

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025 ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В школе обучается 81 мальчик и несколько девочек. Каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками, а для любых двух мальчиков есть ровно одна девочка, которая является их общей подругой. Докажите, что можно выбрать 21 девочку так, чтобы каждый мальчик дружил не более чем с одной выбранной девочкой.

2. У Полины и Яна есть 79 карточек. На первой карточке с одной стороны написано число 1, с другой 80, на второй карточке с одной стороны написано 2, с другой 81 и т.д. (на  $i$ -ой карточке с одной стороны написано число  $i$ , с другой — число  $79 + i$ ). Полина разложила все карточки по кругу в определенном порядке. Ян хочет перевернуть несколько (возможно, 0) карточек так, чтобы для любых двух соседних карточек числа на их верхних сторонах были взаимно простыми. Может ли Полина разложить карточки так, чтобы Ян не смог добиться желаемого?

3. Дано 12 различных пятизначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько так, чтобы сумма выбранных чисел не делилась на их количество.

4. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гoblin Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает три подряд идущих кошелька, два крайних из которых непустые. Вынимает по одной монете из крайних кошельков, одну из этих монет кладёт в средний кошелёк, а вторую монету отдаёт Гарри. Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

5. Вася берёт последовательность, состоящую из нулей и единиц, и за один ход преобразует её по следующему правилу:

1. Если первая цифра последовательности — ноль, то эта цифра стирается.

2. Если первая цифра — единица и есть хотя бы две цифры, Вася меняет местами первые две цифры, записывает последовательность в обратном порядке и заменяет единицы на нули, а нули на единицы.

3. Если последовательность пуста или состоит из одной единицы, процесс останавливается. Вася делает такие ходы, пока процесс не остановится. Найдите количество последовательностей длины 2025, начиная с которых, Вася может добраться до пустой последовательности.

6. Петя взял несколько листов (один или более) и на каждом листе написал несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. На каждом листе написано хотя бы одно число, одно число может быть написано на нескольких листах. Пару натуральных чисел  $x < y$ , не превосходящих 100, будем называть *хорошей*, если есть ровно один лист, содержащий ровно одно из чисел  $x, y$ . Верно ли, что обязательно найдется 50 чисел, никакие два из которых не образуют хорошую пару?

7. В клетчатом квадрате  $1000 \times 1000$  закрасили некоторые клетки. В каждую закрашенную клетку посадили кузнечика. Каждого кузнечика можно расположить в клетке четырьмя способами: он может смотреть вверх, вниз, влево или вправо. Расстановку кузнечиков назовем *циклической*, если при одновременном перемещении каждого кузнечика на соседнюю клетку в направлении, в котором он смотрит, в каждой закрашенной клетке снова окажется один кузнечик. Докажите, что для каждого множества закрашенных клеток число циклических расстановок кузнечиков является квадратом целого числа.

8. Имеется 9900 чисел, среди которых могут быть повторяющиеся, но не более, чем 4950 раз каждое. Докажите, что эти числа можно разбить на 100 групп по 99 чисел в каждой таким образом, чтобы суммы чисел в этих группах были различны.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025 ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В школе обучается 46 мальчиков и несколько девочек. Каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками, а для любых двух мальчиков есть ровно одна девочка, которая является их общей подругой. Докажите, что можно выгнать из школы 10 мальчиков так, чтобы у каждой девочки среди оставшихся в школе мальчиков остался хотя бы один друг.

2. У Полины и Яна есть 79 карточек. На первой карточке с одной стороны написано число 1, с другой 80, на второй карточке с одной стороны написано 2, с другой 81 и т.д. (на  $i$ -ой карточке с одной стороны написано число  $i$ , с другой — число  $79 + i$ ). Полина разложила все карточки по кругу в определенном порядке. Ян хочет перевернуть несколько (возможно, 0) карточек так, чтобы для любых двух соседних карточек числа на их верхних сторонах были взаимно простыми. Может ли Полина разложить карточки так, чтобы Ян не смог добиться желаемого?

3. Дано 12 различных пятизначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько так, чтобы сумма выбранных чисел не делилась на их количество.

4. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гоблин Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает три лежащих подряд непустых кошелька. Из левого в этой тройке перекладывает монету в центральный, а из правого одну монету забирает себе. Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

5. На экране компьютера горит слово, состоящее из букв А и У. Каждую секунду компьютер заменяет это слово по следующему правилу: самая левая буква А заменяется на У, а все стоящие слева от нее буквы У (возможно, их нет) — на А (например, УУУАА заменяется на АААУА). Если буквы А в слове нет, компьютер останавливается. Сколько секунд будет работать компьютер, если сначала на экране горит АУУАУААААА?

6. Петя взял несколько листов (один или более) и на каждом листе написал несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. На каждом листе написано хотя бы одно число, одно число может быть написано на нескольких листах. Пару натуральных чисел  $x < y$ , не превосходящих 100, будем называть *хорошей*, если есть ровно один лист, содержащий ровно одно из чисел  $x, y$ . Верно ли, что обязательно найдется 50 чисел, никакие два из которых не образуют хорошую пару?

7. В каждую клетку доски  $50 \times 50$  поставили шахматного коня (все кони одинаковые). Докажите, что количество способов всем коням одновременно сделать ход так, чтобы все клетки доски снова оказались заняты, является квадратом натурального числа.

8. Докажите, что из любых 100 чисел можно выбрать либо 5 непересекающихся групп по 10 чисел с **разными** суммами, либо 10 непересекающихся групп по 5 чисел с **равными** суммами.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025

## ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В школе обучается не менее 7 мальчиков и несколько девочек. Каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками, а для любых двух мальчиков есть ровно одна девочка, которая является их общей подругой. Докажите, что можно выгнать из школы 4 мальчиков так, чтобы у каждой девочки среди оставшихся в школе мальчиков остался хотя бы один друг.

2. У Полины и Яна есть 79 карточек. На первой карточке с одной стороны написано число 1, с другой 80, на второй карточке с одной стороны написано 2, с другой 81 и т.д. (на  $i$ -ой карточке с одной стороны написано число  $i$ , с другой — число  $79 + i$ ). Полина разложила все карточки по кругу в определенном порядке. Ян хочет перевернуть несколько (возможно, 0) карточек так, чтобы для любых двух соседних карточек числа на их верхних сторонах были взаимно простыми. Может ли Полина разложить карточки так, чтобы Ян не смог добиться желаемого?

3. Дано 12 различных пятизначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать несколько так, чтобы сумма выбранных чисел не делилась на их количество.

4. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гоблин Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает три подряд идущих кошелька, два крайних из которых непустые. Вынимает по одной монете из крайних кошельков, одну из этих монет кладёт в средний кошелёк, а вторую монету отдаёт Гарри. Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

5. На экране компьютера горит слово, состоящее из букв, А и У. Каждую секунду компьютер заменяет это слово по следующему правилу: самая правая буква А заменяется на У, а все следующие за ней буквы У (возможно, их нет) — на А (например, ААУУУ заменяется на АУААА). Если буквы А в слове нет, компьютер останавливается. Сколько секунд будет работать компьютер, если сначала на экране горит ААААААУАУА?

6. На теннисный турнир приехали 32 игрока. Каждому присвоили свой *рейтинг* — натуральное число от 1 до 32. У разных игроков разный рейтинг. В каждом туре игроки разбиваются на пары по жребию, и проигравший в паре выбывает. Далее турнир продолжается по этой же схеме. Известно, что если разница рейтингов у теннисистов различается на 9 или более, то в личной встрече выигрывает игрок, имеющий больший рейтинг, в противном случае выиграть может любой из игроков. Могли ли встречи проходить таким образом, чтобы турнир выиграл игрок с рейтингом 1?

7. В каждую клетку доски  $n \times n$  поставили шахматного коня. При каких  $n$  все они могут одновременно сделать ход так, что на каждой клетке доски снова окажется по коню?

8. Докажите, что из любых 100 чисел можно выбрать либо 5 непересекающихся групп по 10 чисел с **разными** суммами, либо 10 непересекающихся групп по 5 чисел с **равными** суммами.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025****ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. В стране 100 городов с числовыми названиями:  $1, 2, \dots, 100$ . Длина дороги между двумя городами равна сумме их названий. Какая наименьшая длина у пути, проходящего через все города?

2. У Полины и Яна есть 11 карточек. На каждой карточке с разных сторон Полина написала два взаимно простых числа, используя по одному разу все числа от 1 до 22. Затем, она разложила все карточки по кругу в определенном порядке. Ян хочет перевернуть несколько (возможно, 0) карточек так, чтобы для любых двух соседних карточек числа на их верхних сторонах были взаимно простыми. Может ли Полина не дать Яну добиться желаемого?

3. Существуют ли 9 различных четырёхзначных чисел, обладающих таким свойством: какие бы  $k$  чисел из них ни выбрать, сумма выбранных чисел делится на  $k$ ?

4. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гoblin Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает три подряд идущих кошелька, два крайних из которых непустые. Вынимает по одной монете из крайних кошельков, одну из этих монет кладёт в средний кошелёк, а вторую монету отдаёт Гарри. Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

5. На экране компьютера горит слово, состоящее из букв, А и У. Каждую секунду компьютер заменяет это слово по следующему правилу: самая правая буква А заменяется на У, а все следующие за ней буквы У (возможно, их нет) — на А (например, ААУУУ заменяется на АУААА). Если буквы А в слове нет, компьютер останавливается. Сколько секунд будет работать компьютер, если сначала на экране горит ААААААУАУУА?

6. На теннисный турнир приехали 16 игроков. Каждому присвоили свой *рейтинг* — натуральное число от 1 до 16. У разных игроков разный рейтинг. В каждом туре игроки разбиваются на пары по жребию, и проигравший в паре выбывает. Далее турнир продолжается по этой же схеме. Известно, что если разница рейтингов у теннисистов различается на 6 или более, то в личной встрече выигрывает игрок, имеющий больший рейтинг, в противном случае выиграть может любой из игроков. Могли ли встречи проходить таким образом, чтобы турнир выиграл игрок с рейтингом 1?

7. Шахматная фигура *осёл* ходит и бьёт как слон по диагонали, но только не в четырёх, а в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Какое наибольшее количество ослов, не бьющих друг друга, можно поместить на шахматную доску? (Ослов можно поворачивать.)

8. Имеется 100 чисел, ни одно из которых не встречается более 50 раз. Докажите, что их можно разбить на 10 групп по 10 чисел в каждой так, чтобы все суммы чисел в этих группах были различны.