

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число n . *Большой окружностью* сферы называется окружность на поверхности сферы, диаметр которой является и диаметром самой сферы. На сфере провели n больших окружностей. Образовавшиеся части покрасили в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: части, имеющие общий участок границы (дугу, а не конечное число точек), покрашены в разные цвета. При каких натуральных n можно утверждать, что суммарная площадь всех белых частей равна суммарной площади всех чёрных частей?

2. Пусть a_1, a_2, \dots — бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что для всех натуральных чисел m и n число $a_m a_n - 1$ делится на a_{m+n} . Докажите, что все члены последовательности, начиная с некоторого, равны 1.

3. Обозначим через T_n количество четвёрок (a, b, x, y) натуральных чисел, таких, что $a > b$ и $n = ax + by$. Докажите, что число T_{2023} нечётно.

4. Пусть F — множество всех последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_{1000})$, все члены которых равны 1 или -1 . Докажите, что можно в F выбрать 1000 последовательностей так, чтобы для каждой последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_{1000}) \in F$ нашлась выбранная последовательность $(b_1, b_2, \dots, b_{1000})$, для которой

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{1000} b_{1000} = 0.$$

5. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ и $a^3 + b^3 + c^3$ делятся на $a + b + c$. Кроме того, $\text{НОД}(a + b + c, 6) = 1$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $(a + b + c)^2$.

6. Дано натуральное $n > 10\,000$ и выпуклый n -угольник $A_1 A_2 \dots A_n$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n A_i A_{i+2024} > \sum_{i=1}^n A_i A_{i+1999}$$

(индексы в суммах берутся по модулю n).

7. В трапеции $ABCD$: $AD \parallel BC$, $AB = AC$. На основании AD взята точка E такая, что $AE : ED = 1 : 2$. Пусть точка F — середина отрезка CD . Докажите, что $\angle BEA = \angle FED$.

8. Двум банкирам назначено бесконечно играть с чёртом в следующую игру. Чёрт запрещает их в две отдельные комнаты. Время от времени чёрт будет заходить в комнату к одному из банкиров и спрашивать его, какой по счёту этот заход (чёрт считает заходы к обоим банкирам вместе). Если вопрошаемый угадал правильно, чёрт зачисляет на его счёт один рубль, но угадывающему об этом не сообщает. Чёрт разрешает банкирам заранее договориться об образе действий. Какое наибольшее количество рублей они гарантированно смогут заработать за всё время? Ответ может быть «бесконечно много».

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Дано натуральное число n . *Большой окружностью* сферы называется окружность на поверхности сферы, диаметр которой является и диаметром самой сферы. На сфере провели n больших окружностей. Образовавшиеся части покрасили в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: части, имеющие общий участок границы (дугу, а не конечное число точек), покрашены в разные цвета. При каких натуральных n можно утверждать, что суммарная площадь всех белых частей равна суммарной площади всех чёрных частей?

2. Числа 2024, 2025, 2026, \dots , 2124 записаны подряд в некотором порядке, образуя многозначное число. Докажите, что оно не простое.

3. Обозначим через T_n количество четвёрок (a, b, x, y) натуральных чисел, таких, что $a > b$ и $n = ax + by$. Докажите, что число T_{2023} нечётно.

4. Пусть F — множество всех последовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_{1000})$, все члены которых равны 1 или -1 . Докажите, что можно в F выбрать 1000 последовательностей так, чтобы для каждой последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_{1000}) \in F$ нашлась выбранная последовательность $(b_1, b_2, \dots, b_{1000})$, для которой

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{1000} b_{1000} = 0.$$

5. Натуральные числа a , b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2$ и $a^3 + b^3 + c^3$ делятся на $a + b + c$. Кроме того, $\text{НОД}(a + b + c, 6) = 1$. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ делится на $(a + b + c)^2$.

6. Докажите, что в любом выпуклом 1001-угольнике $A_1 A_2 \dots A_{1001}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{1001} A_i A_{i+500} > \sum_{i=1}^{1001} A_i A_{i+499}$$

(индексы в суммах берутся по модулю 1001).

7. В трапеции $ABCD$: $AD \parallel BC$, $AB = AC$. На основании AD взята точка E такая, что $AE : ED = 1 : 2$. Пусть точка F — середина отрезка CD . Докажите, что $\angle BEA = \angle FED$.

8. Два брата, решив заработать денег, пошли к сельскому психологу. Тот запер их в две отдельные комнаты и стал играть с ними в следующую игру. Время от времени психолог заходит в комнату к одному из братьев и спрашивает его, какой по счету этот заход (психолог считает заходы к обоим братьям вместе), на что вопрошаемый дает два ответа. Если хотя бы один из ответов верный, то психолог зачисляет один рубль на счет угадывающего, но ему об этом не сообщает. Братья могут заранее договориться об образе действий. Могут ли они гарантированно заработать хотя бы 100 рублей?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. *Большой окружностью* сферы называется окружность на поверхности сферы, диаметр которой является и диаметром самой сферы. На сфере провели 1001 большую окружность. Образовавшиеся части покрасили в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: части, имеющие общий участок границы (дугу, а не конечное число точек), покрашены в разные цвета. Докажите, что суммарная площадь всех белых частей равна суммарной площади всех чёрных частей.

2. Числа 2024, 2025, 2026, ..., 2124 записаны подряд в некотором порядке, образуя многозначное число. Докажите, что оно не простое.

3. Обозначим через T_n количество четвёрок (a, b, x, y) натуральных чисел, таких, что $a > b$ и $n = ax + by$. Докажите, что число T_{2023} нечётно.

4. На доске написаны 20 000 натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 100. Из них 10 000 чисел написаны красным, а 10 000 — зелёным. Докажите, что можно стереть некоторые из чисел (возможно, ни одного, но не все) так, что сумма оставшихся красных чисел будет равна сумме оставшихся зелёных. Напомним, что сумма набора чисел, содержащем всего одно число, равна этому числу.

5. Вещественные числа a , b и c таковы, что сумма любых двух из них отлична от нуля. Докажите, что

$$\left(\frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a} \right) \left(\frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a} \right) \geq 0.$$

6. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P . Точки R и Q на сторонах AC и CB таковы, что $CQPR$ — параллелограмм. Докажите, что точка, симметричная точке P относительно прямой RQ , лежит на описанной окружности треугольника ABC .

7. В трапеции $ABCD$: $AD \parallel BC$, $AB = AC$. На основании AD взята точка E такая, что $AE : ED = 1 : 2$. Пусть точка F — середина отрезка CD . Докажите, что $\angle BEA = \angle FED$.

8. В графе 2023 вершины. Эти вершины как-то покрашены в 7 цветов и каждые две вершины разного цвета соединены ребром (а вершины одинакового цвета не соединены). Алиса и Боб по очереди ставят шашки в вершины этого графа. Каждым ходом можно поставить одну шашку в любую еще не занятую шашками вершину. После каждого хода расстановка шашек должна обладать свойством: любой кратчайший путь в графе (т.е. с наименьшим числом ребер) между любыми двумя вершинами, где стоят шашки, не должен проходить через вершину, занятую шашкой. Алиса ходит первой, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. *Большой окружностью* сферы называется окружность на поверхности сферы, диаметр которой является и диаметром самой сферы. На сфере провели 1001 большую окружность. Образовавшиеся части покрасили в чёрный и белый цвета в шахматном порядке: части, имеющие общий участок границы (дугу, а не конечное число точек), покрашены в разные цвета. Докажите, что суммарная площадь всех белых частей равна суммарной площади всех чёрных частей.

2. Целые числа a , b и c таковы, что $ab + bc + ca = 1$ и $a + b = c$. Докажите, что одно из чисел a , b и c делится на 3.

3. Есть 30 кроликов и 30 клеток, кролики пронумерованы числами от 1 до 30, а клетки — числами от 36 до 65. Кроликов рассаживают по клеткам (по одному кролику в клетку) так, чтобы номер каждого кролика был взаимно прост с номером его клетки. Докажите, что количество способов так рассадить кроликов по клеткам делится на 7.

4. На доске написаны 20 000 натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 100. Из них 10 000 чисел написаны красным, а 10 000 — зелёным. Докажите, что можно стереть некоторые из чисел (возможно, ни одного, но не все) так, что сумма оставшихся красных чисел будет равна сумме оставшихся зелёных. Напомним, что сумма набора чисел, содержащем всего одно число, равна этому числу.

5. Вещественные числа a , b и c таковы, что сумма любых двух из них отлична от нуля. Докажите, что

$$\left(\frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a} \right) \left(\frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a} \right) \geq 0.$$

6. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P . Точки R и Q на сторонах AC и CB таковы, что $CQPR$ — параллелограмм. Докажите, что точка, симметричная точке P относительно прямой RQ , лежит на описанной окружности треугольника ABC .

7. В трапеции $ABCD$: $AD \parallel BC$, $AB = AC$. На основании AD взята точка E такая, что $AE : ED = 1 : 2$. Пусть точка F — середина отрезка CD . Докажите, что $\angle BEA = \angle FED$.

8. В графе 2023 вершины. Эти вершины как-то покрашены в 7 цветов и каждые две вершины разного цвета соединены ребром (а вершины одинакового цвета не соединены). Алиса и Боб по очереди ставят шашки в вершины этого графа. Каждым ходом можно поставить одну шашку в любую еще не занятую шашками вершину. После каждого хода расстановка шашек должна обладать свойством: любой кратчайший путь в графе (т.е. с наименьшим числом ребер) между любыми двумя вершинами, где стоят шашки, не должен проходить через вершину, занятую шашкой. Алиса ходит первой, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?