

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025

### ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вася записывает в каждую клетку доски  $100 \times 100$  натуральное число, не превосходящее 100, таким образом, чтобы числа в каждой строке располагались в неубывающем порядке (то есть при движении слева направо каждое следующее число было больше или равно предыдущему) и числа в каждом столбце также располагались в неубывающем порядке (сверху вниз). Две соседние по стороне клетки образуют *дубль*, если они заполнены одинаковыми числами. Какое наименьшее число дублей может получить Вася?

2. В небольшом городке в Мексике живет 100 мексиканцев, некоторые из которых знают друг друга. Они решили сыграть в игру. В первый день каждый мексиканец написал на своей шляпе натуральное число. В каждый последующий день они меняли свое число по следующему правилу: в день  $i + 1$  каждый мексиканец пишет у себя на шляпе наименьшее натуральное число, которого не было на шляпе ни у одного из его знакомых в день  $i$ . Известно, что в какой-то день каждый мексиканец написал то же число, что и в предыдущий день, после чего они решили прекратить игру. Могла ли игра продолжаться не менее 50 дней? (Считается и день, когда они первый раз написали на шляпах, и день, когда значения совпали с предыдущим днём.)

3. Докажите, что найдётся такое натуральное число  $k$ , что ни для какого  $n > k$  число  $n! - (100!)^2$  не будет квадратом натурального числа.

4. Даны 2000 различных натуральных чисел, не превосходящих миллиона. Докажите, что существует натуральное число  $r \leq 1000$ , которое может быть записано в виде разности двух данных чисел по крайней мере тремя различными способами.

5. За круглый стол сели  $n > 1$  человек, перед одним из них положили  $n$  яблок. Далее раз в минуту люди передают друг другу яблоки по следующему правилу. Каждый человек, у которого есть хотя бы одно яблоко, находит ближайшего по часовой стрелке от себя человека, у которого нет яблока. И все, у кого есть хотя бы одно яблоко, одновременно передают одно яблоко тому человеку, которого они нашли. Например, через минуту у первого будет  $n - 1$  яблоко, а у второго — 1, а через две минуты у первого будет  $n - 2$  яблока, а у третьего — 2.

Процесс останавливается, если в какой-то момент оказалось, что у каждого человека есть по яблоку. Найдите все значения  $n$ , при которых процесс рано или поздно остановится.

6. У натурального числа  $n$  некоторые  $k$  его делителей это последовательные натуральные числа. Докажите, что у  $n$  не менее  $2k - 2$  делителей.

7. Петя загадал три различных натуральных числа  $a > b > c$ , больших миллиона и взаимно простых в совокупности, и сообщил Васе три числа: их сумму  $a + b + c$ , сумму их попарных произведений  $ab + bc + ac$ , и произведение их попарных разностей  $(a - b)(b - c)(a - c)$ . Верно ли, что Вася, зная всё это, гарантированно может определить загаданные Петей числа?

8. Прямоугольник  $\mathcal{R}$  разбит на меньшие прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам  $\mathcal{R}$ , так что никакие три прямоугольника разбиения не имеют общей вершины. Изначально муравей находится в левой нижней вершине  $\mathcal{R}$ . За одну операцию мы можем выбрать прямоугольник разбиения  $r$  такой, что муравей в данный момент находится в одной из вершин  $r$ , скажем, в  $A$ , и переместить муравья в одну из двух вершин  $r$ , смежных с  $A$ . Предположим, что после конечного числа операций муравей окажется в правой верхней вершине  $\mathcal{R}$ . Докажите, что некоторый прямоугольник разбиения  $r$  был выбран не менее чем в двух операциях.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025****ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. В каждой клетке таблицы  $1024 \times 1024$  написано наименьшее натуральное число, которого нет в этой же строке левее него, и в этом же столбце выше него. Докажите, что все числа от 1 до 1024 встречаются в этой таблице поровну раз.

2. В небольшом городке в Мексике живет 100 мексиканцев, некоторые из которых знают друг друга. Они решили сыграть в игру. В первый день каждый мексиканец написал на своей шляпе натуральное число. В каждый последующий день они меняли свое число по следующему правилу: в день  $i + 1$  каждый мексиканец пишет у себя на шляпе наименьшее натуральное число, которого не было на шляпе ни у одного из его знакомых в день  $i$ . Известно, что в какой-то день каждый мексиканец написал то же число, что и в предыдущий день, после чего они решили прекратить игру. Могла ли игра продолжаться не менее 5 дней? (Считается и день, когда они первый раз написали на шляпах, и день, когда значения совпали с предыдущим днём.)

3. Докажите, что найдётся такое натуральное число  $k$ , что ни для какого  $n > k$  число  $n! - (100!)^2$  не будет квадратом натурального числа.

4. Даны 1500 различных натуральных чисел, не превосходящих миллиона. Докажите, что существует натуральное число  $r \leq 1500$ , которое может быть записано в виде разности двух данных чисел по крайней мере двумя различными способами.

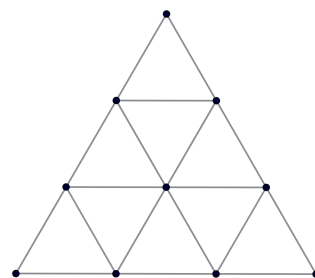
5. За круглый стол сели 2002 человека, перед одним из них положили 2002 яблока. Далее раз в минуту люди передают друг другу яблоки по следующему правилу. Каждый человек, у которого есть хотя бы одно яблоко, находит ближайшего по часовой стрелке от себя человека, у которого нет яблока. И все, у кого есть хотя бы одно яблоко, одновременно передают одно яблоко тому человеку, которого они нашли. Например, через минуту у первого будет 2001 яблоко, а у второго — 1, а через две минуты у первого будет 2000 яблок, а у третьего — 2.

Верно ли, что рано или поздно наступит момент, когда у каждого человека будет по одному яблоку?

6. У натурального числа  $n$  некоторые  $k$  его делителей это последовательные натуральные числа. Докажите, что у  $n$  не менее  $2k - 2$  делителей.

7. Петя загадал три различных натуральных числа  $a > b > c$ , больших 100, и сообщил Васе три числа: их сумму  $a + b + c$ , их сумму попарных произведений  $ab + bc + ac$ , и произведение их попарных разностей  $(a - b)(b - c)(a - c)$ . Верно ли, что Вася, зная все это, гарантированно может определить загаданные Петей числа?

8. Каждую сторону равностороннего треугольника разбили на нечетное число  $n$  равных частей, и провели через них прямые, параллельные сторонам, которые разбили треугольник на маленькие равносторонние треугольнички (см. пример для  $n = 3$  на рисунке). Докажите, что чтобы покрыть все получившиеся на картинке отрезочки сторонами равносторонних треугольников, идущих по линиям сетки, понадобится не менее  $3(n - 1)/2$  треугольников.



## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025

## ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке таблицы  $1024 \times 1024$  написано наименьшее натуральное число, которого нет в этой же строке левее него, и в этом же столбце выше него. Сколько раз в этой таблице встречается число 2?

2. В небольшом городке в Мексике живет 100 мексиканцев, некоторые из которых знают друг друга. Они решили сыграть в игру. В первый день каждый мексиканец написал на своей шляпе натуральное число. В каждый последующий день они меняли свое число по следующему правилу: в день  $i + 1$  каждый мексиканец пишет у себя на шляпе наименьшее натуральное число, которого не было на шляпе ни у одного из его знакомых в день  $i$ . Известно, что в какой-то день каждый мексиканец написал то же число, что и в предыдущий день, после чего они решили прекратить игру. Могла ли игра продолжаться не менее 5 дней? (Считается и день, когда они первый раз написали на шляпах, и день, когда значения совпали с предыдущим днём.)

3. Найдите все натуральные  $n$  для которых число  $n! - 1$  является точным квадратом натурального числа.

4. Даны 1500 различных натуральных чисел, не превосходящих миллиона. Докажите, что существует натуральное число  $r \leq 1500$ , которое может быть записано в виде разности двух данных чисел по крайней мере двумя различными способами.

5. За круглый стол сели 2025 человек, перед одним из них положили 2025 яблок. Далее раз в минуту люди передают друг другу яблоки по следующему правилу. Каждый человек, у которого есть хотя бы одно яблоко, находит ближайшего по часовой стрелке от себя человека, у которого нет яблока. И все, у кого есть хотя бы одно яблоко, одновременно передают одно яблоко тому человеку, которого они нашли. Например, через минуту у первого будет 2024 яблока, а у второго — 1, а через две минуты у первого будет 2023 яблока, а у третьего — 2. Может ли в какой-то момент у каждого человека оказаться по одному яблоку?

6. У натурального числа  $n$  некоторые  $k$  его делителей это последовательные натуральные числа. Докажите, что у  $n$  не менее  $2k - 2$  делителей.

7. Петя загадал три различных натуральных числа  $a > b > c$ , и сообщил Васе три числа: их сумму  $a + b + c$ , их сумму попарных произведений  $ab + bc + ac$ , и произведение их попарных разностей  $(a - b)(b - c)(a - c)$ . Верно ли, что Вася, зная все это, гарантированно может определить загаданные Петей числа?

8. ИИ может за одно действие напечатать на листе бумаги контур любого квадрата. Ему дано задание напечатать квадратную клетчатую решётку  $7 \times 7$  (которая показана на рисунке). Контур-ы могут иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или нескольким контурам. За какое наименьшее количество действий ИИ может справиться с заданием?



**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 01.05.2025****ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА**

1. В каждой клетке таблицы  $1024 \times 1024$  написано наименьшее натуральное число, которого нет в этой же строке левее него, и в этом же столбце выше него. Сколько раз в этой таблице встречается число 2?

2. На каждой из 10 000 карточек Петя написал число от 1 до 100, а затем разложил карточки числами вниз по одной на клетки доски  $100 \times 100$  таким образом, чтобы числа в каждой строке располагались в неубывающем порядке (то есть при движении слева направо каждое следующее было больше или равно предыдущего) и числа в каждом столбце также располагались в неубывающем порядке (сверху вниз). Вася может за ход перевернуть одну карточку. Может ли он менее чем за 200 ходов определить, лежит ли на доске карточка с числом 50?

3. На турнир приехали 500 участников. Их всех занесли в общий список, занумерованный числами от 1 до 500. Каждый участник заявил: «Тот, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Какое наибольшее возможное число участников могут оказаться паталогическими правдолюбцами (никогда не врущими)?

4. Найдите все натуральные  $n$  для которых число  $n! - 1$  является точным квадратом натурального числа.

5. За круглый стол сели 2025 человек, перед одним из них положили 2025 яблок. Далее раз в минуту люди передают друг другу яблоки по следующему правилу. Каждый человек, у которого есть хотя бы одно яблоко, находит ближайшего по часовой стрелке от себя человека, у которого нет яблока. И все, у кого есть хотя бы одно яблоко, одновременно передают одно яблоко тому человеку, которого они нашли. Например, через минуту у первого будет 2024 яблока, а у второго — 1, а через две минуты у первого будет 2023 яблока, а у третьего — 2. Может ли в какой-то момент у каждого человека оказаться по одному яблоку?

6. У натурального числа  $n$  некоторые 5 его делителей это последовательные натуральные числа. Докажите, что у  $n$  более 10 делителей.

7. В ряд выписали 7 чисел, каждое последующее из которых на 0, 1 больше предыдущего. Затем отбросили все знаки после запятой и получившиеся числа сложили. Сумма оказалась равной 77. Какой была первая цифра после запятой у первого из выписанных чисел?

8. ИИ может за одно действие напечатать на листе бумаги контур любого квадрата. Ему дано задание напечатать квадратную клетчатую решётку  $7 \times 7$  (которая показана на рисунке). Контур могут иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или нескольким контурам. За какое наименьшее количество действий ИИ может справиться с заданием?

