

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. Несколько школьников написали контрольную, и каждый получил за неё оценку: 2, 3, 4 или 5. Оказалось, что ровно половина школьников получила оценки 2 и 3, а получивших двойки ровно в пять раз меньше, чем получивших пятёрки. Кроме того, сумма всех чётных полученных оценок равна сумме всех нечётных полученных оценок. Каких оценок было получено больше: пятёрок или четвёрок, и во сколько раз?

2. На уроке английского 33 ученика изучали 5 новых слов. В начале урока учитель каждому из 31 учеников рассказал значения нескольких (не менее одного) из этих новых слов, причем никаким двум ребятам не достался один и тот же набор. А Петя и Вася к началу урока опоздали, и не узнали значение ни одного слова. Затем учитель каждую минуту выбирал пару учеников, которые делились друг с другом всеми новыми словами, которые они к этому моменту узнали. В результате через t минут все 33 ученика, включая Петю и Васю, узнали все 5 новых слов. Каково наименьшее возможное t , при котором такое могло произойти?

3. Игорь взял 100 листов бумаги и на каждом листе написал несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Для любого $1 \leq k \leq 100$ оказалось, что если число k выписано ровно на ℓ листах, то число ℓ выписано ровно на k листах, при этом каждое число выписано хотя бы один раз. Сколько чисел может быть выписано у Игоря в сумме на всех листах? (Каждое число считается столько раз, сколько его выписали.)

4. Назовем пятизначное число без нулевых цифр *интересным*, если оно является палиндромом (т.е. если прочитать его цифры в обратном порядке, то получится исходное число, например 23432) и его средняя цифра в два раза больше первой. Докажите, что произведение 2025 интересных чисел не может быть квадратом натурального числа.

5. На доске написано 14 чисел: n нулей и $14 - n$ единиц ($1 \leq n \leq 13$). За одну операцию можно выбрать какие-нибудь семь чисел на доске и одновременно прибавить к каждому из них по 1, а все остальные семь чисел умножить на 8. При каких n можно, последовательно выполняя такие операции, сделать все числа равными?

6. Петя и Вася играют в игру. В начале Петя отмечает 99 точек на окружности и некоторые пары этих точек соединяет отрезками таким образом, чтобы из каждой точки выходил хотя бы один отрезок. После этого Вася может стереть несколько проведенных Петей отрезков. Затем Петя платит Васе один рубль за каждую отмеченную точку, из которой теперь выходит нечётное число отрезков. Какую наибольшую сумму денег Вася может гарантированно заработать независимо от действий Пети?

7. Дан квадрат 30×30 клеток. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что если отметить на доске любые n клеток, то всегда найдется способ поставить 40 фишек на неотмеченные клетки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце стояла хотя бы одна фишка, и при этом для любой фишки в её строке или в её столбце стояла ещё хотя бы одна фишка.

8. Для натурального числа $N > 2$ выписали в порядке возрастания все натуральные числа, которые меньше N и взаимно просты с N . Оказалось, что сумма любых двух соседних в ряду чисел имеет с числом N общий натуральный делитель, больший единицы. Найдите все такие N .