

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны положительные числа a, b, c и d . Оказалось, что

$$\frac{ab + cd}{d(a - b) + 1} = \frac{bc + da}{b(a + d) - 1} = x, \quad \frac{cd + ab}{b(c - d) - 1} = \frac{da + bc}{d(c + b) + 1} = y.$$

Докажите, что $xy \geq 4$.

2. Забор состоит из 25 вертикальных прямоугольных досок, расположенных в ряд без зазоров. Высоты досок — попарно различные натуральные числа от 1 до 25. Ширина одной доски равна 1. Найдите максимальное значение S такое, что при любом порядке досок в заборе из него можно вырезать прямоугольник площади S , стороны которого параллельны сторонам досок.

3. Можно ли нарисовать на плоскости замкнутую 20-звенную ломаную и пронумеровать ее звенья числами $1, 2, 3, \dots, 20$ в порядке обхода так, чтобы для каждого натурального $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ звенья с номерами i и $10 + i$ пересекались друг друга и не пересекались остальные звенья?

4. Найдите все натуральные числа $x, y > 1$ и простые числа p такие, что

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = (p + 1)^2.$$

5. На окружности отмечены $n > 10^{100}$ точек. Двое по очереди проводят отрезки с концами в отмеченных точках, первый своим ходом проводит один красный отрезок, второй — 100 синих. Один и тот же отрезок запрещено проводить дважды. Первый игрок хочет, чтобы после нескольких ходов граф, образованный n отмеченными точками и красными отрезками, был связным. Сможет ли второй ему помешать?

6. Саша перемножил несколько различных нечетных чисел. Игорь перемножил столько же различных нечетных чисел, сколько и Саша, и получил другой результат. Если бы мальчики складывали числа, а не умножали, они получили бы одинаковые суммы. Найдите наименьшее возможное значение модуля разности произведений, полученных Сашей и Игорем. Числа Саши могут совпадать с числами Игоря.

7. По кругу через равные промежутки расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа, либо на диаметрально противоположный стул. Оказалось, что все стулья снова заняты. Найдите число способов, как такое могло произойти.

8. На доске нарисован выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точки K, L, M и N — середины его сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Саша отметил точку P так, что углы DKP и AMP — прямые. Затем он измерил углы DPK и APM , и они оказались равны. Сережа отметил точку Q так, что углы ALQ и BNQ — прямые, при этом оказалось, что $ABPCQD$ — выпуклый шестиугольник. Затем он измерил углы LAQ и NBQ . Докажите, что он получил одинаковые результаты, причем те же, что и Саша в своем измерении.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Даны положительные числа a, b, c и d . Оказалось, что

$$\frac{ab + cd}{d(a - b) + 1} = \frac{bc + da}{b(a + d) - 1} = x, \quad \frac{cd + ab}{b(c - d) - 1} = \frac{da + bc}{d(c + b) + 1} = y.$$

Докажите, что $xy \geq 4$.

2. Забор состоит из 25 вертикальных прямоугольных досок, расположенных в ряд без зазоров. Высоты досок — попарно различные натуральные числа от 1 до 25. Ширина одной доски равна 1. Найдите максимальное значение S такое, что при любом порядке досок в заборе из него можно вырезать прямоугольник площади S , стороны которого параллельны сторонам досок.

3. Можно ли нарисовать на плоскости замкнутую 20-звенную ломаную и пронумеровать ее звенья числами $1, 2, 3, \dots, 20$ в порядке обхода так, чтобы для каждого натурального $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ звенья с номерами i и $10 + i$ пересекались друг друга и не пересекались остальные звенья?

4. Найдите все натуральные числа $x, y > 1$ такие, что

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = 36.$$

5. На окружности отмечены $n > 10^{100}$ точек. Двое по очереди проводят отрезки с концами в отмеченных точках, первый своим ходом проводит один красный отрезок, второй — 100 синих. Один и тот же отрезок запрещено проводить дважды. Первый игрок хочет, чтобы после нескольких ходов граф, образованный n отмеченными точками и красными отрезками, был связным. Сможет ли второй ему помешать?

6. Саша перемножил несколько различных нечетных чисел. Игорь перемножил столько же различных нечетных чисел, сколько и Саша, и получил другой результат. Если бы мальчики складывали числа, а не умножали, они получили бы одинаковые суммы. Найдите наименьшее возможное значение модуля разности произведений, полученных Сашей и Игорем. Числа Саши могут совпадать с числами Игоря.

7. По кругу через равные промежутки расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа, либо на диаметрально противоположный стул. Оказалось, что все стулья снова заняты. Найдите число способов, как такое могло произойти.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ с равными диагоналями. Точки K и M — середины сторон AB и CD соответственно. Внутри четырехугольника отмечена точка P так, что углы DKP и AMP — прямые. Докажите, что $\angle DPK = \angle APM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. При условиях $a > -1$, $b > -1$ и $a + b = 1$, докажите неравенство

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq \frac{2}{3}.$$

2. Забор состоит из 25 вертикальных прямоугольных досок, расположенных в ряд без зазоров. Высоты досок — попарно различные натуральные числа от 1 до 25. Ширина одной доски равна 1. Найдите максимальное значение S такое, что при любом порядке досок в заборе из него можно вырезать прямоугольник площади S , стороны которого параллельны сторонам досок.

3. Можно ли нарисовать на плоскости замкнутую 20-звенную ломаную и пронумеровать ее звенья числами $1, 2, 3, \dots, 20$ в порядке обхода так, чтобы для каждого натурального $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ звенья с номерами i и $10 + i$ пересекались друг друга и не пересекались остальные звенья?

4. Найдите все натуральные числа $x, y > 1$ такие, что

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = 36.$$

5. На окружности отмечены 10 точек. Два игрока по очереди проводят отрезки с концами в отмеченных точках. Первый своим ходом проводит один красный отрезок, второй — два синих. Запрещено повторно проводить отрезок между двумя точками. Первый игрок хочет, чтобы после нескольких ходов граф, образованный 10 отмеченными точками и красными отрезками, был связным. Сможет ли второй ему помешать?

6. Саша перемножил несколько различных нечетных чисел. Игорь перемножил столько же различных нечетных чисел, сколько и Саша, и получил другой результат. Если бы мальчики складывали числа, а не умножали, они получили бы одинаковые суммы. Найдите наименьшее возможное значение модуля разности произведений, полученных Сашей и Игорем. Числа Саши могут совпадать с числами Игоря.

7. По кругу через равные промежутки расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа, либо на диаметрально противоположный стул. Оказалось, что все стулья снова заняты. Найдите число способов, как такое могло произойти.

8. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внутри него выбрана точка D так, что $\angle ABD = 10^\circ$, $\angle CBD = 110^\circ$. На стороне AC выбрана точка E так, что $BE = BD = AD$. Чему может быть равен $\angle BED$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. При условиях $a > -1$, $b > -1$ и $a + b = 1$, докажите неравенство

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq \frac{2}{3}.$$

2. Забор состоит из 25 вертикальных досок, расположенных в ряд без зазоров. Высоты досок — попарно различные натуральные числа от 1 до 25. Ширина одной доски равна 1. Докажите, что из этого забора можно вырезать прямоугольник площади больше 25, стороны которого параллельны сторонам досок.

3. Из угла прямоугольника размером 62×2024 под углом 45° к сторонам движется точка. Когда точка достигает какой-либо стороны прямоугольника, её траектория меняется по правилу «угол падения равен углу отражения». Сколько произойдёт отражений, прежде чем точка впервые попадёт в какой-то из углов прямоугольника, отличный от старта?

4. Найдите все натуральные числа $x, y > 1$ такие, что

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1} = 36.$$

5. У аптекаря есть 5 гирь, веса которых (в граммах) — последовательные натуральные числа, но какие именно — аптекарь не знает. У него есть чашечные весы, но чтобы они сработали, на каждую чашу надо поставить не менее двух гирь. Может ли аптекарь с помощью весов найти две гири, суммарный вес которых равен чётному числу граммов?

6. Саша перемножил несколько нечетных чисел, не обязательно различных. Игорь перемножил столько же нечетных чисел, сколько и Саша, и получил другой результат. Если бы мальчики складывали числа, а не умножали, они получили бы одинаковые суммы. Найдите наименьшее возможное значение модуля разности произведений, полученных Сашей и Игорем. Числа Саши могут совпадать с числами Игоря.

7. По кругу через равные промежутки расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа, либо на диаметрально противоположный стул. Оказалось, что все стулья снова заняты. Найдите число способов, как такое могло произойти.

8. В треугольнике ABC $AB = BC$. Внутри него выбрана точка D так, что: $\angle ABD = 10^\circ$, $\angle CBD = 110^\circ$. На стороне AC выбраны разные точки E и F так, что $BE = BF = BD = AD$. Найдите углы треугольника BEF .