

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. Несколько школьников написали контрольную, и каждый получил за неё оценку: 2, 3, 4 или 5. Оказалось, что ровно половина школьников получила оценки 2 и 3, а получивших двойки ровно впятеро меньше, чем получивших пятёрки. Кроме того, сумма всех чётных полученных оценок равна сумме всех нечётных полученных оценок. Каких оценок было получено больше: пятёрок или четвёрок, и во сколько раз?

Ответ: Четвёрок больше в 7 раз. **Решение.** Пусть было a двоек, b троек, c четвёрок и d пятёрок. Тогда из условия имеем уравнения:

$$a + b = c + d; \quad 5a = d; \quad 2a + 4c = 3b + 5d.$$

Складывая утроенное первое уравнение с третьим, получим $5a + 3b + 4c = 3c + 3b + 8d$, то есть $5a + c = 8d$, $d + c = 8d$, $c = 7d$.

2. На уроке английского 33 ученика изучали 5 новых слов. В начале урока учитель каждому из 31 учеников рассказал значения нескольких (не менее одного) из этих новых слов, причем никаким двум ребятам не достался один и тот же набор. А Петя и Вася к началу урока опоздали, и не узнали значение ни одного слова. Затем учитель каждую минуту выбирал пару учеников, которые делились друг с другом всеми новыми словами, которые они к этому моменту узнали. В результате через t минут все 33 ученика, включая Петю и Васю, узнали все 5 новых слов. Каково наименьшее возможное t , при котором такое могло произойти?

Ответ: 17. **Решение.** Оценка. Раз наборы у всех 31 учеников разные, и всевозможных непустых наборов как раз $2^5 - 1 = 31$, ровно один ученик, назовем его Толей, знает изначально все 5 слов, а остальные все знают не более 4. Итого, в начале в классе есть 32 ученика (все кроме Толи), которые значение хоть какого-нибудь слова не знают. Каждую минуту лишь двое что-то узнают, причем хоть раз с кем-то в пару впервые поставят Петю, и в эту минуту лишь один ученик что-то узнает. Поэтому 16 минут не хватит: за это время не более $1 + 16 \cdot 2 - 1 = 32$ ученика узнают все слова.

Пример. Докажем, что за 17 минут справиться можно. Разобьем учеников (всех кроме Васи) на пары с наборами, дополняющими друг друга до набора из всех 5 слов. Эти 16 пар за первые 16 минут обменяются информацией и узнают все слова. Осталось в 17-ую минуту поставить в пару Васю с кем угодно, чтобы и он узнал все слова — и мы добились цели.

3. Игорь взял 100 листов бумаги и на каждом листе написал несколько различных натуральных чисел, не превосходящих 100. Для любого $1 \leq k \leq 100$ оказалось, что если число k выписано ровно на ℓ листах, то число ℓ выписано ровно на k листах, при этом каждое число выписано хотя бы один раз. Сколько чисел может быть выписано у Игоря в сумме на всех листах? (Каждое число считается столько раз, сколько его выписали.)

Ответ: 5050. **Решение.** Заметим, что если числа $k_1 \neq k_2$ выписаны по ℓ раз, то число ℓ должно быть выписано и k_1 раз, и k_2 раза одновременно. Но этого, очевидно, не может быть. Следовательно, все числа выписаны разное количество раз, то есть в сумме выписано $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ чисел.

4. Назовем пятизначное число без нулевых цифр интересным, если оно является палиндромом (т.е. если прочитать его цифры в обратном порядке, то получится исходное число, например 23432) и его средняя цифра в два раза больше первой. Докажите, что произведение 2025 интересных чисел не может быть квадратом натурального числа.

Решение. Запишем интересное число как $\overline{ab(2a)ba} = 101 \cdot \overline{aba}$. Тогда оно кратно простому числу 101, причем ровно в 1 степени, поскольку \overline{aba} на 101 делиться не может, ведь цифра b не нулевая. Поэтому произведение 2025 интересных чисел содержит простое число 101 ровно в 2025 степени, следовательно, не может быть квадратом натурального числа.

5. На доске написано 14 чисел: n нулей и $14 - n$ единиц ($1 \leq n \leq 13$). За одну операцию можно выбрать какие-нибудь семь чисел на доске и одновременно прибавить к каждому из них по 1, а все остальные семь чисел умножить на 8. При каких n можно, последовательно выполняя такие операции, сделать все числа равными?

Ответ: 7. **Решение.** Оценка. Заметим, что остаток от деления на 7 суммы этих чисел не меняется. В конце он равен 0, значит и в начале равен 0. Тогда исходное количество единиц делится на 7, т.е. равно 7. Пример. Пусть изначально 7 единиц. Давайте прибавим к ним k раз по единице, потом

умножим их на 8, получим набор $8k, 8k, \dots, 8k, 1, 1, \dots, 1$. Теперь m раз умножим все единицы на 8. Получим 7 чисел, равных $8k + m$ и 7 чисел, равных 8^m . При $m = 8$ и $k = 8^7 - 1$ все числа будут равны.

6. *Петя и Вася играют в игру. В начале Петя отмечает 99 точек на окружности и некоторые пары этих точек соединяет отрезками таким образом, чтобы из каждой точки выходил хотя бы один отрезок. После этого Вася может стереть несколько проведенных Петей отрезков. Затем Петя платит Васе один рубль за каждую отмеченную точку, из которой теперь выходит нечётное число отрезков. Какую наибольшую сумму денег Вася может гарантированно заработать независимо от действий Пети?*

Ответ: 66. **Решение.** Стратегия за Петю. Разобьём точки на 33 тройки, и в каждой тройке соединим одну точку с двумя другими отрезком. Очевидно, что какие бы отрезки ни стирал Вася, в каждой тройке останется хотя бы одна точка с четным числом исходящих отрезков.

Стратегия за Васю. Будем последовательно стирать отрезки, каждый раз выбирая отрезок, который не является единственным отрезком ни для одного из своих концов. Рассмотрим момент, когда больше ни одного такого отрезка стереть нельзя. Тогда каждой точке, из которой выходит более одного отрезка, можно сопоставить не менее двух точек, которые с ней соединены, причем эти точки будут соединены только с ней, а следовательно, не сопоставлены никакой другой точке. Значит, точек, из которых выходит более одного отрезка, будет не более $\frac{1}{3}$ от общего числа, то есть не более 33. Тогда будет хотя бы 66 точек, из которых выходит ровно один отрезок.

7. *Дан квадрат 30×30 клеток. Найдите наибольшее натуральное число n такое, что если отметить на доске любые n клеток, то всегда найдется способ поставить 40 фишек на неотмеченные клетки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце стояла хотя бы одна фишка, и при этом для любой фишки в её строке или в её столбце стояла ещё хотя бы одна фишка.*

Ответ: 29. **Решение 1.** Если $N \geq 30$, то мы можем отметить все клетки одной строки, и тогда фишки будет невозможно поставить.

Докажем, что при $N = 29$ можно так поставить фишки. Назовем множество из k клеток в квадрате $k \times k$ ладейным, если эти клетки находятся в разных строках и разных столбцах.

Лемма: если в квадрате $k \times k$ меньше k отмеченных клеток, то существует ладейное множество, не содержащее отмеченных клеток.

Доказательство: Можно выделить k непересекающихся ладейных множеств (клетки главной диагонали, клетки над главной диагональю и нижняя угловая и т.д.). Тогда хотя бы одно из них не будет содержать отмеченную клетку.

Перейдем к решению задачи. Разобьём квадрат 30×30 на 9 квадратов 10×10 . Так как не более 29 клеток отмечено, то существует не более двух квадратов 10×10 , содержащих не менее 10 отмеченных клеток. Квадраты 10×10 образуют квадрат 3×3 . В этом квадрате выделим два, которые содержат не меньше 10 отмеченных клеток. Тогда найдется строка и столбец квадрата 3×3 , не содержащие выделенных квадратов. Выберем 4 квадрата 10×10 , которые стоят в этой строке и столбце, но не в их пересечении.

Теперь в каждом из 4 выбранных квадратов 10×10 поставим 10 фишек так, чтобы они стояли на клетках некоторого ладейного множества (это можно сделать согласно лемме). Легко проверить, что 40 поставленных фишек удовлетворяют условию задачи.

Замечание. Есть и другие пути решения. Можно, например, доказать по индукции, что если в квадрате $3k \times 3k$ отмечено менее $3k$ клеток, то существует расстановка $4k$ фишек, удовлетворяющая условию.

8. *Для натурального числа $N > 2$ выписали в порядке возрастания все натуральные числа, которые меньше N и взаимно просты с N . Оказалось, что сумма любых двух соседних в ряду чисел имеет с числом N общий натуральный делитель, больший единицы. Найдите все такие N .*

Ответ: Все чётные и степени тройки. **Решение.** Для четного N будут выписаны только нечетные числа, и сумма любых двух соседних будет четна, то есть не взаимно проста с N . Для $N = 3^k$ будут выписаны в порядке возрастания все числа, не кратные трем. Тогда в ряду чередуются числа с остатками 1 и 2 от деления на 3, сумма любых двух соседей кратна 3.

Докажем, что все остальные числа не подходят. Пусть $N = 3^\ell k$, где k нечетно. Если $\ell = 0$, то будут выписаны числа 1 и 2, и их сумма 3 взаимно проста с N . Пусть $\ell > 0$. Разберем два случая:

Случай 1. $k = 3m + 1$. Тогда числа $3m - 1$ и $3m + 2$ меньше N и взаимно просты с N (они, очевидно, не кратны 3, а если бы имели общий делитель с $3m + 1$, то и разность бы имела общий

делитель, но $3t + 1$ не делится на 2). А числа $3t$ и $3t + 1$ не взаимно просты с N . Значит, $3t - 1$ и $3t + 1$ — два соседних числа в ряду, и их сумма $6t + 1$ взаимно проста с N .

Случай 2. $k = 3t + 2$. Аналогично написанному выше противоречие будет для чисел $3t + 1$ и $3t + 4$.