

# КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА. МЛАДШАЯ ГРУППА.

1. Вдоль прямой дороги расположены пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  именно в таком порядке. В пункте  $A$  находится будка сторожа. Он патрулирует дорогу: идёт из  $A$  до одного из трёх других пунктов, затем разворачивается и возвращается обратно в  $A$ . Известно, что в пункте  $C$  он разворачивался вдвое, а в пункте  $B$  — вчетверо больше раз, чем в пункте  $D$ . Всего в пункте  $B$  сторож побывал 140 раз. Сколько раз он доходил до пункта  $D$ ?

**Ответ:** 14 раз. **Решение.** Обозначим искомое количество раз за  $x$ . Тогда сторож доходил до  $C$  и до  $B$  ровно  $2x$  и  $4x$  раз. При этом мимо  $B$  он проходил дважды, когда ходил до  $C$  и  $D$ , и единожды, когда только до  $B$ . Следовательно, в пункте  $B$  сторож побывал  $2x + 4x + 4x = 140$  раз. Отсюда  $x = 14$ .

2. Пусть  $n \geq 3$  — натуральное число. Все клетки квадрата  $n \times n$ , лежащие ниже диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол, покрашены в красный цвет, а клетки этой диагонали — в синий. Игорь вырезал несколько прямоугольников  $1 \times 3$  из красных клеток. Докажите, что Саша сможет вырезать ещё один такой прямоугольник из покрашенных (красных или синих) клеток.

**Решение.** Предположим, что Саша не может добиться требуемого. Рассмотрим первый столбец нашей лесенки. Предположим, что мы не можем вырезать прямоугольник из трех верхних клеток этого столбца. Заметим, что тогда третья сверху клетка должна быть покрытой вертикальным прямоугольником  $3 \times 1$ , так как все горизонтальные прямоугольники, ее покрывающие, содержат хотя бы одну не красную клетку. Теперь рассматриваем второй столбец, в нем третья сверху клетка также должна быть покрыта вертикальным прямоугольником  $3 \times 1$ . Двигаясь по столбцам дальше, получаем, что и в  $(n - 2)$ -ом столбце третья сверху клетка должна быть покрыта вертикальным прямоугольником  $3 \times 1$ , состоящем целиком из красных клеток. Но это невозможно, так как в  $(n - 2)$ -ом столбце есть всего 2 красные клетки.

3. Назовём пятизначное число без нулевых цифр интересным, если оно является палиндромом (т. е. если прочитать его цифры в обратном порядке, то получится исходное число, например, 23432) и его средняя цифра в два раза больше первой. Докажите, что произведение 2025 интересных чисел не может быть квадратом натурального числа.

**Решение.** Запишем интересное число как  $\overline{ab(2a)ba} = 10000a + 1000b + 200a + 10b + a = 10201a + 1010b$ . Тогда оно кратно простому числу 101. При этом оно не может быть кратно  $101^2 = 10201$ , поскольку не содержит нулевых цифр. Поэтому произведение 2025 интересных чисел содержит простое число 101 ровно в 2025 степени, следовательно, не может быть квадратом натурального числа.

4. В треугольнике  $ABC$ , в котором  $\angle A = 60^\circ$ , проведена медиана  $AM$ . На продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  отмечена точка  $N$  так, что  $AM = MN$ . Найдите  $AB/CN$ .

**Ответ:**  $AB/CN = 2$ . **Решение.** Удвоим медиану  $AM$ : на продолжении луча  $AM$  за точку  $M$  отметим такую точку  $D$ , что  $AM = MD$ . Заметим, что  $ABDC$  параллелограмм, в частности  $AB = CD$  и  $\angle DCN = \angle A = 60^\circ$ . С другой стороны, т.к.  $AM = MD = MN$ , то  $\angle CND = 90^\circ$ . Таким образом, в треугольнике  $DCN$  один угол равен  $60^\circ$ , а другой —  $90^\circ$ . Поэтому  $AB/CN = CD/CN = 2$ .

5. В стране  $n$  городов, некоторые пары из них соединены дорогами с двухсторонним движением. В некоторых городах построены школы, назовём такие города важными. Оказалось, что 1) из каждого города можно добраться до любого другого; 2) каждый не важный город соединён дорогой с важным городом. Для какого наименьшего  $k$  всегда можно закрыть все дороги, кроме некоторых  $k$ , на ремонт так, чтобы эти два условия сохранились?

**Ответ:**  $n - 1$ . **Решение.** Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, ребрами — дороги. Понятно, что  $k \geq n - 1$ , в противном случае граф на оставшихся ребрах не будет связным. Докажем, что в этом графе всегда можно выделить остовное дерево, удовлетворяющее условиям. Будем последовательно удалять ребра из графа. Пусть в графе к текущему моменту есть цикл, проходящий по вершинам  $C_1 C_2 \dots C_m C_1$ . Предположим, что мы не можем удалить ребро  $C_i C_{i+1}$  (считаем, что  $C_{m+1} = C_1$ ) с сохранением всех условий. Тогда один из городов  $C_i$  и  $C_{i+1}$  должен быть важным, а другой — не важным. Поэтому если мы не можем удалить ни одно из ребер цикла, то в нем чередуются важные и не важные города. В этом случае удалим любое ребро из нашего цикла. Каждый не важный город будет по-прежнему соединен с важным. В какой-то момент в графе не останется циклов, а все условия будут выполнены. Поэтому оставшийся граф дерево, и ребер в нем ровно  $n - 1$ .

6. По дороге едет машина, скорость которой составляет натуральное число километров в час. Каждый раз, проезжая 1 км, машина увеличивает или уменьшает свою скорость на 1 км/ч, но не останавливается. При каком наименьшем натуральном  $n$  машина могла проехать  $n$  км за 2025 минут?

**Ответ:** 48 километров. **Решение.** *Пример.* Первые 42 километра машина чередует скорости 1 и 2 км/ч, тратя  $21 \cdot (60 + 30) = 1890$  минут, далее скорости 3, 2, 3, 2, 3, 4 км/ч соответственно, что займёт ещё  $20 + 30 + 20 + 30 + 20 + 15 = 135$  минут. При этом  $1890 + 135 = 2025$ . *Оценка.* Пусть получилось проехать  $n \leq 47$  километров. Если скорость машины на километровом участке равна  $v$  км/ч, то затраченное время равно  $\frac{1}{v}$  часов. Заметим, что  $2025 = 33\frac{3}{4}$  часа. В знаменателе этой дроби стоит  $4 = 2^2$ , следовательно, хотя бы один раз машина проедет со скоростью не меньше 4 км/ч, чтобы обеспечить соответствующую степень вхождения двойки. К тому же будет ещё не меньше 3 раз скорость не меньшая 3 км/ч (в частности, от простого числа 3 в знаменателе можно избавиться или взяв 3 раза дробь с одинаковым знаменателем, или 2 дроби с отличающимися на 3 знаменателями, но тогда будет третья дробь между ними, не равная  $\frac{1}{4}$ ). На остальных не более чем  $47 - 4 = 43$  километровых участках — не более половины раз скорость могла равняться 1 км/ч, все остальные — не меньше 2 км/ч. Но тогда на весь путь будет потрачено не более  $21 \cdot \frac{1}{1} + 22 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 33\frac{1}{4} < 33\frac{3}{4}$  часа. Противоречие.

7. На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  отмечена точка  $E$ , а на продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  — точка  $F$ , причем  $\angle ADF = 2\angle CDE$ . Докажите, что  $BE < CF$ .

**Решение.** Обозначим  $\angle BCE = x$ ,  $\angle CDF = y$ . Исходя из условия задачи,  $\angle CDE = 45^\circ + \frac{y}{2}$ ,  $\angle DCE = 90^\circ - x$ . Значит,  $\angle CED = 45^\circ + x - \frac{y}{2}$ . Заметим, что  $CE > BC = CD$ , поэтому  $45^\circ + \frac{y}{2} > 45^\circ + x - \frac{y}{2}$ , откуда следует, что  $y > x$ . Значит, на отрезке  $CF$  найдется такая точка  $G$ , что  $\angle CDG = x$ . Тогда прямоугольные треугольники  $BCE$  и  $CDG$  равны по катету и острому углу, поэтому  $BE = CG < CF$ , что и требовалось.

8. Паша загадал два различных натуральных числа  $m$  и  $n$ , больших 2025. Затем он выписал в тетрадку в произвольном порядке все значения, которые может прини-

мать сумма остатков от деления натурального числа на  $m$ , на  $n$  и на  $mn$ . Всегда ли Максим сможет отгадать  $m$  и  $n$ , зная числа в тетрадке Паши?

**Ответ:** Не всегда. **Решение.** Пусть  $m = 3x$ ,  $n = 3y$ ,  $m' = 3z$ ,  $n' = 3t$  для таких различных натуральных  $x, y, z, t$ , что  $(3x + 1)(3y + 1) = (3z + 1)(3t + 1)$ . Докажем, что парам  $(m, n)$  и  $(m', n')$  будут соответствовать одно и то же множество значений. Заметим, что наибольшее значение суммы остатков совпадает  $mn - 1 + m - 1 + n - 1 = m'n' - 1 + m' - 1 + n' - 1$ , так как  $(m + 1)(n + 1) = (m' + 1)(n' + 1)$ , и достигается на числах  $mn - 1$  и  $m'n' - 1$  соответственно. Также понятно, что все возможные значения для пары  $(m, n)$  принимаются хотя бы один раз на одном из чисел  $0, 1, 2, 3, \dots, mn - 1$ . Будем последовательно вычислять сумму остатков от деления у этих чисел слева направо. Заметим, что каждый раз она либо увеличивается на 3, либо уменьшается на  $m - 3$ , либо уменьшается на  $n - 3$ , либо уменьшается на  $m + n - 3$ . При этом изначально эта сумма была равна 0, то есть делилась на 3. В итоге получаем, что сумма остатков от деления всегда будет делиться на 3. При этом каждое из значений  $0, 3, 6, \dots, mn + m + n - 3$  будет достигаться, поскольку сумма остатков от деления каждый раз увеличивается не более чем на 3. Значит, множество значений совпадает с множеством  $\{0, 3, 6, \dots, mn + m + n - 3\}$ , а для пары  $(m', n')$  — с множеством  $\{0, 3, 6, \dots, m'n' + m' + n' - 3\} = \{0, 3, 6, \dots, mn + m + n - 3\}$ , что и требовалось.