

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. Петя принёс в кружок на свой день рождения коробку конфет. Если он попытается раздать всем поровну конфет, то одной конфеты не хватит. Если же Петя попытается раздать всем мальчикам поровну конфет, а всем девочкам тоже поровну и на одну конфету больше, чем мальчикам, то у него останется одна конфета. Докажите, что если бы у Пети было вдвое больше конфет, то он смог бы раздать всем мальчикам поровну конфет, а всем девочкам тоже поровну и на одну конфету больше, чем мальчикам.

**Решение.** Пусть Петя даст каждому ребенку сумму того, что он давал ему в двух способах из условия. Тогда он потратит ровно в два раза больше конфет, чем у него было, и каждая девочка получит на одну конфету больше, чем каждый мальчик.

2. У Кирилла есть белая клетчатая доска  $2024 \times 2024$ . За один ход Кирилл выбирает линию (строку или столбец), в которой в данный момент все клетки белые, и перекрашивает какие-то 1000 клеток этой линии в черный. Какое наибольшее количество клеток Кирилл может в результате сделать черными?

**Ответ:**  $1000 \cdot 2024 + 1024 \cdot 1000 = 3048000$ . **Решение.** Оценка. Будем говорить, что Кирилл сделал ход в линию, если он закрасил 1000 клеток из этой линии. Очевидно, в каждую линию можно сделать ход не более одного раза. Пусть, не умаляя общности, в первый свой ход Кирилл сделал ход в столбец. Тогда Кирилл уже не сможет сделать ход в 1000 линий (которые содержат перекрашенные клетки первого хода). Следовательно, всего перекрашено будет не более  $1000 \cdot 2024 + 1024 \cdot 1000 = 3048000$  клеток.

Пример. Делаем ход во все столбцы, закрашивая каждый раз 1000 верхних клеток, затем делаем ход в 1024 нижних строк, закрашивая в них любые клетки.

3. На окружности выбрано 11 точек. Некоторые пары точек соединены отрезками, причём среди любых 6 точек найдутся какие-то две, не соединённые отрезком. Верно ли, что эти точки всегда можно окрасить в 5 цветов так, чтобы не нашлось отрезка, соединяющего точки одинакового цвета?

**Ответ:** Нет. **Решение.** Соединим отрезками все пары точек, кроме пар точек, соседних на окружности. Среди любых 6 точек из 11 обязательно найдутся две соседние, а значит не соединённые. При этом в 5 цветов точки окрасить нельзя, так как по принципу Дирихле обязательно найдутся 3 точки одного цвета, но в нашем примере нет трёх попарно несоединённых точек.

4. Натуральное число  $n$  разделили с остатком на все числа от 1 до 100, дающие остаток 2 при делении на 3 (т.е. на 2, 5, 8, ..., 98). Может ли сумма полученных неполных частных отличаться от суммы полученных остатков ровно на 1000? (Напомним, что как остаток, так и неполное частное могут быть нулевыми!)

**Ответ:** Нет. **Решение 1.** Пусть  $n = (3i - 1)q_i + r_i$  при  $1 \leq i \leq 33$ , где  $q_i$  — неполное частное от деления на  $3i - 1$ , а  $r_i$  — остаток. Тогда  $n \equiv r_i - q_i \pmod{3}$ . Складывая 33 таких сравнения, получим, что  $0 \equiv r_1 + r_2 + \dots + r_{33} - q_1 - q_2 - \dots - q_{33}$ . Следовательно, сумма неполных частных отличается от суммы остатков на число, кратное 3, а 1000 не кратно 3.

**Решение 2.** Рассмотрим разность сумм неполных частных и сумм остатков. Очевидно, что когда  $n = 0$ , то эта разность равна 0. При увеличении  $n$  на единицу, все остатки увеличиваются на 1 кроме тех, которые становятся нулём. Если не заменять остатки нулём, то разность уменьшится на 33. При каждой замене для делителя  $q$  из остатка вычитается  $q$ , а неполное частное увеличивается на 1, поэтому к рассматриваемой разности прибавляется  $q + 1$ , что всегда делится на 3. Поэтому разность всегда будет делиться на 3.

**5.** Аня взяла девятизначное число  $n$ , и приписала справа от него девятизначное число  $k \leq n$ , получив новое 18-значное число. Боря вычислил сумму всех натуральных чисел от 1 до  $n$ . Оказалось, что полученное Аней число ровно в 7 раз больше, чем сумма, вычисленная Борей. Найдите все  $n$ , для которых такое возможно.

**Ответ:**  $n = 285714285$ . **Решение.** Из условия следует, что  $7 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 10^9 n + k$ , следовательно  $7n(n+1) = 2 \cdot 10^9 n + 2k$  (\*). Отсюда получаем, что  $2k$  делится на  $n$ , а так как  $2k \leq 2n$ , то или  $2k = n$ , или  $2k = 2n$ . Сокращая (\*) на  $n$  получим  $7(n+1) = 2 \cdot 10^9 + 1$  или  $7(n+1) = 2 \cdot 10^9 + 2$ . Из двух вариантов правых частей на 7 делится только вторая, и при этом  $n + 1 = 285714286$ , откуда и получаем ответ.

**6.** Сначала на доске записывается трехзначное натуральное число  $n$ . Петя и Вася по очереди делают ходы, начинает Петя. Тот, кто делает ход, вычитает из числа на доске любой его делитель, отличный от единицы и самого числа. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Сколько существует таких трехзначных  $n$ , при которых выигрывает Вася?

**Ответ:** 452. **Решение.** Будем говорить, что позиция выигрышная, если тот, кто делает из неё ход, может победить при любой игре соперника. И проигрышная, если соперник того, кто делает ход, может победить. Докажем, что выигрышными являются все четные числа, а также все числа вида  $2^{2k}$ , где  $k$  — натуральное. Пусть мы доказали это для всех чисел от 1 до  $2m$ . Докажем для  $2m+1$  и  $2m+2$ . Если  $2m+1$  — простое, то тот, кто делает ход, уже проиграл. Если же оно составное, то при вычитании из него его делителя, получится четное число, имеющее нечетный делитель, то есть не степень двойки. А мы уже выяснили, что любое четное число, не являющееся степенью двойки, обязательно выигрышное для того, кто с него ходит. Следовательно, из  $2m+1$  можно сходить только в выигрышные для соперника позиции, а значит,  $2m+1$  — проигрышная позиция. Если  $2m+2$  — не степень двойки, то из него можно вычесть нечетный делитель, отличный от 1, и поставить соперника в проигрышную позицию. Если  $2m+2 = 2^x$ , то при вычитании делителей, меньших  $2^{x-1}$ , мы будем попадать в четное число, не являющееся степенью двойки, а при вычитании  $2^{x-1}$ , мы попадем в  $2^{x-1}$ . Следовательно, если  $x$  четно, то  $2^x$  — выигрышная, если  $x$  нечетно, то  $2^x$  — проигрышная. Нас интересуют трехзначные числа, при которых у начинающего игрока нет выигрышной стратегии, то есть нас интересуют проигрышные позиции. Количество нечетных трехзначных чисел равно 450, а нечетных степеней двоек — две ( $2^7$  и  $2^9$ ). Следовательно, ответ 452.

**7.** При каких натуральных  $n$  на доску  $n \times n$  можно выставить несколько ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

**Ответ:** При всех четных  $n$ . **Решение 1.** Пример. Для четных  $n$  достаточно расставить ладей на двух главных диагоналях. Легко проверить, что каждая клетка будет биться ровно 3 раза.

Оценка. Введем граф, вершинами которого будут ладьи. Будем соединять ладей ребром, если они бьют друг друга. Заметим, что в полученном графе степень каждой вершины равна 2, поэтому он бьется на циклы. Докажем, что каждую пустую клетку пересекает ровно одно ребро графа. Каждую пустую клетку бьет три ладьи, поэтому две из них бьют ее одновременно по горизонтали или по вертикали. Тогда ребро между соответствующими вершинами пересекает выбранную клетку. С другой стороны, если два ребра пересеклись по пустой клетке, то она будет биться 4 ладьями, что невозможно. Итого, все клетки доски разбились на «циклы». Длина каждого такого «цикла» четная (например, потому что при раскраске клеток доски в шахматном порядке в каждом «цикле» цвета клеток чередуются). Значит, и всего клеток на доске четное число, откуда  $n$  — четное.

**Решение 2.** Если есть линия (НУО строка), в которой ровно одна ладья  $A$  (очевидно, что во всех линиях хотя бы одна ладья есть), то во всех столбцах будет хотя бы по 2 ладьи, а в столбце с  $A$  — хотя бы три. Тогда найдется строка, в которой хотя бы три ладьи, а тогда любая крайняя из них  $B$  будет единственной в своём столбце. Но тогда поле, лежащее на пересечении строки, содержащей  $A$  и столбца, содержащего  $B$  будет побито двумя ладьями. А тогда в каждой линии не менее двух ладей, а значит, ровно по две. Но тогда заметим, что во всех углах должно быть по ладье, больше ладей в крайних линиях нет. Тогда во всех клетках, соседних по углу с угловыми тоже должно быть по ладье (иначе их не побить тремя ладьями), тогда и в соседних с ними по углу ближе к центру должно быть по ладье и т. д. Для чётного  $n$  получится пример, для нечётного — противоречие в центральной клетке.

**8. Дано 100 натуральных чисел. Пара различных данных чисел называется хорошей, если найдётся другая пара данных чисел, у которых разность ровно в два раза больше (из большего числа всегда вычитается меньшее). Какое наибольшее количество хороших пар может быть среди данных чисел?**

**Ответ:**  $C_{99}^2 + 1 = 4852$ . **Решение.** Пример: возьмем числа  $1, 2, \dots, 99$  и  $197$ . Тогда  $197$  образует с остальными числами разности от  $98$  до  $196$ , а остальные числа друг с другом образуют разности от  $1$  до  $98$ . Поэтому удвоенная разность есть для всех пар, кроме  $(1, 197), (2, 197), \dots, (98, 197)$ .

Также в качестве примера подойдут числа  $0, 2^2, \dots, 2^{100}$ . Тогда для любой пары  $\{2^k, 2^\ell\}$ , не содержащей  $0$  и  $2^{99}$ , можно взять пару  $\{2^{k+1}, 2^{\ell+1}\}$ , разность в которой в два раза больше. Для пары  $(0, 2^k)$ , не содержащей  $2^{99}$ , подойдет пара  $(0, 2^{k+1})$ . И, наконец, для пары  $(2^{99}, 2^{100})$  подойдет пара  $(0, 2^{100})$ . Есть небольшой нюанс: по условию числа должны быть натуральными. Прибавим к каждому числу по  $1$ , от этого разности чисел не изменятся.

Оценка. Пары, не являющиеся хорошими, будем называть плохими. Докажем, что найдется хотя бы  $98$  плохих пар (именно столько, сколько в нашем примере). Пусть наши числа это  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$ . Очевидно, пара  $\{a_1, a_{100}\}$  не является хорошей, так как разность между ними не меньше любой другой разности. Кроме того, для каждого  $i$  выполнено  $(a_i - a_1) + (a_{100} - a_i) = a_{100} - a_1$ . Следовательно, одна из этих разностей больше или равна половине самой большой разности. Если разность строго

больше половины, то нет разности вдвое больше, и пара с этой разностью — плохая. Очевидно, может быть не более одного такого  $i$ , что  $a_i - a_1 = a_{100} - a_i = (a_{100} - a_1)/2$ . Поэтому для каждого  $2 \leq i \leq 99$ , кроме быть может одного,  $a_i$  образует плохую пару с  $a_1$  или  $a_{100}$ . То есть ещё хотя бы 97 плохих пар.