

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Строки и столбцы таблицы $n \times n$ пронумерованы числами от 1 до n . Для каждой пары (i, j) , где $1 \leq i, j \leq n$, в клетке на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит число $n \cdot (i - 1) + j$. Найдите все натуральные n , для которых в таблице найдется ровно 2025 строк, не содержащих квадраты целых чисел.

2. Даны сто различных пар целых неотрицательных чисел $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{100}, b_{100})$. Для какого наибольшего количества пар (i, j) , $1 \leq i < j \leq 100$, может выполняться условие $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$?

3. 511 лампочек управляются несколькими выключателями. Каждый выключатель подсоединен к некоторому множеству лампочек, к каждой лампочке подсоединен хотя бы один выключатель. Когда мы используем выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: включенные лампочки выключаются, а выключенные — включаются. Вначале все лампочки выключены. Найдите наибольшее число k , для которого с помощью этих выключателей гарантированно удастся включить не меньше k лампочек.

4. Дан граф. Пусть b_k — это количество способов выбрать в графе множество из k ребер, не имеющих общих вершин. Докажите, что последовательность b_k унимодальна, т. е. существует такой индекс k_0 , что она нестрого возрастает при $k \leq k_0$ и нестрого убывает при $k \geq k_0$.

5. В остроугольном треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC . Пусть I, J, K — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ABM и ACM соответственно. На прямых MK и MJ отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle AJP = \angle ABC$ и $\angle AKQ = \angle BCA$. Прямые CP и BQ пересекаются в точке R . Докажите, что $IR \perp BC$.

6. вещественные неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют равенству $ab + ac + bc + abc = 4$. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{ab + ac + 1}{a + 2}} + \sqrt{\frac{ab + bc + 1}{b + 2}} + \sqrt{\frac{ac + bc + 1}{c + 2}} \leq 3.$$

7. Дано натуральное k . Для какого наименьшего n верно следующее утверждение: из любых nk точек плоскости, покрашенных в k цветов (по n точек каждого цвета), можно выбрать по две точки каждого цвета и соединить их отрезком так, чтобы эти k отрезков не имели общих точек (в том числе, концов)? Мы рассматриваем только конфигурации, в которых никакие три точки не лежат на одной прямой.

8. На медиане AM остроугольного неравностороннего треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle NPC = \angle MPC$, где N — середина стороны AC . Прямая NP пересекает прямую, проходящую через точку B параллельно CP , в точке D . Докажите, что $AD = AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Строки и столбцы таблицы $n \times n$ пронумерованы числами от 1 до n . Для каждой пары (i, j) , где $1 \leq i, j \leq n$, в клетке на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит число $n \cdot (i - 1) + j$. Найдите все натуральные n , для которых в таблице найдется ровно 2025 строк, не содержащих квадраты целых чисел.

2. Сколько существует троек натуральных чисел (x, y, z) , каждое из которых меньше 2025, в которых $z > 1$, $y + 1$ делится на x , $z - 1$ делится на y и $x^2 + 1$ делится на z ?

3. 511 лампочек управляются несколькими выключателями. Каждый выключатель подсоединен к некоторому множеству лампочек, к каждой лампочке подсоединен хотя бы один выключатель. Когда мы используем выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: включенные лампочки выключаются, а выключенные — включаются. Вначале все лампочки выключены. Найдите наибольшее число k , для которого с помощью этих выключателей гарантированно удастся включить не меньше k лампочек.

4. Ребра полного графа на n вершинах покрашены в красный и синий цвета. Каждую секунду пожарный зажигает одну вершину, зажженные вершины горят, пока их не потушат. Каждая вершина, соединенная красным ребром хотя бы с одной горящей, в следующую секунду тоже загорится. После того, как все вершины загорелись, красные ребра перестают подпитывать пожар, и пожарный начинает его тушить. Каждую секунду он тушит одну вершину, а вершины, соединенные синим ребром хотя бы с одной потухшей, в следующую секунду тоже потухнут. Для любой ли раскраски ребер пожарный сможет проверить оба процесса за $n + 2$ секунды?

5. В остроугольном треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC . Пусть I , J , K — центры вписанных окружностей треугольников ABC , ABM и ACM соответственно. На прямых MK и MJ отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle AJP = \angle ABC$ и $\angle AKQ = \angle BCA$. Прямые CP и BQ пересекаются в точке R . Докажите, что $IR \perp BC$.

6. Вещественные неотрицательные числа a , b и c удовлетворяют равенству $ab + ac + bc + abc = 4$. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{ab + ac + 1}{a + 2}} + \sqrt{\frac{ab + bc + 1}{b + 2}} + \sqrt{\frac{ac + bc + 1}{c + 2}} \leq 3.$$

7. Дано натуральное k . Для какого наименьшего n верно следующее утверждение: из любых nk точек плоскости, покрашенных в k цветов (по n точек каждого цвета), можно выбрать по две точки каждого цвета и соединить их отрезком так, чтобы эти k отрезков не имели общих точек (в том числе, концов)? Мы рассматриваем только конфигурации, в которых никакие три точки не лежат на одной прямой.

8. На медиане AM остроугольного неравностороннего треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle NPC = \angle MPC$, где N — середина стороны AC . Прямая NP пересекает прямую, проходящую через точку B параллельно CP , в точке D . Докажите, что $AD = AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. Строки и столбцы таблицы $n \times n$ пронумерованы числами от 1 до n . Для каждой пары (i, j) , где $1 \leq i, j \leq n$, в клетке на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит число $n \cdot (i - 1) + j$. Найдите все натуральные n , для которых в таблице найдется ровно 2025 строк, не содержащих квадраты целых чисел.

2. Сколько существует троек натуральных чисел (x, y, z) , каждое из которых меньше 2025, в которых $z > 1$, $y + 1$ делится на x , $z - 1$ делится на y и $x^2 + 1$ делится на z ?

3. 511 лампочек управляются несколькими выключателями. Каждый выключатель подсоединен к некоторому множеству лампочек, к каждой лампочке подсоединен хотя бы один выключатель. Когда мы используем выключатель, все лампочки, к которым он подсоединен, меняют свое состояние: включенные лампочки выключаются, а выключенные — включаются. Вначале все лампочки выключены. Найдите наибольшее число k , для которого с помощью этих выключателей гарантированно удастся включить не меньше k лампочек.

4. Ребра полного графа на n вершинах покрашены в красный и синий цвета. Каждую секунду пожарный зажигает одну вершину, зажженные вершины горят, пока их не потушат. Каждая вершина, соединенная красным ребром хотя бы с одной горящей, в следующую секунду тоже загорится. После того, как все вершины загорелись, красные ребра перестают подпитывать пожар, и пожарный начинает его тушить. Каждую секунду он тушит одну вершину, а вершины, соединенные синим ребром хотя бы с одной потухшей, в следующую секунду тоже потухнут. Для любой ли раскраски ребер пожарный сможет проверить оба процесса за $n + 2$ секунды?

5. В остроугольном треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC . Пусть I , J , K — центры вписанных окружностей треугольников ABC , ABM и ACM соответственно. На прямых MK и MJ отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle AJP = \angle ABC$ и $\angle AKQ = \angle BCA$. Прямые CP и BQ пересекаются в точке R . Докажите, что $IR \perp BC$.

6. Даны целые числа a и b . Положим $f(x) = \frac{1}{ax+b}$. Оказалось, что существуют различные вещественные числа x_1, x_2, x_3 такие, что $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ и $f(x_3) = x_1$. Докажите, что $|a|$ является точным квадратом.

7. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведен отрезок, соединяющий две отмеченные точки. При каком наибольшем k можно провести k отрезков с концами в отмеченных точках так, чтобы никакие два из $k + 1$ проведенных отрезков не имели общих точек (в том числе, концов)?

8. На медиане AM остроугольного неравностороннего треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle NPC = \angle MPC$, где N — середина стороны AC . Прямая NP пересекает прямую, проходящую через точку B параллельно CP , в точке D . Докажите, что $AD = AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. Строки и столбцы таблицы $n \times n$ пронумерованы числами от 1 до n . Для каждой пары (i, j) , где $1 \leq i, j \leq n$, в клетке на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит число $n \cdot (i - 1) + j$. Найдите все натуральные n , для которых в таблице найдется ровно 2025 строк, не содержащих квадраты целых чисел.

2. Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) таких, что каждое из них меньше 100 и верно

$$a! + b! = a!c!$$

3. Фабрика выпускает 90 видов бантиков. В наборе «Красавица» имеется 11 разных бантиков (какие именно — можно выбирать при покупке). На праздник каждая принцесса должна надеть 4 бантика. Черный ловелас хочет подарить принцессам по одному набору «Красавица» так, чтобы любой комплект из 4 бантиков встречался в наборе ровно одной из принцесс. Есть ли у него шанс?

4. Ребра полного графа на n вершинах покрашены в красный и синий цвета. Каждую секунду пожарный зажигает одну вершину, зажженные вершины горят, пока их не потушат. Каждая вершина, соединенная красным ребром хотя бы с одной горячей, в следующую секунду тоже загорится. После того, как все вершины загорелись, красные ребра перестают подпитывать пожар, и пожарный начинает его тушить. Каждую секунду он тушит одну вершину, а вершины, соединенные синим ребром хотя бы с одной потухшей, в следующую секунду тоже потухнут. Для любой ли раскраски ребер пожарный сможет проверить оба процесса за $n + 2$ секунды?

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C отмечена точка пересечения биссектрис I и проведена биссектриса AN . Оказалось, что $CA + AI = CB$, и $CN = 2$. Найдите NB .

6. Даны целые числа a и b . Положим $f(x) = \frac{1}{ax+b}$. Оказалось, что существуют различные вещественные числа x_1, x_2, x_3 такие, что $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ и $f(x_3) = x_1$. Докажите, что $|a|$ является точным квадратом.

7. На плоскости отмечено 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведен отрезок, соединяющий две отмеченные точки. При каком наибольшем k можно провести k отрезков с концами в отмеченных точках так, чтобы никакие два из $k + 1$ проведенных отрезков не имели общих точек (в том числе, концов)?

8. На медиане AM остроугольного неравнобедренного треугольника ABC отмечена точка P так, что $\angle NPC = \angle MPC$, где N — середина стороны AC . Прямая NP пересекает прямую, проходящую через точку B параллельно CP , в точке D . Докажите, что $AD = AB$.