

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть $1 < \alpha < 2$ и $M = \{[2^n \alpha] \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. Верно ли, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы чисел из M , где слагаемые в этой сумме могут повторяться, но не более двух раз? Напомним, что через $[x]$ обозначена целая часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x .

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC , в котором $\angle A = 105^\circ$. Точка D симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к стороне BC . Оказалось, что $AD + AC = BC$. Чему может быть равна градусная мера угла ABC ?

3. Дана последовательность целых чисел a_1, a_2, \dots . Оказалось, что для каждого натурального n можно указать такое натуральное m , что члены a_i и a_j дают одинаковые остатки при делении на n тогда и только тогда, когда i и j дают одинаковые остатки при делении на m . Докажите, что последовательность a_1, a_2, \dots периодична или является арифметической прогрессией.

4. Копы и роббер бегают по конечному связному графу. Сначала копы занимают некоторые вершины. После них роббер подбирает себе начальную вершину. Ходят по очереди: все копы, потом снова роббер, потом снова все копы и т. д. Ход каждого персонажа — либо остаться на месте, либо переместиться в соседнюю вершину. Все всех видят, действия копов скоординированы. Цель копов — поймать роббера, это происходит если в какой-либо момент роббер и любой из копов окажется в одной вершине. Докажите, что существует граф, на котором роббер может неограниченно долго ускользать от 2024 копов, причем этот граф может быть нарисован на плоскости так, чтобы любое ребро пересекало не более одного другого ребра.

5. Числовой треугольник из нулей и единиц состоит из n строк: одно число в первой строке, два числа во второй, \dots , n чисел в n -й. Каждое число любой строки, кроме последней, расположено над промежутком между двумя соседними числами следующей строки. Такой треугольник назовём *двоичным антитреугольником Паскаля*, если для каждых двух соседних чисел каждой строки сумма этих двух чисел и числа, стоящего над ними, нечётна. Какое наименьшее количество единиц может быть в таком треугольнике?

6. Докажите, что если натуральное число делится на 88, но не делится на 121, то все его делители можно разбить на два множества с одинаковой суммой.

7. Федя и Саша по очереди проводят на плоскости прямые, пока не будет проведено 2024 прямые. Начинает Федя. Саша хочет, чтобы в результате количество областей, на которые проведенные прямые делят плоскость, делилось на 3. Сможет ли Федя ему помешать?

8. Точки B и C зафиксированы, а точка A движется по прямой, параллельной BC . Пусть D и E — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. На прямой DE взята точка X такая, что $XD = AB/2$, причем X и C лежат по разные стороны от прямой AB . Аналогично, на прямой DE взята точка Y такая, что $YE = AC/2$, причем Y и B лежат по разные стороны от прямой AC . Пусть T — точка пересечения прямых BX и CY . Докажите, что точка пересечения высот всевозможных треугольников THY лежит на фиксированной прямой.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть $1 < \alpha < 2$ и $M = \{[2^n \alpha] \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. Верно ли, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы чисел из M , где слагаемые в этой сумме могут повторяться, но не более двух раз? Напомним, что через $[x]$ обозначена целая часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x .
2. Дан неравнобедренный треугольник ABC , в котором $\angle A = 105^\circ$. Точка D симметрична точке A относительно серединного перпендикуляра к стороне BC . Оказалось, что $AD + AC = BC$. Чему может быть равна градусная мера угла ABC ?
3. Докажите, что существует лишь конечное количество пар положительных рациональных чисел p и q таких, что каждое из чисел $p + q$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ — целое.
4. Копы и роббер бегают по конечному связному графу. Сначала копы занимают некоторые вершины. После них роббер подбирает себе начальную вершину. Ходят по очереди: все копы, потом снова роббер, потом снова все копы и т. д. Ход каждого персонажа — это либо пас (остаться на месте), либо переместиться в соседнюю вершину. Все всех видят, действия копов скоординированы. Цель копов — поймать роббера, это происходит если в какой-либо момент роббер и любой из копов окажется в одной вершине. Докажите, что существует граф, на котором роббер может неограниченно долго ускользать от 2024 копов.
5. Числовой треугольник из нулей и единиц состоит из n строк: одно число в первой строке, два числа во второй, ..., n чисел в n -й. Каждое число любой строки, кроме последней, расположено над промежутком между двумя соседними числами следующей строки. Такой треугольник назовём *двоичным антитреугольником Паскаля*, если для каждых двух соседних чисел каждой строки сумма этих двух чисел и числа, стоящего над ними, нечётна. Какое наименьшее количество единиц может быть в таком треугольнике?
6. Докажите, что если натуральное число делится на 88, но не делится на 121, то все его делители можно разбить на два множества с одинаковой суммой.
7. При каких натуральных n на плоскости можно провести n прямых, никакие две из которых не параллельны, так, чтобы количество частей, на которые они разбивают плоскость, делилось на 3?
8. Точки B и C зафиксированы, а точка A движется по прямой, параллельной BC . Пусть D и E — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. На прямой DE взята точка X такая, что $XD = AB/2$, причем X и C лежат по разные стороны от прямой AB . Аналогично, на прямой DE взята точка Y такая, что $YE = AC/2$, причем Y и B лежат по разные стороны от прямой AC . Пусть T — точка пересечения прямых BX и CY . Докажите, что точка пересечения высот всевозможных треугольников THY лежит на фиксированной прямой.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пусть $1 < \alpha < 2$ и $M = \{[2^n \alpha] \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. Верно ли, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы чисел из M , где слагаемые в этой сумме могут повторяться, но не более двух раз? Напомним, что через $[x]$ обозначена целая часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x .

2. На катете AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с прямым углом при вершине A выбрана точка D , для которой $3AD = AB$. Точка E , лежащая по ту же сторону от прямой AB , что и точка C , такова, что $\angle BDE = 60^\circ$ и $\angle DBE = 75^\circ$. Прямые BC и DE пересекаются в точке G , прямая, проходящая через G параллельно AC , пересекает прямую BE в точке H . Докажите, что треугольник CEH — равносторонний.

3. Докажите, что существует лишь конечное количество пар положительных рациональных чисел p и q таких, что каждое из чисел $p + q$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ — целое.

4. Копы и роббер бегают по конечному связному графу. Сначала копы занимают некоторые вершины. После них роббер подбирает себе начальную вершину. Ходят по очереди: все копы, потом снова роббер, потом снова все копы и т. д. Ход каждого персонажа — это либо пас (остаться на месте), либо переместиться в соседнюю вершину. Все всех видят, действия копов скоординированы. Цель копов — поймать роббера, это происходит если в какой-либо момент роббер и любой из копов окажется в одной вершине. Докажите, что существует граф, на котором роббер может неограниченно долго ускользать от 2024 копов.

5. В первой строке треугольной таблицы из 1002 строк написаны в порядке возрастания числа $0, 1, 2, \dots, 1001$. Каждая строка, начиная со второй, строится по такому правилу: под промежутком между каждыми двумя соседними числами предыдущей строки записывается их сумма. Докажите, что единственное число в последней строке делится на 1001.

6. Все натуральные делители числа $n = 17^{10} \cdot k$, где k нечетно и не делится на 17, можно разбить на два множества с равной суммой. Верно ли, что все натуральные делители числа $34^{33} \cdot n$ тоже можно разбить на два множества с равной суммой?

7. При каких натуральных n на плоскости можно провести n прямых, никакие две из которых не параллельны, так, чтобы количество частей, на которые они разбивают плоскость, делилось на 3?

8. Точки D и E — середины сторон AB и AC треугольника ABC . Окружность с диаметром AB пересекает прямую DE в точке X , причём X и C лежат по разные стороны от прямой AB . Окружность с диаметром AC пересекает прямую DE в точке Y , причём Y и B лежат по разные стороны от прямой AC . Пусть T — это точка пересечения прямых BX и CY . Докажите, что точка пересечения высот треугольника TXU лежит на прямой BC .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $a(b + c)$ и $b(a + c)$ — последовательные натуральные числа. Докажите, что одно из них — квадрат натурального числа.

2. На катете AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с прямым углом при вершине A выбрана точка D , для которой $3AD = AB$. Точка E , лежащая по ту же сторону от прямой AB , что и точка C , такова, что $\angle BDE = 60^\circ$ и $\angle DBE = 75^\circ$. Прямые BC и DE пересекаются в точке G , прямая, проходящая через G параллельно AC , пересекает прямую BE в точке H . Докажите, что треугольник CEH — равносторонний.

3. Докажите, что существует лишь конечное количество пар положительных рациональных чисел p и q таких, что каждое из чисел $p + q$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ — целое.

4. Копы и роббер бегают по конечному связному графу. Сначала копы занимают некоторые вершины. После них роббер подбирает себе начальную вершину. Ходят по очереди: все копы, потом снова роббер, потом снова все копы и т. д. Ход каждого персонажа — это либо пас (остаться на месте), либо переместиться в соседнюю вершину. Все всех видят, действия копов скоординированы. Цель копов — поймать роббера, это происходит если в какой-либо момент роббер и любой из копов окажется в одной вершине. Докажите, что существует граф, на котором роббер может неограниченно долго ускользать от 5 копов.

5. В первой строке треугольной таблицы из 1002 строк написаны в порядке возрастания числа $0, 1, 2, \dots, 1001$. Каждая строка, начиная со второй, строится по такому правилу: под промежутком между каждыми двумя соседними числами предыдущей строки записывается их сумма. Докажите, что единственное число в последней строке делится на 1001.

6. В соседних углах доски 8×8 стоят две хромые ладьи, которые могут ходить только на соседнюю по стороне клетку. Петя и Вася по очереди двигают фигуры, причём Петя за один ход ходит каждой из фигур ровно по 1 разу, а Вася ходит только одной из фигур, но сразу два раза. Начинает Петя. Петя хочет, что фигуры оказались в одной и той же клетке. Может ли Вася ему помешать?

7. Можно ли на плоскости провести 100 прямых, никакие две из которых не параллельны, так, чтобы количество частей, на которые они разбивают плоскость, делилось на 3?

8. Точки D и E — середины сторон AB и AC треугольника ABC . Окружность с диаметром AB пересекает прямую DE в точке X , причём X и C лежат по разные стороны от прямой AB . Окружность с диаметром AC пересекает прямую DE в точке Y , причём Y и B лежат по разные стороны от прямой AC . Пусть T — это точка пересечения прямых BX и CY . Докажите, что точка пересечения высот треугольника TXU лежит на прямой BC .