобы в любом квадрате размером 5×5 была бы белая клетка.

3. Найдите все простые p , для которых найдутся натуральные числа a и b такие, что

$$p = a^2 + b^2 - ab, \quad 3a^2 + 3b^2 - 9 = 7ab.$$

4. Назовем натуральное число n *двояким*, если остаток от деления любой степени двойки на n — тоже степень двойки. Может ли двоякое число быть степенью натурального числа выше первой?

5. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

6. Оля записала натуральное число, состоящее из $2k$ цифр. Затем она поменяла местами части числа, состоящие из первых k и последних k цифр. В результате число увеличилось ровно в 6 раз. Чему может быть равно k ?

7. На стороне BC треугольника ABC , в котором $\angle C = 30^\circ$, отмечена точка D , а на стороне AC — точки E и F , причем $AB = AD = BE = DF$. Докажите, что $AE = CF$.

8. Рассмотрим граф, в котором 1024 вершины — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 10, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные рёбра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более чем 18, в котором красные и синие рёбра чередуются.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, для которых числа $1, 2, 3, \dots, n$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы произведение попарных сумм чисел первого цвета было равно произведению попарных сумм чисел второго цвета.

2. В белой таблице размером 100×100 какие-то 900 клеток окрашены в чёрный цвет так, что в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно девять клеток. Найдите наименьшее натуральное число k , при котором всегда можно перекрасить k чёрных клеток обратно в белый цвет так, чтобы в любом квадрате размером 5×5 была бы белая клетка.

3. Найдите все простые p , для которых найдутся натуральные числа a и b такие, что

$$p = a^2 + b^2 - ab, \quad 3a^2 + 3b^2 - 9 = 7ab.$$

4. Назовем натуральное число n *двоичным*, если остаток от деления любой степени двойки на n — тоже степень двойки. Может ли двоичное число быть квадратом натурального числа?

5. Маша и Паша по очереди проводят диагонали в правильном 98-угольнике, начинает Маша. Разрешено проводить диагональ, если она не перпендикулярна ни одной из ранее проведенных диагоналей, а также пересекает хотя бы половину ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

6. Оля записала натуральное число, состоящее из $2k$ цифр. Затем она поменяла местами части числа, состоящие из первых k и последних k цифр. В результате число увеличилось ровно в 6 раз. Чему может быть равно k ?

7. На стороне BC треугольника ABC , в котором $\angle C = 30^\circ$, отмечена точка D , а на стороне AC — точки E и F , причем $AB = AD = BE = DF$. Докажите, что $AE = CF$.

8. У Джона есть 5 монет: одна — в 1 пенс и должна весить 1 грамм, одна — в 2 пенса и должна весить 2 грамма, и т.д., одна — в 5 пенсов и должна весить 5 грамм. Все монеты подписаны своими достоинствами. Однако, одна из монет фальшивая и отличается от нужного веса менее, чем на 1 грамм. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету? Результат каждого взвешивания становится известен только после того, как сделаны все 3 взвешивания.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что числа $1, 2, 3, \dots, 1024$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы произведение попарных сумм чисел первого цвета было равно произведению попарных сумм чисел второго цвета.

2. В белой таблице размером 100×100 какие-то 900 клеток окрашены в чёрный цвет так, что в каждой строке и каждом столбце окрашено ровно девять клеток. Найдите наименьшее натуральное число k , при котором всегда можно перекрасить k чёрных клеток обратно в белый цвет так, чтобы в любом квадрате размером 5×5 была бы белая клетка.

3. Найдите все простые p , для которых найдутся натуральные числа a и b такие, что

$$p = a^2 + b^2 + ab, \quad a^2 + b^2 - 3 = 3ab.$$

4. Назовем натуральное число n *двояким*, если остаток от деления любой степени двойки на n — тоже степень двойки. Найдите количество двояких натуральных чисел, не превосходящих 2^{2024} . Напомним, что число $1 = 2^0$ — тоже степень двойки.

5. Из спичек единичной длины выложен прямоугольник из двух строк и n столбцов, разбитый на единичные квадраты. Два игрока по очереди убирают по одной спичке: первый игрок — вертикальную, второй — горизонтальную. Тот игрок, после чьего хода будут убраны все 4 спички, ограничивающие какой-либо единичный квадрат, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре? Ответ может зависеть от n .

6. В клетки таблицы 3×3 вписаны цифры от 1 до 9, каждая по одному разу. Цифры в строках и цифры в столбцах образуют шесть трёхзначных чисел. Могут ли эти числа, взятые в некотором порядке, образовывать арифметическую прогрессию? Последовательность называется *арифметической прогрессией*, если каждое следующее число получается прибавлением фиксированного числа d к текущему.

7. На стороне BC треугольника ABC , в котором $\angle C = 30^\circ$, отмечена точка D , а на стороне AC — точки E и F , причем $AB = AD = BE = DF$. Докажите, что $AE = CF$.

8. У Джона есть 5 монет: одна — в 1 пенс и должна весить 1 грамм, одна — в 2 пенса и должна весить 2 грамма, и т.д., одна — в 5 пенсов и должна весить 5 грамм. Все монеты подписаны своими достоинствами. Однако, одна из монет фальшивая и отличается от нужного веса менее, чем на 1 грамм. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету? Результат каждого взвешивания становится известен только после того, как сделаны все 3 взвешивания.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024
МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Докажите, что числа $1, 2, 3, \dots, 32$ можно раскрасить в два цвета так, чтобы произведение попарных сумм чисел первого цвета было равно произведению попарных сумм чисел второго цвета.

2. Какое наименьшее количество пятизначных слагаемых, в записи каждого из которых цифры идут в порядке возрастания, нужно взять, чтобы цифры в записи их суммы шли в порядке убывания?

3. Найдите все простые p , для которых найдутся натуральные числа a и b такие, что

$$p = a^2 + b^2 + ab, \quad a^2 + b^2 - 3 = 3ab.$$

4. 10 семиклассников нашли 10 мухоморов и попробовали их на вкус. На следующий день все они жаловались доктору на живот, но при этом каждый сказал, что откусил не больше, чем от двух мухоморов. Однако, каждый мухомор сказал, что его кусали не менее, чем пятеро семиклассников. Какое наибольшее суммарное количество мухоморов и семиклассников могли сказать правду?

5. Из спичек единичной длины выложен прямоугольник из одной строки и n столбцов, разбитый на единичные квадраты. Два игрока по очереди убирают по одной спичке: первый игрок — вертикальную, второй — горизонтальную. Тот игрок, после чьего хода будут убраны все 4 спички, ограничивающие какой-либо единичный квадрат, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре (ответ может зависеть от n)?

6. В клетки таблицы 3×3 вписаны цифры от 1 до 9, каждая по одному разу. Цифры в строках и цифры в столбцах образуют шесть трёхзначных чисел. Могут ли эти числа, взятые в некотором порядке, образовывать арифметическую прогрессию? Последовательность называется *арифметической прогрессией*, если каждое следующее число получается прибавлением фиксированного числа d к текущему.

7. В остроугольном треугольнике ABC , в котором $\angle C = 30^\circ$, проведена высота BH . На стороне BC отмечена точка X , а на отрезке CH — точка Y так, что $AB = AX = XY$. Докажите, что $CY = 2AH$.

8. Дима и Саша вышли каждый из своего дома навстречу друг другу. Через некоторое время Дима дошёл до дома Саши, и, поняв, что он прошёл мимо Саши, развернулся и пошёл в обратную сторону. Через некоторое время Дима снова дошёл до своего дома и в этот момент получил сообщение от Саши, что тот ещё не дошёл до его дома. Тогда Дима снова развернулся и пошёл в сторону дома Саши и, наконец, встретил его. Во сколько раз скорость Димы больше скорости Саши, если расстояние от дома Димы до точки их встречи в 4 раза меньше расстояния между домами Саши и Димы?