

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Назовём натуральное число  $k$  *справедливым*, если количество 2023-значных палиндромов, кратных  $k$ , равно количеству 2024-значных палиндромов, кратных  $k$ . Каких чисел больше среди чисел от 1 до 35 включительно: справедливых или несправедливых? (Палиндромом называется натуральное число, которое читается одинаково как в прямом, так и в обратном направлении. Например, 70307.)

2. В чемпионате по настольному теннису участвовали 10 человек. Каждый участник сыграл с каждым ровно по одному разу. В каждом матче победитель получал 1 очко, а проигравший — 0 очков (ничьих в настольном теннисе не бывает). Назовем участника удивительным, если он выиграл ровно у тех, кто набрал в чемпионате больше очков, чем он, и проиграл ровно тем, кто набрал в чемпионате меньше, чем он. Сколько максимум может быть удивительных участников?

3. Дано натуральное число  $n < 10^{22}$ . Докажите, что число  $n$  может быть представлено в виде произведения десяти натуральных чисел таких, что среди них нет ни одного составного числа, большего 10 000.

4. Некоторые 100 клеток клетчатой плоскости окрашены в красный цвет. Верно ли, что в эти клетки всегда можно расставить числа от 1 до 100 таким образом, что во всех парах соседних по стороне красных клеток будут различные суммы чисел?

5. Петя пишет ряд натуральных чисел. Первое число равно  $2^{2024} + 1$ , а каждое следующее равно наибольшему простому делителю числа  $(x - 1)(x + 1)$ , где  $x$  — это последнее выписанное число. Чему равна сумма 2024-го и 2025-го выписанных Петей чисел?

6. В ряд записано 66 ненулевых чисел. Каждое число (кроме первого и последнего) на единицу меньше произведения двух своих соседей. Докажите, что первое и последнее числа равны.

7. По кругу стоят 100 табуреток. На каждую из них можно посадить котика, которые бывают трёх видов: толстые, худые и обычные. Каждый толстый должен сидеть между двумя котиками одного вида, а каждый из остальных должен сидеть между котиками разных видов. Четно или нечетно количество способов так рассадить котиков?

8. Паша записал на листочке числа  $1, 2, \dots, 100$  в каком-то порядке, получился ряд  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ . Игорь хочет угадать этот порядок. Он может выбрать пару натуральных чисел  $1 \leq k < \ell \leq 100$ , сообщить ее Паше, а он в ответ назовет Игорю одно из чисел  $ka_\ell$  или  $\ell a_k$  (Игорь не знает, какое из этих 2 чисел ему называют). Верно ли, что какой бы порядок ни задумал Паша, Игорь сможет отгадать его, задав несколько таких вопросов?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Каких палиндромов больше: 2023-значных, кратных 99, или 2024-значных, кратных 99? Напоминаем, что палиндромом называется натуральное число, которое читается одинаково как в прямом, так и в обратном направлении. Например, 70307.

2. В чемпионате по настольному теннису участвовали 10 человек. Каждый участник сыграл с каждым ровно по одному разу. В каждом матче победитель получал 1 очко, а проигравший — 0 очков (ничьих в настольном теннисе не бывает). Назовем участника удивительным, если он выиграл ровно у тех, кто набрал в чемпионате больше очков, чем он, и проиграл ровно тем, кто набрал в чемпионате меньше, чем он. Сколько максимум может быть удивительных участников?

3. Дано натуральное число  $n < 10\,000$ . Докажите, что число  $n$  может быть представлено в виде произведения трёх натуральных чисел таких, что среди них нет ни одного составного числа, большего 100.

4. Некоторые 100 клеток клетчатой плоскости окрашены в красный цвет. Верно ли, что в эти клетки всегда можно расставить числа от 1 до 100 таким образом, что во всех парах соседних по стороне красных клеток будут различные суммы чисел?

5. Петя пишет ряд натуральных чисел. Первое число равно  $2^{2024} + 1$ , а каждое следующее равно наибольшему простому делителю числа  $(x - 1)(x + 1)$ , где  $x$  — это последнее выписанное число. Чему равна сумма 2024-го и 2025-го выписанных Петей чисел?

6. В ряд записано 66 ненулевых чисел. Каждое число (кроме первого и последнего) на единицу меньше произведения двух своих соседей. Докажите, что первое и последнее числа равны.

7. По кругу стоят 100 табуреток. На каждую из них можно посадить котика, которые бывают трёх видов: толстые, худые и обычные. Каждый толстый должен сидеть между двумя котиками одного вида, а каждый из остальных должен сидеть между котиками разных видов. Четно или нечетно количество способов так рассадить котиков?

8. Сёстры Аня и Лиза хотят добраться до дома, который находится в 30 км от их местоположения вдоль по прямой дороге. К сожалению, у них есть только один велосипед на двоих. Они поступили следующим образом: сначала одна из сестёр поехала на велосипеде, в некоторый момент оставила велосипед на дороге и далее пошла пешком. Другая пошла пешком, дошла до велосипеда, села на него и поехала домой, куда сёстры прибыли одновременно. Известно, что Аня ходит со скоростью 6 км/ч, ездит на велосипеде со скоростью 15 км/ч, а Лиза ходит со скоростью 5 км/ч и ездит со скоростью 20 км/ч. Всю дорогу сестры двигались только в сторону дома. Сколько часов велосипед лежал на дороге?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Каких палиндромов больше: 2023-значных, кратных 9, или 2024-значных, кратных 9? Напоминаем, что палиндромом называется натуральное число, которое читается одинаково как в прямом, так и в обратном направлении. Например, 70307.

2. В чемпионате по настольному теннису участвовало 10 человек. Каждый участник сыграл с каждым ровно по одному разу. В каждом матче победитель получал 1 очко, а проигравший — 0 очков (ничьих в настольном теннисе не бывает). Могло ли оказаться так, что один участник выиграл ровно у тех, кто набрал в чемпионате строго больше очков, чем он, и проиграл ровно тем, кто набрал в чемпионате строго меньше очков, чем он?

3. Дано натуральное число  $n < 10\,000$ . Докажите, что число  $n$  может быть представлено в виде произведения трёх натуральных чисел таких, что среди них нет ни одного составного числа, большего 100.

4. Некоторые 100 клеток клетчатой плоскости окрашены в красный цвет. Верно ли, что в эти клетки всегда можно расставить числа от 1 до 100 таким образом, что во всех парах соседних по стороне красных клеток будут различные суммы чисел?

5. Петя пишет ряд натуральных чисел. Первое число равно  $2^{2024} + 1$ , а каждое следующее равно наибольшему простому делителю числа  $x + 1$ , где  $x$  — это последнее выписанное число. Докажите, что рано или поздно Петя выпишет на доску число 2.

6. В последовательности из 61 ненулевого числа каждое число (кроме первого и последнего) равно произведению двух своих соседей. Докажите, что первое и последнее числа равны.

7. По кругу стоят 100 табуреток. На каждую из них можно посадить котика, которые бывают трёх видов: толстые, худые и обычные. Каждый толстый должен сидеть между двумя котиками одного вида, а каждый из остальных должен сидеть между котиками разных видов. Четно или нечетно количество способов так рассадить котиков?

8. Сёстры Аня и Лиза хотят добраться до дома, который находится в 30 км от их местоположения вдоль по прямой дороге. К сожалению, у них есть только один велосипед на двоих. Они поступили следующим образом: сначала одна из сестёр поехала на велосипеде, в некоторый момент оставила велосипед на дороге и далее пошла пешком. Другая пошла пешком, дошла до велосипеда, села на него и поехала домой, куда сёстры прибыли одновременно. Известно, что Аня ходит со скоростью 6 км/ч, ездит на велосипеде со скоростью 15 км/ч, а Лиза ходит со скоростью 5 км/ч и ездит со скоростью 20 км/ч. Всю дорогу сестры двигались только в сторону дома. Сколько часов велосипед лежал на дороге?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В 2024-значном палиндроме, кратном 99, заменили какие-то две цифры на какие-то две другие, но число осталось палиндромом, кратным 99. Чему равна сумма четырёх цифр — двух, которые заменили, и двух, на которые заменили? (Палиндромом называется натуральное число, которое читается одинаково как в прямом, так и в обратном направлении. Например, 70307.)

2. В чемпионате по настольному теннису участвовало 10 человек. Каждый участник сыграл с каждым ровно по одному разу. В каждом матче победитель получал 1 очко, а проигравший — 0 очков (ничьих в настольном теннисе не бывает). Могло ли оказаться так, что один участник выиграл ровно у тех, кто набрал в чемпионате строго больше очков, чем он, и проиграл ровно тем, кто набрал в чемпионате строго меньше очков, чем он?

3. Дано натуральное число  $n < 10000$ . Докажите, что число  $n$  может быть представлено в виде произведения четырёх натуральных чисел (не обязательно различных) таких, что среди них нет ни одного составного числа, большего 100.

4. Некоторые 100 клеток клетчатой плоскости окрашены в красный цвет. Верно ли, что в эти клетки всегда можно расставить числа от 1 до 100 таким образом, что во всех парах соседних по стороне красных клеток будут различные суммы чисел?

5. На доске в ряд написаны несколько натуральных чисел. Первое число — единица. Каждое следующее, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Среди чисел есть число 2024. Каким наименьшим может быть второе число?

6. В последовательности из 61 ненулевого числа каждое число (кроме первого и последнего) равно произведению двух своих соседей. Докажите, что первое и последнее числа равны.

7. По кругу стоят 100 табуреток. На каждую из них нужно посадить котика, которые бывают трёх видов: толстые, худые и обычные. Хотя бы один котик каждого вида должен быть. Каждый толстый должен сидеть между двумя котиками одного вида, а каждый из остальных должен сидеть между котиками разных видов. Четно или нечетно количество способов так рассадить котиков?

8. Сёстры Аня и Лиза хотят добраться до дома, который находится в 30 км от их местоположения вдоль по прямой дороге. К сожалению, у них есть только один велосипед на двоих. Они поступили следующим образом: сначала одна из сестёр поехала на велосипеде, в некоторый момент оставила велосипед на дороге и далее пошла пешком. Другая пошла пешком, дошла до велосипеда, села на него и поехала домой, куда сёстры прибыли одновременно. Известно, что Аня ходит со скоростью 6 км/ч, ездит на велосипеде со скоростью 15 км/ч, а Лиза ходит со скоростью 5 км/ч и ездит со скоростью 20 км/ч. Всю дорогу сестры двигались только в сторону дома. Сколько часов велосипед лежал на дороге?