

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА. МЛАДШАЯ ГРУППА.

1. Вдоль прямой дороги расположены пункты A , B , C и D именно в таком порядке. В пункте A находится будка сторожа. Он патрулирует дорогу: идёт из A до одного из трёх других пунктов, затем разворачивается и возвращается обратно в A . Известно, что в пункте C он разворачивался вдвое, а в пункте B — вчетверо больше раз, чем в пункте D . Всего в пункте B сторож побывал 140 раз. Сколько раз он доходил до пункта D ?

2. Пусть $n \geq 3$ — натуральное число. Все клетки квадрата $n \times n$, лежащие ниже диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол, покрашены в красный цвет, а клетки этой диагонали — в синий. Игорь вырезал несколько прямоугольников 1×3 из красных клеток. Докажите, что Саша сможет вырезать еще один такой прямоугольник из покрашенных (красных или синих) клеток.

3. Назовём пятизначное число без нулевых цифр *интересным*, если оно является палиндромом (т. е. если прочесть его цифры в обратном порядке, то получится исходное число, например, 23432) и его средняя цифра в два раза больше первой. Докажите, что произведение 2025 интересных чисел не может быть квадратом натурального числа.

4. В треугольнике ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$, проведена медиана AM . На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка N так, что $AM = MN$. Найдите AB/CN .

5. В стране n городов, некоторые пары из них соединены дорогами с двухсторонним движением. В некоторых городах построены школы, назовем такие города *важными*. Оказалось, что 1) из каждого города можно добраться до любого другого; 2) каждый **не** важный город соединён дорогой с важным городом. Для какого наименьшего k всегда можно закрыть все дороги, кроме некоторых k , на ремонт так, чтобы эти два условия сохранились?

6. По дороге едет машина, скорость которой составляет натуральное число километров в час. Каждый раз, проезжая 1 км, машина увеличивает или уменьшает свою скорость на 1 км/ч, но не останавливается. При каком наименьшем натуральном n машина могла проехать n км за 2025 минут?

7. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка E , а на продолжении стороны BC за точку C — точка F , причем $\angle ADF = 2\angle CDE$. Докажите, что $BE < CF$.

8. Паша загадал два различных натуральных числа m и n , больших 2025. Затем он выписал в тетрадку в произвольном порядке все значения, которые может принимать сумма остатков от деления натурального числа на m , на n и на mn . Всегда ли Максим сможет отгадать m и n , зная числа в тетрадке Паши?