Двадцать первый математический турнир старшеклассников
"Кубок памяти А.Н. Колмогорова"

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Второй тур 30.10.17. Высшая лига.

1. На плоскости нарисованы k концентрических окружностей и ещё n концентрических окружностей; отмечены все точки их пересечения. Затем выбран выпуклый d-угольник, все вершины которого отмечены. При каком наибольшем d это могло случиться?

2. Пусть $n > 2$, $k > 1$ и $l < n$ — натуральные числа. Тренер выстроил nk детей в круг и посчитал количество способов выбрать из них l детей, никакие два из которых не стоят рядом. Затем он выстроил тех же детей в k кругов по n человек в каждом, и снова посчитал количество способов выбрать из них l детей, никакие два из которых не стоят рядом в одном круге. Докажите, что в обоих случаях у него получилось одно и то же количество.

3. Точка P выбрана на меньшей дуге BC окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. Точка Q выбрана внутри треугольника ABC так, что $\angle PBQ = \angle ACB$ и $\angle PCQ = \angle ABC$. Точка $R \neq Q$ выбрана на отрезке AP так, что $QR \parallel BC$. Наконец, точка $S \neq A$ выбрана на дуге BP окружности Ω так, что $RA = RS$, Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

4. На каждом ребре полного графа с n вершинами написано положительное число, все они различны. В графе нашли гамильтонов путь наименьшего суммарного веса. Для какого наименьшего k можно гарантировать, что в этом пути есть одно из k рёбер наименьших весов?

5. Таблица 100×100 заполнена натуральными числами, не превосходящими 100. Под каждым столбцом написали сумму чисел этого столбца, а слева каждой строки написали сумму чисел этой строки. Сами числа в таблице стерли. Иван только по суммам смог однозначно восстановить всю исходную таблицу. Какое наибольшее количество чисел 7 могло быть написано в исходной таблице?

6. Сумму $\frac{4}{9}+\sum_{n=1}^{p-1} n^2 H_n^2$, где $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ и $p > 3$ — простое число, представили в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что a кратно p.

7. Биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ пересекает его сторону AD в точке P, а продолжение стороны CD в точке Q. Лучи AD и CD пересекают окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках A_1 и C_1 соответственно. Окружности, описанные около треугольников PQA_1 и PQC_1 вторично пересекают окружность ω в точках A_2 и C_2 соответственно. Докажите, что прямые AC, A_2C_2 и касательная в точке B к окружности ω пересекаются в одной точке.

8. Докажите, что существует положительное μ, для которого верно следующее утверждение. Если $a_1, \ldots, a_{100}$ — положительные числа, сумма которых больше $1-\mu$, то существуют целые неотрицательные числа $n_1, \ldots, n_{100}$ и $M = n_1+\ldots+n_{100}>0$ такие, что $(M+1)a_i > n_i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$.

9. Даны натуральные взаимно простые числа a и b с нечётной суммой. Пусть числа x и y таковы, что $ax+by$, $ay-bx$, $(a+b)x+(a-b)y$, $(a+b)y-(a-b)x$ — целые. Обязательно ли x и y также целые?

10. Пусть $f, g: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — строго возрастающие функции. Докажите, что для некоторого натурального n выполнено неравенство $f(g(g(n))) \geq g(f(n))$.

Второй тур 30.10.17. Первая лига.

1. На плоскости нарисовали две пары концентрических окружностей и отметили все точки их пересечения. При каком наибольшем d может найтись выпуклый d-угольник, все вершины которого отмечены?

2. Пусть $n > 2$, $k > 1$ и $l < n$ — натуральные числа. Тренер выстроил nk детей в круг и посчитал количество способов выбрать из них l детей, никакие два из которых не стоят рядом. Затем он выстроил тех же детей в k кругов по n человек в каждом, и снова посчитал количество способов выбрать из них l детей, никакие два из которых не стоят рядом в одном круге. Докажите, что в обоих случаях у него получилось одно и то же количество.

3. Точка P выбрана на меньшей дуге BC окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. Точка Q выбрана внутри треугольника ABC так, что $\angle PBQ = \angle ACB$ и $\angle PCQ = \angle ABC$. Точка $R \neq Q$ выбрана на отрезке AP так, что $QR \parallel BC$. Наконец, точка $S \neq A$ выбрана на дуге BP окружности Ω так, что $RA = RS$, Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

4. На каждом ребре полного графа с n вершинами написано положительное число, все они различны. В графе нашли гамильтонов путь наименьшего суммарного веса. Для какого наименьшего k можно гарантировать, что в этом пути есть одно из k рёбер наименьших весов?

5. Таблица 100×100 заполнена натуральными числами, не превосходящими 100. Под каждым столбцом написали сумму чисел этого столбца, а слева каждой строки написали сумму чисел этой строки. Сами числа в таблице стерли. Иван только по суммам смог однозначно восстановить всю исходную таблицу. Какое наибольшее количество чисел 7 могло быть написано в исходной таблице?

6. Сумму $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{p-1} nH_n$, где $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ и $p > 2$ — простое число, представили в виде обыкновенной дроби $\dfrac{a}{b}$. Докажите, что a делится на p.

7. Найдите все вещественные m, для которых при любом вещественном x выполняется неравенство $4^{x^3}-m2^{x^3+x+1}+m^3 4^x \geqslant 0$.

8. В окружность радиуса r вписан пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AB = CD = DE > r$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABD, BCD и ADE являются вершинами тупоугольного треугольника.

9. Даны натуральные взаимно простые числа a и b с нечётной суммой. Пусть числа x и y таковы, что $ax+by$, $ay–bx$, $(a+b)x+(a–b)y$, $(a+b)y–(a–b)x$ — целые. Обязательно ли x и y также целые?

10. Пусть $f, g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — строго возрастающие функции. Докажите, что для некоторого натурального n выполнено неравенство $f(g(g(n))) \geq g(f(n))$.

Второй тур 30.10.17. Вторая лига.

1. На плоскости нарисовали две пары концентрических окружностей и отметили все точки их пересечения. При каком наибольшем d может найтись выпуклый d-угольник, все вершины которого отмечены?

2. Для натурального числа n обозначим через $Z(n)$ набор всех чисел, получающихся из n циклическими сдвигами его цифр. В том числе считаем, что число может начинаться с нуля. Например, у числа 5601 такие числа — 5601, 6015, 0156, 1560. Найдите наименьшее натуральное n, для которого все числа из $Z(n)$ делятся на 239.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Точка I — центр вписанной окружности треугольника BHC. Докажите, что $\angle AIC = 90°$ равносильно тому, что $AB = BC$.

4. В стране 99 городов, любые два из которых соединены железной дорогой (с двусторонним сообщением). Цена проезда по каждой дороге положительна, все цены различны. В стране нашли незамкнутый маршрут, проходящий по всем городам ровно по одному разу, с наименьшей суммарной ценой. Для какого наименьшего k можно гарантировать, что в этом пути есть хотя бы одна из k дорог наименьшей цены?

5. Таблица 100×100 заполнена натуральными числами, не превосходящими 100. Под каждым столбцом написали сумму чисел этого столбца, а слева от каждой строки написали сумму чисел этой строки. Сами числа в таблице стерли. Иван только по суммам смог однозначно восстановить всю исходную таблицу. Какое наибольшее количество чисел 7 могло быть написано в исходной таблице?

6. Сумму $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{p-1} nH_n$, где $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ и $p>2$ — простое число, представили в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что a делится на p.

7. Найдите все вещественные m, для которых при любом вещественном x выполняется неравенство $4^{x^3}-m2^{x^3+x+1}+m^3 4^x \geqslant 0$.

8. На окружности радиуса r выбраны различные точки A, B, C, D, E, лежащие на окружности именно в таком порядке, удовлетворяющие равенству $AB = CD = DE > r$. Докажите, что треугольник, образованный точками пересечения медиан треугольников ABD, BCD и ADE, тупоугольный.

9. В одной из вершин правильного 999-угольника расположена фишка. За один ход первый игрок Петя должен переместить фишку в одну из двух соседних вершин и отметить эту вершину, если она не была отмечена ранее. За один свой ход второй игрок Вася должен переместить фишку в одну из двух противоположных вершин. Вася вершины не отмечает. Петя хочет отметить как можно больше вершин, а Вася — ему помешать. В игру играют, пока Петя не устанет. Какое наибольшее число вершин сможет отметить Петя, как бы ни действовал Вася?

10. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b со следующим свойством: существует некоторое число N такое, что все натуральные числа, большие N, представляются как сумма слагаемых вида $a^i b^j$, где i и j — целые неотрицательные числа, причем ни одно из слагаемых не делится ни на какое другое.

Второй тур 30.10.17. Высшая юниорская лига.

1. Все натуральные делители числа 100! выписаны на доске. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) делают ходы в следующей игре. Каждый из мальчиков своим ходом может выбрать одно ещё не покрашенное число на доске и покрасить его в красный или синий цвет. Игра заканчивается, когда все числа покрашены. Вася выигрывает, если либо произведение всех красных чисел на доске является квадратом натурального числа, либо все числа на доске синие, в противном случае выигрывает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Точка P выбрана на меньшей дуге BC окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. Точка Q выбрана внутри треугольника ABC так, что $\angle PBQ = \angle ACB$ и $\angle PCQ = \angle ABC$. Точка $R \neq Q$ выбрана на отрезке AP так, что $QR \parallel BC$. Наконец, точка S выбрана на дуге BP окружности Ω так, что $RA = RS$, Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

3. Таблица 100×100 заполнена натуральными числами, не превосходящими 100. Под каждым столбцом написали сумму чисел этого столбца, а слева от каждой строки написали сумму чисел этой строки. Сами числа в таблице стерли. По уцелевшим суммам Иван смог однозначно восстановить всю исходную таблицу. Какое наибольшее количество чисел 7 могло быть написано в исходной таблице?

4. Даны неотрицательные числа a_1, a_2, a_3, a_4, сумма которых равна 1. Докажите, что $\max\{\sum_{i=1}^{4}\sqrt{a_i^2+a_ia_{i-1}+a_{i-1}^2+a_{i-1}a_{i-2}},\sum_{1}^{4}\sqrt{a_i^2+a_ia_{i+1}+a_{i+1}^2+a_{i+1}a_{i+2}}\}\geq 2$. Для всех целых i считаем $a_{i+4} = a_i$.

5. Существует ли такое натуральное число $n > 2$, что все n натуральных чисел от 1 до n можно расставить по кругу в каком-то порядке таким образом, что произведение любых двух соседних чисел, увеличенное на 1, будет кубом натурального числа?

6. Сумму $\sum_{n=1}^{p-1} nH_n^2$, где $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ и $p > 2$ — простое число, представили в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что $a-b$ кратно p.

7. На каждом ребре полного графа с 99 вершинами написан его вес (какое-то положительное число), причём все веса различны. В графе нашли гамильтонов путь наименьшего суммарного веса. Для какого наименьшего k можно гарантировать, что в этом пути есть одно из k рёбер наименьших весов?

8. В окружность радиуса r вписан пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AB = CD = DE > r$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABD, BCD и ADE являются вершинами тупоугольного треугольника.

9. Дано натуральное n. Для каждого конечного множества M натуральных чисел при $0 \leq i < n$ мы обозначим s_i количество непустых подмножеств M, сумма элементов которых даёт остаток i при делении на n. Множество M назовём *n-уравновешенным*, если $s_0 = s_1 = \ldots = s_{n-1}$. Например, если $n = 5$ и $M = \{1,3,4\}$, то $s_0 = s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = s_4 = 2$ и M не является 5-уравновешенным. Докажите, что для каждого нечётного n существует непустое n-уравновешенное подмножество множества $\{0, 1, \ldots, n\}$.

10. На плоскости нарисовали две пары концентрических окружностей и отметили все точки их пересечения. При каком наибольшем d может найтись выпуклый d-угольник, все вершины которого отмечены?

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Второй тур 30.10.17. Первая юниорская лига.

1. Все натуральные делители числа 100! выписаны на доске. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) делают ходы в следующей игре. Каждый из мальчиков своим ходом может выбрать одно ещё не покрашенное число на доске и покрасить его в красный или синий цвет. Игра заканчивается, когда все числа покрашены. Петя выигрывает, если либо произведение всех красных чисел на доске является квадратом натурального числа, либо все числа на доске синие, в противном случае выигрывает Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Точка P выбрана на меньшей дуге BC окружности Ω, описанной около остроугольного треугольника ABC. Точка Q выбрана внутри треугольника ABC так, что $\angle PBQ = \angle ACB$ и $\angle PCQ = \angle ABC$. Точка $R \neq Q$ выбрана на отрезке AP так, что $QR \parallel BC$. Наконец, точка S выбрана на дуге BP окружности Ω так, что $RA = RS$, Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

3. Таблица 100×100 заполнена натуральными числами, не превосходящими 100. Под каждым столбцом написали сумму чисел этого столбца, а слева от каждой строки написали сумму чисел этой строки. Сами числа в таблице стерли. По уцелевшим суммам Иван смог однозначно восстановить всю исходную таблицу. Какое наибольшее количество чисел 7 могло быть написано в исходной таблице?

4. Найдите все вещественные m, для которых при любом целом x выполняется неравенство $4^{x^2} - m2^{x^2+x} + 4^x \geqslant 0$.

5. Докажите, что для бесконечно многих n все n натуральных чисел от 1 до n можно расставить в каком-то порядке таким образом, что произведение каждых двух соседних чисел, увеличенное на 1, будет квадратом натурального числа.

6. Сумму $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{p-1} nH_n$, где $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ и $p > 2$ — простое число, представили в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$. Докажите, что a делится на p.

7. На каждом ребре полного графа с 99 вершинами написан его вес (какое-то положительное число), причём все веса различны. В графе нашли гамильтонов путь наименьшего суммарного веса. Для какого наименьшего k можно гарантировать, что в этом пути есть одно из k рёбер наименьших весов?

8. В окружность радиуса r вписан пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $AB = CD = DE > r$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABD, BCD и ADE являются вершинами тупоугольного треугольника.

9. Дано натуральное n. Для каждого конечного множества M натуральных чисел при $0 \le i < n$ мы обозначим s_i количество непустых подмножеств M, сумма элементов которых даёт остаток i при делении на n. Множество M назовём *n-уравновешенным*, если $s_0 = s_1 = \ldots = s_{n-1}$. Например, если $n = 5$ и $M = \{1,3,4\}$, то $s_0 = s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = s_4 = 2$ и M не является 5-уравновешенным. Докажите, что для каждого нечётного n существует непустое n-уравновешенное подмножество множества $\{0, 1, \ldots, n\}$.

10. На плоскости нарисовали две пары концентрических окружностей и отметили все точки их пересечения. При каком наибольшем d может найтись выпуклый d-угольник, все вершины которого отмечены?

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Второй тур 30.10.17. Вторая юниорская лига.

1. Найдите все вещественные m, для которых при любом целом x выполняется неравенство $4^{x^2} - m2^{x^2+x} + 4^x \geqslant 0$.

2. Библиотекарь выделил 10 свойств литературных произведений. Каждое свойство либо присуще произведению, либо нет. Два произведения считаются похожими, если у них хотя бы по девяти свойствам происходит совпадение (одновременное присутствие или отсутствие этого свойства). Может ли в библиотеке оказаться более 250 попарно непохожих произведений?

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Точка I — центр вписанной окружности треугольника BHC. Докажите, что угол AIC прямой тогда и только тогда, когда $AB = BC$.

4. В угол доски 9×9 поставили хромого слона, который ходит как обычный, но только на одну клетку. Какое наибольшее количество ходов он сможет сделать, не ступая дважды ни на одну клетку?

5. Таблица 100×100 заполнена натуральными числами, не превосходящими 100. Под каждым столбцом написали сумму чисел этого столбца, а слева каждой строки написали сумму чисел этой строки. Сами числа в таблице стерли. Иван только по суммам смог однозначно восстановить всю исходную таблицу. Может ли в таблице быть 200 пятёрок?

6. Можно ли при помощи знаков арифметических действий, факториала и скобок сделать из числа 111333 выражение, равное 2017? (Знак факториала может следовать за скобкой, например, (2+3)!=5!=120.)

7. Найдите все пары натуральных чисел k, $n > 1$ такие, что $k+1$ делится на n, а n^2-n+1 делится на k.

8. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки. Петя купил два одинаковых таких набора, но первый — из синих палочек, а второй — из красных. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из купленных наборов? Треугольники считаются разными, если их нельзя совместить так, чтобы совпали и стороны, и их цвета.

9. Все положительные делители числа 1000000 написаны на доске. Петя и Вася (Петя первым) по очереди красят одно из ранее не покрашенных чисел в красный или синий цвет. В какой захотят. Петя выигрывает, если произведение всех красных чисел — точный квадрат, или если ни одно число не было окрашено в красный цвет. Вася выигрывает в противном случае. Кто из ребят может выиграть независимо от игры соперника?

10. На плоскости нарисованы две концентрические окружности и ещё две концентрические окружности. Отмечены все точки их пересечения. Затем выбран выпуклый d-угольник, все вершины которого отмечены. При каком наибольшем d это могло случиться?