

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025 ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Древняя Одномерная империя располагалась вдоль прямой линии. Изначально в ней не было городов. Один за другим были основаны n городов. Каждый город — точка на прямой, не совпадающая с ранее построенными точками. Начиная со второго, каждый вновь основанный город и ближайший к нему существующий объявлялись городами-побратимами (если ближайших два, то выбирается тот из них, который построен раньше). На сохранившейся карте империи указаны города и расстояния между ними, но не порядок, в котором они были основаны. Историки, изучив карту, поняли, что у каждого города было не более 20 побратимов. При каком наибольшем n существует карта, на которой историки заведомо смогут сделать такой вывод?

2. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a! + b$ и $b! + a$ это натуральные степени одного и того же простого числа p . Докажите, что тогда и $p! + p$ тоже является натуральной степенью p .

3. Натуральное число d называется *блокирующим делителем* натурального числа n , если n делится на d и числа d и n/d взаимно просты. Пусть $B(n)$ обозначает сумму всех блокирующих делителей n . Найдите все не кратные четырём числа n , для которых $B(n) = 2n$.

4. В стране 99 городов. Министр транспорта строит несколько дорог, каждая дорога соединяет какие-то два города. Министр финансов после этого присваивает каждому городу число 1 или 2. Перемещаться по стране теперь можно по следующему правилу: находясь в городе с числом t , можно проехать ровно по t дорогам (при проезде по двум дорогам промежуточный город не считается посещённым). Может ли Министр транспорта так построить 131 дорогу, чтобы при любой расстановке чисел можно было из любого города добраться до любого другого за несколько перемещений?

5. Докажите, что существует бесконечное количество натуральных n таких, что число $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ единиц}}$ представляется в виде суммы 2025 различных натуральных чисел, отличающихся друг от друга перестановкой цифр.

6. Клетки доски 100×200 покрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Найдите количество ломаных длины 300, идущих по линиям сетки из левого нижнего угла доски в правый верхний таких, что множество клеток, лежащих под ломаной, содержит поровну чёрных и белых клеток.

7. Рассмотрим множества натуральных чисел, не превосходящих 1000. Два множества будем называть *родственными*, если одно из них получается из другого вычитанием всех элементов из числа 1001. Петя выбрал n множеств, причём любые два выбранных Петей множества пересекаются, а также для любого выбранного Петей множества его родственное тоже выбрано. Какое наибольшее количество множеств мог выбрать Петя? (Напомним, что в множестве не может быть повторяющихся элементов. Например, $\{1, 2, 3\}$ — множество, а $\{1, 1, 2, 3, 3\}$ — нет.)

8. Группу гирь будем называть *равной*, если сумма весов двух наибольших гирь в этой группе меньше суммы весов всех остальных. Дано 60 гирь различных весов, которые можно разбить на 12 равных групп по 5 гирь. Всегда ли эти 60 гирь можно разбить на 10 равных групп по 6 гирь?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025

ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Древняя Одномерная империя располагалась вдоль прямой линии. Изначально в ней не было городов. Один за другим были основаны 64 города. Каждый город — точка на прямой, не совпадающая с ранее построенными точками. Начиная со второго, каждый вновь основанный город и ближайший к нему существующий объявлялись городами-побратимами (если ближайших два, то выбирается тот из них, который построен раньше). На сохранившейся карте империи указаны города и расстояния между ними, но не порядок, в котором они были основаны. Может ли карта выглядеть так, что в каком бы порядке на ней ни появлялись города, у каждого города окажется в итоге не более 6 побратимов?

2. Натуральные числа a и b таковы, что числа $a! + b$ и $b! + a$ это натуральные степени одного и того же простого числа p . Докажите, что тогда и $p! + p$ тоже является натуральной степенью p .

3. Натуральное число d называется *блокирующим делителем* натурального числа n , если n делится на d и числа d и n/d взаимно просты. Найдите все n , для которых сумма всех блокирующих делителей числа n нечетна.

4. В стране 99 городов. Министр транспорта строит несколько дорог, каждая дорога соединяет какие-то два города. Министр финансов после этого присваивает каждому городу число 1 или 2. Перемещаться по стране теперь можно по следующему правилу: находясь в городе с числом t , можно проехать ровно по t дорогам (при проезде по двум дорогам промежуточный город не считается посещенным). Может ли Министр транспорта так построить 131 дорогу, чтобы при любой расстановке чисел можно было из любого города добраться до любого другого за несколько перемещений?

5. Стозначное натуральное число N таково, что если сложить числа, образованные его первыми 50 цифрами и последними 50 цифрами, и возвести полученную сумму в квадрат, то полученное число будет оканчиваться на те же 50 цифр, что и N^2 . Найдите наибольшее такое N .

6. Алиса и Боря играют в игру. Вначале у них есть 999 прямоугольников 1×2 , один прямоугольник 1×4 и один прямоугольник 2×2 (квадрат тоже считается прямоугольником). Игроки ходят по очереди, начинает Алиса. На каждом ходу нужно выбрать два прямоугольника, имеющие равную сторону, и склеить их друг с другом по этой стороне, получив таким образом новый прямоугольник. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть независимо от действий соперника?

7. Рассмотрим множества натуральных чисел, не превосходящих 1000. Множества будем называть *родственными*, если одно из них получается из другого вычитанием всех элементов из числа 1001. Петя хочет выбрать половину всех возможных множеств так, чтобы любые два выбранных Петей множества пересекались, а также для любого выбранного Петей множества его родственное тоже было выбрано. Удастся ли ему это сделать? (Напомним, что в множестве не может быть повторяющихся элементов. Например, $\{1, 2, 3\}$ — множество, а $\{1, 1, 2, 3, 3\}$ — нет.)

8. Группу гирь будем называть *равной*, если сумма весов двух наибольших гирь в этой группе меньше суммы весов всех остальных. Дано 60 гирь различных весов, которые можно разбить на 12 равных групп по 5 гирь. Всегда ли эти 60 гирь можно разбить на 10 равных групп по 6 гирь?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025

ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА (БОИ ЗА 1 – 4 МЕСТА)

1. Какое наибольшее количество фишек можно поместить в клетках шахматной доски, чтобы никакие три фишки не стояли ни на одной горизонтали, ни на одной вертикали, ни на одной диагонали?

2. Натуральные числа $a > b$ таковы, что числа $a! + b$ и $b! + a$ это натуральные степени одного и того же простого числа. Найдите все возможные значения b .

3. Натуральное число d называется *блокирующим делителем* натурального числа n , если n делится на d и числа d и n/d взаимно просты. Найдите все n , для которых сумма всех блокирующих делителей числа n нечетна.

4. В стране 99 городов. Министр транспорта строит несколько дорог, каждая дорога соединяет какие-то два города. Министр финансов после этого присваивает каждому городу число 1 или 2. Перемещаться по стране теперь можно по следующему правилу: находясь в городе с числом t , можно проехать ровно по t дорогам (при проезде по двум дорогам промежуточный город не считается посещенным). Может ли Министр транспорта так построить 131 дорогу, чтобы при любой расстановке чисел можно было из любого города добраться до любого другого за несколько перемещений?

5. Шестизначное натуральное число N таково, что если сложить числа, образованные его первыми тремя цифрами и последними тремя цифрами, и возвести полученную сумму в квадрат, то полученное число будет оканчиваться на те же три цифры, что и N^2 . Найдите наибольшее такое N .

6. Алиса и Боря играют в игру. Вначале у них есть 999 прямоугольников 1×2 , один прямоугольник 1×4 и один прямоугольник 2×2 (квадрат тоже считается прямоугольником). Игроки ходят по очереди, начинает Алиса. На каждом ходу нужно выбрать два прямоугольника, имеющие равную сторону, и склеить их друг с другом по этой стороне, получив таким образом новый прямоугольник. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть независимо от действий соперника?

7. В турнире матбоёв участвуют 5 команд. Организаторы должны провести турнир так, чтобы каждая команда проводила не более одного боя в день и не более двух — в течение любых трёх дней. За какое наименьшее число дней организаторы смогут провести турнир? (В течение турнира каждая команда должна сыграть с каждой ровно один раз.)

8. В наборе всего 20 гирь. Известно, что любые десять гирь вместе весят больше любых девяти. Может ли в этом наборе найтись две не пересекающиеся группы: одна из девяти гирь, другая — из восьми такие, что группа из восьми весит больше группы из девяти?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 04.05.2025

**ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА (БОИ ЗА 5 – 8 МЕСТА),
ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. Какое наибольшее количество фишек можно поместить в клетках шахматной доски, чтобы никакие три фишки не стояли ни на одной горизонтали, ни на одной вертикали, ни на одной диагонали?
2. Натуральные числа $a > b$ таковы, что числа $a! + b$ и $b! + a$ это натуральные степени одного и того же простого числа. Найдите все возможные значения b .
3. За одно действие число можно умножить на 3 или вычесть из него сумму его цифр. Верно ли, что из 1 можно несколькими такими действиями получить любое число, делящееся на 9?
4. Можно ли все клетки шахматной доски обойти, побывав на каждой по одному разу, чередуя прыжки длины 1 и 2, по горизонтали или по вертикали?
5. Кость домино назовём *нечётной*, если сумма очков на ней нечётна. Какое наибольшее число нечётных костей из одного комплекта можно по правилам домино выложить в кольцо?
6. Вася подошёл к кулеру и начал одновременно наполнять две одинаковые бутылки: одну холодной, а другую горячей водой. Когда в бутылке с горячей водой набралось 150 мл, в бутылке с холодной объём воды оказался равен среднему арифметическому объёмов набранной холодной воды и полного объёма бутылки. А когда горячей воды набралось 200 мл, бутылка с холодной водой заполнилась. Чему равен объём бутылки?
7. В турнире матбоёв участвуют 5 команд. Организаторы должны провести турнир так, чтобы каждая команда проводила не более одного боя в день и не более двух — в течение любых трёх дней. За какое наименьшее число дней организаторы смогут провести турнир? (В течение турнира каждая команда должна сыграть с каждой ровно один раз.)
8. В наборе всего 20 гирь. Известно, что любые десять гирь вместе весят больше любых девяти. Может ли в этом наборе найтись две не пересекающиеся группы: одна из девяти гирь, другая — из восьми такие, что группа из восьми весит больше группы из девяти?