

LXIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 28.04–04.05.2025
КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 29.04.2025
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. На доске написаны числа $1^2, 2^2, \dots, 100^2$. Найдите наименьшее натуральное число, на которое делятся ровно два из этих чисел.
2. Сколько существует последовательностей натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_{18} , для которых $a_1 = a_2 = 1$ и $|a_n - a_{n-1}| = a_{n-2}$ при всех $3 \leq n \leq 18$?
3. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором углы A и D острые и $AB = BC = CD$. Оказалось, что $\angle BDA = 30^\circ$. Докажите, что $\angle DAC = 30^\circ$.
4. На клетчатой доске 2025×2025 некоторые клетки закрашены в чёрный цвет так, что с любой клетки доски ладья может выйти за пределы доски в одном из четырёх направлений (вверх, вниз, влево или вправо), не проходя ни по одной чёрной клетке, кроме, возможно, исходной. Какое наибольшее количество чёрных клеток может быть?
5. Бесконечная последовательность положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3, \dots такова, что $r_1 + r_2 + \dots + r_k = r_1 r_2 \dots r_k$ при каждом натуральном k . Докажите, что при всех n , начиная с некоторого, число $\frac{1}{r_n} - \frac{3}{4}$ является квадратом рационального числа.
6. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом 100° при вершине C . Точка D на стороне AB такова, что $\angle CDB = 60^\circ$. Биссектриса AE пересекает CD в точке N . Докажите, что $AB = CE + EN + NC$.
7. Дано дерево T на 80 вершинах. Набор из 39 ребер, не имеющих общих вершин, будем называть *толстым паросочетанием*. Известно, что дерево T имеет ровно 820 различных толстых паросочетаний. Докажите, что T — путь.
8. Натуральные числа a, b и n таковы, что $an - a + 1$ делится на bn . Докажите, что числа $\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{2a}{b}\right], \dots, \left[\frac{(n-1)a}{b}\right]$ дают при делении на n остатки $1, 2, \dots, n-1$ в некотором порядке.