

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–4 места

1. На столе лежат 50 кучек монет, в которых находятся 1, 2, 3, ..., 50 монет соответственно. Аня и Боря играют в игру. Сначала Аня указывает на одну из кучек на столе, а Боря решает, кто забирает себе эту кучку: он или Аня. Затем Боря указывает на одну из кучек, а Аня решает, кто её забирает. И так далее они ходят по очереди, пока какой-нибудь из игроков не заберет себе 25 кучек. В этот момент игра останавливается и оставшиеся на столе монеты забирает тот, кто взял меньше 25 кучек. Выигрывает тот игрок, у кого в итоге оказалось больше монет. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу, если да, то кто?

2. Рассмотрим граф, в котором 1024 вершины — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 10, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные рёбра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдется цикл длины не более чем 18, в котором красные и синие рёбра чередуются и который ни через какую вершину не проходит дважды.

3. В белой таблице размером  $100 \times 100$  какие-то 900 клеток окрашены в синий цвет так, что в каждой строке и в каждом столбце окрашено ровно девять клеток. Найдите наименьшее натуральное число  $k$ , при котором всегда можно перекрасить  $k$  синих клеток обратно в белый цвет так, чтобы в любом квадрате размером  $5 \times 5$  была бы белая клетка.

4. Женя хочет выписать по кругу 100 натуральных чисел так, чтобы произведения пар соседних чисел равнялись в каком-то порядке числам  $1!^2, 2!^2, \dots, 100!^2$ . Удастся ли Жене это сделать?

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы квадратов семи простых чисел.

6. Натуральное число называется *превосходным*, если оно является наименьшим общим кратным чисел 1, 2, ...,  $n$  для некоторого натурального числа  $n$ . Существуют ли сто различных превосходных чисел, сумма каких-то 99 из которых равна сотому?

7. Рассмотрим квадрат  $100 \times 100$  клеток. Рассмотрим прямоугольники, вершины которых лежат в центрах клеток квадрата, а стороны параллельны сторонам квадрата. Конфигурация из 2500 таких прямоугольников называется *счастливой*, если центр каждой из 10 000 клеток является вершиной одного из прямоугольников. Чётно или нечётно число счастливых конфигураций? (Две конфигурации считаются различными, если в одной из них есть прямоугольник, не совпадающий ни с одним прямоугольником второй).

8. Круглое ожерелье содержит 9900 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 100 блоков по 99 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–6 МЕСТА

1. У Джона есть 64 монеты: одна в 1 пенс (и должна весить 1 грамм), одна в 2 пенса (должна весить 2 грамма), одна в 3 пенса (должна весить 3 грамма), и т.д., одна в 64 пенса (должна весить 64 грамма). На всех монетах отчеканены их достоинства. Однако, одна из монет фальшивая и немного (менее, чем на 1 грамм) отличается от нужного веса. Можно ли за 7 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету? (Результат каждого взвешивания становится известен до того, как делается следующее взвешивание.)

2. Рассмотрим граф, в котором 1024 вершины — это всевозможные строки из нулей и единиц длины 10, а ребро проводится между двумя строками, если они отличаются ровно в одной позиции. В этом графе выбрали 512 рёбер, не имеющих общих концов, и покрасили в красный. Остальные рёбра покрасили в синий. Докажите, что в графе найдётся простой путь, состоящий из 21 ребра, в котором красные и синие рёбра чередуются (путь называется простым, если в нем никакая вершина не встречается дважды).

3. В белой таблице размером  $100 \times 100$  какие-то 900 клеток окрашены в синий цвет так, что в каждой строке и в каждом столбце окрашено ровно девять клеток. Найдите наименьшее натуральное число  $k$ , при котором всегда можно перекрасить  $k$  синих клеток обратно в белый цвет так, чтобы в любом квадрате размером  $5 \times 5$  была бы белая клетка.

4. Женя хочет выписать по кругу 100 натуральных чисел так, чтобы произведения пар соседних чисел равнялись в каком-то порядке числам  $1!^2, 2!^2, \dots, 100!^2$ . Удастся ли Жене это сделать?

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы квадратов семи простых чисел.

6. Натуральное число называется *превосходным*, если оно является наименьшим общим кратным чисел  $1, 2, \dots, n$  для некоторого натурального числа  $n$ . Существуют ли четыре различных превосходных числа, сумма каких-то трёх из которых равна четвёртому?

7. Оля записала натуральное число, состоящее из  $2k$  цифр. После того, как она поменяла местами части числа, состоящие из первых  $k$  и последних  $k$  цифр числа, число увеличилось ровно в 6 раз. Чему может быть равно  $k$ ?

8. Круглое ожерелье содержит 9900 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 100 блоков по 99 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024**

**ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 7-8 МЕСТА  
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–6 МЕСТА**

1. У Джона есть 64 монеты: одна в 1 пенс (и должна весить 1 грамм), одна в 2 пенса (должна весить 2 грамма), одна в 3 пенса (должна весить 3 грамма), и т.д., одна в 64 пенса (должна весить 64 грамма). На всех монетах отчеканены их достоинства. Однако, одна из монет фальшивая и немного (менее, чем на 1 грамм) отличается от нужного веса. Можно ли за 7 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету? (Результат каждого взвешивания становится известен до того, как делается следующее взвешивание.)

2. Докажите, что все 10-значные числа, состоящие только из цифр 1, 2 и 3, можно расположить в ряд так, чтобы любые два соседних в ряду числа различались ровно на 1 ровно в одном разряде.

3. В белой таблице размером  $100 \times 100$  какие-то 9900 клеток окрашены в синий цвет так, что в каждой строке и каждом столбце окрашено одно и то же количество клеток. Найдите наименьшее натуральное число  $k$ , при котором всегда можно перекрасить  $k$  синих клеток обратно в белый цвет так, чтобы в любом квадрате размером  $5 \times 5$  была бы белая клетка.

4. Женя хочет выписать по кругу 100 натуральных чисел так, чтобы произведения пар соседних чисел равнялись в каком-то порядке числам  $1!, 2!, \dots, 100!$ . Удастся ли Жене это сделать?

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы двух простых чисел.

6. В дворовом теннисном турнире «на вылет» (проигравший партию выбывает) участвовало 100 игроков. Какое наибольшее количество игроков могло сыграть ровно по четыре партии?

7. Оля записала натуральное число, состоящее из  $2k$  цифр. После того, как она поменяла местами части числа, состоящие из первых  $k$  и последних  $k$  цифр числа, число увеличилось ровно в 6 раз. Чему может быть равно  $k$ ?

8. Круглое ожерелье содержит 30 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 6 блоков по 5 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.05.2024**  
**ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 7–8 МЕСТА**  
**ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. Монета в 1 пенс должна весить 1 грамм, в 2 пенса — 2 грамма, в 3 пенса — 3 грамма, в 5 пенсов — 5 граммов. У Джона 4 монеты: одна в 1 пенс, одна в 2 пенса, одна в 3 пенса и одна в 5 пенсов. Одна из монет фальшивая, которая немного (менее, чем на 1 грамм) отличается от настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить фальшивую монету?

2. Докажите, что все 10-значные числа, состоящие только из цифр 1, 2 и 3, можно расположить в ряд так, чтобы любые два соседних в ряду числа различались ровно на 1 ровно в одном разряде.

3. Клетки доски  $3 \times 3$  раскрасили в несколько цветов. Оказалось, что для любых двух цветов есть две соседние по стороне клетки, окрашенные в эти цвета. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано?

4. Юра представил число 2024 в виде суммы наименьшего числа палиндромов. Как он это сделал?

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить в виде суммы двух простых чисел.

6. В дворовом теннисном турнире «на вылет» (проигравший партию выбывает) участвовало 100 игроков. Какое наибольшее количество игроков могло сыграть ровно по четыре партии?

7. Билеты нумеруются от 0000 до 9999. Билет называется *везучим*, если цифры его номера можно переставить и так расставить знаки «+», «−» и «×» (по одному знаку между каждыми рядом стоящими цифрами, знаки могут повторяться) и скобки, что после выполнения арифметических действий получится число, делящееся на 10. Сколько всего везучих билетов?

8. Круглое ожерелье содержит 30 бусин, каждая из которых либо красная, либо синяя. Могло ли так оказаться, что как бы ни было разрезано ожерелье на 6 блоков по 5 последовательных бусин, во всех блоках будет разное количество красных бусин?