

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025

ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Множество S состоит из натуральных чисел и удовлетворяет следующим условиям. Число 999 входит в S . Для любых натуральных чисел a, b, c (не обязательно различных) таких, что число $ab + bc + ca$ входит в S , числа $a + b + c$ и abc тоже входят в S . Может ли S содержать не все натуральные числа?

2. По кругу написано 101 число. Эти числа пронумерованы по часовой стрелке. Возле первого числа написано утверждение «Это число больше следующего», возле второго — «Это число больше следующих двух» и т. д., возле 100-го — «Это число больше следующих 100 чисел» (следующих всегда имеется в виду по часовой стрелке). Какое максимальное количество высказываний может быть истинным?

3. В каждой клетке доски 100×100 расположена стрелка, направленная либо вверх, либо вниз, либо влево, либо вправо. Улитка Турбо выбирает изначальные направления всех стрелок, а затем начинает своё движение с некоторой клетки доски. За каждый ход Турбо перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой в её клетке. Если Турбо покидает доску, то дальше движение уже не продолжается. После каждого хода стрелки во всех клетках поворачиваются на 90° против часовой стрелки. Назовём клетку *хорошей*, если, начав движение с этой клетки, Турбо посетит каждую клетку доски ровно один раз и в конце вернётся на свою начальную клетку. Каково максимальное возможное количество хороших клеток?

4. 512 лампочек управляются несколькими выключателями. Каждый выключатель подсоединен к некоторому подмножеству лампочек. Когда мы нажимаем на выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: лампочки, которые были включены, выключаются, а лампочки, которые были выключены, включаются. К каждой лампочке подсоединен хотя бы один выключатель. Изначально все лампочки были выключены. Найдите наибольшее число k , для которого можно гарантированно включить хотя бы k лампочек с помощью этих выключателей.

5. Докажите, что среди 11 различных натуральных чисел, не превосходящих 2025, можно выбрать два числа $a < b$ таких, что число b дает четный остаток при делении на число a .

6. В ряд в некотором порядке записаны 3000 чисел: тысяча двоек и две тысячи минус единиц. Назовём группу подряд стоящих чисел *нейтральной*, если сумма чисел в этой группе равна нулю. Найдите наименьшее возможное количество нейтральных групп.

7. Петя задумал 6 различных ненулевых чисел. Для каждого из 64 способов выбрать подмножество задуманных чисел Петя посчитал сумму следующих 6 чисел: тех, которые вошли в подмножество, и обратных к не вошедшим в него. Какое наименьшее количество различных результатов он мог получить? (Напомним, что число, обратное к x , это $\frac{1}{x}$.)

8. На столе стоят 2025 стопок с $1, 2, 3, \dots, 2025$ монетами. Саша и Игорь ходят по очереди, начинает Саша. Саша первым ходом берет 1 монету, Игорь вторым ходом берет 2 монеты из разных стопок, затем Саша третьим ходом берет 3 монеты из разных стопок и так далее, т.е. на i -ом ходу игрок берет i монет по одной из разных стопок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025

ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На вечеринку пришли представители трех рас: людей, эльфов и гномов (все три расы присутствуют). Каждый из присутствующих на вечеринке знает там ровно 8 людей, ровно 6 эльфов и ровно 4 гномов. Сколько минимум гостей пришло на вечеринку?

2. По кругу написано 101 число. Эти числа пронумерованы по часовой стрелке. Возле первого числа написано утверждение «Это число больше следующего», возле второго — «Это число больше следующих двух» и т. д., возле 100-го — «Это число больше следующих 100 чисел» (следующих всегда имеется в виду по часовой стрелке). Какое максимальное количество высказываний может быть истинным?

3. В каждой клетке доски 100×100 расположена стрелка, направленная либо вверх, либо вниз, либо влево, либо вправо. Улитка Турбо выбирает изначальные направления всех стрелок, а затем начинает своё движение с некоторой клетки доски. За каждый ход Турбо перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой в её клетке. Если Турбо покидает доску, то дальше движение уже не продолжается. После каждого хода стрелки во всех клетках поворачиваются на 90° против часовой стрелки. Назовём клетку *хорошей*, если, начав движение с этой клетки, Турбо посетит каждую клетку доски ровно один раз и в конце вернётся на свою начальную клетку. Докажите, что не более половины всех клеток — хорошие.

4. В ряд расположены 100 лампочек. Назовем *узором* любую комбинацию горящих лампочек. За одно переключение можно изменить состояние любых семи лампочек, стоящих подряд (включённую выключить, выключенную включить). Докажите, что из любых 70 узоров найдутся два, которые можно получить друг из друга последовательностью переключений.

5. Докажите, что среди 10 различных нечетных натуральных чисел, не превосходящих 2025, можно выбрать два числа таких, что одно из них дает четный остаток при делении на другое.

6. В ряд в некотором порядке записаны 3000 чисел: тысяча двоек и две тысячи минус единиц. Назовём группу подряд стоящих чисел *нейтральной*, если сумма чисел в этой группе равна нулю. Найдите наименьшее возможное количество нейтральных групп.

7. Петя задумал 6 различных ненулевых чисел. Для каждого из 64 способов выбрать подмножество задуманных чисел Петя посчитал сумму следующих 6 чисел: тех, которые вошли в подмножество, и обратных к не вошедшим в него. Какое наименьшее количество различных результатов он мог получить? (Напомним, что число, обратное к x , это $\frac{1}{x}$.)

8. На столе стоят 30 стопок с 1, 2, 3, ..., 30 монетами. Саша и Игорь ходят по очереди, начинает Саша. Саша первым ходом берет 1 монету, затем Игорь вторым ходом берет 2 монеты из разных стопок, затем Саша третьим ходом берет 3 монеты из разных стопок и так далее, т.е. на i -ом ходу игрок берет i монет по одной из разных стопок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что Игорь может обеспечить себе победу независимо от действий Саши.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025

ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На вечеринку пригласили 35 человек — мальчиков и девочек, но не все из них пришли. Каждый из присутствующих на вечеринке знает ровно трёх мальчиков и ровно семь девочек среди остальных пришедших. Сколько всего человек пришло на вечеринку?

2. По кругу написано 101 число. Эти числа пронумерованы по часовой стрелке. Возле первого числа написано утверждение «Это число больше следующего», возле второго — «Это число больше следующих двух» и т. д., возле 100-го — «Это число больше следующих 100 чисел» (следующих всегда имеется в виду по часовой стрелке). Какое максимальное количество высказываний может быть истинным?

3. Будем называть *маршрутом* обход по циклу всех клеток доски 100×100 по одному разу так, что из любой клетки мы идем в соседнюю по стороне, и в конце возвращаемся в исходную клетку. Докажите, что в любых двух маршрутах найдется клетка, из которой оба эти маршрута ведут вдоль одной и той же прямой (т.е. либо оба вправо-влево, либо оба вверх-вниз).

4. В ряд расположены 100 лампочек. Назовем *узором* любую комбинацию горящих лампочек. За одно переключение можно изменить состояние любых семи лампочек, стоящих подряд (включённую выключить, выключенную включить). Докажите, что из любых 70 узоров найдутся два, которые можно получить друг из друга последовательностью переключений.

5. Докажите, что среди 13 различных натуральных чисел, не превосходящих 2025, можно выбрать два числа $a < b$ таких, что число b дает четный остаток при делении на число a .

6. В ряд в некотором порядке записаны 3000 чисел: тысяча двоек и две тысячи минус единиц. Назовём группу подряд стоящих чисел *нейтральной*, если сумма чисел в этой группе равна нулю. Найдите наименьшее возможное количество нейтральных групп.

7. Натуральное число n имеет чётное количество делителей. Докажите, что их можно разбить на пары так, что в каждой паре один делится на другой.

8. Ювелир подписал четыре коробочки, в которых по одному хранятся алмазы весом в 5, 6, 7 и 8 граммов, числами: 5, 6, 7 и 8 соответственно. Однако, его рассеянный помощник перепутал самый лёгкий алмаз с каким-то другим. Как за наименьшее число взвешиваний с помощью чашечных весов без гирь узнать, где лежат какие алмазы?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 03.05.2025
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На вечеринку пригласили 35 человек — мальчиков и девочек, но не все из них пришли. Каждый из присутствующих на вечеринке знает ровно трёх мальчиков и ровно семь девочек среди остальных пришедших. Сколько всего человек пришло на вечеринку?

2. По кругу написано 101 число. Эти числа пронумерованы по часовой стрелке. Возле первого числа написано утверждение «Это число больше следующего», возле второго — «Это число больше следующих двух» и т. д., возле 100-го — «Это число больше следующих 100 чисел» (следующих всегда имеется в виду по часовой стрелке). Могут ли ровно 50 высказываний быть истинными?

3. Будем называть *маршрутом* обход по циклу всех клеток доски 100×100 по одному разу так, что из любой клетки мы идем в соседнюю по стороне, и в конце возвращаемся в исходную клетку. Докажите, что в любых двух маршрутах найдется клетка, из которой оба эти маршрута ведут вдоль одной и той же прямой (т.е. либо оба вправо-влево, либо оба вверх-вниз).

4. В ряд расположены 10 лампочек. *Узором* назовём любую комбинацию горящих лампочек. За одно переключение можно изменить состояние любых трёх лампочек, стоящих подряд (включённую выключить, выключенную включить). Докажите, что существуют три разных узора, которые нельзя получить друг из друга за несколько переключений.

5. Сколькими способами из полного комплекта домино можно удалить две кости, чтобы оставшиеся можно было по правилам игры в домино выложить в круг?

6. В ряд в некотором порядке записаны 33 числа: 11 чисел равных -2 и 22 числа равных 1. Назовём нулевым отрезком несколько идущих подряд чисел, сумма которых равна нулю. Докажите, что нулевых отрезков хотя бы 11. (Отрезки могут пересекаться, и даже один может находиться внутри другого.)

7. Натуральное число n имеет чётное количество делителей. Докажите, что их можно разбить на пары так, что в каждой паре один делится на другой.

8. Ювелир подписал четыре коробочки, в которых по одному хранятся алмазы весом в 5, 6, 7 и 8 граммов, числами: 5, 6, 7 и 8 соответственно. Однако, его рассеянный помощник перепутал самый лёгкий алмаз с каким-то другим. Как за наименьшее число взвешиваний с помощью чашечных весов без гирь узнать, где лежат какие алмазы?