

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024**  
**МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Дан неравнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle A = 105^\circ$ . Точка  $D$  симметрична точке  $A$  относительно серединного перпендикуляра к стороне  $BC$ . Оказалось, что  $AD + AC = BC$ . Чему может быть равен угол  $ABC$ ?

2. Паша задумал перестановку  $a_1, a_2, \dots, a_n$  натуральных чисел  $1, 2, \dots, n$  ( $n > 1$ ). Игорь может выбрать пару натуральных чисел  $1 \leq i < j \leq n$ , сообщить ее Паше, а он в ответ назовет Игорю одно из чисел  $ia_j$  или  $ja_i$ . Игорь не знает, какое из этих 2 чисел ему называют. При каких натуральных  $n$  Игорь гарантированно сможет отгадать всю перестановку, задав несколько таких вопросов?

3. Найдите все такие натуральные числа  $a < b$ , что  $\text{НОК}(a, b-a) + \text{НОД}(a, b) = b + 1234$ .

4. Дано натуральное число  $n > 1$ . Сколькими способами можно раскрасить клетки квадрата  $n \times n$  в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета? Каждую клетку красим, каждую в один цвет.

5. Федя и Саша по очереди проводят на плоскости прямые, пока не будет проведено 2024 прямые. Начинает Федя. Саша хочет, чтобы в результате количество областей, на которые проведенные прямые делят плоскость, делилось на 3. Сможет ли Федя ему помешать?

6. Назовем натуральное число  $n$ , не делящееся на 10, *суперквадратом*, если оно является квадратом, и все его цифры в десятичной записи равны 0, 4 или 9. Докажите, что существует бесконечно много суперквадратов.

7. По кругу стоят 100 табуреток. На каждую из них можно посадить котика, которые бывают трёх видов: толстые, худые и обычные. Каждый толстый должен сидеть между двумя котиками одного вида, а каждый из остальных должен сидеть между котиками разных видов. Четно или нечетно количество способов так рассадить котиков?

8. Ненулевые числа  $a, b, c, d$  таковы, что  $abcd = 1$ , и

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + d + \frac{1}{d} = 0.$$

Докажите, что одно из чисел  $ab, ac$  и  $ad$  равно  $-1$ .

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024**  
**МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Вершины  $B$  и  $C$  равностороннего треугольника  $ABC$  лежат на сторонах  $DE$  и  $EF$  квадрата  $ADEF$  соответственно. Точка  $G$  на стороне  $AD$  отмечена так, что  $BD = DG$ . Докажите, что  $AB + BG = AE$ .

2. Паша задумал перестановку  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  натуральных чисел  $1, 2, \dots, 10$ . Игорь может выбрать пару натуральных чисел  $1 \leq i < j \leq 10$ , сообщить ее Паше, а он в ответ назовет Игорю одно из чисел  $ia_j$  или  $ja_i$ . Игорь не знает, какое из этих 2 чисел ему называют. Верно ли, что Игорь сможет отгадать всю перестановку, задав несколько таких вопросов?

3. Найдите все такие натуральные числа  $a < b$ , что  $\text{НОК}(a, b-a) + \text{НОД}(a, b) = b + 1234$ .

4. Дано натуральное число  $n > 1$ . Сколькими способами можно раскрасить клетки квадрата  $n \times n$  в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета? Каждую клетку красим, каждую в один цвет.

5. На плоскости проведено 2024 прямые. Докажите, что можно провести еще три прямые так, чтобы количество областей, на которые все 2027 прямых делят плоскость, было кратно трём.

6. Назовем натуральное число  $n$ , не делящееся на 10, *суперквадратом*, если оно является квадратом, и все его цифры в десятичной записи равны 0, 4 или 9. Докажите, что существует бесконечно много суперквадратов.

7. В чемпионате по настольному теннису любые два участника сыграли друг с другом ровно по одному разу. В каждом матче победитель получал 1 очко, а проигравший — 0 очков (ничьих в настольном теннисе не бывает). По окончании чемпионата нашелся удивительный участник, который выиграл у всех, кто набрал больше очков, проиграл всем, кто набрал меньше, и никто не набрал столько же. Найдите наименьшее возможное число участников чемпионата. Возможно, что несколько участников набрали одинаковое количество очков в конце чемпионата. В чемпионате участвовало не менее двух участников.

8. Ненулевые числа  $a, b, c$ , таковы, что  $abc = 1$ , и

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} = -2.$$

Докажите, что одно из чисел  $a, b$  и  $c$  равно  $-1$ .

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024**  
**МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. Дан неравнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle A = 110^\circ$  и  $AC < AB$ . Точка  $D$  симметрична  $A$  относительно серединного перпендикуляра к стороне  $BC$ . Оказалось, что  $AD + AC = BC$ . Чему может быть равен угол  $ABC$ ?

2. По кругу стоят 100 табуреток. На каждую из них можно посадить котика, которые бывают трёх видов: толстые, худые и обычные. Каждый толстый должен сидеть между двумя котами одного вида, а каждый из остальных должен сидеть между котиками разных видов. Четно или нечетно количество способов так рассадить котиков?

3. Существуют ли такие натуральные числа  $a$  и  $b$ , что

$$\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) = 2024 + ab?$$

4. Дано натуральное число  $n > 1$ . Сколькими способами можно раскрасить клетки квадрата  $n \times n$  в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета? Каждую клетку красим, каждую в один цвет.

5. На плоскости проведены  $N \geq 2$  прямых, среди которых нет параллельных. Докажите, что можно провести ещё 2 новые прямые так, чтобы количество областей, на которые будет поделена плоскость всеми прямыми, делилось на 3.

6. Назовем натуральное число  $n$ , не делящееся на 10, *суперквадратом*, если оно является квадратом, и все его цифры в десятичной записи равны 0, 4 или 9. Докажите, что существует бесконечно много суперквадратов.

7. В чемпионате по настольному теннису любые два участника сыграли друг с другом ровно по одному разу. В каждом матче победитель получал 1 очко, а проигравший — 0 очков (ничьих в настольном теннисе не бывает). По окончании чемпионата нашелся удивительный участник, который выиграл у всех, кто набрал больше очков, проиграл всем, кто набрал меньше, и никто не набрал столько же. Найдите наименьшее возможное число участников чемпионата. (Возможно, что несколько участников набрали одинаковое количество очков в конце чемпионата. В чемпионате участвовало не менее двух участников.)

8. Ненулевые числа  $a, b, c$ , таковы, что  $abc = 1$ , и

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} = -2.$$

Докажите, что одно из чисел  $a, b$  или  $c$  равно  $-1$ .

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.05.2024

### МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан неравнобедренный треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle A = 110^\circ$  и  $AC < AB$ . Точка  $D$  симметрична  $A$  относительно серединного перпендикуляра к стороне  $BC$ . Оказалось, что  $AD + AC = BC$ . Чему может быть равен угол  $ABC$ ?

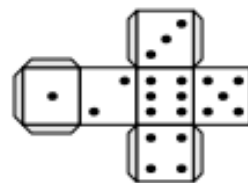
2. По кругу стоят 100 табуреток. На каждую из них можно посадить котика, которые бывают трёх видов: толстые, худые и обычные. Каждый толстый должен сидеть между двумя котами одного вида, а каждый из остальных должен сидеть между котиками разных видов. Четно или нечетно количество способов так рассадить котиков?

3. Существуют ли такие натуральные  $a$  и  $b$ , что

$$\text{НОК}(a, b) + \text{НОД}(a, b) - a - b = 2025?$$

4. Можно ли раскрасить клетки квадрата  $2024 \times 2024$  в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы никакие две клетки одинакового цвета не имели общей стороны, и каждая клетка имела среди соседних по стороне клетки обоих отличных от неё цветов?

5. Стандартный игровой кубик собирается из развёртки, показанной на рисунке. Из  $N$  стандартных кубиков сделали башенку, поставив их друг на друга. При каких  $N$  могло оказаться так, что на каждой из четырёх боковых граней башенки общее количество точек нечётно?



6. Джинн загадал 10 ненулевых чисел. Алладин может сколько угодно раз спросить у него разность любых двух чисел или отношение любых двух чисел, при этом Джинн сам выбирает какое число из двух будет уменьшаемым или делимым соответственно. Всегда ли Алладину удастся разгадать числа?

7. В чемпионате по настольному теннису любые два участника сыграли друг с другом ровно по одному разу. В каждом матче победитель получал 1 очко, а проигравший — 0 очков (ничьих в настольном теннисе не бывает). По окончании чемпионата нашёлся удивительный участник, который выиграл ровно у тех, кто набрал в чемпионате больше очков, чем он, и проиграл ровно тем, кто набрал в чемпионате меньше, чем он. Найдите наименьшее возможное число участников, участвующих в чемпионате. (Возможно, что несколько участников набрали одинаковое количество очков в конце чемпионата. В чемпионате участвовало не менее двух участников.)

8. Ненулевые числа  $a, b, c$ , таковы, что  $abc = 1$ , и

$$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} = -2.$$

Докажите, что одно из чисел  $a, b$  и  $c$  равно  $-1$ .