

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на продолжении боковой стороны AC за точку C — точка E . Оказалось, что $CD = 2BC$ и $\angle BDC = \angle CBE$. Докажите, что $BD = BE + CE$.

2. Найдите все натуральные числа n и k такие, что число $(n+1)(n+2)\dots(n+k)+1$ делится на число $n(n+1)\dots(n+k-1)+1$.

3. Положительные числа x , y и z таковы, что

$$\frac{x}{x+1+1/y} + \frac{y}{y+1+1/z} + \frac{z}{z+1+1/x} = 1.$$

Докажите, что $xyz = 1$.

4. Шахматная доска 8×8 разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?

5. Дано натуральное число n . На доске выписано $n^2 + n$ чисел, при этом каждое натуральное число встречается на доске не более чем $\frac{n^2+n}{2}$ раз. Докажите, что все числа с доски можно разбить на $n+1$ группу, по n чисел в каждой так, чтобы суммы чисел во всех группах были различными.

6. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка E , а на стороне CD — точка F , причем $AD = DE = AF$ и $BF = CE = EF$. Докажите, что если прямые BC и AD параллельны, то прямая EF параллельна им обеим.

7. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гоблин Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает кошелёк, вынимает по одной монете из двух соседних с ним кошельков, одну из этих монет кладёт в выбранный кошелёк, а вторую монету отдает Гарри. Он может сделать такой ход, только если в обоих соседних кошельках есть хотя бы одна монета (при этом сам выбранный кошелёк может быть пустым). Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

8. Пусть x , y и z — натуральные числа. Игорь записал в тетрадку шесть чисел $xy + x$, $xy + y$, $yz + y$, $yz + z$, $zx + z$ и $zx + x$. Какое наибольшее количество точных квадратов мог записать Игорь?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на продолжении боковой стороны AC за точку C — точка E . Оказалось, что $CD = 2BC$ и $\angle BDC = \angle CBE$. Докажите, что $BD = BE + CE$.

2. Найдите все натуральные числа n и k такие, что число $(n+1)(n+2)\dots(n+k)+1$ делится на число $n(n+1)\dots(n+k-1)+1$.

3. Положительные числа x , y и z таковы, что

$$\frac{1}{y^2z + z/x + 1} + \frac{1}{z^2x + x/y + 1} + \frac{1}{x^2y + y/z + 1} = 1.$$

Докажите, что $xyz = 1$.

4. Шахматная доска 8×8 разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?

5. Дано натуральное число n . На доске выписано $n^2 + n$ чисел, при этом каждое натуральное число встречается на доске не более чем $\frac{n^2+n}{2}$ раз. Докажите, что все числа с доски можно разбить на $n+1$ группу, по n чисел в каждой так, чтобы суммы чисел во всех группах были различными.

6. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D , а на стороне BC — точка E , причем $AC = AE = CD$. Прямые DE и AC пересекаются в точке X . Внешняя биссектриса угла ABC пересекает луч CA в точке Y , а луч DE — в точке Z . Докажите, что $XY > XZ$.

7. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гoblin Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает кошелёк, вынимает по одной монете из двух соседних с ним кошельков, одну из этих монет кладёт в выбранный кошелёк, а вторую монету отдает Гарри. Он может сделать такой ход, только если в обоих соседних кошельках есть хотя бы одна монета (при этом сам выбранный кошелёк может быть пустым). Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

8. Пусть x , y и z — натуральные числа. Игорь записал в тетрадку шесть чисел $xy + x$, $xy + y$, $yz + y$, $yz + z$, $zx + z$ и $zx + x$. Какое наибольшее количество точных квадратов мог записать Игорь?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на продолжении боковой стороны AC за точку C — точка E . Оказалось, что $CD = 2BC$ и $\angle BDC = \angle CBE$. Докажите, что $BD = BE + CE$.

2. Найдётся ли такое натуральное n , что число $(n+1)(n+2)\dots(n+2025)+1$ делится нацело на $n(n+1)\dots(n+2024)+1$?

3. Про положительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{1+x+y} + \frac{x^2}{x^2+x+1} + \frac{y^2}{y^2+y+1} = 1.$$

Докажите, что $xy = 1$.

4. Шахматная доска 8×8 разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?

5. Докажите, что из любых 100 чисел можно выбрать либо 5 непересекающихся групп по 10 чисел с **разными** суммами, либо 10 непересекающихся групп по 5 чисел с **равными** суммами.

6. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Весь путь разбит на три участка. Известно, что длина первого в 8 раз больше длины второго. Определите среднюю скорость движения велосипедиста на всём пути, если известно, что она равна скорости движения на третьем участке, на 4 км/ч меньше скорости движения на первом участке и на 16 км/ч больше скорости движения на втором участке.

7. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гoblin Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает кошелёк, вынимает по одной монете из двух соседних с ним кошельков, одну из этих монет кладёт в выбранный кошелёк, а вторую монету отдаёт Гарри. Он может сделать такой ход, только если в обоих соседних кошельках есть хотя бы одна монета (при этом сам выбранный кошелёк может быть пустым). Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

8. В доме два больших подъезда, в них поровну квартир. Номера на дверях квартир составляются из пластмассовых цифр. Может ли оказаться так, что на нумерацию всех квартир во втором подъезде нужно ровно втрое больше цифр, чем в первом? Квартиры нумеруются по порядку, начиная с 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025
МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дана трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$. На сторонах AB и AD отмечены точки E и F соответственно. Оказалось, что все треугольники BCD , BFD , BFE и AFE равны друг другу. Найдите углы трапеции.

2. Найдите все натуральные числа n такие, что $n(n+1)+1$ делится нацело на $n(n-1)+1$.

3. Про положительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{1+x+y} + \frac{x^2}{x^2+x+1} + \frac{y^2}{y^2+y+1} = 1.$$

Докажите, что $xy = 1$.

4. Шахматная доска 8×8 разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?

5. Докажите, что из любых 100 чисел можно выбрать либо 5 непересекающихся групп по 10 чисел с **разными** суммами, либо 10 непересекающихся групп по 5 чисел с **равными** суммами.

6. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Весь путь разбит на три участка. Известно, что длина первого в 8 раз больше длины второго. Определите среднюю скорость движения велосипедиста на всём пути, если известно, что она равна скорости движения на третьем участке, на 4 км/ч меньше скорости движения на первом участке и на 16 км/ч больше скорости движения на втором участке.

7. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Жадный гoblin Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает кошелёк, вынимает по одной монете из двух соседних с ним кошельков, одну из этих монет кладёт в выбранный кошелёк, а вторую монету отдает Гарри. Он может сделать такой ход, только если в обоих соседних кошельках есть хотя бы одна монета (при этом сам выбранный кошелёк может быть пустым). Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое максимальное количество монет он может отдать Гарри?

8. В доме два больших подъезда, в них поровну квартир. Номера на дверях квартир составляются из пластмассовых цифр. Может ли оказаться так, что на нумерацию всех квартир во втором подъезде нужно ровно втрое больше цифр, чем в первом? Квартиры нумеруются по порядку, начиная с 1.