

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024

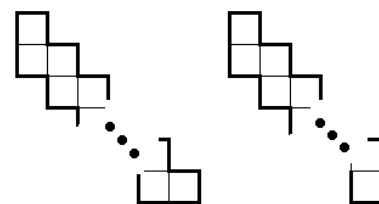
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На каждом из 2024 сайтов, пронумерованных числами от 1 до 2024, размещена ссылка на один из этих сайтов (возможно, ссылка с сайта ведёт на этот же сайт). Если с сайта x ссылка ведет на сайт y , а с сайта y — на сайт z , то выполнено условие $2x = y + z$. На какой сайт может вести ссылка с тысячного сайта?

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D , а на стороне AC — точка E , причем $CD = 2BD$ и $\angle ADE = 90^\circ$. Докажите, что $AB + BD > AE$.

3. Дано натуральное число N . За один шаг число можно заменить на сумму трех его наибольших **собственных** делителей. Если на очередном шаге число имеет меньше 3 собственных делителей, процесс прекращается. Оказалось, что через некоторое время получилось число, делящееся на N . Найдите все возможные значения числа N . Напомним, что собственным делителем числа называется произвольный натуральный делитель, отличный от самого числа.

4. Лесенкой длины k называется фигура из k клеток как на рисунке справа. Например, при $k = 1$ получается квадрат 1×1 , при $k = 2$ — прямоугольник из 2 клеток, при $k = 3$ — уголок из 3 клеток и так далее. На какое наименьшее количество лесенок можно разбить квадрат 2024×2024 ? Лесенки могут иметь разную длину, их разрешено поворачивать и переворачивать.



5. Два брата решили заработать денег. Они пошли к сельскому психологу, который запер их в две отдельные комнаты и стал играть с ними в следующую игру. Время от времени психолог заходит в комнату к одному из братьев и спрашивает его, какой по счету этот заход (психолог считает заходы к обоим братьям вместе), на что вопрошаемый дает два ответа. Если один из ответов верный, то психолог зачисляет на его счет один рубль, но угадывающему об этом не сообщает. Братья могут заранее договориться об образе действий. Могут ли они гарантированно заработать хотя бы 100 рублей?

6. Даны натуральные числа n и $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Докажите, что можно найти n различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n таких, что существуют ровно k пар различных чисел $a_i < a_j$, для которых a_j делится на a_i .

7. На биссектрисе AK треугольника ABC отмечена точка L . Луч BL пересекает сторону AC в точке M . На отрезке CM отмечена точка N . Докажите, что если треугольники AKC , ALM и ALN — равнобедренные, то треугольник CLN — тоже равнобедренный.

8. Дано натуральное число k . Назовем натуральное число n *удачным*, если существуют такие целые числа x, y и z , что $x + y + z = 2^n$ и $4^n - k = 3(xy + yz + zx)$. Докажите, что, если существует удачное натуральное число, то все натуральные числа — удачные.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024

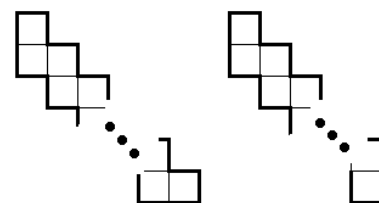
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Можно ли все натуральные числа, большие единицы, покрасить в два цвета так, чтобы для любых чисел a и b одного цвета (не обязательно различных) число a^b было другого цвета?

2. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки X и Y , а на стороне AC — точка Z , причем $BX = XY$ и $\angle AXZ = 90^\circ$. Докажите, что $AB + YZ \geq AZ$.

3. Дано натуральное число N . За один шаг число можно заменить на сумму трех его наибольших **собственных** делителей. Если на очередном шаге число имеет меньше 3 собственных делителей, процесс прекращается. Оказалось, что через некоторое время снова получилось число N . Найдите все возможные значения числа N . Напомним, что собственным делителем числа называется произвольный натуральный делитель, отличный от самого числа.

4. Лесенкой длины k называется фигура из k клеток как на рисунке справа. Например, при $k = 1$ получается квадрат 1×1 , при $k = 2$ — прямоугольник из 2 клеток, при $k = 3$ — уголок из 3 клеток и так далее. На какое наименьшее количество лесенок можно разбить квадрат 2024×2024 ? Лесенки могут иметь разную длину, их разрешено поворачивать и переворачивать.



5. В турнире по шахматам принимает участие 99 игроков, каждый игрок должен сыграть с каждым ровно один раз. Турнир проходит в 99 туров, в каждом туре игроки разбиваются на пары и проводят игры в парах, а один отдыхает. В каждой игре один играет черными, другой белыми. Можно ли организовать турнир так, чтобы ни один игрок два тура подряд не играл одним и тем же цветом? (Если игрок отдыхал, то в турах перед отдыхом и после отдыха он может играть одним и тем же цветом, ведь это не подряд идущие туры.)

6. Даны натуральные числа n и $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Докажите, что можно найти n различных натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n таких, что существуют ровно k пар различных чисел $a_i < a_j$, для которых a_j делится на a_i .

7. На биссектрисе AK треугольника ABC отмечена точка L . Луч BL пересекает сторону AC в точке M . На отрезке CM отмечена точка N . Докажите, что если треугольники AKC , ALM и ALN — равнобедренные, то треугольник CLN — тоже равнобедренный.

8. Найдите все тройки целых чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ca = c + 6$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Можно ли все натуральные числа, большие единицы, покрасить в два цвета так, чтобы для любых чисел a и b одного цвета (не обязательно различных) число a^b было другого цвета?

2. В зале на полу лежат три ковра: прямоугольный, треугольный и круглый. Вместе они покрывают 12м^2 . От каждого ковра, не перемещая его, отрезали прямым разрезом часть в половину его площади и выкинули. Для какого наибольшего натурального k можно точно утверждать, что теперь покрыто коврами хотя бы k квадратных метров?

3. Найдите все тройки целых чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ca = c + 6$.

4. Клетчатый крестом назовём фигуру, являющуюся объединением вертикального и горизонтального прямоугольника 1×5 , пересекающихся по одной клетке (не обязательно центральной). Какое наибольшее количество непересекающихся клетчатых крестов можно поместить внутри прямоугольника 9×9 ? Границы клетчатых крестов должны идти по границам клеток.

5. Аллея парка имеет форму правильного пятиугольника, вершины которого занумерованы как $ABCDE$ по часовой стрелке. Из точки A одновременно стартовали трое: папа и сын — по часовой стрелке, мама — против. Скорости каждого из них постоянны, но различны. Сын бежал быстрее всех и встречал родителей на аллее. Первая встреча была с мамой в вершине E , вторая — с отцом в вершине C , третья — с мамой в вершине D . Определите, сколько кругов пробежит сын к тому моменту, когда папа и мама впервые встретятся друг с другом в точке A .

6. В офисе стоят несколько телефонов. Некоторые пары телефонов соединены проводами друг с другом. Всегда ли возможно каждому телефону присвоить некоторый номер (натуральное число), чтобы выполнялось следующее правило: два телефона соединены проводом если, и только если один из их номеров делится на другой? Номера могут повторяться.

7. На биссектрисе AK треугольника ABC отмечена точка L . Луч BL пересекает сторону AC в точке M . На отрезке CM отмечена точка N . При этом оказалось $AK = KC$, $AL = AM$. Докажите, что если треугольник ALN — равнобедренный, то треугольник CLN — тоже равнобедренный.

8. Катя написала на доске в ряд числа $1, 2, 3, \dots, 98, 99$. Юля под ними записала те же 99 чисел, но, возможно, в другом порядке. Оказалось, что для любого $1 \leq m \leq 99$ верно, что если под числом m написано число n , то под числом n написано число $2m - n$. В каком порядке могла записать числа Юля?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024
МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Палиндромом называется натуральное число, которое в десятичной записи слева и справа читается одинаково. Верно ли, что десятичную запись любого натурального числа можно разбить на не более чем 100 палиндромов?
2. В зале на полу лежат три ковра: прямоугольный, треугольный и круглый. Вместе они покрывают 12 м^2 . От каждого ковра, не перемещая его, отрезали прямым разрезом часть в половину его площади и выкинули. Для какого наибольшего натурального k можно точно утверждать, что теперь покрыто коврами хотя бы k квадратных метров?
3. Найдите все тройки целых чисел a, b, c таких, что $a + b + c = 2$ и $ab + bc + ca = c$.
4. Клетчатым крестом назовём фигуру, являющуюся объединением вертикального и горизонтального прямоугольника 1×5 , пересекающихся по центральной клетке. Какое наибольшее количество непересекающихся клетчатых крестов можно поместить внутри прямоугольника 9×9 ? Границы клетчатых крестов должны идти по границам клеток.
5. Аллея парка имеет форму правильного пятиугольника, вершины которого занумерованы как $ABCDE$ по часовой стрелке. Из точки A одновременно стартовали трое: папа и сын — по часовой стрелке, мама — против. Скорости каждого из них постоянны, но различны. Сын бежал быстрее всех и встречал родителей на аллее. Первая встреча была с мамой в вершине E , вторая — с отцом в вершине C , третья — с мамой в вершине D . Определите, сколько кругов пробежит сын к тому моменту, когда папа и мама впервые встретятся друг с другом в точке A .
6. В офисе стоят несколько телефонов. Некоторые пары телефонов соединены проводами друг с другом. Всегда ли возможно каждому телефону присвоить некоторый номер (натуральное число), чтобы выполнялось следующее правило: два телефона соединены проводом если, и только если один из их номеров делится на другой? Номера могут повторяться.
7. На биссектрисе AK треугольника ABC отмечена точка L . Луч BL пересекает сторону AC в точке M . На отрезке CM отмечена точка N . При этом оказалось $AK = KC$, $AL = AM$. Докажите, что если треугольник ALN — равнобедренный, то треугольник CLN — тоже равнобедренный.
8. Катя написала на доске в ряд числа $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Юля под ними записала те же 9 чисел, но, возможно, в другом порядке. Оказалось, что для любого $1 \leq m \leq 9$ верно, что если под числом m написано число n , то под числом n написано число $2m - n$. В каком порядке могла записать числа Юля?