

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1–2 МЕСТА

1. Пусть $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ — правильный n -угольник, вписанный в единичную окружность. Выберем натуральное число k , $1 < k \leq n$ и проведем все хорды вида A_iA_{ki} (вычисление индексов по модулю n). Эти хорды разбивают круг на части. Подсчитаем их площади и максимальную площадь обозначим через $S(k, n)$. Пусть

$$S_n = \max(S(2, n), S(3, n), \dots, S(n, n)).$$

Верно ли, что $S_n < \frac{1}{100}$ при $n > 10^6$?

2. Каждой точке P плоскости сопоставлена некоторая точка $f(P)$ (на той же плоскости) так, что разным точкам сопоставлены разные. Известно, что если четыре различные точки A, B, C, D таковы, что отрезки AB и CD равны по длине, то прямые $f(A)f(B)$ и $f(C)f(D)$ параллельны или совпадают. Можно ли сделать вывод, что для любых трех точек X, Y, Z , лежащих на одной прямой, точки $f(X), f(Y), f(Z)$ также лежат на одной прямой?

3. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность радиуса R . Отложим на лучах AC и BC соответственно отрезки AC_a и BC_b , равные по длине отрезку AB . Пусть O_c — центр окружности (CC_aC_b). Аналогично определяются точки O_a и O_b . Докажите, что радиус окружности ($O_aO_bO_c$) равен R .

4. Вещественные числа a, b и c таковы, что среди трех чисел $\frac{1}{|a^2+2bc|}$, $\frac{1}{|b^2+2ca|}$ и $\frac{1}{|c^2+2ab|}$ каждое меньше, чем сумма двух оставшихся. Чему может быть равно значение выражения $ab + bc + ca$?

5. В полном графе на 100 вершинах ребра покрашены в несколько цветов так, что не имеется разноцветных треугольников. Все ребра, выходящие из вершины A , покрашены в разные цвета. Докажите, что в графе найдется такая вершина B , что все ребра, выходящие из этой вершины, покрашены (ровно) в 66 цветов.

6. Дано простое $p > 3$. Пусть K — количество таких перестановок a_1, a_2, \dots, a_p чисел $1, 2, \dots, p$, для которых сумма

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

делится на p . Докажите, что $K + p$ делится на p^2 .

7. В Большую Столовую собираются прийти 636 участников Уральского Турнира. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт суп, а также, независимо от этого, с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт салат. Какова вероятность того, что количество салатов, приобретенных участниками, окажется ровно на 1 больше, чем супов?

8. Последовательность чисел x_2, x_3, x_4, \dots задана условиями $x_2 = 1, x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2 - n - 1)x_n - (n-1)^3x_{n-1} \text{ для каждого } n \geq 3.$$

Докажите, что x_n целое тогда и только тогда, когда n простое.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТА;

ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–4 МЕСТА

1. Круглое ожерелье содержит 9900 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 100 блоков по 99 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?

2. Каждой точке P плоскости сопоставлена некоторая точка $f(P)$ (на той же плоскости) так, что разным точкам сопоставлены разные. Известно, что если четыре различные точки A, B, C, D таковы, что отрезки AB и CD равны по длине, то прямые $f(A)f(B)$ и $f(C)f(D)$ параллельны или совпадают. Можно ли сделать вывод, что для любых трех точек X, Y, Z , лежащих на одной прямой, точки $f(X), f(Y), f(Z)$ также лежат на одной прямой?

3. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность радиуса R . Отложим на лучах AC и BC соответственно отрезки AC_a и BC_b , равные по длине отрезку AB . Пусть O_c — центр окружности (CC_aC_b) . Аналогично определяются точки O_a и O_b . Докажите, что радиус окружности $(O_aO_bO_c)$ равен R .

4. Вещественные числа a, b и c таковы, что среди трех чисел $\frac{1}{|a^2+2bc|}$, $\frac{1}{|b^2+2ca|}$ и $\frac{1}{|c^2+2ab|}$ каждое меньше, чем сумма двух оставшихся. Чему может быть равно значение выражения $ab + bc + ca$?

5. В полном графе на 100 вершинах ребра покрашены в несколько цветов так, что не имеется разноцветных треугольников. Все ребра, выходящие из вершины A , покрашены в разные цвета. Докажите, что в графе найдется такая вершина B , что все ребра, выходящие из этой вершины, покрашены (ровно) в 66 цветов.

6. Натуральное число называется *превосходным*, если оно является наименьшим общим кратным чисел $1, 2, \dots, n$ для некоторого натурального числа n . Существует ли превосходное число, равное сумме 99 различных превосходных чисел?

7. В Большую Столовую собираются прийти 636 участников Уральского Турнира. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт суп, а также, независимо от этого, с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт салат. Какова вероятность того, что количество салатов, приобретенных участниками, окажется ровно на 1 больше, чем супов?

8. Последовательность чисел x_2, x_3, x_4, \dots задана условиями $x_2 = 1, x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2 - n - 1)x_n - (n-1)^3x_{n-1} \text{ для каждого } n \geq 3.$$

Докажите, что x_n целое тогда и только тогда, когда n простое.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА;
ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–2 МЕСТО**

1. Круглое ожерелье содержит 9900 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 100 блоков по 99 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?

2. Каждой точке P плоскости сопоставлена некоторая точка $f(P)$ (на той же плоскости) так, что разным точкам сопоставлены разные. Известно, что если четыре различные точки A, B, C, D таковы, что отрезки AB и CD равны по длине, то прямые $f(A)f(B)$ и $f(C)f(D)$ параллельны или совпадают. Можно ли сделать вывод, что для любых трех точек X, Y, Z , лежащих на одной прямой, точки $f(X), f(Y), f(Z)$ также лежат на одной прямой?

3. Пусть E — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Окружности (EAD) и (EBC) пересекаются в точках E и M . Прямая EM пересекает вторично окружности (EAB) и (ECD) в точках T и S . Докажите, что M — середина отрезка ST .

4. Вещественные числа a, b и c таковы, что среди трех чисел $\frac{1}{|a^2+2bc|}$, $\frac{1}{|b^2+2ca|}$ и $\frac{1}{|c^2+2ab|}$ каждое меньше, чем сумма двух оставшихся. Может ли значение выражения $ab + bc + ca$ быть равно 0?

5. В полном графе на 100 вершинах ребра покрашены в несколько цветов так, что не имеется разноцветных треугольников. Все ребра, выходящие из вершины A , покрашены в разные цвета. Докажите, что в графе найдется такая вершина B , что все ребра, выходящие из этой вершины, покрашены (ровно) в 66 цветов.

6. Натуральное число называется *превосходным*, если оно является наименьшим общим кратным чисел $1, 2, \dots, n$ для некоторого натурального числа n . Существует ли превосходное число, равное сумме 99 различных превосходных чисел?

7. В Большую Столовую собираются прийти 636 участников Уральского Турнира. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт суп, а также, независимо от этого, с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт салат. Какова вероятность того, что количество салатов, приобретенных участниками, окажется ровно на 1 больше, чем супов?

8. Последовательность чисел a_1, a_2, \dots задана условиями

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad \text{и} \quad a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad \text{для } n \geq 3.$$

Найдите произведение $a_1 a_2 a_3 \dots a_{2024}$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

**СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТА;
ТРЕТЬЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–4 МЕСТА**

1. Круглое ожерелье содержит 9900 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 100 блоков по 99 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?

2. Четыре точки плоскости не лежат на одной окружности и никакие три из них не лежат на одной прямой. Каково наибольшее возможное количество окружностей, от которых все эти четыре точки находятся на равных расстояниях? (Расстоянием от точки X до окружности ω называют наименьшее из расстояния XU , где U пробегает ω .)

3. На стороне BC треугольника ABC , в котором $\angle C = 30^\circ$, отмечена точка D , а на стороне AC — точки E и F , причем $AB = AD = BE = DF$. Докажите, что $AE = CF$.

4. Положительные числа a , b , c и d таковы, что $c < a$ и $b < d$, а также

$$a^2 + b \geq c^2 + d \quad \text{и} \quad a + b^2 \leq c + d^2.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 1$.

5. Рассмотрим граф, в котором 1024 вершины — всевозможные строки длины 10 из нулей и единиц, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный цвет. Остальные рёбра покрасили в синий цвет. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более 18, в котором красные и синие рёбра чередуются.

6. Натуральное число называется *превосходным*, если оно является наименьшим общим кратным чисел $1, 2, \dots, n$ для некоторого натурального числа n . Существует ли превосходное число, равное сумме 99 различных превосходных чисел?

7. В Большую Столовую собираются прийти 636 участников Уральского Турнира. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт суп, а также, независимо от этого, с вероятностью $\frac{1}{2}$ возьмёт салат. Какова вероятность того, что количество салатов, приобретенных участниками, окажется ровно на 1 больше, чем супов?

8. Последовательность чисел a_1, a_2, \dots задана условиями

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad \text{и} \quad a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad \text{для } n \geq 3.$$

Найдите произведение $a_1 a_2 a_3 \dots a_{2024}$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА

1. Круглое ожерелье содержит 9900 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 100 блоков по 99 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?

2. Точки E и F расположены на сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$ соответственно так, что треугольник AEF равносторонний. Точка M — середина отрезка AF . Докажите, что треугольник BCM равносторонний.

3. На стороне BC треугольника ABC , в котором $\angle C = 30^\circ$, отмечена точка D , а на стороне AC — точки E и F , причем $AB = AD = BE = DF$. Докажите, что $AE = CF$.

4. Положительные числа a , b , c и d таковы, что $c < a$ и $b < d$, а также

$$a^2 + b \geq c^2 + d \quad \text{и} \quad a + b^2 \leq c + d^2.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 1$.

5. В белой таблице 100×100 какие-то 9900 клеток окрашены в синий цвет так, что в каждой строке и каждом столбце окрашено одно и то же количество клеток. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что какой бы ни была начальная раскраска, всегда удастся перекрасить k синих клеток обратно в белый цвет так, что в результате любой квадрат 5×5 будет содержать бы хотя бы одну белую клетку.

6. Натуральное число называется *превосходным*, если оно является наименьшим общим кратным чисел $1, 2, \dots, n$ для некоторого натурального числа n . Существует ли превосходное число, равное сумме 99 различных превосходных чисел?

7. Барон Мюнхгаузен рассматривает карту автобусных маршрутов графства Липшир. Каждый город на карте изображен точкой (в графстве четное число городов), а каждый маршрут — линией, соединяющей два каких-то города. Барон нарисовал свою карту: он каждый маршрут изобразил точкой, а линиями соединил те пары точек, для которых соответствующие маршруты не имеют общего города. «Вы удивитесь, друзья, — говорит барон, — но оказалось, что моя карта выглядит точь в точь как исходная карта графства Липшир.» Не обманывает ли нас барон? То есть, существует ли n и такой граф маршрутов для $2n$ городов, что граф барона окажется ему изоморфен?

8. Последовательность чисел a_1, a_2, \dots задана условиями

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad \text{и} \quad a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}} \quad \text{для } n \geq 3.$$

Найдите произведение $a_1 a_2 a_3 \dots a_{2024}$.