

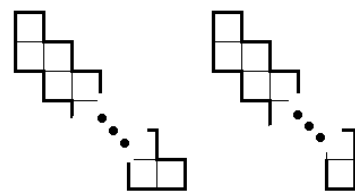
## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Назовём 2025-значное число *горбатым*, если любая его цифра на позиции с чётным номером больше любой цифры на позиции с нечётным номером. Также назовём 2025-значное число *ухабистым*, если любая его цифра на позиции с нечётным номером больше любой цифры на позиции с чётным номером. Докажите, что количества горбатых и ухабистых чисел отличаются друг от друга не более, чем в два раза.

2. Два игрока играют в кооперативную игру. Они знают правила, могут обсуждать стратегию до начала игры, однако во время игры они не могут общаться и не имеют никакой информации о другом игроке. Ведущий игры выбирает одного из игроков в каждом раунде. Выбранный игрок пытается угадать номер текущего раунда. Для этого он записывает два числа, и если хотя бы одно из них совпадёт с номером текущего раунда, игрок получает один балл. Игрокам не сообщается, набрали они баллы или нет. Докажите, что существует стратегия, с помощью которой они смогут через  $100^{100}$  раундов гарантированно набрать суммарно более 100 баллов.

3. Лесенкой длины  $k$  назовем фигурку, состоящую из  $k$  клеток, где вторая клетка на 1 ниже первой, третья клетка на один правее второй, четвертая клетка на один ниже третьей и так далее. Лесенки можно поворачивать и переворачивать. Например, при  $k = 1$  получается квадрат  $1 \times 1$ , при  $k = 2$  — доминошка из 2 клеток, при  $k = 3$  — уголок из 3 клеток и так далее. На какое наименьшее количество лесенок можно разбить квадрат  $2024 \times 2024$ ? Лесенки могут иметь разную длину.



4. В школе есть по 1000 учеников в каждом классе от первого до двенадцатого. Также в школе есть 12 000 шкафчиков, пронумерованных числами от 1 до 12 000. Директор школы просит, чтобы каждому ученику был выделен свой шкафчик, причём должно выполняться следующее условие: для каждой пары учеников из одного класса разница между номерами их шкафчиков должна быть кратна номеру их класса. Можно ли удовлетворить просьбу директора?

5. Может ли число вида  $44 \dots 41$  с нечетным количеством цифр 4 быть квадратом натурального числа?

6. В турнире по шахматам принимает участие 99 игроков, каждый игрок должен сыграть с каждым ровно один раз. Турнир проходит в 99 туров, в каждом туре игроки разбиваются на пары (один из игроков отдыхает), и проводят игры в парах. В каждой игре один играет черными, другой белыми. Можно ли организовать турнир так, чтобы ни один игрок два тура подряд не играл одним и тем же цветом? (Если игрок отдыхал, то в турах перед отдыхом и после отдыха он может играть одним и тем же цветом, ведь это не подряд идущие туры.)

7. На каждом из 2024 сайтов, пронумерованных числами от 1 до 2024, размещена ссылка на один из этих сайтов (возможно, ссылка с сайта ведёт на этот же сайт, ссылки с разных сайтов могут вести на один и тот же сайт). Если с сайта  $x$  ссылка ведет на сайт  $y$ , а с сайта  $y$  — на сайт  $z$ , то выполнено условие  $2x = y + z$ . На какой сайт может ввести ссылка с 1000-го сайта?

8. Дано 2024 неотрицательных числа, сумма которых равна 100. Петя выписал все пары чисел, произведения которых не меньше единицы. Докажите, что он выписал не более 5050 пар чисел. (Пара  $(a, b)$  и  $(b, a)$  считается одной парой, пара  $(a, a)$  также считается парой.)

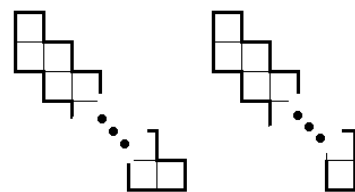
## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024

## ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовём 2025-значное число *горбатым*, если любая его цифра на позиции с чётным номером больше любой цифры на позиции с нечётным номером. Также назовём 2025-значное число *ухабистым*, если любая его цифра на позиции с нечётным номером больше любой цифры на позиции с чётным номером. Докажите, что количества горбатых и ухабистых чисел отличаются друг от друга не более, чем в два раза.

2. Петя и Вася играют в игру. У них есть табличка  $2 \times 8$  (2 строки, 8 столбцов). Сначала Петя расставляет по одному натуральному числу в каждой клетке 4 самых правых столбцов, и показывает их Васе. Затем Вася пронумеровывает все клетки таблицы числами от 1 до 16 так, чтобы в обеих строках номера шли в порядке возрастания слева направо, и все числа от 1 до 16 были использованы Васей по одному разу. Петя побеждает, если найдется клетка, номер которой в Васиной нумерации совпадет или с написанным в ней Петей числом, или с числом, записанным Петей в другой клетке того же столбца. Вася выигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Лесенкой длины  $k$  назовем фигурку, состоящую из  $k$  клеток, где вторая клетка на 1 ниже первой, третья клетка на один правее второй, четвертая клетка на один ниже третьей и так далее. Лесенки можно поворачивать и переворачивать. Например, при  $k = 1$  получается квадрат  $1 \times 1$ , при  $k = 2$  — доминошка из 2 клеток, при  $k = 3$  — уголок из 3 клеток и так далее. На какое наименьшее количество лесенок можно разбить квадрат  $2024 \times 2024$ ? Лесенки могут иметь разную длину.



4. В школе есть по 1000 учеников в каждом классе от первого до двенадцатого. Также в школе есть 12 000 шкафчиков, пронумерованных числами от 1 до 12 000. Директор школы просит, чтобы каждому ученику был выделен свой шкафчик, причём должно выполняться следующее условие: для каждой пары учеников из одного класса разница между номерами их шкафчиков должна быть кратна номеру их класса. Можно ли удовлетворить просьбу директора?

5. Может ли число вида  $44 \dots 41$  с нечетным количеством цифр 4 быть квадратом натурального числа?

6. В турнире по шахматам принимает участие 99 игроков, каждый игрок должен сыграть с каждым ровно один раз. Турнир проходит в 99 туров, в каждом туре игроки разбиваются на пары (один из игроков отдыхает), и проводят игры в парах. В каждой игре один играет черными, другой белыми. Можно ли организовать турнир так, чтобы ни один игрок два тура подряд не играл одним и тем же цветом? (Если игрок отдыхал, то в турах перед отдыхом и после отдыха он может играть одним и тем же цветом, ведь это не подряд идущие туры.)

7. На каждом из 2024 сайтов, пронумерованных числами от 1 до 2024, размещена ссылка на один из этих сайтов. Ссылка с сайта может вести на самого себя, но ссылки с разных сайтов всегда ведут на разные сайты. Если с сайта  $x$  ссылка ведет на сайт  $y$ , а с сайта  $y$  — на сайт  $z$ , то выполнено условие  $2x = y + z$ . На какой сайт может ввести ссылка с 1000-го сайта?

8. В 6«А» классе учится несколько школьников. Ровно 20 из них имеют более одного друга, и у этих 20 человек попарно различные количества друзей (дружба взаимна). Каково наименьшее возможное количество учеников в классе?

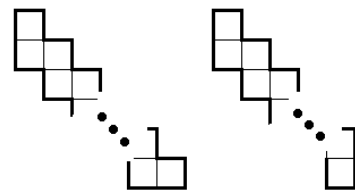
## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Назовём 2025-значное число *горбатым*, если любая его цифра на позиции с чётным номером больше любой цифры на позиции с нечётным номером. Также назовём 2025-значное число *ухабистым*, если любая его цифра на позиции с нечётным номером больше любой цифры на позиции с чётным номером. Номера позиций считаются слева направо. Каких чисел больше: горбатых или ухабистых?

2. Два игрока играют в кооперативную игру. Они могут обсуждать стратегию до начала игры, однако во время игры они не могут общаться и не имеют никакой информации о другом игроке. Ведущий игры выбирает одного из игроков в каждом раунде. Выбранный игрок должен угадать номер текущего раунда. Для этого он может записать два различных номера раунда, и если хотя бы один совпадёт с текущим, игрок получает один балл. У игроков нет информации о раундах других игроков. Игрокам не сообщается, набрали они очки или нет. Игроки выигрывают игру, набрав суммарно три очка. Существует ли стратегия, с помощью которой они могут гарантированно выиграть игру за несколько раундов?

3. Лесенкой длины  $k$  назовем фигурку, состоящую из  $k$  клеток, где вторая клетка на 1 выше первой, третья клетка на один правее второй, четвертая клетка на один выше третьей и так далее, а также все фигуры, отличающиеся симметрией и поворотами. Например, при  $k = 1$  получается квадрат  $1 \times 1$ , при  $k = 2$  — доминошка из 2 клеток, при  $k = 3$  — уголок из 3 клеток и так далее. Можно ли разбить квадрат  $8 \times 8$  на менее чем 7 лесенок? Лесенки могут иметь разную длину.



4. В начальной школе есть по 1000 учеников в каждом классе от первого до четвертого. Также в школе есть 4000 шкафчиков, пронумерованных числами от 1 до 4000. Директор школы просит, чтобы каждому ученику был выделен свой шкафчик, причём должно выполняться следующее условие: для каждой пары учеников из одного класса разница между номерами их шкафчиков должна быть кратна номеру их класса. Можно ли удовлетворить просьбу директора?

5. Может ли число вида  $44\dots 41$  с нечетным количеством цифр 4 быть квадратом натурального числа?

6. В турнире по шахматам принимает участие 5 игроков, каждый игрок должен сыграть с каждым ровно один раз. Турнир проходит в 5 туров, в каждом туре игроки разбиваются на пары (один из игроков отдыхает), и проводят игры в парах. В каждой игре один играет черными, другой белыми. Можно ли организовать турнир так, чтобы ни один игрок два тура подряд не играл одним и тем же цветом? (Если игрок отдыхал, то в турах перед отдыхом и после отдыха он может играть одним и тем же цветом, ведь это не подряд идущие туры.)

7. В ряд расположены 10 лампочек-кнопочек. Можно за ход одновременно нажать на три подряд расположенные лампочки. При одном таком нажатии эти три лампочки меняют своё состояние (выключенные включаются, а включенные выключаются). Сколько разных комбинаций из горящих лампочек можно получить, если в начале все лампочки выключены?

8. В 6«Б» классе учатся несколько школьников. Ровно 5 человек имеют более одного друга в классе, и у этих 5 человек попарно различные количества друзей (дружба взаимна). Найдите наименьшее возможное количество учеников в 6«Б».

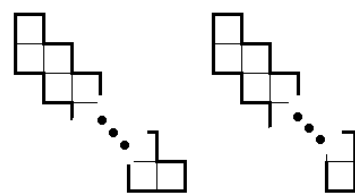
## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.05.2024

### ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Пятизначное натуральное число назовём *двугорбым*, если вторая и четвёртая его цифры больше 5, а остальные цифры меньше 5. Пятизначное натуральное число назовём *ухабистым*, если вторая и четвёртая его цифры меньше 5, а остальные цифры больше 5. Каких чисел больше: двугорбых или ухабистых, и насколько?

2. *Рангом* числа, в котором все цифры различны, назовём наибольшее количество его цифр, идущих в порядке возрастания или в порядке убывания, если все остальные цифры вычеркнуты. Например, число 253170 имеет ранг 4, т.к., вычеркнув из него две цифры, можно получить 5310. Укажите хотя бы одно 9-значное число с наименьшим рангом (т.е. у любого другого 9-значного числа с различными цифрами ранг не меньше).

3. *Лесенкой* длины  $k$  назовем фигурку, состоящую из  $k$  клеток, где вторая клетка на 1 выше первой, третья клетка на один правее второй, четвертая клетка на один выше третьей и так далее, а также все фигуры, отличающиеся симметрией и поворотами. Например, при  $k = 1$  получается квадрат  $1 \times 1$ , при  $k = 2$  — доминошка из 2 клеток, при  $k = 3$  — уголок из 3 клеток и так далее. Можно ли разбить квадрат  $8 \times 8$  на менее чем 7 лесенок? Лесенки могут иметь разную длину.



4. Натуральные числа от 1 до 300 надо покрасить в 10 цветов, занумерованных числами от 1 до 10, — по 30 чисел каждого цвета. Требуется, чтобы разность любых одноцветных чисел была кратна номеру их цвета. Завхоз выдаёт для покраски сначала краску номер 10, потом краску номер 9, и т.д. Возможно ли выполнить это требование или на какой-то краске процесс остановится?

5. Может ли число вида  $44\dots 41$  с нечетным количеством цифр 4 быть квадратом натурального числа?

6. Десять шахматистов хотят провести шахматный турнир в пять туров, в результате каждый с каждым должен сыграть ровно одну игру. В каждом туре игроки разбиваются на пары и проводят игры в парах. В каждой игре один шахматист играет черными, другой белыми. Можно ли организовать турнир так, чтобы ни один игрок два тура подряд не играл одним и тем же цветом?

7. В ряд расположены 10 лампочек-кнопочек. Можно за ход одновременно нажать на три подряд расположенные лампочки. При одном таком нажатии эти три лампочки меняют своё состояние (выключенные включаются, а включенные выключаются). Сколько разных комбинаций из горящих лампочек можно получить, если в начале все лампочки выключены?

8. В 6«Б» классе учится несколько школьников. Ровно 5 человек имеют более одного друга в классе, и у этих 5 человек попарно различные количества друзей (дружба взаимна). Найдите наименьшее возможное количество учеников в 6«Б».