

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА. МЛАДШАЯ ГРУППА.

1. Петя принёс в кружок на свой день рождения коробку конфет. Если он попытается раздать всем поровну конфет, то одной конфеты не хватит. Если же Петя попытается раздать всем мальчикам поровну конфет, а каждой девочке — на одну конфету больше, чем мальчику, то у него останется одна конфета. Докажите, что если бы у Пети было бы две таких же коробки конфет, то он смог бы раздать всем мальчикам поровну конфет, а каждой девочке — на одну конфету больше, чем мальчику.

Решение. Обозначим число конфет, которое принес Петя, через K . Пусть Петя в первый раз хотел выдать каждому по a конфет, а во второй раз каждому мальчику — по b конфет, а девочке — по $b + 1$ конфете. Тогда если он выдаст каждому мальчику по $a + b$ конфет, а каждой девочке — по $a + b + 1$ конфете, то в сумме будет роздано $2K$ конфет.

2. По дороге в одном направлении с постоянными скоростями едут трактор, грузовик и автобус. Четыре человека, стоящих у дороги, назвали порядок, в котором мимо них проезжали эти транспортные средства. Паша сказал: «Грузовик, автобус, трактор», Вася: «Трактор, грузовик, автобус», Тимур: «Автобус, грузовик, трактор». Что сказал Гриша, если названный им порядок отличается от этих трёх?

Ответ: Грузовик, трактор, автобус. **Решение.** В каждой паре транспортных средств может произойти не более одного обгона. Поэтому, если бы все три участника движения встретились в одной точке, то нельзя было бы увидеть более двух различных порядков следования. Следовательно, все обгоны совершались по двое. Но обгонов всего 3, поэтому порядков следования было ровно 4, и названы были все порядки. Трактор был первым и последним, значит, бывал и средним, и Гриша описывал именно этот момент времени. При этом трактор был первым только один раз, поэтому моменты, описанные Васей и Гришей были последовательны. А между ними в обгоне участвовал трактор, поэтому относительный порядок грузовика и автобуса не менялся. Поскольку Вася увидел грузовик раньше автобуса, то и Гриша тоже.

3. Назовем натуральное число треугольным, если оно равно сумме первых нескольких натуральных чисел, в частности, число 1 — треугольное. Существуют ли 2024 различных треугольных числа, произведение которых является точным квадратом?

Ответ: Существуют. **Решение.** Заметим, что произведение первых 2024 треугольных чисел равно

$$\frac{1 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2025 \cdot \left(\frac{2024!}{2^{1012}} \right)^2 = 45^2 \cdot \left(\frac{2024!}{2^{1012}} \right)^2,$$

то есть в числителе каждого из чисел $2, 3, 4, \dots, 2024$ будет встречаться ровно по 2 раза, отсюда получаем $(2024!)^2$, а $2025 = 45^2$. В знаменателе будет $2^{2024} = (2^{1012})^2$. Поскольку $2024!$ делится на 2^{1012} , получаем, что наше выражение является квадратом натурального числа.

4. Треугольник ABC , в котором $\angle A = 2\angle C$, и квадрат $AXYZ$ расположены на плоскости так, что точка Z лежит на стороне AC , а точка B — на диагонали XZ . Отрезки BC и YZ пересекаются в точке T . Докажите, что $AB = YT$.

Решение. Пусть в треугольнике ABC : $\angle A = 2x$, $\angle C = x$. Квадрат симметричен относительно своей диагонали, поэтому $AB = BY$ и $\angle BYZ = \angle BAZ = 2x$. Тогда $\angle BTY = \angle CTZ = 180^\circ - \angle TZC - \angle TCZ = 90^\circ - x$ из $\triangle CTZ$ и $\angle YBT = 180^\circ - \angle BYT - \angle BTY = 180^\circ - 2x - (90^\circ - x) = 90^\circ - x$ из $\triangle BYT$. Таким образом, $\angle YBT = 90^\circ - x = \angle BTY$, поэтому $YT = BY = AB$, что и требовалось.

5. Даны целые числа x_1, x_2, \dots, x_{400} . Рассмотрим суммы

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \dots, S_{400} = x_1 + x_2 + \dots + x_{400}.$$

Оказалось, что такие суммы принимают ровно 5 различных значений. При каком наибольшем k можно утверждать, что среди исходных чисел найдутся k равных?

Ответ: при $k = 19$. **Решение.** *Оценка.* Заметим, что при каждом натуральном $i = 1, 2, \dots, 399$ число $x_{i+1} = S_{i+1} - S_i$ равно разности каких-то двух из k значений. Всего такие разности принимают не более $2 \cdot C_k^2 + 1 = 21$ различных значений. Тогда какое-то значение принимается хотя бы $\frac{400-1}{21} = 19$ раз.

Пример. Пусть 5 значений это $1, 2^2, 2^4, 2^6, 2^8$. Заметим, что попарные разности этих чисел различны. Построим ориентированный граф, вершинами которого являются эти числа, соединим каждые две вершины ребрами в обе стороны, а также соединим ребром единицу саму с собой. Заметим, что в полученном графе есть цикл, проходящий по всем ребрам ровно 1 раз, причем длина этого цикла равно количеству ребер, то есть 21. Выберем ребро из 1 в 2^2 . Положим $x_1 = 1$, начнем обходить наш цикл, нумеруя ребра в порядке обхода натуральными числами. Обойдем весь цикл 19 раз. Тогда возьмем x_{i+1} равным разности между числом на конце и начале ребра с номером $i \bmod 21$. Заметим, что каждая из 21 возможной разности принимается ровно 19 раз, и еще одно из 400 чисел равно 1. Тогда требуемый пример построен.

6. При каких натуральных n на доску $n \times n$ можно выставить несколько ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

Ответ: При всех четных n . **Решение.** *Пример.* Для четных n достаточно расставить ладей на двух главных диагоналях. Легко проверить, что каждая клетка будет биться ровно 3 раза.

Оценка. Нарисуем прямо на доске граф, вершинами которого будут ладьи. Будем соединять ладей прямолинейным ребром, если они бьют друг друга. Заметим, что в полученном графе степень каждой вершины равна 2, поэтому он бьется на циклы. Каждую пустую клетку бьет три ладьи, поэтому две из них бьют ее одновременно по горизонтали или по вертикали. Тогда ребро между соответствующими вершинами пересекает выбранную клетку. С другой стороны, если два ребра пересеклись по пустой клетке, то она будет биться 4 ладьями, что невозможно. Мы доказали, что каждую пустую клетку пересекает ровно одно ребро графа. Итого, все клетки доски разбились на «циклы». Длина каждого такого «цикла» четная (например, потому что при раскраске клеток доски в шахматном порядке в каждом «цикле» цвета клеток чередуются). Значит, и всего клеток на доске четное число, откуда n — четное.

7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D , на стороне BC — точка E , а на отрезке BE — точка F , причем $\angle ADB = \angle BED = 60^\circ$, $AC = BD$ и $CD = BF$. Докажите, что $AD + CE > AF$.

Решение. Отметим на отрезке BD точку X так, что $BX = CD = BF$ и $AD = DX$. Поскольку еще и $\angle ADX = 60^\circ$, то треугольник ADX — равносторонний, откуда $AX = AD$. Обозначим $\alpha = \angle DBC$. Поскольку $\angle ADB = 60^\circ$ — внешний для $\triangle BDC$, то $\angle DCE = 60^\circ - \alpha$. Также $\angle BED = 60^\circ$ — внешний для $\triangle CDE$, поэтому $\angle CDE = \alpha$. Поскольку $\angle CED = 120^\circ$, то CD — наибольшая сторона треугольника CDE . Тогда на продолжении отрезка DE за точку E найдется такая точка Y , что $DY = DC$. В силу сказанного выше, равнобедренные треугольники XBF и CDY равны по двум сторонам и углу между ними. Поскольку $\alpha < 60^\circ$ — угол при вершине в таких треугольниках, то углы при основаниях в них больше, чем 60° . Итого, $CY = XF$ и $\angle CYE > 60^\circ = \angle CEY$. Значит, $CE > CY$. Следовательно, $AF \leq AX + XF = AD + CY < AD + CE$, что и требовалось.

8. Напомним, что палиндромом называется натуральное число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Например, 12321 — палиндром, а 1210 — нет. Существует ли натуральное число $N > 1$ такое, что все его натуральные степени являются палиндромами?

Ответ: Не существует. **Решение.** Заметим, что любое натуральное число, не делящееся на 10, можно возвести в некоторую натуральную степень так, чтобы оно оканчивалось на 1, на 5 или на 6. Тогда, предположив, что такой палиндром существует, можно считать, что он оканчивается на 1, 5 или 6. Если он оканчивается на 5, то и начинается на 5. Тогда его квадрат начинается на 2 или 3, а заканчивается на 5 — противоречие. Если палиндром заканчивается на 6, то его квадрат может начинаться с 3 или 4, а заканчиваться на 6 — снова получаем противоречие.

Осталось разобрать случай, когда палиндром заканчивается и начинается с цифры 1. Тогда и любая его степень заканчивается и начинается с цифры 1. Пусть изначально в числе была $k + 1$ цифра, тогда в его квадрате может быть только $2k + 1$ цифра, причем первая и последняя цифры равны 1, тогда в кубе может быть только $3k + 1$ цифра, и снова первая и последняя цифры равны 1, и так далее. Если обозначить исходное число через $10^k + s$, то мы получаем, что для любого натурального n выполнены неравенства $10^{kn} < (10^k + s)^n < 10^{kn+1}$. Из второго неравенства следует, что $\left(1 + \frac{s}{10^k}\right)^n < 10$ для любого натурального n , что неверно при достаточно больших n .