Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Четвёртый тур 02.11.17. Высшая лига, бои за 1-6 места.

1. На плоскости отмечены все точки с целыми взаимно простыми координатами. Робот ходит по отмеченным точкам. Он стартует из точки с координатами (x, y), где $x > y \geq 1$, глядя направо. Каждым ходом он движется вперёд до ближайшей отмеченной точки, а затем поворачивается на 90° против часовой стрелки. Докажите, что робот зациклится тогда и только тогда, когда он не дойдёт до точки (1, 1).

2. Даны шесть различных положительных чисел. Известно, что эти числа являются попарными суммами и произведениями каких-то трех чисел. Всегда ли можно восстановить эти три числа?

3. В пространстве даны два тетраэдра A_1BCD и A_2BCD такие, что отрезок A_1A_2 пересекает треугольник BCD. Сферы, вписанные в эти тетраэдры, касаются плоскости BCD в одной и той же точке. Обе этих сферы вписаны в конус с вершиной P. Докажите, что точка P лежит на прямой A_1A_2.

4. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

5. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x, y)$ — ненулевые многочлены *с* целыми коэффициентами. Различные положительные числа a и b таковы, что $P(a) = Q(b) = 0$, причём все натуральные степени чисел a и b иррациональны. Может ли оказаться, что $R(a^a, b^b) = 0$?

6. В школе три класса: математический M, химический C и психологический P. Некоторые пары детей дружат, причём каждый ребёнок из P дружит с каждым ребёнком из других классов. Учитель придумал, как каждому ребёнку x из $M \cup P$ сопоставить ребёнка $F(x)$ из $C \cup P$ так, чтобы для любых друзей x и y дети $F(x)$ и $F(y)$ были различными и дружили. Докажите, что это сопоставление можно придумать так, чтобы каждому психологу был сопоставлен он сам.

7. Пусть $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $\left(f(x)-f(y)\right)\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f\left(\sqrt{xy}\right)\right)=0$ при всех $x, y \in (0,+\infty)$. Докажите, что f — постоянная функция.

8. Окружность, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Три мухи ползли по прямым AA_1, BB_1 и CC_1 с постоянными скоростями так, что в какой–то момент они находились в точках A, B и C, а в другой момент были в точках A_1, B_1 и C_1. В некоторый момент времени все три мухи находились на прямой p_1, а в некоторый другой момент — на прямой p_2. Докажите, что $p_1 \perp p_2$.

9. Решите в целых числах уравнение $(a^2+b)(b^2+a) = (a-b)^4$.

10. Пусть $n \geq 5$ — натуральное число. Дано 2^n монет неизвестных положительных весов. За ход можно узнать вес произвольного набора монет; разрешается сделать $100n$ ходов. Требуется разбить все монеты на 4 кучи так, чтобы для любых двух куч A и B из A можно было бы выкинуть монету так, чтобы она стала не тяжелее, чем B. Можно ли этого гарантированно добиться?

Четвёртый тур 02.11.17. Высшая лига, бой за 7-8 места. Первая лига, бои за 1-6 места.

1. На плоскости отмечены все точки с целыми взаимно простыми координатами. Робот ходит по отмеченным точкам. Он стартует из точки с координатами (x, y), где $x > y \geq 1$, глядя направо. Каждым ходом он движется вперёд до ближайшей отмеченной точки, а затем поворачивается на 90° против часовой стрелки. Докажите, что робот зациклится тогда и только тогда, когда он не дойдёт до точки (1, 1).

2. Числа k, k+1, …, $6k$ выписаны в ряд в произвольном порядке. Докажите, что существуют две группы подряд идущих чисел (возможно, состоящие из одного числа) с равными суммами.

3. В пространстве даны два тетраэдра A_1BCD и A_2BCD такие, что отрезок A_1A_2 пересекает треугольник BCD. Сферы, вписанные в эти тетраэдры, касаются плоскости BCD в одной и той же точке. Обе этих сферы вписаны в конус с вершиной P. Докажите, что точка P лежит на прямой A_1A_2.

4. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

5. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x, y)$ — ненулевые многочлены с целыми коэффициентами. Различные положительные числа a и b таковы, что $P(a) = Q(b) = 0$, причём все натуральные степени чисел a и b иррациональны. Может ли оказаться, что $R(a^a, b^b) = 0$?

6. В школе три класса: математический M, химический C и психологический P. Некоторые пары детей дружат, причём каждый ребёнок из P дружит с каждым ребёнком из других классов. Учитель придумал, как каждому ребёнку x из $M \cup P$ сопоставить ребёнка $F(x)$ из $C \cup P$ так, чтобы для любых друзей x и y дети $F(x)$ и $F(y)$ были различными и дружили. Докажите, что это сопоставление можно придумать так, чтобы каждому психологу был сопоставлен он сам.

7. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (a_n+1)^2$ для $n \geq 1$. Докажите, что для любого простого числа p разность $a_{2p}-a_p$ имеет хотя бы p различных простых делителей.

8. В остроугольном треугольнике ABC с центром описанной окружности O провели высоты AA_1 и BB_1. Окружность с центром в O касается стороны AB и проходит через ортоцентр треугольника A_1B_1C. Найдите угол ACB.

9. Решите в целых числах уравнение $(a^2+b)(b^2+a) = (a-b)^4$.

10. Можно ли расставить на доске 2017×2017 несколько коней, чтобы в каждой строке и в каждом столбце стоял хотя бы один конь, и чтобы при этом каждый бил столько же других коней, сколько и пустых клеток?

Четвёртый тур 02.11.17. Первая лига, бой за 7-8 места. Вторая лига.

1. Числа k, $k+1$, …, $6k$ выписаны в ряд в произвольном порядке. Докажите, что существуют две группы подряд идущих чисел (возможно, состоящие из одного числа) с равными суммами.

2. Даны арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью $d \neq 0$ и геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и частным q. При этом выполнено равенство $a_1+b_1 = d+2a_1 = 0$ и сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна сумме первых четырёх членов геометрической прогрессии. Найдите все возможные значения частного q.

3. Натуральное число n дает остаток 23 при делении на 24. Известно, что сумма квадратов его делителей (включая 1 и само число) делится на 48. Какое наименьшее количество делителей может быть у n?

4. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

5. Можно ли расставить на доске 2017×2017 несколько коней так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце стоял хотя бы один конь, и при этом каждый бил столько же других коней, сколько и пустых клеток?

6. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (a_n+1)^2$ для $n \geq 1$. Докажите, что для любого простого числа p разность $a_{2p}-a_p$ имеет хотя бы p различных простых делителей.

7. Назовем расстановку 9 последовательных чисел в таблице 3×3 s-*волшебной*, если сумма в любом квадратике 2×2 равна s, а также сумма чисел в угловых клетках равна s. Сколько существует волшебных таблиц при s от 1 до 2017? Таблицы, отличающиеся поворотом и симметрией, считаются различными.

8. В остроугольном треугольнике ABC с центром описанной окружности O провели высоты AA_1 и BB_1. Окружность с центром в O касается стороны AB и проходит через ортоцентр треугольника A_1B_1C. Найдите угол ACB.

9. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC с описанной окружностью γ. Точка P выбрана на дуге BC окружности γ. Луч PH пересекает дугу CA окружности γ в точке M. Точка K на дуге AB выбрана таким образом, что прямая KM параллельна прямой HP', где точка P' симметрична точке P относительно BC. Точка Q на дуге PC выбрана так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BC и KQ пересекаются в точке J. Докажите, что треугольник KJM — равнобедренный.

10. Решите в целых числах уравнение $(a^2+b)(b^2+a) = (a-b)^4$.

Четвёртый тур 02.11.17. Высшая юниорская лига, бои за 1-6 места, первая юниорская лига, бой за 1-2 места.

1. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (a_n+1)^2$ для $n \geq 1$. Докажите, что для любого простого числа p разность $a_{2p}-a_p$ имеет хотя бы p различных простых делителей.

2. Числа k, $k+1$, …, $6k$ выписаны в ряд в произвольном порядке. Докажите, что существуют две группы подряд идущих чисел (возможно, состоящие из одного числа) с равными суммами.

3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC с описанной окружностью γ. Точка P выбрана на дуге BC окружности γ. Луч PH пересекает дугу CA окружности γ в точке M. Точка K на дуге AB выбрана таким образом, что прямая KM параллельна прямой HP', где точка P' симметрична точке P относительно BC. Точка Q на дуге PC выбрана так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BC и KQ пересекаются в точке J. Докажите, что треугольник KJM — равнобедренный.

4. Энциклопедия состоит из 100 томов, пронумерованных числами от 1 до 100. Тома стоят по порядку от первого до сотого. С томами разрешено проделывать операции. За одну операцию сначала выбирается натуральное число $n \leq 100$. Если число n чётно, то берутся n первых томов и переставляются в конец в том же порядке. Если же число n нечётно, то берутся n первых томов и ставятся в начало в обратном порядке. Сколько различных перестановок томов можно получить несколькими такими операциями из исходной расстановки?

5. Даны натуральное число n и вещественное положительное число x. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n}\left(x\left[\frac{k}{x}\right]-(x+1)\left[\frac{k}{x+1}\right]\right) \leq n$.

6. На плоскости отмечены все точки с целыми взаимно простыми координатами. Робот ходит по отмеченным точкам. Он стартует из точки с координатами (x, y), где $x > y \geq 1$, глядя направо. Каждым ходом он движется вперёд до ближайшей отмеченной точки, а затем поворачивается на 90° против часовой стрелки. Докажите, что робот зациклится тогда и только тогда, когда он не дойдёт до точки (1, 1).

7. Точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность k проходит через B и касается прямой AC в точке A. Окружность l с центром на луче BH касается прямой AB в точке A. Окружности k и l пересекаются в точке X ($X \neq A$), причём точка X попала внутрь треугольника ABC, а отрезки BX и OH пересеклись. Докажите, что $\angle HXO = 180° - \angle BAC$.

8. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

9. Все клетки доски $2n \times 2n$ раскрашены в красный и зелёный цвета. Четыре клетки, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов, образуют *квартет*, если две из них, не стоящие ни в одной строке, ни в одном столбце, красные, а две другие зелёные. Какое наибольшее количество квартетов может найтись на такой доске?

10. Решите в натуральных числах уравнение $(a^2+b)(b^2+a) = (a-b)^4$.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Четвёртый тур 02.11.17. Высшая юниорская лига, бой за 7-8 места, первая юниорская лига, бои за 3-8 места.

1. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (a_n+1)^2$ для $n \geq 1$. Докажите, что для любого простого числа p разность $a_{2p}–a_p$ имеет хотя бы p различных простых делителей.

2. Числа k, k+1, …, 6k выписаны в ряд в произвольном порядке. Докажите, что существуют две группы подряд идущих чисел (возможно, состоящие из одного числа) с равными суммами.

3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC с описанной окружностью γ. Точка P выбрана на дуге BC окружности γ. Луч PH пересекает дугу CA окружности γ в точке M. Точка K на дуге AB выбрана таким образом, что прямая KM параллельна прямой HP', где точка P' симметрична точке P относительно BC. Точка Q на дуге PC выбрана так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BC и KQ пересекаются в точке J. Докажите, что треугольник KJM — равнобедренный.

4. Энциклопедия состоит из 100 томов, пронумерованных числами от 1 до 100. Тома стоят по порядку от первого до сотого. С томами разрешено проделывать операции. За одну операцию сначала выбирается натуральное число $n \leq 100$. Если число n чётно, то берутся n первых томов и переставляются в конец в том же порядке. Если же число n нечётно, то берутся n первых томов и ставятся в начало в обратном порядке. Сколько различных перестановок томов можно получить несколькими такими операциями из исходной расстановки?

5. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k. Для каких целых n найдётся натуральное число m, для которого $S(5m) = 2^n S(m)$?

6. На плоскости отмечены все точки с целыми взаимно простыми координатами. Робот ходит по отмеченным точкам. Он стартует из точки с координатами (x, y), где $x > y \geq 1$, глядя направо. Каждым ходом он движется вперёд до ближайшей отмеченной точки, а затем поворачивается на 90° против часовой стрелки. Существует ли такая точка, начав с которой робот посетит бесконечно много точек?

7. В остроугольном треугольнике ABC с центром описанной окружности O провели высоты AA_1 и BB_1. Окружность с центром в O касается стороны AB и проходит через ортоцентр треугольника A_1B_1C. Найдите угол ACB.

8. На плоскости проведено $n \geq 3$ прямых общего положения; каждая прямая окрашена либо в красный, либо в синий цвет, оба цвета встречаются. Эти прямые разбили плоскость на части. Докажите, что найдётся треугольник разбиения, стороны которого окрашены в оба цвета.

9. Можно ли расставить на доске 2017×2017 несколько коней так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце стоял хотя бы один конь, и при этом каждый бил столько же других коней, сколько и пустых клеток?

10. Решите в натуральных числах уравнение $(a^2+b)(b^2+a) = (a–b)^4$.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

Четвёртый тур 02.11.17. Вторая юниорская лига.

1. Сколькими способами из клетчатого поля 4×12 можно вырезать наименьшее количество клеток, чтобы из оставшейся части нельзя было вырезать полоску из трёх клеток?

2. Даны арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью $d \neq 0$ и геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и частным q. При этом выполнено равенство $a_1+b_1 = d+2a_1 = 0$ и сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна сумме первых четырёх членов геометрической прогрессии. Найдите все возможные значения частного q.

3. Натуральное число n дает остаток 23 при делении на 24. Известно, что сумма квадратов его делителей (включая 1 и само число) делится на 24. Какое наименьшее количество делителей может быть у n?

4. В стране N аэропортов, соединённых авиалиниями каждый с каждым. Аэропорты расположены в вершинах выпуклого N-угольника. В целях безопасности полётов любые две линии, имеющие пересечение во внутренней точке, должны быть разведены по высоте. Каждый самолёт после взлёта набирает отведённую ему высоту и летит на ней до посадки. Каким наименьшим набором разных высот можно обойтись?

5. В центральной клетке доски 2017×2017 стоит король. Петя и Вася по очереди двигают короля, но так, чтобы он не становился на клетку, на которой уже был, и не приближался к начальной клетке (расстоянием между клетками считается расстояние между их центрами). Кто первым достигнет края доски, тот выиграл. У кого есть выигрышная стратегия?

6. Прожектор освещает угол 90°, включая границу и вершину, в которой он расположен. Если внутри этого угла расположен другой прожектор, то от него отбрасывается тень. Каким наименьшим количеством прожекторов можно осветить все точки плоскости?

7. Назовем расстановку чисел от 1 до 9 в таблице 3×3 *волшебной*, если суммы в любом квадратике 2×2, а также сумма чисел в угловых клетках равны. Сколько существует волшебных таблиц? Таблицы, отличающиеся поворотом и симметрией, считаются различными.

8. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k. Для каких целых n найдётся натуральное число m, для которого $S(5m) = 2^n S(m)$?

9. Докажите, что в любой неравнобедренный треугольник, площадь вписанной окружности которого равна 100, можно поместить без наложений и касаний 100 кругов площади 1.

10. В остроугольном треугольнике ABC с центром описанной окружности O провели высоты AA_1 и BB_1. Окружность с центром в O касается стороны AB и проходит через ортоцентр треугольника A_1B_1C. Найдите угол ACB.