

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Прямоугольник \mathcal{R} разбит на меньшие прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам \mathcal{R} , так что никакие три прямоугольника разбиения не имеют общей вершины. Изначально муравей находится в левом нижнем углу \mathcal{R} . За одну операцию мы можем выбрать прямоугольник разбиения r такой, что муравей в данный момент находится в одной из вершин r , и переместить муравья в одну из двух вершин r , смежных с ней. Предположим, что после конечного числа операций муравей окажется в правом верхнем углу \mathcal{R} . Докажите, что некоторый прямоугольник разбиения r был выбран не менее чем в двух операциях.

2. На продолжении стороны BC за точку C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, отмечена точка E . Известно, что $BD = CE$ и $\angle ABD = \angle DCE$. Докажите, что середина отрезка AE лежит на прямой CD .

3. Дано натуральное число $n > 1$. Саша выписал в ряд все натуральные делители n : $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = n$. Оказалось, что ровно для одного индекса $1 \leq i \leq k$ число $d_{i-1}d_{i+1}$ не делится на d_i . Может ли число n быть квадратом натурального числа?

4. Одиннадцать школьников начинают бежать одновременно по часовой стрелке из одной точки кругового стадиона длиной 400 м. Скорости всех учеников постоянны и попарно различны. При этом скорости у любых двух ребят отличаются не более чем на 1 км/ч. Могло ли через 2 часа оказаться, что школьники бегут по кругу в порядке убывания скоростей, считая от точки старта по часовой стрелке?

5. При каких натуральных n среди любых 2^n подряд идущих натуральных чисел найдётся число, представимое в виде

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n,$$

где x_i — целые неотрицательные числа?

6. Может ли в выпуклом 21-угольнике быть не менее тридцати трёх диагоналей длины 1?

7. Натуральное число n таково, что при всех $k = 1, 2, 4, 8, \dots$, меньших n , число $2^n - k$ делится на $n - k$. Найдите все такие n .

8. В небольшом городке в Мексике живет 10 000 мексиканцев, некоторые из которых знают друг друга. Они решили сыграть в игру. В первый день каждый мексиканец написал на своей шляпе натуральное число. В каждый последующий день они меняли свое число по следующему правилу: в день $i + 1$ каждый мексиканец пишет у себя на шляпе наименьшее натуральное число, которого не было на шляпе ни у одного из его знакомых в день i . Известно, что в какой-то день каждый мексиканец написал то же число, что и в предыдущий день, после чего они решили прекратить игру. Определите максимальное количество дней, которое могла длиться эта игра.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Прямоугольник \mathcal{R} разбит на меньшие прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам \mathcal{R} , так что никакие три прямоугольника разбиения не имеют общей вершины. Изначально муравей находится в левом нижнем углу \mathcal{R} . За одну операцию мы можем выбрать прямоугольник разбиения r такой, что муравей в данный момент находится в одной из вершин r , и переместить муравья в одну из двух вершин r , смежных с ней. Предположим, что после конечного числа операций муравей окажется в правом верхнем углу \mathcal{R} . Докажите, что некоторый прямоугольник разбиения r был выбран не менее чем в двух операциях.

2. На продолжении стороны BC за точку C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, отмечена точка E . Известно, что $BD = CE$ и $\angle ABD = \angle DCE$. Докажите, что середина отрезка AE лежит на прямой CD .

3. Дано натуральное число $n > 1$. Саша выписал в ряд все натуральные делители n : $1 = d_0 < d_1 < \dots < d_k < d_{k+1} = n$. Оказалось, что ровно для одного индекса $1 \leq i \leq k$ число $d_{i-1}d_{i+1}$ не делится на d_i . Может ли число n быть квадратом натурального числа?

4. Одиннадцать школьников начинают бежать одновременно по часовой стрелке из одной точки кругового стадиона длиной 400 м. Скорости всех учеников постоянны и попарно различны. При этом скорости у любых двух ребят отличаются не более чем на 1 км/ч. Могло ли через 2 часа оказаться, что школьники бегут по кругу в порядке убывания скоростей, считая от точки старта по часовой стрелке?

5. При каких натуральных n среди любых 2^n подряд идущих натуральных чисел найдётся число, представимое в виде

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n,$$

где x_i — целые неотрицательные числа?

6. Может ли в выпуклом 21-угольнике быть не менее тридцати трёх диагоналей длины 1?

7. Натуральное число $n \geq 2$ таково, что для всех натуральных k , где $1 \leq k \leq n-1$, число $2^n + k$ делится на $n - k$. Найдите все такие n .

8. В небольшом городке в Мексике живет 100 мексиканцев, некоторые из которых знают друг друга. Они решили сыграть в игру. В первый день каждый мексиканец написал на своей шляпе натуральное число. В каждый последующий день они меняли свое число по следующему правилу: в день $i + 1$ каждый мексиканец пишет у себя на шляпе наименьшее натуральное число, которого не было на шляпе ни у одного из его знакомых в день i . Известно, что в какой-то день каждый мексиканец написал то же число, что и в предыдущий день, после чего они решили прекратить игру. Могла ли игра продолжаться не менее 50 дней? Считается и день, когда они первый раз написали на шляпах, и день, когда значения совпали с предыдущим днём.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В ряд выписаны все натуральные делители натурального числа $n > 1$ в порядке возрастания: $d_0 = 1 < d_1 < \dots < d_k < n = d_{k+1}$. Оказалось, что ровно для одного индекса $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ число $d_{j-1}d_{j+1}$ делится на d_j . Может ли число n быть квадратом составного натурального числа?

2. На продолжении стороны BC за точку C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, отмечена точка E . Известно, что $BD = CE$ и $\angle ABD = \angle DCE$. Докажите, что середина отрезка AE лежит на прямой CD .

3. Даны натуральное число $n \geq 2$ и множество S , состоящее из $2n$ различных натуральных чисел, меньших или равных n^2 . Докажите, что существует натуральное число $r \leq n$, которое может быть записано в виде разности двух чисел из S по крайней мере тремя различными способами.

4. Одиннадцать школьников начинают бежать одновременно по часовой стрелке из одной точки кругового стадиона длиной 400 м. Скорости всех учеников постоянны и попарно различны. При этом скорости у любых двух ребят отличаются не более чем на 1 км/ч. Могло ли через 2 часа оказаться, что школьники бегут по кругу в порядке убывания скоростей, считая от точки старта по часовой стрелке?

5. Натуральное число $n \geq 2$ таково, что для всех натуральных k , где $1 \leq k \leq n - 1$, число $2^n + k$ делится нацело на $n - k$. Найдите все такие n .

6. За круглый стол сели 130 человек, перед одним из них положили 130 яблок. Далее раз в минуту люди передают друг другу яблоки по следующему правилу. Каждый человек, у которого есть хотя бы одно яблоко, находит ближайшего по часовой стрелке от себя человека, у которого нет яблока. И все, у кого есть хотя бы одно яблоко, одновременно передают одно яблоко тому человеку, которого они нашли. Например, через минуту у первого будет 129 яблок, а у второго — 1, а через две минуты у первого будет 128 яблок, а у третьего — 2. Может ли в какой-то момент у каждого человека оказаться по одному яблоку?

7. Какое наименьшее ненулевое количество непересекающихся доминошек можно разместить по границам клеток внутри квадрата $(2n + 1) \times (2n + 1)$ так, чтобы ни одну доминошку нельзя было сдвинуть в направлении, параллельном её длинной стороне, не выходя за пределы квадрата и не накладывая на другие доминошки?

8. Отмечены 16 точек — центры клеток прямоугольника 2×8 . Нарисованы два отрезка с концами в отмеченных точках. Эти отрезки не имеют общих точек (даже концов). Сколькими способами могут быть выбраны эти отрезки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В ряд выписаны все натуральные делители натурального числа $n > 1$ в порядке возрастания: $d_0 = 1 < d_1 < \dots < d_k < n = d_{k+1}$. Оказалось, что ровно для одного индекса $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ число $d_{j-1}d_{j+1}$ делится на d_j . Может ли число n быть квадратом составного натурального числа?

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K . Оказалось, что $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle AKC = 60^\circ$, $CK = 2BK$. Найдите величину угла ACB .

3. Аня, Боря и Серёжа взяли одинаковые монеты и выложили их в ряды: Аня составила ряд из 5 монет, Боря — из 6 монет, Серёжа — из 7 монет. Оказалось, что их ряды монет одинаковой длины (см. рисунок), а в ряду все расстояния между монетами одинаковы. Пусть эти расстояния равны a , b , c соответственно. Что больше: $a - b$ или $b - c$?



4. Одиннадцать школьников начинают бежать одновременно по часовой стрелке из одной точки кругового стадиона длиной 400 м. Скорости всех учеников постоянны и попарно различны. При этом скорости у любых двух ребят отличаются не более чем на 1 км/ч. Могло ли через 2 часа оказаться, что школьники бегут по кругу в порядке убывания скоростей, считая от точки старта по часовой стрелке?

5. Найдите все натуральные n , для которых существуют такие натуральные числа a и b (не обязательно различные), что $n! = 2^a + 2^b$.

6. За круглый стол сели 130 человек, перед одним из них положили 130 яблок. Далее раз в минуту люди передают друг другу яблоки по следующему правилу. Каждый человек, у которого есть хотя бы одно яблоко, находит ближайшего по часовой стрелке от себя человека, у которого нет яблока. И все, у кого есть хотя бы одно яблоко, одновременно передают одно яблоко тому человеку, которого они нашли. Например, через минуту у первого будет 129 яблок, а у второго — 1, а через две минуты у первого будет 128 яблок, а у третьего — 2. Может ли в какой-то момент у каждого человека оказаться по одному яблоку?

7. Какое наименьшее ненулевое количество непересекающихся доминошек можно разместить по границам клеток внутри квадрата 9×9 так, чтобы ни одну доминошку нельзя было сдвинуть в направлении, параллельном её длинной стороне, не выходя за пределы квадрата и не накладывая на другие доминошки?

8. Отмечены 16 точек — центры клеток прямоугольника 2×8 . Нарисованы два отрезка с концами в отмеченных точках. Эти отрезки не имеют общих точек (даже концов). Сколькими способами могут быть выбраны эти отрезки?