

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Можно ли выписать 90 различных трёхзначных чисел в ряд в порядке возрастания так, чтобы произведение любых двух подряд идущих чисел делилось на предыдущее число?

2. Неотрицательные числа a , b и c таковы, что

$$b + c \leq a + 1, \quad c + a \leq b + 1, \quad a + b \leq c + 1.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 1$.

3. Игорь задумал шесть различных ненулевых чисел. Затем он заменил некоторые из этих чисел на обратные к ним и нашёл сумму полученных чисел. Посчитав значения всех $2^6 = 64$ таких выражений, Игорь выписал все 64 числа в тетрадку. Какое наименьшее количество различных результатов он мог получить?

4. Несколько выключателей управляют 511 лампочками. Каждый выключатель подсоединен к некоторому подмножеству лампочек. Когда мы используем выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: лампочки, которые были включены, выключаются, а лампочки, которые были выключены, включаются. Мы знаем, что к каждой лампочке подсоединен хотя бы один выключатель. Изначально все лампочки были выключены. Найдите наибольшее число k , для которого можно гарантированно включить хотя бы k лампочек с помощью этих выключателей.

5. Дано натуральное число $n \geq 1500$. На плоскости отмечено n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведено 500 непересекающихся отрезков с концами в 1000 различных отмеченных точках. При каком наибольшем k можно провести ещё k отрезков с концами в отмеченных точках так, чтобы никакие два из $k + 5$ проведённых отрезков не имели общих точек?

6. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на боковой стороне BC — точка E . Оказалось, что $BD = DE = EC = AC$. Найдите угол ABC .

7. На столе стоят 2025 стопок с $1, 2, 3, \dots, 2025$ монетами. Саша и Игорь ходят по очереди, начинает Саша. Саша первым ходом берет 1 монету, Игорь берет 2 монеты из разных стопок, затем Саша берет 3 монеты из разных стопок и так далее, т.е. на i -ом ходу игрок берет i монет по одной из разных стопок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Существуют ли такие натуральные числа a , b и c , что числа $a^{2n+1} + bc$ и $b^{n+2025} - 1$ взаимно просты при любом натуральном n ?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Можно ли выписать 181 различных трёхзначных чисел в ряд в порядке возрастания так, чтобы произведение любых двух подряд идущих чисел делилось на предыдущее число?

2. Неотрицательные числа a , b и c таковы, что

$$b + c \leq a + 1, \quad c + a \leq b + 1, \quad a + b \leq c + 1.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 1$.

3. Игорь задумал шесть различных ненулевых чисел. Затем он заменил некоторые из этих чисел на обратные к ним и нашёл сумму полученных чисел. Посчитав значения всех $2^6 = 64$ таких выражений, Игорь выписал все 64 числа в тетрадку. Какое наименьшее количество различных результатов он мог получить?

4. Несколько выключателей управляют 511 лампочками. Каждый выключатель подсоединен к некоторому подмножеству лампочек. Когда мы используем выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: лампочки, которые были включены, выключаются, а лампочки, которые были выключены, включаются. Мы знаем, что к каждой лампочке подсоединен хотя бы один выключатель. Изначально все лампочки были выключены. Найдите наибольшее число k , для которого можно гарантированно включить хотя бы k лампочек с помощью этих выключателей.

5. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведен отрезок, соединяющий две отмеченные точки. При каком наибольшем k можно провести еще k отрезков с концами в отмеченных точках так, чтобы никакие два из $k + 1$ проведенных отрезков не имели общих точек?

6. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на боковой стороне BC — точка E . Оказалось, что $BD = DE = EC = AC$. Найдите угол ABC .

7. На столе стоят 2025 стопок с $1, 2, 3, \dots, 2025$ монетами. Саша и Игорь ходят по очереди, начинает Саша. Саша первым ходом берет 1 монету, Игорь берет 2 монеты из разных стопок, затем Саша берет 3 монеты из разных стопок и так далее, т.е. на i -ом ходу игрок берет i монет по одной из разных стопок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Даны натуральные числа a , b и c . Докажите, что при некотором натуральном n числа $b^n - 1$ и $a^{n-1} + bc$ имеют общий делитель, больший 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Можно ли выписать 181 различных трёхзначных чисел в ряд в порядке возрастания так, чтобы произведение любых двух подряд идущих чисел делилось на предыдущее число?

2. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что

$$b + c \leq a + 1, \quad c + a \leq b + 1, \quad a + b \leq c + 1.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \leq 3$.

3. Костя заявил, что выписал несколько 11-элементных подмножеств 90-элементного множества A таких, что выполняется свойство: любое 4-элементное подмножество содержится ровно в одном из выписанных 11-элементных. Не обманывает ли Костя?

4. Есть 8 лампочек и 4 выключателя. Каждый выключатель подсоединён к некоторому непустому набору лампочек, и каждая лампочка подсоединена хотя бы к одному выключателю. Когда мы используем выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: лампочки, которые были включены, выключаются, а лампочки, которые были выключены, включаются. Изначально все лампочки были выключены. Верно ли, что всегда можно включить хотя бы 5 лампочек?

5. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведен отрезок, соединяющий две отмеченные точки. При каком наибольшем k можно провести еще k отрезков с концами в отмеченных точках так, чтобы никакие два из $k + 1$ проведенных отрезков не имели общих точек?

6. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на боковой стороне BC — точка E . Оказалось, что $BD = DE = EC = AC$. Найдите угол ABC .

7. На столе стоят 2025 стопок с $1, 2, 3, \dots, 2025$ монетами. Саша и Игорь ходят по очереди, начинает Саша. Саша первым ходом берет 1 монету, Игорь берет 2 монеты из разных стопок, затем Саша берет 3 монеты из разных стопок и так далее, т.е. на i -ом ходу игрок берет i монет по одной из разных стопок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Даны натуральные числа a, b . Докажите, что при некотором натуральном n числа $a^n - 1$ и $a^{n-1} + b$ имеют общий делитель, больший 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Можно ли выписать 181 различных трёхзначных чисел в ряд в порядке возрастания так, чтобы произведение любых двух подряд идущих чисел делилось на предыдущее число?

2. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что

$$b + c \leq a + 1, \quad c + a \leq b + 1, \quad a + b \leq c + 1.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \leq 3$.

3. Костя заявил, что выписал несколько 11-элементных подмножеств 90-элементного множества A таких, что выполняется свойство: любое 4-элементное подмножество содержится ровно в одном из выписанных 11-элементных. Не обманывает ли Костя?

4. Есть 8 лампочек и 4 выключателя. Каждый выключатель подсоединён к некоторому непустому набору лампочек, и каждая лампочка подсоединена хотя бы к одному выключателю. Когда мы используем выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: лампочки, которые были включены, выключаются, а лампочки, которые были выключены, включаются. Изначально все лампочки были выключены. Верно ли, что всегда можно включить хотя бы 5 лампочек?

5. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведен отрезок, соединяющий две отмеченные точки. При каком наибольшем k можно провести еще k отрезков с концами в отмеченных точках так, чтобы никакие два из $k + 1$ проведенных отрезков не имели общих точек?

6. В треугольнике ABC проведена высота $АН$. Оказалось, что прямая, проходящая через середины отрезков BC и $АН$, перпендикулярна $АС$. Докажите, что $BC > 2АН$.

7. На столе стоят 2025 стопок с $1, 2, 3, \dots, 2025$ монетами. Саша и Игорь ходят по очереди, начинает Саша. Саша первым ходом берет 1 монету, Игорь берет 2 монеты из разных стопок, затем Саша берет 3 монеты из разных стопок и так далее, т.е. на i -ом ходу игрок берет i монет по одной из разных стопок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

8. Из пунктов A и B , между которыми ровно 1 км, навстречу друг другу отправились два пешехода. Они встретились в точке C , поздоровались, развернулись и пошли обратно. Через некоторое время первый вспомнил, что хотел не только поздороваться, а ещё и сообщить второму важную новость. Он снова развернулся, нагнал второго на полпути от C к B , сообщил новость и опять пошёл в A . На каком расстоянии от A находился первый пешеход, когда второй достиг B ? Скорости пешеходов неизменны.