

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Найдите все натуральные n , для которых $\frac{20^n - 18^n}{19}$ — квадрат целого числа.
2. Есть $2n$ вершин, некоторые пары вершин соединены проводами. Провода бывают n цветов. Для каждого цвета известно, что из каждой вершины выходит не менее n проводов этого цвета, а любая пара вершин соединена не более чем одним проводом этого цвета (но может быть соединена несколькими проводами разных цветов). Докажите, что электрик может выбрать $n - 1$ проводов разных цветов так, чтобы никакие два выбранных провода не имели общей вершины.
3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD — в точке Q . Биссектрисы углов BPC и CQD пересекаются в точке K , а внешние биссектрисы этих углов — в точке L . Известно, что $PK \perp QK$. Докажите, что прямая KL проходит через середину AC .
4. Положительные числа a, b, x и y таковы, что $x < a, y < b, x^2 = a^2 + b^2 - 2by$ и $y^2 = a^2 + b^2 - 2ax$. Докажите, что $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} = 2$.
5. Вершины A, B, C равностороннего треугольника ABC лежат соответственно на отрезках KL, LM, MK — сторонах треугольника KLM . Известно, что $KA = LB = MC$. Следует ли отсюда, что треугольник KLM равносторонний?
6. Для вещественных чисел $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ и $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ докажите неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k(k+1)} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k(k+1)} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{k(k+1)}.$$

7. Эш и Гари собираются устроить битву покемонов. Каждый из них готовит последовательность из 15 покемонов одного из трёх типов: огненный, травяной или водный. Травяной покемон всегда проигрывает огненному, водный — травяному, огненный — водному. В битве двух покемонов одинакового типа проигрывают оба. В первом раунде сражаются первые покемоны в последовательностях. В конце раунда проигравший покемон заменяется на следующего покемона в последовательности игрока. Матч заканчивается, когда у кого-то из игроков все покемоны проиграли; побеждает игрок, у которого остался непобежденный покемон (победителя может и не быть). Гари выбирает последовательность типов покемонов наугад (равновероятно). Эш, зная это, хочет подобрать свою последовательность так, чтобы вероятность p его победы была наибольшей возможной. Найдите p .

8. Парковка представляет собой клетчатый квадрат $2n \times 2n$ (т. е. $4n^2$ парковочных мест). На каждом парковочном месте стоит машина, обращённая к одной из четырёх сторон парковки. Робот-парковщик за один ход может выбрать одну машину и сдвинуть ее вперед на одно место, если оно свободно. Если при этом машина оказывается за пределами парковки, то она уезжает. Машины стоят так, что существует последовательность ходов робота, для которой все они смогут уехать. Какое максимальное количество ходов для этого может потребоваться?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Найдите все натуральные n , для которых $\frac{20^n - 18^n}{19}$ — квадрат целого числа.
2. Есть 100 человек, среди которых 980 пар друзей. Можно ли утверждать, что среди них наверняка найдутся 22 человека, которых можно разделить на 11 пар друзей?
3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD — в точке Q . Биссектрисы углов BPC и CQD пересекаются в точке K , а внешние биссектрисы этих углов — в точке L . Известно, что $PK \perp QK$. Докажите, что прямая KL проходит через середину AC .
4. Положительные числа a, b, x и y таковы, что $x < a$, $y < b$, $x^2 = a^2 + b^2 - 2by$ и $y^2 = a^2 + b^2 - 2ax$. Докажите, что $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} = 2$.
5. Вершины A, B, C равностороннего треугольника ABC лежат соответственно на отрезках KL, LM, MK — сторонах треугольника KLM . Известно, что $KA = LB = MC$. Следует ли отсюда, что треугольник KLM равносторонний?
6. Даны ненулевые вещественные числа a_1, a_2, \dots, a_k . Докажите, что существует лишь конечное множество наборов попарно различных натуральных чисел n_1, n_2, \dots, n_k , удовлетворяющих условию

$$a_1 \cdot n_1! + a_2 \cdot n_2! + \dots + a_k \cdot n_k! = 0.$$

7. Эш и Гари собираются устроить битву покемонов. Каждый из них готовит последовательность из 15 покемонов одного из трёх типов: огненный, травяной или водный. Травяной покемон всегда проигрывает огненному, водный — травяному, огненный — водному. В битве двух покемонов одинакового типа проигрывают оба. В первом раунде сражаются первые покемоны в последовательностях. В конце раунда проигравший покемон заменяется на следующего покемона в последовательности игрока. Матч заканчивается, когда у кого-то из игроков все покемоны проиграли; побеждает игрок, у которого остался непобежденный покемон (победителя может и не быть). Гари выбирает последовательность типов покемонов наугад (равновероятно). Эш, зная это, хочет подобрать свою последовательность так, чтобы вероятность p его победы была наибольшей возможной. Найдите p .

8. Артур и Рената играют в игру на доске 99×99 . У Артура есть две красные плитки, первоначально размещенные на клетках в левом нижнем и правом верхнем углах. У Ренаты есть две черные плитки, изначально размещенные на клетках в правом нижнем и левом верхнем углах. За ход игрок может выбрать одну из двух своих плиток и переместить ее на соседнюю свободную клетку по горизонтали или вертикали. Игроки ходят по очереди, начинает Артур. Артур выигрывает, если после некоторого количества ходов обе его плитки окажутся в соседних по горизонтали или вертикали клетках. Сможет ли Рената помешать ему выиграть?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные n , для которых $\frac{20^n - 18^n}{19}$ — квадрат целого числа.
2. В графе 100 вершин и 198 ребер. Докажите, что есть три ребра, попарно не имеющие общих вершин.
3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , а лучи BC и AD — в точке Q . Биссектрисы углов BPC и CQD пересекаются в точке K , а внешние биссектрисы этих углов — в точке L . Известно, что $PK \perp QK$. Докажите, что прямая KL проходит через середину AC .
4. Найдите все тройки вещественных чисел (x, y, z) такие, что

$$x^4 + y^3z = zx, \quad y^4 + z^3x = xy \quad \text{и} \quad z^4 + x^3y = yz.$$

5. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась точка P такая, что треугольники ABP , BCP , CDP , DAP равнобедренные. Можно ли сделать вывод, что найдутся две вершины четырехугольника, от которых P равноудалена?
6. Даны ненулевые вещественные числа a_1, a_2, \dots, a_k . Докажите, что существует лишь конечное множество наборов попарно различных натуральных чисел n_1, n_2, \dots, n_k , удовлетворяющих условию

$$a_1 \cdot n_1! + a_2 \cdot n_2! + \dots + a_k \cdot n_k! = 0.$$

7. Эш и Гари собираются устроить битву покемонов. Каждый из них готовит последовательность из 15 покемонов одного из трёх типов: огненный, травяной или водный. Травяной покемон всегда проигрывает огненному, водный — травяному, огненный — водному. В битве двух покемонов одинакового типа проигрывают оба. В первом раунде сражаются первые покемоны в последовательностях. В конце раунда проигравший покемон заменяется на следующего покемона в последовательности игрока. Матч заканчивается, когда у кого-то из игроков все покемоны проиграли; побеждает игрок, у которого остался непобежденный покемон (победителя может и не быть). Гари выбирает последовательность типов покемонов наугад (равновероятно). Эш, зная это, хочет подобрать свою последовательность так, чтобы вероятность p его победы была наибольшей возможной. Найдите p .

8. Артур и Рената играют в игру на доске 99×99 . У Артура есть две красные плитки, первоначально размещенные на клетках в левом нижнем и правом верхнем углах. У Ренаты есть две черные плитки, изначально размещенные на клетках в правом нижнем и левом верхнем углах. За ход игрок может выбрать одну из двух своих плиток и переместить ее на соседнюю свободную клетку по горизонтали или вертикали. Игроки ходят по очереди, начинает Артур. Артур выигрывает, если после некоторого количества ходов обе его плитки окажутся в соседних по горизонтали или вертикали клетках. Сможет ли Рената помешать ему выиграть?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.05.2024

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные n , для которых $\frac{20^n - 18^n}{19}$ — квадрат целого числа.
2. В графе 100 вершин и 198 ребер. Докажите, что есть три ребра, попарно не имеющие общих вершин.
3. На боковых сторонах AD и BC трапеции $ABCD$ построены вовне трапеции квадраты $ADEF$ и $BCGH$. Докажите, что середина FH равноудалена от A и B .
4. Найдите все тройки вещественных чисел (x, y, z) такие, что

$$x^4 + y^3z = zx, \quad y^4 + z^3x = xy \quad \text{и} \quad z^4 + x^3y = yz.$$

5. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась точка P такая, что треугольники ABP , BSP , CDP , DAP равнобедренные. Можно ли сделать вывод, что найдутся две вершины четырехугольника, от которых P равноудалена?
6. При каком наибольшем натуральном n уравнение

$$211 \cdot a! + 314 \cdot b! + 457 \cdot c! = n!$$

имеет решение в натуральных числах a, b, c ?

7. По кругу равномерно расставлены 2024 стула, на каждом из которых сидит дрессированный котик. По команде они одновременно перепрыгивают: каждый прыгает либо на соседний справа стул, либо на диаметрально противоположный стул. Сколько имеется способов так перепрыгнуть, чтобы все стулья снова оказались заняты?
8. Артур и Рената играют в игру на доске 99×99 . У Артура есть две красные плитки, первоначально размещенные на клетках в левом нижнем и правом верхнем углах. У Ренаты есть две черные плитки, изначально размещенные на клетках в правом нижнем и левом верхнем углах. За ход игрок может выбрать одну из двух своих плиток и переместить ее на соседнюю свободную клетку по горизонтали или вертикали. Игроки ходят по очереди, начинает Артур. Артур выигрывает, если после некоторого количества ходов обе его плитки окажутся в соседних по горизонтали или вертикали клетках. Сможет ли Рената помешать ему выиграть?