

Решения задач командной олимпиады 8 класса

1. На доске написаны числа $1^2, 2^2, \dots, 100^2$. Найдите наименьшее натуральное число, на которое делятся ровно два из выписанных чисел.

Ответ: 34. **Решение.** Для любого $n \leq 33$ на доске написаны числа $n^2, (2n)^2$ и $(3n)^2$, поэтому такое число не подходит.

С другой стороны, если k^2 делится на $34 = 2 \cdot 17$, то k делится на простые числа 2 и 17 и, следовательно, на их произведение 34. Однако среди чисел от 1 до 100 на 34 делятся только два числа.

2. Сколько существует последовательностей натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{18} , для которых $a_1 = a_2 = 1$ и $|a_n - a_{n-1}| = a_{n-2}$ для всех $3 \leq n \leq 18$?

Ответ: 1597.

Решение. Пусть $s_i = 1$, если $a_{i+2} - a_{i+1} > 0$ и $s_i = -1$ иначе. Тогда $a_{i+2} - a_{i+1} = s_i a_i$, то есть $a_{i+2} = s_i a_i + a_{i+1}$, а значит, последовательность a_i однозначно восстанавливается по числам s_1, s_2, \dots, s_{16} (с учетом начальных данных $a_1 = a_2 = 1$). Заметим, что последовательности s_i не может содержать две -1 подряд. Действительно, если $s_{i-1} = s_i = -1$, то $a_{i+1} = a_i - a_{i-1}$ и $a_{i+2} = a_{i+1} - a_i = -a_{i-1} < 0$, что невозможно, так как число a_i натуральное. Также заметим, что $s_1 = 1$, потому что иначе $a_3 = a_2 - a_1 = 0$. При этом любая последовательность s_i , где нет двух -1 подряд и $s_2 = 1$, соответствует последовательности натуральных чисел a_i из условия. Действительно, если $s_i = 1$, то $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i > 0$. А если $s_i = -1$, то $s_{i-1} = 1$ и $a_{i+2} = a_{i+1} - a_i = a_{i-1} > 0$. Таким образом, искомое число равно количеству последовательностей s_1, s_2, \dots, s_{16} , в которых перед каждой -1 идёт 1. Найдем это количество.

Пусть в последовательности i раз встречается -1 . Заменяем каждую -1 и 1, идущую перед ней, на $*$. Тогда мы получим последовательность из $16 - i$ символов, среди которых i символов $*$. При этом такие последовательности находятся в взаимно однозначном соответствии с исходными. Тогда ответ равен

$$\sum_{i=0}^8 C_{16-i}^i = 1 + 15 + 91 + 286 + 495 + 462 + 210 + 36 + 1 = 1597.$$

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором углы A и D острые и $AB = BC = CD$. Оказалось, что $\angle BDA = 30^\circ$. Докажите, что $\angle DAC = 30^\circ$.

Решение. Пусть E — точка симметричная B относительно AD . Тогда $BD = DE$ и $\angle BDA = \angle EDA = 30^\circ$, следовательно, треугольник BDE — равносторонний. Обозначим $\angle ABE = \alpha$. Треугольники ABE и BCD равны по трем сторонам, поэтому $\angle CBD = \angle ABE = \alpha$. Из равнобедренности треугольника ABC получаем, что $\angle BAC = (180^\circ - (2\alpha + 60^\circ))/2 = 60^\circ - \alpha$. С другой стороны, созерцая треугольник ABD , находим, что $\angle BAD = 180^\circ - (60^\circ + \alpha) - 30^\circ = 90^\circ - \alpha$. Осталось отметить, что $\angle DAC = \angle BAD - \angle BAC = (90^\circ - \alpha) - (60^\circ - \alpha) = 30^\circ$.

4. На клетчатой доске 2025×2025 некоторые клетки закрашены в чёрный цвет так, что с любой клетки доски ладья может выйти за пределы доски в одном из четырёх направлений (вверх, вниз, влево или вправо), не проходя ни по одной чёрной клетке, кроме, возможно, исходной. Какое наибольшее количество чёрных клеток может быть?

Ответ: 8096.

Решение. Докажем, что на доске не может быть больше 8096 чёрных клеток. Отметим в каждом столбце самую верхнюю и самую нижнюю чёрные клетки. Таким образом мы отметили не более $2025 \cdot 2 = 4050$ клеток, при этом все чёрные клетки в верхней и нижней строках уже помечены. Предположим, что какая-то из оставшихся строк содержит хотя бы 3 не отмеченные чёрные клетки. Тогда средняя из них не является крайней чёрной клеткой в своей строке и в своем столбце. Значит, ладья с неё не сможет выйти за пределы доски, не пройдя по чёрной клетке, противоречие. Следовательно, в каждой из оставшихся 2023 строк имеется не более 2-х чёрных клеток. То есть всего чёрных клеток не более $2023 \cdot 2 + 2025 \cdot 2 = 8096$.

Теперь покажем, что 8096 чёрных клеток может быть. Действительно, покрасим в чёрный цвет все клетки левого и правого столбца, а также все клетки нижних двух строчек. Нетрудно проверить, что пример удовлетворяет условию.

5. Бесконечная последовательность положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3, \dots такова, что $r_1 + r_2 + \dots + r_k = r_1 r_2 \dots r_k$ при каждом натуральном k . Докажите, что с некоторого момента число $\frac{1}{r_n} - \frac{3}{4}$ является квадратом рационального числа.

Решение. Мы будем использовать обозначение $S_k = r_1 + r_2 + \dots + r_k$. При $k > 1$ по условию имеем $S_{k-1} = r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1} = r_1 r_2 \dots r_{k-1}$ и $S_{k-1} + r_k = r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1} + r_k = r_1 r_2 \dots r_{k-1} r_k = S_{k-1} r_k$, откуда $r_k = \frac{S_{k-1}}{S_{k-1} - 1}$.

Пусть теперь $n > 2$, $S_{n-2} = x$. По доказанному выше $r_{n-1} = \frac{x}{x-1}$, $S_{n-1} = S_{n-2} r_{n-1} = \frac{x^2}{x-1}$, $r_n = \frac{S_{n-1}}{S_{n-1} - 1} = \frac{x^2}{x^2 - x + 1}$. Тогда

$$\frac{1}{r_n} - \frac{3}{4} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right)^2,$$

что и требовалось доказать.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом 100° при вершине C . Точка D на стороне AB такова, что $\angle CDB = 60^\circ$. Биссектриса AE пересекает CD в точке N . Докажите, что $AB = CE + EN + NC$.

Решение. $AC = BC \implies \angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Тогда $\alpha = (180^\circ - 100^\circ)/2 = 40^\circ$. Далее находим, что

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle DBC = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ.$$

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle DCB = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ.$$

Тогда CE — внешняя биссектриса угла C треугольника ACD , а AE — внутренняя биссектриса угла A треугольника ACD . Значит, E — центр вневписанной окружности треугольника ACD и $\angle CDE = \angle EDB = \angle BDC/2 = 30^\circ$. Тогда $\angle CEN = 60^\circ = \angle BDN$, а значит, четырёхугольник $DNEB$ — вписанный. Из равенства $\angle CDE = \angle EDB$ следует $EN = EB$.

Отложим на луче AE за точку E отрезок $EF = CE$. Тогда $EF = CE$, $EN = EB$ и $\angle CEN = \angle FEB$, а значит, $\triangle CEN = \triangle EFB$. Тогда $\angle AFB = \angle EFB = \angle ECN = 80^\circ$ и

$$\angle FBA = \angle FBE + \angle CBA = \angle CNE + 40^\circ = 180^\circ - \angle NCE - \angle CEN + 40^\circ = 80^\circ = \angle EFB = \angle AFB,$$

а тогда $AB = AF$. Также $\angle ACN = 20^\circ = \angle CAN \implies CN = AN$, а тогда $AB = AF = AN + NE + EF = CN + NE + EF$.

7. В дереве T 80 вершин. Набор из 39 независимых ребер (не имеющих общих вершин) будем называть толстым паросочетанием. Известно, что дерево T имеет 820 различных толстых паросочетаний. Докажите, что T — путь.

Решение. Будем доказывать индукцией по n , что дерево на $2n$ вершинах имеет не более C_{n+1}^2 (толстых) паросочетаний с $n-1$ независимыми рёбрами. Причём если $n \geq 3$ и толстых паросочетаний ровно C_{n+1}^2 , то дерево является путем. А при $n = 2$ граф является или путем, или «графом-ёжиком».

При $n = 2$ существуют только такие деревья. Докажем переход. Пусть T — дерево на $2n$ вершинах, $n \geq 3$. Так как дерево — это двудольный граф, его вершины можно разбить на две доли V_1 и V_2 . Заметим, что любое толстое паросочетание содержит по $n-1$ вершин из долей V_1 и V_2 . Следовательно, раз уж толстые паросочетания вообще существуют, возможны три случая, два из которых симметричны.

1. $|V_1| = n+1$, $|V_2| = n-1$ или $|V_1| = n-1$, $|V_2| = n+1$. Разберём первый случай, второй доказывается аналогично. Заметим, что в любом толстом паросочетании не участвуют 2 вершины из доли V_1 . Количество способов выбрать две вершины из V_1 равно C_{n+1}^2 . Значит, толстых паросочетаний не более C_{n+1}^2 . Предположим, что их ровно C_{n+1}^2 . Тогда для любых двух вершин $u, v \in V_1$ существует толстое паросочетание, не содержащее вершины u и v . Но такого не может быть. Действительно, количество рёбер в дереве равно $2n-1$, а $|V_2| = n-1$. Так как $n \geq 3$, в доле V_2 есть вершина x степени не более 2. Тогда без вершин из V_1 , среди которых есть все соседи x , толстое паросочетания построить невозможно, противоречие.

2. $|V_1| = n$, $|V_2| = n$. Подвесим граф за вершину. Пусть v — висячая вершина последнего уровня, а u — её сосед на предыдущем уровне. Без ограничения общности будем считать, что $v \in V_1$. Если у вершины u есть ещё одна соседняя висячая вершина w , то любое толстое паросочетание не содержит одну из вершин w или v , и одну из вершин V_2 . Тогда толстых паросочетаний не больше $2n < C_{n+1}^2$ при $n \geq 3$.

Пусть у вершины u нет соседних висячих вершин, кроме v . Разобьём толстые паросочетания T на два типа, первый тип — не содержащие v , второй тип — содержащие ребро uv . Паросочетаний первого типа не более n , так как они не содержат v и одну из вершин V_2 , коих n . Все паросочетания второго типа образуют толстое паросочетание дерева $T' = T - u - v$, причём в T' поровну вершин в долях. По предположению индукции в дереве T' не более C_n^2 толстых паросочетаний. Значит, в T не более $C_n^2 + n = C_{n+1}^2$ толстых паросочетаний. Более того, если в дереве T ровно C_{n+1}^2 толстых паросочетаний, то паросочетаний первого типа ровно n , второго — ровно C_n^2 , а дерево T' — это путь $a_1 a_2 \dots a_{2n-2}$. Если сосед u — это a_1 или a_{2n-2} , то T — путь. Иначе из соображения чётности одна из вершин a_2 и a_{2n-3} лежит в доле V_2 дерева T (пусть a_2). Но тогда при удалении вершин v и a_2 дерево не имеет паросочетания. Следовательно, паросочетаний первого типа меньше n , противоречие. Индукционный переход доказан.

8. Натуральные числа a , b и n таковы, что $an - a + 1$ делится на bn . Докажите, что числа $\left[\frac{a}{b}\right]$, $\left[\frac{2a}{b}\right]$, \dots , $\left[\frac{(n-1)a}{b}\right]$ дают при делении на n остатки $1, 2, \dots, n-1$ в некотором порядке.

Решение. Добавим к числам из условия число $\left[\frac{a}{b}\right] = 0$, очевидно, дающее при делении на n остаток 0. Нам достаточно показать, что все рассматриваемые теперь n чисел дают разные остатки. Предположим противное: $\left[\frac{ia}{b}\right] \equiv \left[\frac{ja}{b}\right] \pmod{n}$, где $0 \leq i < j \leq n-1$.

Пусть r — общий остаток при делении на n чисел $\left[\frac{ia}{b}\right]$ и $\left[\frac{ja}{b}\right]$, а s и t — остатки, которые дают при делении на b числа ia и ja соответственно. Имеем $\left[\frac{ia}{b}\right] = \frac{ia}{b} - \frac{s}{b} = kn + r$ при некотором целом k , и аналогично $\frac{ja}{b} - \frac{t}{b} = \ell n + r$ при некотором целом ℓ . Вычитая эти равенства, получаем

$$\frac{(j-i)a}{b} = (\ell - k)n + \frac{s-t}{b},$$

или

$$(j-i)a \equiv t-s \pmod{bn}.$$

Домножив последнее сравнение на $n-1$, получим

$$(j-i)(n-1)a \equiv (t-s)(n-1) \pmod{bn}.$$

Однако по условию $(n-1)a \equiv -1 \pmod{bn}$, то есть $(t-s)(n-1) + (j-i)$ кратно n . Поскольку $0 \leq i, j \leq n-1$ и $0 \leq s, t \leq b-1$, имеем неравенство

$$|(t-s)(n-1) + (j-i)| \leq (b-1)(n-1) + (n-1) < bn.$$

Следовательно, $(t-s)(n-1) + (j-i) = 0$. Тогда $j-i$ кратно $n-1$, что возможно только при $i = 0$ и $j = n-1$, но тогда $s = 0$ и $(t-s)(n-1) + (j-i) > 0$ — противоречие.