

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–2 МЕСТА

1. Группу гирь будем называть *равной*, если сумма весов двух наибольших гирь в этой группе меньше суммы весов всех остальных. Дано 60 гирь различных весов, которые можно разбить на 12 равных групп по 5 гирь. Всегда ли эти 60 гирь можно разбить на 10 равных групп по 6 гирь?

2. Найдите количество ломаных, идущих по линиям сетки из левого нижнего угла доски 100×200 в правый верхний, таких, что они поворачивают только вверх и направо, и фигуру, лежащую под ломаной, можно разрезать на доминошки.

3. Пусть a_1, a_2, \dots, a_{100} — цифры, $S_i = a_1 \cdot a_{1+i} + a_2 \cdot a_{2+i} + \dots + a_{100} \cdot a_{100+i}$ (считаем, что $a_k = a_{k+100}$). Найдите наибольшее возможное значение выражения $S_2 - S_5 + S_{20} - S_{25}$.

4. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a - 1$ и $2(b - 1)$ — квадраты натуральных чисел, а число $N = a^2 + b^2 - 1$ — степень простого числа. Найдите все возможные значения N .

5. Внутри остроугольного треугольника ABC выбирается переменная точка X , а в другой полуплоскости относительно прямой BC , нежели A , — переменная точка Y , причем

$$\angle ABX = \angle AXB = \angle CBY = \angle CYB.$$

Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку.

6. Существуют ли такие целые числа x, y и z такие, что числа $x + 2y + 3z, x + 3y + 5z$ и $3x + 4y + 5z$ — кубы натуральных чисел?

7. В стране 99 городов. Министр транспорта строит несколько дорог, каждая дорога соединяет какие-то два города. Министр финансов после этого присваивает каждому городу число 1 или 2. Перемещаться по стране теперь можно по следующему правилу: находясь в городе с числом t , можно проехать ровно по t дорогам (при проезде по двум дорогам промежуточный город не считается посещенным). Может ли Министр транспорта так построить 131 дорогу, чтобы при любой расстановке чисел можно было из любого города добраться до любого другого за несколько перемещений?

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BD = CD = 1$ и $AC = 2$. На биссектрисе угла ABD отмечена точка E , а на биссектрисе угла BDC — точка F так, что четырехугольник $AECF$ — параллелограмм. Прямые AC, BD и EF , пересекаясь, ограничивают треугольник. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТА

1. Группу гирь будем называть *равной*, если сумма весов двух наибольших гирь в этой группе меньше суммы весов всех остальных. Дано 60 гирь различных весов, которые можно разбить на 12 равных групп по 5 гирь. Всегда ли эти 60 гирь можно разбить на 10 равных групп по 6 гирь?

2. Дано натуральное число $n > 1$. *Крестом* порядка n назовем клетчатый квадрат $2n \times 2n$, из которого вырезали четыре угловых квадрата $(n-1) \times (n-1)$. Обозначим через a_n количество способов разрезать крест порядка n на доминошки по линиям сетки. Докажите, что $2a_n$ является квадратом натурального числа.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ единиц}}$ представляется в виде суммы 2025 различных натуральных чисел, отличающихся друг от друга перестановкой цифр.

4. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a-1$ и $2(b-1)$ — квадраты натуральных чисел. Может ли число $a^2 + b^2 - 1$ быть простым?

5. Внутри остроугольного треугольника ABC выбирается переменная точка X , а в другой полуплоскости относительно прямой BC , нежели A , — переменная точка Y , причем

$$\angle ABX = \angle AXB = \angle CBY = \angle CYB.$$

Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку.

6. Существуют ли такие целые числа x , y и z такие, что числа $x + 2y + 3z$, $x + 3y + 5z$ и $3x + 4y + 5z$ — кубы натуральных чисел?

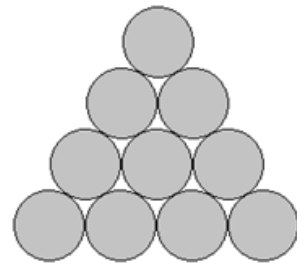
7. В стране 99 городов. Министр транспорта строит несколько дорог, каждая дорога соединяет какие-то два города. Министр финансов после этого присваивает каждому городу число 1 или 2. Перемещаться по стране теперь можно по следующему правилу: находясь в городе с числом t , можно проехать ровно по t дорогам (при проезде по двум дорогам промежуточный город не считается посещенным). Может ли Министр транспорта так построить 131 дорогу, чтобы при любой расстановке чисел можно было из любого города добраться до любого другого за несколько перемещений?

8. В остроугольном треугольнике ABC , в котором $\angle A = 30^\circ$, высоты BD и CE пересекаются в точке H . Оказалось, что $BH = DH$. Докажите, что $AC + CD = 4CH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Одинаковые кружочки выстроены в пирамидку из 600 рядов (в рядах 1, 2, ..., 600 кружочков). Пример такой пирамидки из 4 рядов показан на рисунке. Назовём *уголком* фигуру из трёх кружочков: два из них касаются третьего, а их центры образуют угол 120° . Какое наибольшее число непересекающихся уголков можно разместить в этой пирамидке?



2. Дано натуральное число $n > 1$. *Крестом* порядка n назовем клетчатый квадрат $2n \times 2n$, из которого вырезали четыре угловых квадрата $(n-1) \times (n-1)$. Обозначим через a_n количество способов разрезать крест порядка n на доминошки по линиям сетки. Докажите, что $2a_n$ является квадратом натурального числа.

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ единиц}}$ представляется в виде суммы 2025 различных натуральных чисел, отличающихся друг от друга перестановкой цифр.

4. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a-1$ и $2(b-1)$ — квадраты натуральных чисел. Может ли число $a^2 + b^2 - 1$ быть простым?

5. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка X , а в другой полуплоскости относительно прямой BC нежели A — точка Y , причём

$$\angle ABX = \angle AXB = \angle CBY = \angle CYB.$$

Прямая XY пересекает отрезок AC в точке Z . Докажите, что $\angle AZB = \angle CZY$.

6. Действительные числа a и b больше единицы. Известно, что

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2ab - a - b} = \frac{1}{a+b}.$$

Докажите, что $ab = a + b$.

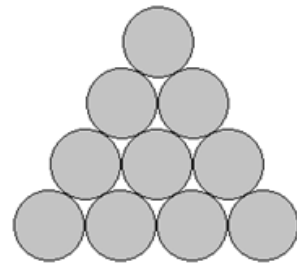
7. Шеренга из ста мальчиков встала напротив шеренги из ста девочек, чтобы вручить друг другу подарки. Сначала каждый мальчик подошёл к какой-то девочке по прямой, и вручил ей носки. Оказалось, что пути никаких двух мальчиков не пересеклись. Затем каждая девочка подошла к какому-то мальчику, также по прямой, и подарила ему цветы. Их пути также не пересеклись. Докажите, что найдутся мальчик и девочка, которые обменялись подарками.

8. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него расположена точка P такая, что $\angle APB = 120^\circ$, $\angle CPB = 150^\circ$. Найдите отношение AP/PB .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Одинаковые кружочки выстроены в пирамидку из 600 рядов (в рядах 1, 2, ..., 600 кружочков). Пример такой пирамидки из 4 рядов показан на рисунке. Назовём *уголком* фигуру из трёх кружочков: два из них касаются третьего, а их центры образуют угол 120° . Какое наибольшее число непересекающихся уголков можно разместить в этой пирамидке?



2. Костя и Серёжа играют на доске 10×10 . Сначала Костя ставит в клетки доски n попугаев. После этого начинается игра. Каждым ходом Серёжа атакует: кладёт орех на граничный отрезок между какими-то двумя клетками доски. Ответным ходом Костя должен переместить некоторых своих попугаев (как минимум одного) в соседние по сторонам клетки. Попугай, проходящий мимо ореха, съедает его — атака отбита. При каком наименьшем n Костя сможет сколь угодно долго отбивать атаки (т. е. после каждого его хода на доске не будет ни одного ореха)?

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ единиц}}$ представляется в виде суммы 2025 различных натуральных чисел, отличающихся друг от друга перестановкой цифр.

4. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a - 1$ и $2(b - 1)$ — квадраты натуральных чисел. Может ли число $a^2 + b^2 - 1$ быть простым?

5. На длинной полоске бумаги записаны натуральные числа от 1 до 100 в порядке возрастания. Максим взял ножницы и сделал три разреза между числами — получилось 4 полоски бумаги. Оказалось, что среднее арифметическое чисел на полосках равно k , $2k$, $3k$, $4k$ соответственно. Найдите все возможные значения k .

6. Действительные числа a и b больше единицы. Известно, что

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2ab - a - b} = \frac{1}{a+b}.$$

Докажите, что $ab = a + b$.

7. В графе n вершин, степень каждой равна 3. Все вершины покрашены в 2 цвета. Известно, что каждая вершина имеет не менее двух красных соседей. Найдите наибольшее возможное количество синих вершин в графе.

8. Дан равносторонний треугольник ABC . Внутри него расположена точка P такая, что $\angle APB = 120^\circ$, $\angle CPB = 150^\circ$. Найдите отношение AP/PB .