

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–2 МЕСТА**

1. По кругу расставлены 2025 кувшинок. Лягушки Квакка и Квокка сидят на каких-то разных кувшинках. Каждая лягушка может прыгнуть на 2, 3 или 5 кувшинок по часовой стрелке. Квакка и Квокка сделали по несколько прыжков и оказались на тех же кувшинках, с которых начинали. Оказалось, что с каждой кувшинки был сделан ровно один прыжок. Докажите, что каждая лягушка сделала ровно 2 круга.

2. Дано натуральное число c . Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = c$, $a_{n+1} = a_n^3 + c$. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, делящих хотя бы один член последовательности (a_n) .

3. Докажите, что существует такое $c > 0$, что при всех $n > 2025$ в плоскости можно построить множество из n точек, для которых найдется не менее cn различных попарных расстояний, каждое из которых реализуется между точками этого множества больше n раз.

4. Внутри неравностороннего треугольника ABC отмечена такая точка P , что $2\angle ABP = \angle BCA$ и $2\angle ACP = \angle CBA$. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямые PB и PC пересекают прямую AI в точках B' и C' соответственно. Прямая, проходящая через B' параллельно AB , пересекает прямую BI в точке X , а прямая, проходящая через C' параллельно AC , пересекает прямую CI в точке Y . Докажите, что треугольники PXY и ABC подобны.

5. У фокусника в руке колода 52 карты. Перед каждым из зрителей лежит такая же колода и вначале каждый зритель берет себе одну карту. Далее ходит фокусник, потом зрители, потом снова фокусник и т. д. Ход фокусника состоит в том, что он отбрасывает из своей колоды одну карту. В время хода зрителей каждый зритель берет из своей колоды в руку (еще) одну карту. И зрители, и фокусник видят, какие карты кто держит, а зрители к тому же могли заранее обсудить план действий. После 26 ходов и у фокусника, и у зрителей на руках по 26 карт. Фокус удался, если хотя бы у одного из зрителей набор карт на руках совпадает с набором фокусника. Докажите, что если зрителей меньше 2^{26} , то у хорошего фокусника фокус удался.

6. вещественные числа a_1, \dots, a_k удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^k (k - i + 1)a_i = 0$. Докажите, что для некоторого натурального $m \leq k$ выполнено неравенство

$$2m \sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{i=1}^m i a_i$$

7. В остроугольном треугольнике ABC ($AC > BC$) проведена высота AD и отмечен ортоцентр H , центр описанной окружности O и середина K стороны AB . Внутри треугольника ADC отмечена точка P такая, что $\angle KPD + \angle ACB = 2\angle OPH = 180^\circ$. Докажите, что $BH = 2PD$.

8. Найдите все натуральные числа a, b, c такие, что $3ab = 2c^2$, а сумма $a^3 + b^3 + c^3$ равна удвоенному простому числу.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТА
ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–4 МЕСТА**

1. По кругу расставлены 2025 кувшинок. Лягушки Квакка и Квокка сидят на каких-то разных кувшинках. Каждая лягушка может прыгнуть на 2, 3 или 5 кувшинок по часовой стрелке. Квакка и Квокка сделали по несколько прыжков и оказались на тех же кувшинках, с которых начинали. Оказалось, что с каждой кувшинки был сделан ровно один прыжок. Докажите, что каждая лягушка сделала ровно 2 круга.

2. Докажите, что существует бесконечное количество натуральных n таких, что число $\underbrace{11\dots1}_{n \text{ единиц}}$ представляется в виде суммы 2025 различных натуральных чисел, отличающихся друг от друга перестановкой цифр.

3. Докажите, что существует такое $c > 0$, что при всех $n > 2025$ в плоскости можно построить множество из n точек, для которых найдется не менее cn различных попарных расстояний, каждое из которых реализуется между точками этого множества больше n раз.

4. Внутри неравностороннего треугольника ABC отмечена такая точка P , что $2\angle ABP = \angle BCA$ и $2\angle ACP = \angle CBA$. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямые PB и PC пересекают прямую AI в точках B' и C' соответственно. Прямая, проходящая через B' параллельно AB , пересекает прямую BI в точке X , а прямая, проходящая через C' параллельно AC , пересекает прямую CI в точке Y . Докажите, что треугольники PXY и ABC подобны.

5. У фокусника в руке колода 52 карты. Перед каждым из зрителей лежит такая же колода и вначале каждый зритель берет себе одну карту. Далее ходит фокусник, потом зрители, потом снова фокусник и т. д. Ход фокусника состоит в том, что он отбрасывает из своей колоды одну карту. В время хода зрителей каждый зритель берет из своей колоды в руку (еще) одну карту. И зрители, и фокусник видят, какие карты кто держит, а зрители к тому же могли заранее обсудить план действий. После 26 ходов и у фокусника, и у зрителей на руках по 26 карт. Фокус удался, если хотя бы у одного из зрителей набор карт на руках совпадает с набором фокусника. Докажите, что если зрителей меньше 2^{26} , то у хорошего фокусника фокус удастся.

6. Вещественные числа a_1, \dots, a_k удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^k (k - i + 1)a_i = 0$. Докажите, что для некоторого натурального $m \leq k$ выполнено неравенство

$$2m \sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{i=1}^m i a_i$$

7. На сторон AB неравностороннего треугольника ABC отмечены точки M и N такие, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Прямая, проходящая через M параллельно прямой BC , и прямая, проходящая через N параллельно AC , пересекаются в точке S . Докажите, что $\angle CSM = \angle CSN$.

8. Найдите все натуральные числа a, b, c такие, что $3ab = 2c^2$, а сумма $a^3 + b^3 + c^3$ равна удвоенному простому числу.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.05.2024
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5–8 МЕСТА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Костя и Сережа играют на доске 10×10 . Сначала Костя ставит в клетки доски n попугаев. После этого начинается игра. Каждым ходом Сережа атакует: кладет орех на граничный отрезок между какими-то двумя клетками доски. Ответным ходом Костя должен переместить некоторых своих попугаев (как минимум одного) в соседние по сторонам клетки. Попугай, проходящий мимо ореха, съедает его — атака отбита. При каком наименьшем n Костя сможет сколь угодно долго отбивать атаки (т. е. после каждого его хода на доске не будет ни одного ореха)?

2. Докажите, что существует бесконечное количество натуральных n таких, что число $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ единиц}}$ представляется в виде суммы 2025 различных натуральных чисел, отличающихся друг от друга перестановкой цифр.

3. Докажите, что существует такое $c > 0$, что при всех $n > 2025$ в плоскости можно построить множество из n точек, для которых найдется не менее cn различных попарных расстояний, каждое из которых реализуется между точками этого множества больше n раз.

4. Внутри неравнобедренного треугольника ABC отмечена такая точка P , что $2\angle ABP = \angle BCA$ и $2\angle ACP = \angle CBA$. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямые PB и PC пересекают прямую AI в точках B' и C' соответственно. Прямая, проходящая через B' параллельно AB , пересекает прямую BI в точке X , а прямая, проходящая через C' параллельно AC , пересекает прямую CI в точке Y . Докажите, что треугольники PXY и ABC подобны.

5. У фокусника в руке колода 52 карты. Перед каждым из зрителей лежит такая же колода и вначале каждый зритель берет себе одну карту. Далее ходит фокусник, потом зрители, потом снова фокусник и т. д. Ход фокусника состоит в том, что он отбрасывает из своей колоды одну карту. В время хода зрителей каждый зритель берет из своей колоды в руку (еще) одну карту. И зрители, и фокусник видят, какие карты кто держит, а зрители к тому же могли заранее обсудить план действий. После 26 ходов и у фокусника, и у зрителей на руках по 26 карт. Фокус удался, если хотя бы у одного из зрителей набор карт на руках совпадает с набором фокусника. Докажите, что если зрителей меньше 2^{26} , то у хорошего фокусника фокус удался.

6. вещественные числа a_1, \dots, a_k удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^k (k - i + 1)a_i = 0$. Докажите, что для некоторого натурального $m \leq k$ выполнено неравенство

$$2m \sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{i=1}^m i a_i$$

7. На сторон AB неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N такие, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Прямая, проходящая через M параллельно прямой BC , и прямая, проходящая через N параллельно AC , пересекаются в точке S . Докажите, что $\angle CSM = \angle CSN$.

8. Сумма натуральных чисел A и B нечётна. Докажите, что каждое целое число можно представить в виде $x^2 - y^2 + Ax + By$ с целыми x и y .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.05.2024**СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. Костя и Сережа играют на доске 10×10 . Сначала Костя ставит в клетки доски n попугаев. После этого начинается игра. Каждым ходом Сережа атакует: кладет орех на граничный отрезок между какими-то двумя клетками доски. Ответным ходом Костя должен переместить некоторых своих попугаев (как минимум одного) в соседние по сторонам клетки. Попугай, проходящий мимо ореха, съедает его — атака отбита. При каком наименьшем n Костя сможет сколь угодно долго отбивать атаки (т. е. после каждого его хода на доске не будет ни одного ореха)?

2. Докажите, что существует бесконечное количество натуральных n таких, что число $\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ единиц}}$ представляется в виде суммы 2025 различных натуральных чисел, отличающихся друг от друга перестановкой цифр.

3. В графе 300 вершин, степень каждой ровно 3. Каждая вершина покрашена в красный или синий цвет. Известно, что у каждой вершины не меньше двух красных соседей. Найдите наибольшее возможное количество синих вершин в графе.

4. Точки E и F расположены на сторонах BC и CD прямоугольника $ABCD$ соответственно так, что треугольник AEF равносторонний. Точка M — середина отрезка AF . Докажите, что треугольник BCM равносторонний.

5. У фокусника в руке колода 52 карты. Перед каждым из зрителей лежит такая же колода и вначале каждый зритель берет себе одну карту. Далее ходит фокусник, потом зрители, потом снова фокусник и т. д. Ход фокусника состоит в том, что он отбрасывает из своей колоды одну карту. В время хода зрителей каждый зритель берет из своей колоды в руку (еще) одну карту. И зрители, и фокусник видят, какие карты кто держит, а зрители к тому же могли заранее обсудить план действий. После 26 ходов и у фокусника, и у зрителей на руках по 26 карт. Фокус удался, если хотя бы у одного из зрителей набор карт на руках совпадает с набором фокусника. Докажите, что если зрителей меньше 2^{26} , то у хорошего фокусника фокус удался.

6. Докажите, что если произведение положительных чисел a и b больше 12, то они удовлетворяют «неправильному неравенству о средних»:

$$\frac{a+b}{3} \geq \sqrt[3]{ab}.$$

7. На сторон AB неравнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N такие, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Прямая, проходящая через M параллельно прямой BC , и прямая, проходящая через N параллельно AC , пересекаются в точке S . Докажите, что $\angle CSM = \angle CSN$.

8. Сумма натуральных чисел A и B нечётна. Докажите, что каждое целое число можно представить в виде $x^2 - y^2 + Ax + By$ с целыми x и y .