

LXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 29.04–05.05.2024
КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 30.04.2024
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Маша выписывает в тетрадку числа: сначала наименьшее нечётное число — 1, потом два следующих чётных числа — 2, 4, потом три следующих нечётных числа — 5, 7, 9, потом четыре следующих чётных числа — 10, 12, 14, 16 и т. д. Напишет ли она число 2024?

2. Дан параллелограмм $ABCD$ с большей стороной AB . На луче BD отмечены отличные от B точки X и Y так, что $CX = CB$ и $AU = AB$. Докажите, что $DX = DY$.

3. Дано натуральное число n . Алиса и Боб по очереди вписывают в клетки клетчатой доски $2n \times 2n$ различные положительные числа, начинает Алиса. В каждую клетку можно вписать только одно число. После того как таблица заполнена, в каждой строке и в каждом столбце закрашивают клетку с наибольшим числом (одна клетка может быть закрашена несколько раз). Докажите, что Боб может играть так, чтобы в итоге было закрашено не меньше $3n$ клеток.

4. Дано натуральное число $n > 1$. Натуральное число m , $1 \leq m \leq n - 1$, назовем *регулярным*, если найдется натуральное число x , для которого

$$m^2 x \equiv m \pmod{n}.$$

Докажите, что количество регулярных чисел равно числу всевозможных правильных несократимых дробей вида k/d , где d пробегает все делители n , удовлетворяющие свойству $\text{НОД}(d, n/d) = 1$.

5. Некоторые участники турнира дружат между собой, и у каждого есть хотя бы один друг. Каждому участнику турнира выдали футболку, на которой написано количество его друзей на турнире. Докажите, что хотя бы у одного участника среднее арифметическое чисел на футболках его друзей не меньше, чем среднее арифметическое чисел на всех футболках.

6. Точки O_1 и O_2 — центры равных равносторонних треугольников ABC и DEF . Отрезок AB пересекает отрезки DE и DF в точках M и N соответственно, а отрезок AC пересекает отрезки DF и EF в точках P и Q соответственно; точка N лежит на отрезках AM и PD , точка P лежит на отрезках FN и AQ . Биссектрисы углов EMN и DPQ пересекаются в точке I , а биссектрисы углов $FNМ$ и EQP пересекаются в точке J . Докажите, что $IJ \perp O_1O_2$.

7. В каждой клетке таблицы $(2n + 1) \times 2$ написано вещественное число. В каждой из $2n + 1$ строк сумма модулей чисел равна 1. Барон Мюнхгаузен может выбрать несколько строк и поменять знаки у всех чисел, стоящих в этих строках. После этого вычисляются суммы b_1 и b_2 чисел в столбцах. Барон утверждает, что для любой таблицы он сможет добиться выполнения неравенства $|b_1| + |b_2| \leq 1$. Не обманывает ли нас барон?

8. Дано натуральное $k < 100$ и выпуклый 100-угольник. Петя проводит в нём несколько диагоналей, не пересекающихся по внутренним точкам. После этого Вася должен покрасить k вершин 100-угольника. При этом любой двузвенный путь, каждое ребро в котором — сторона или проведенная Петей диагональ, должен содержать отмеченную вершину. При каком наименьшем k Вася всегда сможет это сделать?