Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Первый тур 29.10.17. Высшая лига.

1. Дано натуральное число $a \geq 2$. В компании $N \geq 2$ людей. У каждого из людей есть m монет достоинства 1 тугрик, m монет достоинства a тугриков, m монет достоинства a^2 тугриков, и т.д. За ход один человек может передать другому одну монету. Компания называется *устойчивой*, если для любых целых чисел $x_1, \ldots, x_N$ с нулевой суммой люди могут сделать так, чтобы первый отдал на x_1 тугриков больше, чем получил, второй — на x_2, и т.д. Докажите, что компания устойчива тогда и только тогда, когда $m > a - \frac{a}{N} - 1$.

2. Пусть $0 \leq a, b, c \leq 1$. Докажите неравенство

$$(a+b+c+4)\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)\leqslant 15.$$

3. В стране Металлургии есть несколько заводов; некоторые пары заводов соединены дорогами, дороги могут пересекаться. Заводы можно распределить между $a \geq 1$ компаниями так, чтобы любые два завода, соединённые дорогой, принадлежали разным компаниям. Дороги можно распределить между $b \geq a$ компаниями так, чтобы любые две дороги, выходящие из одного завода, принадлежали разным компаниям. Докажите, что заводы и дороги можно распределить между $1+[a/2]+b$ компаниями так, чтобы предыдущие два условия выполнялись, и при этом любые завод и дорога, из него выходящая, принадлежали разным компаниям.

4. Центр O окружности ω лежит на окружности γ. На окружности γ зафиксирована точка A, лежащая вне окружности ω. Переменная окружность, проходящая через A и O, пересекает ω в точках P и Q. Прямые OP и OQ вторично пересекают окружность γ в точках P' и Q'. Докажите, что все прямые $P'Q'$ касаются фиксированной окружности.

5. Пусть $k > 1$ — натуральное число. Назовём *долькой* любую фигурку, получаемую следующим образом. Возьмём сектор единичного круга раствора, меньшего $2\pi/k$; пусть A и B — концы его дуги, а точка C лежит строго внутри сектора. Тогда фигурка ограничена дугой AB и отрезками AC и BC. При каких k можно выбрать $k+1$ долек и покрыть ими единичный круг? (Считаем, что все фигуры содержат границу.)

6. Пусть A_n — количество перестановок σ множества $X = \{1, \ldots, n\}$ таких, что при некотором $i \leq n$ верно равенство $\sigma(i) = i+100$. Пусть B_n — количество перестановок σ множества X таких, что при некотором $i < n$ верно равенство $\sigma(i+1) = \sigma(i)+100$. Докажите, что $A_n = B_n$.

7. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел x и $y > 2$ таких, что числа $(y-1)x+1$, $(y+1)x+1$ и $4xy+1$ — квадраты натуральных чисел.

8. В каждую клетку квадрата 1000×1000 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём *расстоянием* между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d \leq 100$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?

9. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей, а T — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

10. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых неравенство $P(a-1)P(a+1) > P(a)^2-1$ выполнено при всех вещественных a.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Первый тур 29.10.17. Первая лига.

1. Дано натуральное число $a \geq 2$. В компании $N \geq 2$ людей. У каждого из людей есть m монет достоинства 1 тугрик, m монет достоинства a тугриков, m монет достоинства a^2 тугриков, и т.д. За ход один человек может передать другому одну монету. Компания называется *устойчивой*, если для любых целых чисел $x_1, \ldots, x_N$ с нулевой суммой люди могут сделать так, чтобы первый отдал на x_1 тугриков больше, чем получил, второй — на x_2, и т.д. Докажите, что компания устойчива тогда и только тогда, когда $m > a - \dfrac{a}{N} - 1$.

2. Пусть $0 \leq a, b, c \leq 1$. Докажите неравенство

$$(a+b+c+4)\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\right)\leqslant 15.$$

3. В стране Металлургии есть несколько заводов; некоторые пары заводов соединены дорогами, дороги могут пересекаться. Заводы можно распределить между $a \geq 3$ компаниями так, чтобы любые два завода, соединённые дорогой, принадлежали разным компаниям. Дороги можно распределить между $b \geq 3$ компаниями так, чтобы любые две дороги, выходящие из одного завода, принадлежали разным компаниям. Докажите, что заводы и дороги можно распределить между $a+b-1$ компанией так, чтобы предыдущие два условия выполнялись, и при этом любые завод и дорога, из него выходящая, принадлежали разным компаниям.

4. Петя и Вася играют в следующую игру. Перед ними лежат три кучки камней. В первой кучке 50 камней, во второй — 100 камней, в третьей — 150 камней. За один ход можно взять один или два камня из одной кучки. Нельзя брать камни из той кучки, откуда на предыдущем ходу брал соперник. Начинает Петя, далее ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может победить, как бы ни играл соперник?

5. Пусть $k > 1$ — натуральное число. Назовём *долькой* любую фигурку, получаемую следующим образом. Возьмём сектор единичного круга раствора, меньшего $2\pi/k$; пусть A и B — концы его дуги, а точка C лежит строго внутри сектора. Тогда фигурка ограничена дугой AB и отрезками AC и BC. При каких k можно выбрать $k+1$ долек и покрыть ими единичный круг? (Считаем, что все фигуры содержат границу.)

6. Внутри выпуклого пятиугольника $ABCDE$ взята такая точка P, что площади треугольников ABP и DEP равны. Отрезки PB и PD пересекают диагонали CA и CE в точках M и N соответственно. Докажите, что если $MN \parallel AE$, то отрезок PC делит диагональ BD пополам.

7. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел x и $y > 2$ таких, что числа $(y-1)x+1$, $(y+1)x+1$ и $4xy+1$ — квадраты натуральных чисел.

8. В каждую клетку квадрата 1000×1000 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём *расстоянием* между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d \leq 100$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?

9. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей, а T — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

10. Найдите все многочлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых неравенство $P(a-1)P(a+1) > P(a)^2-1$ выполнено при всех вещественных a.

Первый тур 29.10.17. Вторая лига.

1. Вася написал на доске числа 1, 2, …, n в ряд в каком–то порядке. Получился ряд $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Оказалось, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнено неравенство $\dfrac{a_k^{\,2}}{a_{k+1}} \leqslant k+2$. Докажите, что выписанные числа идут в порядке возрастания.

2. В треугольнике ABC с острым углом BAC сторона $AC < BC$. В нем проведены биссектриса CL и медиана CM. Перпендикуляр из точки A, опущенный на CL, пересекает CM в точке K. Оказалось, что точки A, L, K и C лежат на одной окружности. Найдите угол ACB.

3. В стране Металлургии есть несколько заводов; некоторые пары заводов соединены дорогами, дороги могут пересекаться. Заводы можно распределить между $a \geq 3$ компаниями так, чтобы любые два завода, соединённые дорогой, принадлежали разным компаниям. Дороги можно распределить между $b \geq 3$ компаниями так, чтобы любые две дороги, выходящие из одного завода, принадлежали разным компаниям. Докажите, что заводы и дороги можно распределить между $a+b-1$ компанией так, чтобы предыдущие два условия выполнялись, и при этом любые завод и дорога, из него выходящая, принадлежали разным компаниям.

4. Для натурального числа $n > 1$ обозначим через $p(n)$ наименьший простой делитель числа n. Найдите все пары натуральных чисел $a, b > 1$, для которых выполнено равенство $a^2+b^2 = p(a)^2+3p(b)^4$.

5. Назовём *долькой* любую фигурку, получаемую следующим образом. Возьмём сектор единичного круга раствора, меньшего $\pi/3$; пусть A и B — концы его дуги, а точка C лежит строго внутри сектора. Тогда фигурка ограничена дугой AB и отрезками AC и BC. Можно ли выбрать 7 долек и покрыть ими единичный круг? (Считаем, что все фигуры содержат границу.)

6. Внутри выпуклого пятиугольника $ABCDE$ взята такая точка P, что площади треугольников ABP и DEP равны. Отрезки PB и PD пересекают диагонали CA и CE в точках M и N соответственно. Докажите, что если $MN \parallel AE$, то отрезок PC делит диагональ BD пополам.

7. Петя и Вася играют в следующую игру. Перед ними лежат три кучки камней. В первой кучке 50 камней, во второй — 100 камней, в третьей — 150 камней. За один ход можно взять один или два камня из одной кучки. Нельзя брать камни из той кучки, откуда на предыдущем ходу брал соперник. Начинает Петя, далее ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может победить, как бы ни играл соперник?

8. В каждую клетку квадрата 1000×1000 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём *расстоянием* между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d \leq 100$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?

9. Найдите все целые b такие, что при любом натуральном a число $(a^2+1)^{100}+b-a$ делится на a^2+a+1.

10. Найдите все многочлены $P(x)$ степени не выше 2 с вещественным коэффициентами, для которых выполнено условие $P(x-1)P(x+1) > P^2(x)-1$ для всех вещественных x.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Первый тур 29.10.17. Высшая юниорская лига.

1. Можно ли раскрасить все натуральные числа в три цвета так, чтобы для каждого натурального n все числа x, удовлетворяющие условию $2^{n-1} \le x < 2^n$, были раскрашены в один цвет, и единственным одноцветным решением уравнения $x+y = z^2$ было (2, 2, 2)?

2. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел x и $y > 2$ таких, что числа $(y-1)x+1$, $(y+1)x+1$ и $4xy+1$ — квадраты натуральных чисел.

3. Для всех троек положительных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \le 3$, докажите неравенство $\frac{x^2}{y^3}+\frac{y^2}{z^3}+\frac{z^2}{x^3} \ge \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

4. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей, а T — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

5. Центр O окружности ω лежит на окружности γ. На окружности γ зафиксирована точка A, лежащая вне окружности ω. Переменная окружность, проходящая через A и O, пересекает ω в точках P и Q. Прямые OP и OQ вторично пересекают окружность γ в точках P' и Q'. Докажите, что все прямые $P'Q'$ касаются фиксированной окружности.

6. Найдите все положительные числа c такие, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (n, m) удовлетворяющих следующим условиям: $n \ge m + c\sqrt{m-1}+1$ и среди чисел $n, n+1, \ldots, 2n-m$ нет ни одного квадрата натурального числа.

7. Назовём *долькой* сектор единичного круга раствора 59°, из которого выкинуты все точки на расстоянии менее 0,01 от центра окружности. Каким наименьшим количеством долек можно покрыть единичный круг?

8. Для натурального числа $n > 1$ обозначим через $p(n)$ наименьший простой делитель числа n. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, больших 1, что $a^2+b^2 = a(p(b))^2-bp(a)$.

9. В стране Металлургии есть несколько заводов; некоторые пары заводов соединены дорогами, дороги могут пересекаться. Заводы можно распределить между $a \ge 1$ компаниями так, чтобы любые два завода, соединённые дорогой, принадлежали разным компаниям. Дороги можно распределить между $b \ge a$ компаниями так, чтобы любые две дороги, выходящие из одного завода, принадлежали разным компаниям. Докажите, что заводы и дороги можно распределить между $1+[a/2]+b$ компаниями так, чтобы предыдущие два условия выполнялись, и при этом любые завод и дорога, из него выходящая, принадлежали разным компаниям.

10. В каждую клетку квадрата 100×100 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём *расстоянием* между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d < 100$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Первый тур 29.10.17. Первая юниорская лига.

1. Можно ли раскрасить все натуральные числа в три цвета так, чтобы для каждого натурального n все числа x, удовлетворяющие условию $2^{n-1} \le x < 2^n$, были раскрашены в один цвет, и единственным одноцветным решением уравнения $x+y = z^2$ было (2, 2, 2)?

2. Петя и Вася играют в следующую игру. Перед ними лежат три кучки камней. В первой кучке 50 камней, во второй — 100 камней, в третьей — 150 камней. За один ход можно взять один или два камня из одной кучки. Нельзя брать камни из той кучки, откуда на предыдущем ходу брал соперник. Начинает Петя, далее ходят по очереди. Побеждает тот, кто берет последний камень. Кто может победить, как бы ни играл соперник?

3. Найдите все многочлены $P(x)$ степени не выше 2 с вещественным коэффициентами, для которых выполнено условие $P(x-1)P(x+1) > P^2(x)-1$ для всех вещественных x.

4. Дана трапеция $ABCD$. Окружность ω_1 проходит через вершины C и D, а её центр лежит на боковой стороне AB. Аналогично, окружность ω_2 проходит через A и B, а её центр лежит на стороне CD. Пусть K и L — точки пересечения этих окружностей, а T — точка пересечения диагоналей трапеции. Докажите, что точки K, L и T лежат на одной прямой.

5. Внутри выпуклого пятиугольника $ABCDE$ взята такая точка P, что площади треугольников ABP и DEP равны. Отрезки PB и PD пересекают диагонали CA и CE в точках M и N соответственно. Докажите, что если $MN \parallel AE$, то отрезок PC делит диагональ BD пополам.

6. Найдите все положительные числа c такие, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (n, m) удовлетворяющих следующим условиям: $n \ge m + c\sqrt{m-1} + 1$ и среди чисел $n, n+1, ..., 2n-m$ нет ни одного квадрата натурального числа.

7. Назовём *долькой* сектор единичного круга раствора 59°, из которого выкинуты все точки на расстоянии менее 0,01 от центра окружности. Каким наименьшим количеством долек можно покрыть единичный круг?

8. Для натурального числа $n > 1$ обозначим через $p(n)$ наименьший простой делитель числа n. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, больших 1, что $a^2+b^2 = a(p(b))^2-bp(a)$.

9. В стране Металлургии есть несколько заводов; некоторые пары заводов соединены дорогами, дороги могут пересекаться. Заводы можно распределить между $a > 2$ компаниями так, чтобы любые два завода, соединённые дорогой, принадлежали разным компаниям. Дороги можно распределить между b компаниями так, чтобы любые две дороги, выходящие из одного завода, принадлежали разным компаниям. Докажите, что заводы и дороги можно распределить между $a+b-1$ компаниями так, чтобы предыдущие два условия выполнялись, и при этом любые завод и дорога, из него выходящая, принадлежали разным компаниям.

10. В каждую клетку квадрата 100×100 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём *расстоянием* между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d < 100$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

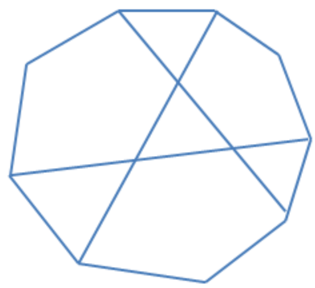
Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Первый тур 29.10.17. Вторая юниорская лига.

1. Вася написал на доске числа 1, 2, …, n в ряд в каком–то порядке. Получился ряд a_1, a_2, …, a_n. Оказалось, что для всех k = 1, 2, …, n–1 выполнено неравенство $\frac{a_k{}^2}{a_{k+1}} \leqslant k+2$. Докажите, что выписанные числа идут в порядке возрастания.

2. В некоторый момент в Москве до полудня оставалось вчетверо меньше времени, чем в Куа. А через четыре с половиной часа уже в Куа до полудня оставалось вчетверо меньше времени, чем в Москве. Определите разницу во времени между Куа и Москвой.

3. Папа подарил дочке на день рождения граф. Дочка оторвала от графа одну вершину вместе с выходящими из неё рёбрами, а то, что осталось, аккуратно разложила на столе и зарисовала. У неё получился рисунок, изображённый справа (цикл из 9 вершин и ещё 3 ребра; пересечения трёх рёбер внутри цикла вершинами графа не являются). Затем она вернула оторванную вершину, и оторвала другую. Такие действия она проделала с четырьмя вершинами и каждый раз получала одинаковые рисунки. Какой граф был подарен?



4. Для натурального числа n>1 обозначим через $p(n)$ наименьший простой делитель числа n. Найдите все пары натуральных чисел a, b > 1, для которых выполнено $a^2+b^2 = p^2(a)+3p^4(b)$.

5. Существует ли такой выпуклый многоугольник, что им нельзя покрыть прямоугольник 1×2, но двумя такими многоугольниками можно покрыть квадрат 2×2?

6. В треугольнике ABC точка M — середина BC. На сторонах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle APM = \angle AQM = 90°$. Оказалось, что площадь треугольника MPQ в 4 раза меньше площади ABC. Найдите угол BAC.

7. Петя и Вася играют в следующую игру. Перед ними лежат три кучки камней. В первой кучке 50 камней, во второй — 100 камней, в третьей — 150 камней. За один ход можно взять один или два камня из одной кучки. Нельзя брать камни из той кучки, откуда на предыдущем ходу брал соперник. Начинает Петя, далее ходят по очереди. Побеждает тот, кто берет последний камень. Кто может победить, как бы ни играл соперник?

8. В каждую клетку квадрата 1000×1000 записано слово длины n из символов 0 и 1. Назовём *расстоянием* между клетками наименьшее количество единичных ходов по вертикали и горизонтали, необходимое, чтобы добраться из первой во вторую. Оказалось, что при любом $d \leq 100$ любые две клетки на расстоянии d содержат слова, различающиеся ровно в d битах. При каком наименьшем n это возможно?

9. Найдите все целые b такие, что при любом натуральном a число $(a^2+1)^{100}+b–a$ делится на a^2+a+1.

10. Найдите все квадратные трехчлены $P(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых выполнено условие $P(x–1)P(x+1)>P^2(x)–1$ для всех вещественных x.