Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Третий тур 01.11.17. Высшая лига.

1. Дано натуральное $n \geq 2$. Назовём множество A, состоящее из n натуральных чисел, не превосходящих $2n$, *независимым*, если ни одно из чисел множества A не делится ни на одно другое число из этого множества. Найдите наименьшее число, которое может встретиться в независимом множестве.

2. Докажите, что при всех действительных a и b верно неравенство $2^{\frac{a^2+b^2}{2}} - 1 \geqslant (2^a - 1)(2^b - 1)$.

3. Дано натуральное $n \geq 3$. Вначале на доске написаны числа 1 и 2. Двое играют в игру, ходя по очереди. Каждым ходом игрок записывает на доску натуральное число, не превосходящее n, которого ещё нет на доске, но которое является суммой двух чисел с доски или удвоенным числом с доски. Выигрывает тот, кто напишет n. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его соперник?

4. На прямоугольном листе бумаги нарисовано n квадратов с попарно непересекающимися внутренностями. Докажите, что из этого листа можно вырезать прямоугольник так, что он содержит не более $2n/3$ квадратов, остаток листа также содержит не более $2n/3$ квадратов, а разрезанными окажутся не более $1000\sqrt{n}$ квадратов. (Стороны всех квадратов и прямоугольника параллельны сторонам листа.)

5. Определим $f(x) = \dfrac{(2x-1)6^x}{2^{2x-1} + 3^{2x-1}}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{3}{2018}\right) + f\left(\frac{5}{2018}\right) + \ldots + f\left(\frac{2017}{2018}\right).$$

6. Окружность ω с центром I вписана в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Пусть B_1 и C_1 — проекции точек B и C на прямую AI. Точки X и Y выбраны на отрезке BC так, что $\angle B_1XC_1 = \angle B_1YC_1 = 90°$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника AXY, касается ω.

7. Даны натуральные n и k, причём $k \leq 2^{n-1}$. Докажите, что на доске $n\times n$ можно отметить несколько клеток так, чтобы количество способов расставить на отмеченных клетках n не бьющих друг друга ладей было равно k.

8. Клетки таблицы 100×100 раскрасили в 100 цветов, по 100 клеток в каждый цвет, после чего таблицу разбили на двухклеточные прямоугольники. Докажите, что из этих прямоугольников можно выбрать 30 таких, что их 60 клеток окрашены либо в один цвет, либо в 60 различных цветов.

9. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение $p^n \equiv (p-1)^n + 1 \pmod{n^2}$.

10. Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке K. Известно, что $BD = BC$, $CD = CK$ и $\angle ABD = 15°$. Найдите $\angle BAC$.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Третий тур 01.11.17. Первая лига.

1. Дано 100 000 натуральных чисел, не превосходящих 200 000, ни одно из которых не делится на другое. Докажите, что все эти числа больше 1000.

2. Докажите, что при всех действительных a и b верно неравенство $2^{\frac{a^2+b^2}{2}}-1 \geqslant (2^a-1)(2^b-1)$.

3. Дано натуральное $n \geq 3$. Вначале на доске написаны числа 1 и 2. Двое играют в игру, ходя по очереди. Каждым ходом игрок записывает на доску натуральное число, не превосходящее n, которого ещё нет на доске, но которое является суммой двух чисел с доски или удвоенным числом с доски. Выигрывает тот, кто напишет n. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его соперник?

4. В компании есть m мальчиков и $d \geq 20$ девочек; некоторые мальчики дружат с некоторыми девочками. Известно, что для любого множества X из 20 девочек найдётся множество Y из 20 мальчиков такое, что каждая девочка из X дружит ровно с одним мальчиком из Y, а каждый мальчик из Y дружит ровно с одной девочкой из X. Докажите, что $2^m \geq \left(\dfrac{d-18}{10}\right)^{19}$.

5. Определим $f(x)=\dfrac{(2x-1)6^x}{2^{2x-1}+3^{2x-1}}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{3}{2018}\right)+f\left(\frac{5}{2018}\right)+\ldots+f\left(\frac{2017}{2018}\right).$$

6. Обозначим через γ описанную окружность треугольника ABC. Пусть D — точка на стороне BC, и точка M — середина отрезка AD. Через точку D провели прямую, пересекающую отрезок AB в точке E и окружность γ в точке F (D лежит между точками E и F). Прямые FC и EM пересекаются в точке X. Докажите, что если $\angle DCF = \angle ADE$, то прямая AX касается γ.

7. Даны натуральные n и k, причём $k \leq 2^{n-1}$. Докажите, что на доске $n\times n$ можно отметить несколько клеток так, чтобы количество способов расставить на отмеченных клетках n не бьющих друг друга ладей было равно k.

8. На плоскости лежат несколько кругов радиуса 1. Среди любых шести из них какие-то два имеют общую точку. Докажите, что суммарная площадь, покрываемая кругами, меньше 100.

9. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение $p^n \equiv (p-1)^n+1 \pmod{n^2}$.

10. Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке K. Известно, что $BD = BC$, $CD = CK$ и $\angle ABD = 15°$. Найдите $\angle BAC$.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Третий тур 01.11.17. Вторая лига.

1. На плоскости лежат несколько кругов радиуса 1. Среди любых четырех из них какие-то два имеют общую точку. Докажите, что суммарная площадь, покрываемая кругами, меньше 60.

2. Дано натуральное число k. На доске написана последовательность целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. Каждую минуту Медведь разделяет последовательность на несколько (не менее одного) блоков последовательных членов (в каждом блоке не менее одного числа); при этом, если блоков больше двух, сумма чисел в каждом блоке должна делиться на k. Затем Крокодил съедает все блоки, кроме одного (который выбирает по своему усмотрению). Игра заканчивается, когда на доске остаётся одно число. Докажите, что Медведь может ходить так, чтобы независимо от ходов Крокодила игра закончилась не более чем за $3k$ ходов.

3. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и AC отметили точки C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Оказалось, что $AC_1 = AB_1 = AM$. Докажите, что $S_{AB_1MC_1} + S_{AB_1C_1} = S_{BMC}$.

4. Дана доска 100×100. В каждой клетке этой доски нарисована стрелочка в одном из 4 направлений: вправо, влево, вверх, вниз. Петя поставил на доску 10000 фишек, по одной в каждую клетку. Затем он каждую минуту всеми фишками одновременно делает ход по направлению стрелочек. Если фишка оказалась за пределами доски, то она падает. При этом в одной клетке могут оказаться несколько фишек. Могут ли фишки падать с доски таким образом, что первым ходом падает одна, каждым следующим — больше, чем предыдущим, а в итоге с доски падают все фишки?

5. Определим $f(x) = \dfrac{(2x-1)6^x}{2^{2x-1}+3^{2x-1}}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{3}{2018}\right)+f\left(\frac{5}{2018}\right)+\ldots+f\left(\frac{2017}{2018}\right).$$

6. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{a^3}{1+bc}}+\sqrt{\frac{b^3}{1+ac}}+\sqrt{\frac{c^3}{1+ab}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

7. Даны натуральные n и k, причём $k \leq 2^{n-1}$. Докажите, что на доске $n\times n$ можно отметить несколько клеток так, чтобы количество способов расставить на отмеченных клетках n не бьющих друг друга ладей было равно k.

8. Обозначим через γ описанную окружность треугольника ABC. Пусть D — точка на стороне BC, и точка M — середина отрезка AD. Через точку D провели прямую, пересекающую отрезок AB в точке E и окружность γ в точке F (D лежит между точками E и F). Прямые FC и EM пересекаются в точке X. Докажите, что если $\angle DCF = \angle ADE$, то прямая AX касается γ.

9. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для любого простого $p < n$ выполнено сравнение $p^n \equiv (p-1)^n + 1 \pmod{n^2}$.

10. Дано множество A из $n \geq 5$ элементов. Найдите минимальное k со следующим свойством: для любых 10 трехэлементных подмножеств A существует раскраска элементов A в k цветов такая, что никакое выбранное трехэлементное множество не содержит трех одноцветных элементов.

Третий тур 01.11.17. Высшая юниорская лига.

1. Обозначим через γ описанную окружность треугольника ABC. Пусть D — точка на стороне BC, и точка M — середина отрезка AD. Через точку D провели прямую, пересекающую отрезок AB в точке E и окружность γ в точке F (D лежит между точками E и F). Прямые FC и EM пересекаются в точке X. Докажите, что если $\angle DCF = \angle ADE$, то прямая AX касается γ.

2. Дано натуральное число k. На доске написана последовательность целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. Каждую минуту Медведь разделяет последовательность на несколько (не менее одного) блоков последовательных членов (в каждом блоке не менее одного числа); при этом, если блоков больше двух, сумма чисел в каждом блоке должна делиться на k. Затем Крокодил съедает все блоки, кроме одного (который выбирает по своему усмотрению). Игра заканчивается, когда на доске остаётся одно число. Докажите, что Медведь может ходить так, чтобы независимо от ходов Крокодила игра закончилась не более чем за $3k$ ходов.

3. Окружность ω с центром O касается окружности γ изнутри в точке S. Хорда AB окружности γ касается ω в точке T. Точка P выбрана на прямой AO таким образом, что $PS \perp TS$. Докажите, что $PB \perp AB$.

4. В компании есть m мальчиков и $d \geq 20$ девочек; некоторые мальчики дружат с некоторыми девочками. Известно, что для любого множества X из 20 девочек найдётся множество Y из 20 мальчиков такое, что каждая девочка из X дружит ровно с одним мальчиком из Y, а каждый мальчик из Y дружит ровно с одной девочкой из X. Докажите, что $2^m \geq \left(\frac{d-18}{10}\right)^{19}$.

5. Определим $f(x) = \frac{(2x-1)6^x}{2^{2x-1}+3^{2x-1}}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{3}{2018}\right)+f\left(\frac{5}{2018}\right)+\ldots+f\left(\frac{2017}{2018}\right).$$

6. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите, что $\sqrt{\frac{a^3}{1+bc}}+\sqrt{\frac{b^3}{1+ac}}+\sqrt{\frac{c^3}{1+ab}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

7. Пусть k — натуральное число, меньшее 2^{n-1}. Докажите, что на доске $n\times n$ можно отметить несколько клеток так, чтобы количество способов расставить на отмеченных клетках n не бьющих друг друга ладей было равно k.

8. Докажите, что p^3+q^3+1 кратно pq для бесконечно многих натуральных p и q.

9. На плоскости лежат несколько кругов радиуса 1. Среди любых четырех из них какие-то два имеют общую точку. Докажите, что суммарная площадь, покрываемая кругами, меньше 60.

10. Дано 100 000 натуральных чисел, не превосходящих 200 000, ни одно из которых не делится на другое. Докажите, что все эти числа больше 1000.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Третий тур 01.11.17. Первая юниорская лига.

1. Обозначим через γ описанную окружность треугольника ABC. Пусть D — точка на стороне BC, и точка M — середина отрезка AD. Через точку D провели прямую, пересекающую отрезок AB в точке E и окружность γ в точке F (D лежит между точками E и F). Прямые FC и EM пересекаются в точке X. Докажите, что если $\angle DCF = \angle ADE$, то прямая AX касается γ.

2. Дано натуральное число k. На доске написана последовательность целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. Каждую минуту Медведь разделяет последовательность на несколько (не менее одного) блоков последовательных членов (в каждом блоке не менее одного числа); при этом, если блоков больше двух, сумма чисел в каждом блоке должна делиться на k. Затем Крокодил съедает все блоки, кроме одного (который выбирает по своему усмотрению). Игра заканчивается, когда на доске остаётся одно число. Докажите, что Медведь может ходить так, чтобы независимо от ходов Крокодила игра закончилась не более чем за $3k$ ходов.

3. Окружность ω с центром O касается окружности γ изнутри в точке S. Хорда AB окружности γ касается ω в точке T. Точка P выбрана на прямой AO таким образом, что $PS \perp TS$. Докажите, что $PB \perp AB$.

4. В компании есть m мальчиков и $d \geq 20$ девочек; некоторые мальчики дружат с некоторыми девочками. Известно, что для любого множества X из 20 девочек найдётся множество Y из 20 мальчиков такое, что каждая девочка из X дружит ровно с одним мальчиком из Y, а каждый мальчик из Y дружит ровно с одной девочкой из X. Докажите, что $2^m \geq \left(\frac{d-18}{10}\right)^{19}$.

5. Определим $f(x) = \frac{(2x-1)6^x}{2^{2x-1}+3^{2x-1}}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{3}{2018}\right)+f\left(\frac{5}{2018}\right)+\ldots+f\left(\frac{2017}{2018}\right).$$

6. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите, что $\sqrt{\frac{a^3}{1+bc}}+\sqrt{\frac{b^3}{1+ac}}+\sqrt{\frac{c^3}{1+ab}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

7. В левом нижнем углу доски 16×16 стоит шахматный король. Три игрока, Вася, Петя и Коля, по очереди делают им ходы по шахматным правилам. Начинает Вася. Игрок, который поставит короля на клетку, где он уже когда-либо был, проигрывает. Докажите, что Петя и Коля могут, объединившись, сделать так, чтобы Вася проиграл.

8. Существует ли натуральное число, десятичная запись которого состоит меньше чем из 50 цифр и из которого можно вычеркиванием всех цифр, кроме четырёх, получить число 2017 ровно 2017 способами?

9. На плоскости лежат несколько кругов радиуса 1. Среди любых четырех из них какие-то два имеют общую точку. Докажите, что суммарная площадь, покрываемая кругами, меньше 60.

10. Дано 100 000 натуральных чисел, не превосходящих 200 000, ни одно из которых не делится на другое. Докажите, что все эти числа больше 1000.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Третий тур 01.11.17. Вторая юниорская лига.

1. На плоскости лежат несколько кругов радиуса 1. Среди любых трёх из них какие-то два имеют общую точку. Докажите, что суммарная площадь, покрываемая кругами, меньше 60.

2. Существует ли натуральное число, десятичная запись которого состоит меньше чем из 50 цифр и из которого можно вычеркиванием всех цифр, кроме четырёх, получить число 2017 ровно 2017 способами?

3. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $p^5+p^3+2 = q^2-q$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и AC отметили точки C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Оказалось, что $AC_1 = AB_1 = AM$. Докажите, что $S_{AB_1MC_1} + S_{AB_1C_1} = S_{BMC}$.

5. Дима, Руслан и Саша играют в игру на таблице 12×12, изначально покрашенной в белый цвет. Первым ходит Дима, потом ходит Руслан, потом Саша, потом снова Дима и т.д. Первым ходом Дима выбирает произвольную клетку и красит её в чёрный цвет. Очередным ходом можно покрасить любую ещё не покрашенную клетку, граничащую по стороне или вершине с клеткой, покрашенной на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто сделает последний ход. Докажите, что Руслан и Саша могут договориться так, чтобы выиграл Саша.

6. Для всех вещественных *a, b, c* докажите неравенство $a^2 + (2-\sqrt{2})b^2 + c^2 \geq \sqrt{2}(ab - bc + ca)$.

7. На плоскости нарисованы три равные непересекающиеся окружности с центрами в вершинах остроугольного треугольника T. Циркулем и линейкой постройте на этих окружностях по точке так, чтобы треугольник с вершинами в этих точках был равен треугольнику T, но не совмещался с ним параллельным переносом.

8. Дана бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots$. Нашлись различные числа p, q и t, для которых выполнено $a_p+tp = a_q+tq$, а также $a_t = t$. Найдите a_{2017}, если известно, что сумма первых t членов прогрессии равна 18.

9. Таблица 5×5 заполняется по правилам игры "Сапёр": в некоторые клетки ставится по одной мине, а в каждой из остальных клеток пишется количество мин во всех примыкающих к ней по стороне клетках. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех записанных чисел?

10. На деревьях сидели 333 вороны. Подул ветер, и некоторые из ворон перелетели на соседние деревья. Могло ли случиться так, что число ворон на каждом дереве изменилось ровно в 3 раза?