

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА. МЛАДШАЯ ГРУППА.

1. Петя принёс в кружок на свой день рождения коробку конфет. Если он попытается раздать всем поровну конфет, то одной конфеты не хватит. Если же Петя попытается раздать всем мальчикам поровну конфет, а каждой девочке — на одну конфету больше, чем мальчику, то у него останется одна конфета. Докажите, что если бы у Пети было бы две таких же коробки конфет, то он смог бы раздать всем мальчикам поровну конфет, а каждой девочке — на одну конфету больше, чем мальчику.

2. По дороге в одном направлении с постоянными скоростями едут трактор, грузовик и автобус. Четыре человека, стоящих у дороги, назвали порядок, в котором мимо них проезжали эти транспортные средства. Паша сказал: «Грузовик, автобус, трактор», Вася: «Трактор, грузовик, автобус», Тимур: «Автобус, грузовик, трактор». Что сказал Гриша, если названный им порядок отличается от этих трёх?

3. Назовем натуральное число *треугольным*, если оно равно сумме первых нескольких натуральных чисел, в частности, число 1 — треугольное. Существуют ли 2024 различных треугольных числа, произведение которых является точным квадратом?

4. Треугольник ABC , в котором $\angle A = 2\angle C$, и квадрат $AXYZ$ расположены на плоскости так, что точка Z лежит на стороне AC , а точка B — на диагонали XZ . Отрезки BC и YZ пересекаются в точке T . Докажите, что $AB = YT$.

5. Даны числа x_1, x_2, \dots, x_{400} . Рассмотрим суммы

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \dots, S_{400} = x_1 + x_2 + \dots + x_{400}.$$

Оказалось, что такие суммы принимают ровно 5 различных значений. При каком наибольшем k можно утверждать, что среди исходных чисел найдутся k равных?

6. При каких натуральных n на доску $n \times n$ можно выставить нескольких ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D , на стороне BC — точка E , а на отрезке BE — точка F , причем $\angle ADB = \angle BED = 60^\circ$, $AC = BD$ и $CD = BF$. Докажите, что $AD + CE > AF$.

8. Напомним, что *палиндромом* называется число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Например, 12321 — палиндром, а 1210 — нет. Существует ли натуральное число $N > 1$ такое, что все его натуральные степени являются палиндромами?