

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025****СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Отрезок  $AB$  — диаметр окружности  $S$  с центром  $O$ . Прямоугольник  $OBCD$  расположен таким образом, что отрезок  $CD$  пересекает окружность  $S$  в точке  $E$ . Продолжение отрезка  $AD$  пересекает окружность  $S$  в точке  $F$ . Пусть  $G$  — точка пересечения отрезков  $BF$  и  $CD$ . Оказалось, что  $DE = BC$ . Докажите, что  $\angle GOE = \angle COE$ .

2. Вещественные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  больше 1, а их произведение равно  $n + 1$ . Докажите, что

$$\left(\frac{1}{1^2(x_1 - 1)} + 1\right) \left(\frac{1}{2^2(x_2 - 1)} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n^2(x_n - 1)} + 1\right) \geq n + 1.$$

3. На столе лежит шоколадка  $100 \times 807$ . Ёкодзуны Мусасимару и Таканохана по очереди (начинает Мусасимару) ударяют шоколадку ребром ладони, от чего она разделяется по бороздке на два прямоугольных куска. Ударив шоколадку, ёкодзуна съедает меньший из двух получившихся кусков (любой, если они равны). Оставшуюся часть шоколадки ёкодзуна не двигает. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из ёкодзун выиграет при правильной игре?

4. Множество натуральных чисел  $S$  удовлетворяет следующим условиям:

- (i) все числа от 1 до 2025 содержатся в  $S$ ;
- (ii) если  $a, b \in S$  и  $\text{НОД}(a, b) = 1$ , то  $ab \in S$ ;
- (iii) если  $s \in S$  и  $s + 1$  составное, то все натуральные делители  $s + 1$  (в том числе само число  $s + 1$ ) содержатся в  $S$ .

Докажите, что  $S$  содержит все натуральные числа.

5. Точка  $E$  лежит на стороне  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ . Прямая, проведённая через точку  $C$  перпендикулярно  $BE$ , и прямая, проведенная через точку  $D$  перпендикулярно  $AE$ , пересекаются в точке  $P$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $PE$ . Докажите, что перпендикуляр, опущенный из  $M$  на  $CD$ , проходит через центр параллелограмма  $ABCD$ .

6. При каких вещественных  $x$ ,  $0 < x < 180$ , равносторонний треугольник можно разбить на конечное число треугольников, каждый из которых имеет угол  $x$  градусов?

7. Дано натуральное число  $k$ . Найдите наименьшее натуральное число  $n$  большее 1, для которого число  $\underbrace{99 \dots 99}_k 7 \cdot n$  состоит только из нечётных цифр (ответ зависит от  $k$ ).

8. Ребра полного графа с более чем пятью вершинами покрашены в красный и синий цвет. Оказалось, что синий граф не является полным двудольным, в нем нет треугольников и степени всех его вершин нечетны. Докажите, что в красном графе можно выбрать дерево на всех вершинах, у которого степени всех вершин нечетны.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025****СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Отрезок  $AB$  — диаметр окружности  $S$  с центром  $O$ . Прямоугольник  $OBCD$  расположен таким образом, что отрезок  $CD$  пересекает окружность  $S$  в точке  $E$ . Продолжение отрезка  $AD$  пересекает окружность  $S$  в точке  $F$ . Пусть  $G$  — точка пересечения отрезков  $BF$  и  $CD$ . Оказалось, что  $DE = BC$ . Докажите, что  $\angle GOE = \angle COE$ .

2. Вещественные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  больше 1, а их произведение равно  $n + 1$ . Докажите, что

$$\left( \frac{1}{1^2(x_1 - 1)} + 1 \right) \left( \frac{1}{2^2(x_2 - 1)} + 1 \right) \cdots \left( \frac{1}{n^2(x_n - 1)} + 1 \right) \geq n + 1.$$

3. На столе лежит шоколадка  $100 \times 807$ . Ёкодзуны Мусасимару и Таканохана по очереди (начинает Мусасимару) ударяют шоколадку ребром ладони, от чего она разделяется по бороздке на два прямоугольных куска. Ударив шоколадку, ёкодзуна съедает меньший из двух получившихся кусков (любой, если они равны). Оставшуюся часть шоколадки ёкодзуна не двигает. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из ёкодзун выиграет при правильной игре?

4. Для каких простых  $p$  можно подобрать натуральное  $n$  так, чтобы число  $2^n p^2 + 1$  было точным квадратом?

5. Точка  $E$  лежит на стороне  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ . Прямая, проведённая через точку  $C$  перпендикулярно  $BE$ , и прямая, проведенная через точку  $D$  перпендикулярно  $AE$ , пересекаются в точке  $P$ . Точка  $M$  — середина отрезка  $PE$ . Докажите, что перпендикуляр, опущенный из  $M$  на  $CD$ , проходит через центр параллелограмма  $ABCD$ .

6. Шахматная доска  $8 \times 8$  разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?

7. Дано натуральное число  $k$ . Найдите наименьшее натуральное число  $n$  большее 1, для которого число  $\underbrace{99 \dots 99}_k 7 \cdot n$  состоит только из нечётных цифр (ответ зависит от  $k$ ).

8. Ребра полного графа с более чем пятью вершинами покрашены в красный и синий цвет. Оказалось, что синий граф не является полным двудольным, в нем нет треугольников и степени всех его вершин нечетны. Докажите, что в красном графе можно выбрать дерево на всех вершинах, у которого степени всех вершин нечетны.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025

## СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Отрезок  $AB$  — диаметр окружности  $S$  с центром  $O$ . Прямоугольник  $OBCD$  расположен таким образом, что отрезок  $CD$  пересекает окружность  $S$  в точке  $E$ . Продолжение отрезка  $AD$  пересекает окружность  $S$  в точке  $F$ . Пусть  $G$  — точка пересечения отрезков  $BF$  и  $CD$ . Оказалось, что  $DE = BC$ . Докажите, что  $\angle GOE = \angle COE$ .

2. Произведение различных натуральных чисел  $b$  и  $c$  равно квадрату натурального числа  $a$ . Какое наименьшее значение может иметь выражение  $2b + 3c - a$ ?

3. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает кошелёк, вынимает по одной монете из двух соседних с ним кошельков, одну монету кладёт в выбранный кошелёк, а вторую отдаёт Гарри. Он может сделать такой ход, только если в обоих соседних кошельках есть хотя бы одна монета (при этом сам выбранный кошелёк может быть пустым). Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое минимальное количество монет он может отдать Гарри?

4. Для каких простых  $p$  можно подобрать натуральное  $n$  так, чтобы число  $2^n p^2 + 1$  было точным квадратом?

5. Внутри квадрата  $ABCD$  со стороной 1 отметили его центр  $T$ . Ромб  $ARTE$  такой, что точка  $E$  лежит на прямой  $CD$ . Найдите площадь этого ромба.

6. Шахматная доска  $8 \times 8$  разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?

7. Дано натуральное число  $k$ . Найдите наименьшее натуральное число  $n$  большее 1, для которого число  $\underbrace{99 \dots 99}_k 7 \cdot n$  состоит только из нечётных цифр (ответ зависит от  $k$ ).

8. Ребра полного графа с более чем пятью вершинами покрашены в красный и синий цвет. Оказалось, что в синем графе нет треугольников, а красный граф несвязен. Докажите, что граф на синих рёбрах является полным двудольным графом.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.04.2025

## СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дана трапеция  $ABCD$ , в которой  $BC \parallel AD$ . На сторонах  $AB$  и  $AD$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно. Оказалось, что все треугольники  $BCD$ ,  $BFD$ ,  $BFE$  и  $AFE$  равны друг другу. Найдите углы трапеции.
2. Произведение различных натуральных чисел  $b$  и  $c$  равно квадрату натурального числа  $a$ . Какое наименьшее значение может иметь выражение  $2b + 3c - a$ ?
3. По кругу лежат 2000 кошельков, в каждом кошельке изначально одна монета. Крюкохват выдаёт Гарри Поттеру монеты по следующему правилу. За один ход Крюкохват выбирает кошелек, вынимает по одной монете из двух соседних с ним кошельков, одну монету кладёт в выбранный кошелек, а вторую монету отдает Гарри. Он может сделать такой ход, только если в обоих соседних кошельках есть хотя бы одна монета (а выбранный кошелек может быть и пустым). Крюкохват останавливается только тогда, когда больше не может сделать ни одного хода. Какое максимальное количество монет он может отдать Гарри?
4. Два натуральных числа назовём *зацепленными*, если больше половины натуральных делителей каждого из них являются также делителями другого. Докажите, что существует 2025 натуральных чисел, каждые два из которых зацеплены, но ни одно из которых не делится на другое.
5. Внутри квадрата  $ABCD$  со стороной 1 отметили его центр  $T$ . Ромб  $ARTE$  такой, что точка  $E$  лежит на прямой  $CD$ . Найдите площадь этого ромба.
6. Шахматная доска  $8 \times 8$  разбита на доминошки. На каждой из них записали количество доминошек разбиения, имеющих с ней более одной общей точки. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доминошках?
7. Найдите наименьшее натуральное число  $n$  большее 1, для которого число  $999\,997 \cdot n$  состоит только из нечётных цифр.
8. Ребра полного графа с более чем пятью вершинами покрашены в красный и синий цвет. Оказалось, что в синем графе нет треугольников, а красный граф несвязен. Докажите, что граф на синих рёбрах является полным двудольным графом.