

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. В небольшом городке в Мексике живет n мексиканцев, некоторые из которых знакомы. Они решили сыграть в игру. В первый день каждый мексиканец написал на своей шляпе натуральное число. В каждый последующий день они меняли свое число по правилу: в $(i + 1)$ -й день каждый мексиканец пишет у себя на шляпе наименьшее натуральное число, которого не было на шляпе ни у одного из его знакомых в i -й день. Известно, что в какой-то день каждый мексиканец написал то же число, что и в предыдущий день, после чего они решили прекратить игру. Определите максимальное количество дней, которое могла длиться эта игра.

2. Дано натуральное число $n \geq 3$ и натуральное число x , взаимно простое с $n(n - 1)$. Докажите, что существуют натуральные числа a , взаимно простое с $n - 1$, и b , взаимно простое с n , такие что

$$x \equiv a(n - 1) + bn \pmod{n(n - 1)}.$$

3. Ньюша собирается выбрать набор натуральных чисел $\Omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ (где $n \geq 3$) и для каждого непустого подмножества $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ вычислить сумму $s_A = \sum_{k \in A} a_k$. После этого она расположит эти суммы в порядке возрастания:

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{2^n - 1}.$$

Докажите, что до начала этого эксперимента можно выбрать такое множество номеров $B \subseteq \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, содержащее $2^{n-2} + 1$ элементов, что, независимо от того, какой набор Ω выберет Ньюша, этот набор можно будет найти, зная только суммы s_i , где $i \in B$.

4. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно, причём $PQ \parallel BC$. На отрезках BQ и CP отмечены точки X и Y соответственно так, что $\angle AXP = \angle XCB$ и $\angle AYQ = \angle YBC$. Докажите, что $AX = AY$.

5. В самой левой клетке полосы 1×203 лежат 203 фишки, а остальные клетки пусты. Каждым ходом можно взять одну или 20 фишек из одной клетки и переложить их всех в соседнюю клетку (все влево или все вправо). После 2023 ходов в каждой клетке оказалось по фишке. Докажите, что существует фишка, которая двигалась влево не менее девяти раз.

6. В центральной клетке таблицы 101×101 стоит число 0, а в остальных клетках число 1. Раз в секунду число в каждой клетке, кроме центральной, заменяется на среднее арифметическое чисел в соседних по стороне клетках (все эти замены происходят одновременно). Докажите, что через 10^{75} секунд числа во всех клетках будут меньше 10^{-2025} .

7. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB < AC$ и $\angle BAC = 60^\circ$. В нём проведены высоты AD , BE и CF , а также отмечен ортоцентр H . Пусть K , L , M — середины сторон BC , CA и AB соответственно. Докажите, что середины отрезков AH , DK , EL и FM лежат на одной окружности.

8. Бесконечная последовательность рациональных чисел удовлетворяет условиям $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot n}{[x_n \cdot n]}$. Докажите, что эта последовательность содержит число 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. В небольшом городке в Мексике живет n мексиканцев, некоторые из которых знакомы. Они решили сыграть в игру. В первый день каждый мексиканец написал на своей шляпе натуральное число. В каждый последующий день они меняли свое число по правилу: в $(i + 1)$ -й день каждый мексиканец пишет у себя на шляпе наименьшее натуральное число, которого не было на шляпе ни у одного из его знакомых в i -й день. Известно, что в какой-то день каждый мексиканец написал то же число, что и в предыдущий день, после чего они решили прекратить игру. Определите максимальное количество дней, которое могла длиться эта игра.

2. Дано натуральное число $n \geq 3$ и натуральное число x , взаимно простое с $n(n - 1)$. Докажите, что существуют натуральные числа a , взаимно простое с $n - 1$, и b , взаимно простое с n , такие что

$$x \equiv a(n - 1) + bn \pmod{n(n - 1)}.$$

3. Ньюша собирается выбрать набор натуральных чисел $\Omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ (где $n \geq 3$) и для каждого непустого подмножества $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ вычислить сумму $s_A = \sum_{k \in A} a_k$. После этого она расположит эти суммы в порядке возрастания:

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{2^n - 1}.$$

Докажите, что до начала этого эксперимента можно выбрать такое множество номеров $B \subseteq \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$, содержащее $2^{n-2} + 1$ элементов, что, независимо от того, какой набор Ω выберет Ньюша, этот набор можно будет найти, зная только суммы s_i , где $i \in B$.

4. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно, причём $PQ \parallel BC$. На отрезках BQ и CP отмечены точки X и Y соответственно так, что $\angle AXP = \angle XCB$ и $\angle AYQ = \angle YBC$. Докажите, что $AX = AY$.

5. В самой левой клетке полосы 1×203 лежат 203 фишки, а остальные клетки пусты. Каждым ходом можно взять одну или 20 фишек из одной клетки и переложить их всех в соседнюю клетку (все влево или все вправо). После 2023 ходов в каждой клетке оказалось по фишке. Докажите, что существует фишка, которая двигалась влево не менее девяти раз.

6. Дано натуральное число n . Докажите, что существует лишь конечное количество таких натуральных чисел m , что число $m^2 + n^2 + 1$ делится и на $m - n + 1$, и на $m + n + 1$.

7. В треугольнике ABC угол B прямой. Точка D на стороне AB и точка E на стороне AC таковы, что $BD + DE = CE$ и $\angle BDE = 2\angle BCE$. Докажите, что $AE + ED = DB$.

8. Бесконечная последовательность рациональных чисел удовлетворяет условиям $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n \cdot n}{[x_n \cdot n]}$. Докажите, что эта последовательность содержит число 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. Дан двудольный граф, в котором каждая доля содержит четное число вершин. Докажите, что этом графе невозможно выбрать дерево на всех вершинах, у которого степени всех вершин нечетны.

2. Дано натуральное число $n \geq 3$ и натуральное число x , взаимно простое с $n(n-1)$. Докажите, что существуют натуральные числа a , взаимно простое с $n-1$, и b , взаимно простое с n , такие что

$$x \equiv a(n-1) + bn \pmod{n(n-1)}.$$

3. Нюша собирается выбрать набор натуральных чисел $\Omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ (где $n \geq 3$) и для каждого непустого подмножества $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ вычислить сумму $s_A = \sum_{k \in A} a_k$. После этого она расположит эти суммы в порядке возрастания:

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{2^n-1}.$$

Докажите, что до начала этого эксперимента можно выбрать такое множество номеров $B \subseteq \{1, 2, \dots, 2^n-1\}$, содержащее $2^{n-2} + 1$ элементов, что, независимо от того, какой набор Ω выберет Нюша, этот набор можно будет найти, зная только суммы s_i , где $i \in B$.

4. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q соответственно, причём $PQ \parallel BC$. На отрезках BQ и CP отмечены точки X и Y соответственно так, что $\angle AXP = \angle XCB$ и $\angle AYQ = \angle YBC$. Докажите, что $AX = AY$.

5. В самой левой клетке полосы 1×203 лежат 203 фишки, а остальные клетки пусты. Каждым ходом можно взять одну или 20 фишек из одной клетки и переложить их всех в соседнюю клетку (все влево или все вправо). После 2023 ходов в каждой клетке оказалось по фишке. Докажите, что существует фишка, которая двигалась влево не менее девяти раз.

6. Дано натуральное число n . Докажите, что существует лишь конечное количество таких натуральных чисел m , что число $m^2 + n^2 + 1$ делится и на $m - n + 1$, и на $m + n + 1$.

7. В треугольнике ABC угол B прямой. Точка D на стороне AB и точка E на стороне AC таковы, что $BD + DE = CE$ и $\angle BDE = 2\angle BCE$. Докажите, что $AE + ED = DB$.

8. Вася выписал на доску 100 различных натуральных чисел. Оказалось, что сумма выписанных чисел больше 10 000. Докажите, что существуют два (возможно, равных) натуральных числа x и y , таких что число $x+y$ выписано на доске, а числа x и y нет.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.05.2025**СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. Дан двудольный граф, в котором каждая доля содержит четное число вершин. Докажите, что этом графе невозможно выбрать дерево на всех вершинах, у которого степени всех вершин нечетны.
2. Найдите все натуральные n , для которых существуют такие различные натуральные числа a и b , что $n! = 2^a + 2^b$.
3. Двадцать пять детсадовцев накормили кашей, посадили за круглый стол и каждую минуту спрашивают, сладкая ли каша, а дети отвечают «да» или «нет». Если на какой-то раз ребёнок ответил на вопрос так же, как хотя бы один из его соседей, в следующий раз он ответит так же. А если оба соседа ответили не так, как он, то в следующий раз он ответит по-другому. Докажите, что, как бы дети ни ответили в первый раз, в какой-то момент ответы всех детей перестанут изменяться.
4. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) пересекаются в точке E . Известно, что $AB = BE$ и $AC = DE$. Докажите, что биссектриса угла BAC перпендикулярна AD .
5. В самой левой клетке полосы 1×203 лежат 203 фишки, а остальные клетки пусты. Каждым ходом можно взять одну или 20 фишек из одной клетки и переложить их всех в соседнюю клетку (все влево или все вправо). После 2023 ходов в каждой клетке оказалось по фишке. Докажите, что существует фишка, которая двигалась влево не менее девяти раз.
6. Дано натуральное число n . Докажите, что существует лишь конечное количество таких натуральных чисел m , что число $m^2 + n^2 + 1$ делится и на $m - n + 1$, и на $m + n + 1$.
7. В треугольнике ABC угол B прямой. Точка D на стороне AB и точка E на стороне AC таковы, что $BD + DE = CE$ и $\angle BDE = 2\angle BCE$. Докажите, что $AE + ED = DB$.
8. Вася выписал на доску 100 различных натуральных чисел. Оказалось, что сумма выписанных чисел больше 10 000. Докажите, что существуют два (возможно, равных) натуральных числа x и y , таких что число $x + y$ выписано на доске, а числа x и y нет.