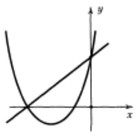
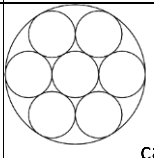
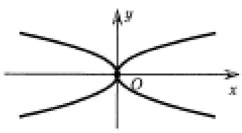
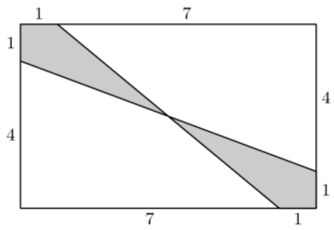
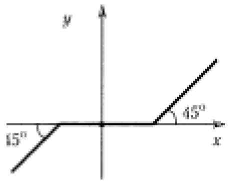
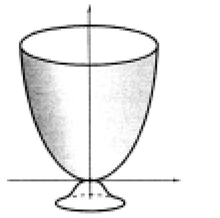
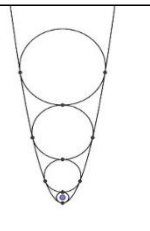
АБАКА-ЮНИОРЫ

Ответ считается верным, если найдены ВСЕ правильные варианты и нет ни одного лишнего

	Графики	***Геометрия***	***Числа***
10	На рисунке представлены график функций  $y=kx+1$ и $y=ax^2+bx+c$. Парабола пересекает ось OX в точках x_1 и x_2. Найдите отношение $\frac{x_1}{x_2}$, если $k=\sqrt{\frac{a}{2}}$	В равнобедренной трапеции *ABCD* боковое ребро *BC* и маленькое основание *CD* равны 2 см. Кроме того, *BC* перпендикулярно *AC*. Найдите площадь трапеции	Пусть $n\epsilon\mathbb{N}$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $n-2017\left[\frac{n}{2017}\right]$ ($[x]$ –наибольшее целое число, не превосходящее *x*)
20	Вершина *A* треугольника *ABC* совпадает с вершиной параболы $y=x^2$, а точки *B* и *C* лежат на параболе так, что отрезок *BC* параллелен оси OX. Площадь треугольника *ABC* равна 64. Найдите длину BC.	 Из куска теста круглой формы вырезаны 7 кружочков радиуса 1. Как показано на рис. (они касаются друг друга и внешней окружности). Оставшееся тесто снова раскатали в круг. Найдите его радиус (толщина теста на протяжении всей задачи одинакова).	Найдите наименьшее простое число, сумма цифр которого является нечетным составным числом.
30	 Параболу $y=x^2$ отразили относительно биссектрисы первого и третьего углов. Получилась фигура F_1. Фигуру F_1 отразили симметрично относительно оси ординат, получилась фигура F_2. Фигура *F* представляет собой объединение фигур F_1 и F_2 (показано на рис.) Напишите формулу (используя, если необходимо, знаки модуля, степеней, +, –, ×, /, скобки), которой задается множество точек фигуры *F*.	 Размеры прямоугольника даны на рисунке. Найдите площадь закрашенной части.	Для скольких натуральных *n*, $100<n\le10000$, число *n* делится на $\sqrt{n-100}$?
40	 Отрезок на оси OX имеет концы в точках (–1, 0) и (1, 0). Напишите уравнение функции, график которой вы видите на рисунке.	В треугольнике *ABC* $\angle A$= 20, $\angle C$ = 40°. Проведены биссектриса *AL* ($L\in BC$) и внешняя биссектриса *CN* ($N\in AB$). Найдите $\angle CLN$	Для какого наибольшего значения *n* число (n^4+1396) делится на число *n*+5.
50	 На столе стоит бокал, внутренняя поверхность которого образована вращением параболы $y=x^2$ относительно оси ординат. В него кидают шарики с радиусами 0,1; 0,2; 0,3; …и т.д. (после броска шарик достают и кидают следующий). Напишите наименьший радиус, при котором шарик впервые застрянет, не коснувшись нижней точки стакана	*ABCDEFG* -- равносторонний выпуклый семиугольник. Известно, что $\angle A=\angle D=168°$ и $\angle B=\angle C=108°$. Найдите $\angle F$.	Сколько существует натуральных чисел, меньших 50, таких, что число (*n*+1) имеет только один простой делитель и число $(n!)^2$ не делится на число $(n-1)!+n!+(n+1)!$
60	 Нижняя из нарисованных окружностей касается параболы $y=x^2$ в нижней точке и наибольшая из таких. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности и параболы симметрично. Найдите радиус 2017-той такой окружности.	Дан треугольник *ABC*, в котором *AC* = 3, $\angle B$ = 60°. Обозначим за *N* точку касания вневписанной окружности, касающейся стороны *BC*, с продолжением стороны *AC*. Известно, что центр вписанной окружности треугольника *ABC*, середина стороны *AB* и точка *N* лежат на одной прямой. Найдите, чему равна сторона *AB*.	Решите в натуральных числах уравнение $7^x+13^y=2^z$

АБАКА–ЮНИОРЫ

Ответ считается верным, если найдены ВСЕ правильные варианты и нет ни одного лишнего

	Алгебра	*Комби*	*Разные задачи*
10	Найдите число x из условия $129-x^2=195-y^2=xy$.	Пять подруг сидели в кинотеатре в ряд из 5 мест, от 1 до 5. Аня отлучилась за попкорном, и вернувшись, обнаружила, что Жанна пересела на два места вправо, Катя – на одно место влево, а Диана и Настя поменялись местами, оставив Ане место № 5. А где сидела Аня до того, как встала?	Зоя за летние каникулы (92 дня) прочитала 10 книг, причем каждую следующую книгу она читала на день дольше предыдущей. Зоя закончила читать первую книгу в понедельник, а вторую – в среду. В какой день недели она могла закончить читать последнюю книгу?
20	Для каких значений a суммы квадратов корней уравнений $x^2+2x+a=0$ и $x^2+ax+2=0$ равны?	Автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000000 до 999999. Билет называется призовым, если в нем есть две подряд идущие цифры, отличающиеся ровно на 5. Сколько существует призовых билетов?	Маша хочет заполнить клетки таблицы 2×3 крестиками и ноликами так, чтобы эта таблица разрезалась на три доминошки: одну с двумя крестиками, одну с двумя ноликами и одну с крестиком и ноликом. Сколькими способами это можно сделать? Способы, совмещаемые поворотом или симметрией, считаем разными.
30	Последовательность целых чисел $\{a_n\}$ задана условиями $a_1=2016, a_{n-1}+\frac{a_n}{2}=n^2-n+1$ при $n\geq 1$. Найдите a_{100}.	На доске 13×13 расставлены 13 не бьющих друг друга ладей. При каком наименьшем k в любом квадрате $k\times k$ заведомо найдется хотя бы одна ладья?	Множество X состоит из $n>3$ чисел. Оказалось, что для любых разных a, $b\in X$ можно подобрать такое $c\in X$ (отличное от a и b), что среднее арифметическое a, b и c также лежит в X. При каком наименьшем n это возможно?
40	Для некоторого N в выражении $(a+b+c+d+1)^N$ открыли скобки и привели подобные слагаемые. Полученное выражение содержало ровно 1001 одночленов. Найдите N.	На всех клетках шахматной доски размером 4×4 стоит по коню. Сколькими различными способами они могут одновременно прыгнуть так, чтобы после прыжка все кони снова оказались на разных клетках?	Все числа от 1 до 2000 выписаны подряд, в результате получилось многозначное число 1234567…2000. В нем зачеркивают все цифры, стоящие на нечетных местах. Затем в новом числе вычеркиваются все цифры, стоящие на четных местах, затем в новом числе вычеркиваются все цифры, стоящие на нечетных местах, потом – на четных и т.д. до тех пор, пока не останется одна цифра. Найдите ее.
50	Укажите какое-нибудь значение $x>1$, при котором число $(x-\sqrt[3]{2}+1)(x+\sqrt[3]{2}+1)(x-1)$ является целым.	В компании из 20 человек некоторые знакомы друг с другом. Оказалось, что среди любых 13 человек этой компании число пар знакомых одно и то же. Сколько всего пар знакомых может быть во всей компании?	Квадрат со стороной $2\sqrt{2}$ и окружность радиуса 3 имеют общий центр. Какое наибольшее значение может иметь произведение расстояний от точки окружности до четырёх вершин квадрата?
60	Последовательность $\{a_n\}$ задана такими условиями: $a_1=0$, $a_2=1$, $a_p=a_{p+1}+1$ при нечётных простых p, а для составных n $a_n=1+a_d$, где d – наибольший делитель n, отличный от n. Найдите наибольшее a_n при $n<100$.	В однокруговом турнире участвовали $2n$ команд. После окончания турнира оказалось, что у каждой команды число ничьих равно числу побед. При каких n такое возможно?	Группа туристов прошла четыре участка пути длиной 28,8 км, 20 км, 16,2 км и 12,8 км. Каждый участок был пройден с постоянной скоростью, а всего на весь путь ушло 13 часов. Если бы туристы шли с каждой из этих постоянных скоростей по 1 часу, то всего они прошли бы 23,4 км. Найдите с какой скоростью был пройден второй участок.

Ответы ЮНИОРЫ

	Графики	Геометрия	Числа	Алгебра	Комби	Разные задачи
10	2 или $\frac{1}{2}$, можно принимать хотя бы один ответ	$3\sqrt{3}$	2016	$\pm 43/6$	2	суббота
20	8	$\sqrt{2}$	997	–4	409510	18
30	$\lvert x\rvert=y^2$ (проверить ответы, могут быть варианты)	6,5	8	7986	7	5
40	$\frac{1}{2}\lvert x-1\rvert - \frac{1}{2}\lvert x+1\rvert + x$	80°	2016	10	256	6
50	0,6	132°	18	$x=\sqrt[3]{4}$	190	97
60	2016,5	$1+\sqrt{6}$	$x=3$, $y=2$, $z=9$	12	$N = 3k$, $N = 3k+2$.	6 км/ч.

Ответы ЮНИОРЫ

	Графики	Геометрия	Числа	Алгебра	Комби	Разные задачи
10	2 или $\frac{1}{2}$, можно принимать хотя бы один ответ	$3\sqrt{3}$	2016	43/6	2	суббота
20	8	$\sqrt{2}$	997	–4	409510	18
30	$\lvert x\rvert=y^2$ (проверить ответы, могут быть варианты)	6,5	8	7986	7	5
40	$\frac{1}{2}\lvert x-1\rvert - \frac{1}{2}\lvert x+1\rvert + x$	80°	2016	10	256	6
50	0,6	132°	18	$x=\sqrt[3]{4}$	190	97
60	2016,5	$1+\sqrt{6}$	$x=3$, $y=2$, $z=9$	12	$N = 3k$, $N = 3k+2$.	6 км/ч.