

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. Петя принёс в кружок на свой день рождения коробку конфет. Если он попытается раздать всем поровну конфет, то одной конфеты не хватит. Если же Петя попытается раздать всем мальчикам поровну конфет, а всем девочкам тоже поровну и на одну конфету больше, чем мальчикам, то у него останется одна конфета. Докажите, что если бы у Пети было вдвое больше конфет, то он смог бы раздать всем мальчикам поровну конфет, а всем девочкам тоже поровну и на одну конфету больше, чем мальчикам.

2. У Кирилла есть белая клетчатая доска 2024×2024 . За один ход Кирилл выбирает линию (строку или столбец), в которой в данный момент все клетки белые, и перекрашивает какие-то 1000 клеток этой линии в черные. Какое наибольшее количество клеток Кирилл может в результате сделать черными?

3. На окружности выбрано 11 точек. Некоторые пары точек соединены отрезками, причём среди любых 6 точек найдутся какие-то две, не соединённые отрезком. Верно ли, что эти точки всегда можно окрасить в 5 цветов так, чтобы не нашлось отрезка, соединяющего точки одинакового цвета?

4. Натуральное число n разделили с остатком на все числа от 1 до 100, дающие остаток 2 при делении на 3 (т.е. на 2, 5, 8, ..., 98). Может ли сумма полученных неполных частных отличаться от суммы полученных остатков ровно на 1000? (Напомним, что как остаток, так и неполное частное могут быть нулевыми!)

5. Аня взяла девятизначное число n , и приписала справа от него девятизначное число $k \leq n$, получив новое 18-значное число. Боря вычислил сумму всех натуральных чисел от 1 до n . Оказалось, что полученное Аней число ровно в 7 раз больше, чем сумма, вычисленная Борей. Найдите все n , для которых такое возможно.

6. Сначала на доске записывается трехзначное натуральное число n . Петя и Вася по очереди делают ходы, начинает Петя. Тот, кто делает ход, вычитает из числа на доске любой его делитель, отличный от единицы и самого числа. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Сколько существует таких трехзначных n , при которых выигрывает Вася?

7. При каких натуральных n на доску $n \times n$ можно выставить несколько ладей так, чтобы каждая клетка (включая клетки, на которых стоят ладьи) была побита ровно 3 ладьями? Ладья бьет клетку, на которой стоит; ладьи не бьют сквозь друг друга.

8. Дано 100 натуральных чисел. Пара различных данных чисел называется *хорошей*, если найдётся другая пара данных чисел, у которых разность ровно в два раза больше (из большего числа всегда вычитается меньшее). Какое наибольшее количество хороших пар может быть среди данных чисел?