КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 28.10.17. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Четыре машины, движущиеся с постоянными скоростями, одновременно выехали по одной прямолинейной дороге в одном направлении. В момент старта «Мерседес» отставал от «Форда» на такое же расстояние, на какое «БМВ» отставал от «Жигулей». «Мерседес» догнал «Форд» в тот же момент, когда «БМВ» догнал «Жигули». Через некоторое время «Мерседес» догнал «БМВ». Докажите, что в тот же момент «Форд» догнал «Жигули».

2. Найдите сумму $\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\dfrac{100}{98!+99!+100!}$.

3. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > AC$) проведена высота AD. Точка E симметрична точке D относительно средней линии треугольника ABC, параллельной AC. Докажите, что $\angle EAB = \angle DAC$.

4. Вася взял клетчатый прямоугольник, в котором 999 строк и 1000 столбцов, разбил его на полоски 1×4 (вертикальные или горизонтальные) и окрасил каждую полоску в свой цвет. Для каждой из 999 строк он посчитал, сколько цветов встречается в этой строке. Для каждой строки, кроме какой-то одной, у него получилось 400 цветов. Сколько цветов могло получиться в оставшейся строке?

5. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$. Биссектриса угла A пересекает отрезок BC в точке L. Внешняя биссектриса угла B пересекает дугу BC и луч AL в точках N и J соответственно. Описанная окружность треугольника ALN пересекает луч LB в точке T. Докажите, что $JT \parallel AC$.

6. В стране 100 городов, попарно соединенных дорогами, на каждой из которых введена положительная плата за проезд. Власти закрыли k дорог на ремонт, и в результате какие два города ни возьми, самый дешевый маршрут между ними либо вырос в цене, либо отсутствует вовсе. При каком наименьшем k такое могло произойти?

7. Положительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$. Докажите, что

$$x+y+z \geq \sqrt{\frac{xy+1}{2}}+\sqrt{\frac{yz+1}{2}}+\sqrt{\frac{zx+1}{2}}\ .$$

8. Число $(p-1)^p+1$, где $p > 2$ — простое число, разложили на простые множители. Докажите, что сумма этих множителей больше $p^2/2$ (каждый простой множитель считается столько раз, сколько он входит в разложение).

Двадцать первый математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 28.10.17. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Четыре машины, движущиеся с постоянными скоростями, одновременно выехали по одной прямолинейной дороге в одном направлении. В момент старта «Мерседес» отставал от «Форда» на такое же расстояние, на какое «БМВ» отставал от «Жигулей». «Мерседес» догнал «Форд» в тот же момент, когда «БМВ» догнал «Жигули». Через некоторое время «Мерседес» догнал «БМВ». Докажите, что в тот же момент «Форд» догнал «Жигули».

2. Вася взял клетчатый прямоугольник, в котором 999 строк и 1000 столбцов, разбил его на полоски 1×4 (вертикальные или горизонтальные) и окрасил каждую полоску в свой цвет. Для каждой из 999 строк он посчитал, сколько цветов встречается в этой строке. Для каждой строки, кроме какой-то одной, у него получилось 400 цветов. Сколько цветов могло получиться в оставшейся строке?

3. Дима нашёл остатки от деления числа 1 000 000 на 2, числа 1 000 001 на 3, числа 1 000 002 на 4, …, числа 2 017 000 на 1 017 002. Какой остаток встретился больше всего раз?

4. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$. Биссектриса угла A пересекает отрезок BC и дугу BC в точках L и S соответственно. Внешняя биссектриса угла B пересекает дугу BC и луч AS в точках N и J соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников ALN и BSJ, лежит на прямой BC.

5. В стране N городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами, каждый рейс имеет цену, большую 1000 рублей, причём из любого города можно добраться до любого другого (возможно, с пересадками). Компания публикует сборник, в котором для каждой из $N(N-1)/2$ пар городов указана минимальная цена, которую надо заплатить, чтобы добраться от одного из них до другого; в конце сборника указывается сумма всех этих $N(N-1)/2$ чисел. В некоторый момент компания уменьшила стоимость одного из рейсов на 1000 рублей. Докажите, что итоговая сумма в новом сборнике будет отличаться от старой не более, чем на $250N^2$.

6. Найдите все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что при всех действительных x и y выполнено равенство $f(x-y^{2017}) = f(x+f(y))+f(y^{2017}+f(y))$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC — в точке Q. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ADP и CDQ соответственно. Оказалось, что $PD = QD$. Докажите, что $OI = OJ$.

8. Каждое натуральное число из множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ окрашено в белый, красный или синий цвет. Пусть S — количество упорядоченных одноцветных троек (x, y, z) таких, что $x, y, z \in M$ и $x+y+z$ делится на n, а T — количество упорядоченных трёхцветных троек с теми же свойствами. Докажите, что $2S \geq T$.

Решения задач командной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *Четыре машины, движущиеся с постоянными скоростями, одновременно выехали по одной прямолинейной дороге в одном направлении. В момент старта «Мерседес» отставал от «Форда» на такое же расстояние, на какое «БМВ» отставал от «Жигулей». «Мерседес» догнал «Форд» в тот же момент, когда «БМВ» догнал «Жигули». Через некоторое время «Мерседес» догнал «БМВ». Докажите, что в тот же момент «Форд» догнал «Жигули».*

Решение. Пусть $v_М$, $v_В$, v_F, $v_Ж$ — скорости «Мерседеса», «БМВ», «Форда» и «Жигулей» соответственно. Из условия следует, что «Мерседес» догонял «Форд» с той же скоростью, с которой «БМВ» догонял «Жигули», то есть выполнено равенство $v_M–v_F = v_B– v_Ж$. Но тогда и $v_M–v_B = v_F–v_Ж$, то есть «Мерседес» догоняет «БМВ» с той же скоростью, что «Форд» — «Жигули». Осталось заметить, что в момент, когда «Мерседес» нагнал «Форд», обе эти машины были на одинаковом расстоянии от «БМВ» и «Жигулей».

Задача 2. *Найдите сумму* $\dfrac{3}{1!+2!+3!}+\dfrac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\dfrac{100}{98!+99!+100!}$.

Ответ. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{100!}$. Решение. Заметим, что

$$\frac{k}{(k-2)!+(k-1)!+k!}=\frac{k}{(k-2)!k^2}=\frac{1}{k(k-2)!}=\frac{k-1}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}.$$

Заменяя каждую из дробей данной в условии суммы на разность из правой части полученного равенства, после уничтожения противоположных слагаемых получаем ответ.

Задача 3. *В остроугольном треугольнике ABC (AB > AC) проведена высота AD. Точка E симметрична точке D относительно средней линии треугольника ABC, параллельной AC. Докажите, что ∠EAB = ∠DAC.*

Решение. Пусть F и G — середины сторон AB и BC соответственно. По свойству медианы прямоугольного треугольника $AF = BF = FD$. Кроме того, $FD = FE$. Таким образом, точки A, B, D и E лежат на одной окружности с центром F, и углы BAE и BDE равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Пусть углы при вершинах B и C равны β и γ соответственно. Тогда $\angle BGF = \gamma$, $\angle BDF = \beta$, $\angle DFG = \gamma–\beta$, $\angle FDE = 90°–\angle DFG = 90°–\gamma+\beta$ и $\angle BDE = \angle FDE–\angle BDF = 90°–\gamma$. Таким образом, $\angle BAE = \angle BDE = 90°–\gamma = \angle DAC$.

Задача 4 *Вася взял клетчатый прямоугольник, в котором 999 строк и 1000 столбцов, разбил его на полоски 1×4 (вертикальные или горизонтальные) и окрасил каждую полоску в свой цвет. Для каждой из 999 строк он посчитал, сколько цветов встречается в этой строке. Для каждой строки, кроме какой-то одной, у него получилось 400 цветов. Сколько цветов могло получиться в оставшейся строке?*

Ответ. 550. Решение. Обозначим оставшуюся строку через s. В каждой строке, кроме s, по 400 цветов. Пусть в эти 400 цветов покрашены x вертикальных полосок и $400–x$ горизонтальных. Тогда количество занимаемых ими клеток в строке равно $x+4\cdot(400–x) = 1000$, следовательно, $x = 200$. Это означает, что каждая такая строка пересекается с 200 вертикальными полосками и содержит по 200 горизонтальных полосок.

Или четыре верхних, или четыре нижних строки не содержат s. Пусть, без ограничения общности, в четырех нижних строках нет s. Все вертикальные полоски, пересекающие нижнюю строку, также пересекают три следующие строки. Поэтому других вертикальных полосок, пересекающих эти четыре строки, нет. Отбросим эти четыре строки и проведем аналогичные рассуждения заново. В конце этих рассуждений не может остаться прямоугольник 3×1000, так как две из его строк пересекаются с вертикальными полосками. Поэтому остался прямоугольник 7×1000, в котором s является четвертой строкой, так как иначе мы смогли бы отбросить еще 4 строки. Верхняя и нижняя строки пересекаются с 200 вертикальными полосками, поэтому s пересекается с 400 вертикальными полосками. А оставшиеся 600 клеток строки s заполнены горизонтальными полосками, которые дадут еще 150 цветов.

Задача 5. *Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC, в котором AB < BC. Биссектриса угла A пересекает отрезок BC в точке L. Внешняя биссектриса угла B пересекает дугу BC и луч AL в точках N и J соответственно. Описанная окружность треугольника ALN пересекает луч LB в точке T. Докажите, что JT || AC.*

Решение. Обозначим через S середину дуги BNC. Точка N лежит на дуге SBA, потому что дуга CN равна $90°–\angle B/2$, а дуга CS равна $\angle A/2 < 90°–\angle B/2$. Кроме того, поскольку $AB < BC$, точка N лежит на дуге CB, и, следовательно, на дуге SB. Поэтому лучи CB и SN пересекаются в некоторой точке T'. Точка N — середина дуги ABC, поэтому $\angle NBC = \angle NSA$. Тогда

$$\angle T'LA = \angle LAC+\angle LCA = \angle BAS+\angle BNA = \angle T'NB+\angle BNA = \angle T'NA.$$

Значит, четырехугольник $ALNT'$ — вписанный, откуда точки T' и T совпадают. Далее, $\angle JBT = 180°–\angle NBC = 180°–\angle NSA = \angle TSJ$, а значит, четырехугольник $BSJT$ вписан. Таким образом, $\angle JAC = \angle SBC = \angle SJT$, откуда $JT \parallel AC$.

Задача 6. *В стране 100 городов, попарно соединенных дорогами, на каждой из которых введена положительная плата за проезд. Власти закрыли k дорог на ремонт, и в результате какие два города ни возьми, самый дешевый маршрут между ними либо вырос в цене, либо отсутствует вовсе. При каком наименьшем k такое могло произойти?*

Ответ. При $k = 99$. Решение. *Пример*. Назовем один из городов столицей и положим плату за проезд на дорогах, выходящих из столицы, равной 1 рублю, а на дорогах, соединяющих два нестоличных города, — 1000 рублей. Тогда для любой пары городов самый дешевый маршрут между ними стоит не более двух рублей. Но, если закрыть все 99 выходящих из столицы дорог, то из столицы маршрутов не станет, а стоимость самого дешевого маршрута для любой пары нестоличных городов возрастет до 1000 рублей. *Оценка*. Пусть $k < 99$. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а ребрами — k закрытых дорог. Поскольку $k < 99$, этот граф не может быть связным. Следовательно, мы можем разбить все города на два множества A и B так, чтобы ни одна дорога, соединяющая город из A с городом из B, не была закрыта. Пусть ab — самая дешевая из таких дорог. Тогда любой маршрут, ведущий из a в b, должен содержать дорогу, ведущую из A в B. Следовательно, самым дешевым маршрутом из a в b является прямая дорога между ними, причем это верно как до, так и после удаления k дорог

Задача 7. *Положительные числа x, y, z таковы, что $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Докажите, что $x+y+z \geq \sqrt{\frac{xy+1}{2}}+\sqrt{\frac{yz+1}{2}}+\sqrt{\frac{zx+1}{2}}$.*

Решение. По неравенству о средних для двух чисел имеем:

$$\frac{x+\frac{1}{y}}{2}+y \geq 2\sqrt{\frac{x+\frac{1}{y}}{2}\cdot y}=2\sqrt{\frac{xy+1}{2}}$$

Сложив это неравенство с двумя аналогичными, получаем:

$$\frac{x+\frac{1}{y}}{2}+y+\frac{y+\frac{1}{z}}{2}+z+\frac{z+\frac{1}{x}}{2}+x \geq 2\left(\sqrt{\frac{xy+1}{2}}+\sqrt{\frac{yz+1}{2}}+\sqrt{\frac{zx+1}{2}}\right)$$

Осталось заметить, что в левой части стоит $\frac{3}{2}(x+y+z)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2(x+y+z)$, что и завершает доказательство.

Задача 8. *Число $(p-1)^p+1$, где $p > 2$ — простое число, разложили на простые множители. Докажите, что сумма этих множителей больше $p^2/2$ (каждый простой множитель считается столько раз, сколько он входит в разложение).*

Решение. Покажем, что все простые множители числа $(p-1)^p+1$ не меньше p. Пусть $(p-1)^p+1$ делится на простое число $q \leq p$. Тогда $(p-1)^p \equiv -1 \pmod q$. Пусть s и t — наименьшие натуральные числа такие, что $(p-1)^s \equiv -1 \pmod q$ и $(p-1)^t \equiv 1 \pmod q$.

Из того, что последовательность остатков степеней $p-1$ при делении на q — чисто периодическая с периодом t, следует, что $t > s$ (q — нечётное простое число, поэтому 1 не сравнима с -1 по модулю q). Если $t < 2s$, то $(p-1)^{2s-t} \equiv 1 \pmod q$ и $2s-t < s$ — противоречие. Таким образом, $t \geq 2s$, откуда $t = 2s$. Тогда все такие l, что $(p-1)^l \equiv -1 \pmod q$, представляются в виде $(2k+1)s$. В частности, $p = (2k+1)s$, откуда $k = 0$, $p = s$ или $p = 2k+1$, $s = 1$. Так как в силу малой теоремы Ферма $s < q$, случай $k = 0$, $p = s$ невозможен. Поэтому $s = 1$, откуда $p-1 \equiv -1 \pmod q$, то есть $q = p$.

Итак, мы показали, что все простые делители числа $(p-1)^p+1$ не меньше p. Если этих делителей больше, чем $p/2$, их сумма, очевидно, больше, чем $p^2/2$. Если же их меньше, чем $p/2$, одно из них не меньше, чем $\frac{(p-1)^p}{p/2}=\frac{2(p-1)^p}{p}=2\left(1-\frac{1}{p}\right)(p-1)^{p-1}$. Покажем, что уже само это число больше, чем $\frac{p^2}{2}$. При $p = 3$ это проверяется непосредственно, а при $p \geq 5$ следует из того, что $2\left(1-\frac{1}{p}\right)>1$ и $(p-1)^2>\frac{p^2}{2}$.

Решения задач командной олимпиады старшей группы.

Задача 1. *Четыре машины, движущиеся с постоянными скоростями, одновременно выехали по одной прямолинейной дороге в одном направлении. В момент старта «Мерседес» отставал от «Форда» на такое же расстояние, на какое «БМВ» отставал от «Жигулей». «Мерседес» догнал «Форд» в тот же момент, когда «БМВ» догнал «Жигули». Через некоторое время «Мерседес» догнал «БМВ». Докажите, что в тот же момент «Форд» догнал «Жигули».*

Решение. Пусть v_M, v_B, v_F, $v_Ж$ — скорости «Мерседеса», «БМВ», «Форда» и «Жигулей» соответственно. Из условия следует, что «Мерседес» догонял «Форд» с той же скоростью, с которой «БМВ» догонял «Жигули», то есть выполнено равенство $v_M - v_F = v_B - v_Ж$. Но тогда и $v_M - v_B = v_F - v_Ж$, то есть «Мерседес» догоняет «БМВ» с той же скоростью, что «Форд» — «Жигули». Теперь утверждение задачи вытекает из того, что в момент, когда «Мерседес» нагнал «Форд», обе эти машины были на одинаковом расстоянии от «БМВ» и «Жигулей».

Задача 2. *Вася взял клетчатый прямоугольник, в котором 999 строк и 1000 столбцов, разбил его на полоски 1×4 (вертикальные или горизонтальные) и окрасил каждую полоску в свой цвет. Для каждой из 999 строк он посчитал, сколько цветов встречается в этой строке. Для каждой строки, кроме какой-то одной, у него получилось 400 цветов. Сколько цветов могло получиться в оставшейся строке?*

Ответ. 550. Решение. Обозначим оставшуюся строку через s. В каждой строке, кроме s, по 400 цветов. Пусть в эти 400 цветов покрашены x вертикальных полосок и $400-x$ горизонтальных. Тогда количество занимаемых ими клеток в строке равно $x+4\cdot(400-x) = 1000$, следовательно, $x = 200$. Это означает, что каждая такая строка пересекается с 200 вертикальными полосками и содержит по 200 горизонтальных полосок.

Или четыре верхних, или четыре нижних строки не содержат s. Пусть, без ограничения общности, в четырех нижних строках нет s. Все вертикальные полоски, пересекающие нижнюю строку, также пересекают три следующие строки. Поэтому других вертикальных полосок, пересекающих эти четыре строки, нет. Отбросим эти четыре строки и проведем аналогичные рассуждения заново. В конце этих рассуждений не может остаться прямоугольник 3×1000, так как две из его строк пересекаются с вертикальными полосками. Поэтому остался прямоугольник 7×1000, в котором s является четвертой строкой, так как иначе мы смогли бы отбросить еще 4 строки. Верхняя и нижняя строки пересекаются с 200 вертикальными полосками, поэтому s пересекается с 400 вертикальными полосками. А оставшиеся 600 клеток строки s заполнены горизонтальными полосками, которые дадут еще 150 цветов.

Задача 3. *Дима нашёл остатки от деления числа 1 000 000 на 2, числа 1 000 001 на 3, числа 1 000 002 на 4, …, числа 2 017 000 на 1 017 002. Какой остаток встретился больше всего раз?*

Ответ. 999 998. Решение. Разность между делимым и делителем всегда равна 999 998. Так как при вычитании из делимого делителя остаток не меняется, то будем рассматривать остатки от деления 999 998 на числа от 2 до 1 017 002. После того, как делитель превысит 999 998, мы всегда будем получать в остатке 999 998. Тогда остаток 999 998 встретится хотя бы 17 000 раз.

Покажем, что все остальные остатки встретятся меньшее число раз. Остаток r мог получиться при делении на n только если $999\,998-r$ делится на n. Поэтому остатков, равных r, встретится не больше, чем есть делителей у числа $999\,998-r$. Но у каждого числа, меньшего 1 000 000, есть не более 2000 делителей, так как его делители, кроме, быть может, одного, разбиваются на пары (d, m/d), а в каждой паре один из делителей не больше $\sqrt{m} < 1000$.

Задача 4. *Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC, в котором AB < BC. Биссектриса угла A пересекает отрезок BC и дугу BC в точках L и S соответственно. Внешняя биссектриса угла B пересекает дугу BC и луч AS в точках N и J соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников ALN и BSJ, лежит на прямой BC.*

Решение. Точка S и N — середины дуг BC и ABC соответственно. Поэтому дуга CS короче дуги CN, и точка N лежит на дуге SBA. Кроме того, поскольку $AB < BC$, точка N лежит на дуге CB и, следовательно, на дуге SB. Значит, лучи CB и SN пересекаются в некоторой точке T.

Поскольку N — середина дуги ABC, углы NBC и NSA равны, откуда $\angle JBT = 180° - \angle NBC = 180° - \angle NSA = \angle TSJ$. Значит, четырехугольник $BSJT$ — вписанный. Далее, $\angle TLA = \angle LAC + \angle LCA = \angle BAS + \angle BNA = \angle TNB + \angle BNA = \angle TNA$. Поэтому и четырехугольник $ALNT$ — вписанный. Таким образом, точка T лежит на окружностях, описанных около треугольников ALN и BSJ, и на прямой BC.

Задача 5. *В стране N городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами, каждый рейс имеет цену, большую 1000 рублей, причём из любого города можно добраться до любого другого (возможно, с пересадками). Компания публикует сборник, в котором для каждой из N(N–1)/2 пар городов указана минимальная цена, которую надо заплатить, чтобы добраться от одного из них до другого; в конце сборника указывается сумма всех этих N(N–1)/2 чисел. В некоторый момент компания уменьшила стоимость одного из рейсов на 1000 рублей. Докажите, что итоговая сумма в новом сборнике будет отличаться от старой не более, чем на* $250N^2$.

Решение. Обозначим два города, между которыми уменьшили стоимость рейса, через X и Y. Пусть A — множество городов, из которых после уменьшения дешевле добраться до X, чем до Y, в том числе в множество A входит сам город X. Пусть B — множество городов, из которых добраться до Y не дороже, чем до X, в том числе в множество B входит сам город Y.

Пусть при проезде самым дешевым путем между городами U и V множества A мы сначала доезжаем из U до X, потом летим из X в Y по удешевленному рейсу, а затем долетаем из Y в V. Тогда, если из X сразу полететь в V по пути наименьшей стоимости, мы заплатим меньшую цену за весь путь: ведь цена перелета между X и Y все равно осталась положительной, и хотя бы эту цену мы сэкономим. Аналогичны рассуждения для двух вершин из множества B. Поэтому путь минимальной стоимости между двумя вершинами одного множества не содержит рейс из X в Y.

Обозначим количество городов в множестве A через a. Тогда в множестве B всего $N–a$ городов. Стоимость самого дешевого пути между городами одного множества, как было показано выше, не уменьшилась. Значит, лишь между $a(N–a)$ парами городов из разных множеств стоимость самого дешевого пути могла уменьшиться. Это количество пар не больше $N^2/4$, по неравенству между средними арифметическим и геометрическим.

Новый самый дешевый путь между городами из разных множеств проходит по удешевленному ребру XY не более одного раза, а до удешевления стоимость такого же пути была не ниже стоимости самого дешевого пути между этими городами. Поэтому для каждой пары городов из разных множеств стоимость самого дешевого пути уменьшилась не более, чем на 1000. Значит, итоговая сумма будет отличаться от старой не более, чем на $250N^2$ рублей.

Задача 6. *Найдите все функции* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *такие, что при всех действительных x и y выполнено равенство* $f(x–y^{2017}) = f(x+f(y))+f(y^{2017}+f(y))$.

<u>Ответ</u>. $f(x) = 0$ и $f(x) = –x^{2017}$. <u>Решение</u>. Несложно видеть, что оба ответа подходят. Покажем, что других ответов нет. Подставим $x = y^{2017}$: $f(0) = 2f(y^{2017}+f(y))$, следовательно, $f(y^{2017}+f(y)) = f(0)/2$.

Предположим, нашлись такие $a > b$, что $f(a) = f(b)$. Подставим их вместо y: $f(x–a^{2017}) = f(x+f(a))+f(0)/2 = f(x+f(b))+f(0)/2 = f(x–b^{2017})$. Заметим, что $a^{2017} > b^{2017}$. Следовательно, функция f периодична с периодом $t = a^{2017}–b^{2017} > 0$. Подставим в предыдущее рассуждение вместо a число $c+t$, а вместо b — число c. Тогда f периодична с периодом $(c+t)^{2017}–c^{2017}$ для любого c. Выражение $(c+t)^{2017}–c^{2017}$ при изменении c от 0 до t принимает все значения из отрезка $[t^{2017}, (2^{2017}–1)t^{2017}]$. Поскольку любое действительное число можно представить в виде суммы нескольких чисел из этого отрезка с коэффициентами 1 или –1, из этого следует, что периодом функции f является любое действительное число, то есть эта функция постоянна. Несложно видеть, что единственная постоянная функция, удовлетворяющая условию задачи — это тождественный ноль.

Если же для любых $a \neq b$ выполнено $f(a) \neq f(b)$, то из $f(y^{2017}+f(y)) = f(0)/2$ следует, что найдётся некоторая постоянная c, что $y^{2017}+f(y) = c$, т.е. $f(y) = c–y^{2017}$. Если $c \neq 0$, то подставим $x = t+y^{2017}$: $f(t) = f(t+c)+f(c) \Leftrightarrow f(t+c) = f(t)–f(c)$. Но тогда $f(cn) = c–nf(c) = c–(cn)^{2017}$ для любого n, что может быть верно только при $c = 0$.

Задача 7. *Четырёхугольник ABCD вписан в окружность с центром O. Лучи BA и CD пересекаются в точке P, а лучи AD и BC — в точке Q. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ADP и CDQ соответственно. Оказалось, что PD = QD. Докажите, что OI = OJ.*

<u>Решение</u>. Пусть ω — окружность, описанная около четырёхугольника $ABCD$, I_1 — центр вневписанной окружности треугольника PBC, касающейся стороны BC, J_1 — центр вневписанной окружности треугольника ABQ, касающейся стороны AB. Тогда $\angle AID+\angle BI_1C = 90°+\angle APD/2+90°–\angle BPC/2 = 180°$. Поэтому четырёхугольник IJI_1J_1 — вписанный. Обозначим через γ его описанную окружность, и пусть O_1 — её центр. Далее, точки P, I_1 и I лежат на одной прямой, и $\angle BI_1P = \angle BCP/2 = \angle PAD/2 = \angle IAP$. Следовательно, четырёхугольник AII_1B — вписанный, откуда $PA\cdot PB = PI\cdot PI_1$. Значит, степени точки P относительно окружностей ω и γ равны. Аналогично, это верно и для точки Q. Таким образом, PQ — радикальная ось окружностей ω и γ, а потому $OO_1 \perp PQ$ (поскольку радикальная ось существует, $O \neq O_1$). Поскольку $PD = QD$, внешняя биссектриса IJ угла PDQ параллельна PQ. Значит, $IJ \perp OO_1$. Поскольку кроме того $O_1I = O_1J$, OO_1 — серединный перпендикуляр отрезка IJ, откуда $OI = OJ$.

Задача 8. *Каждое натуральное число из множества M = {1, 2, …, n} окрашено в белый, красный или синий цвет. Пусть S — количество упорядоченных одноцветных троек (x, y, z) таких, что* $x, y, z \in M$ *и x+y+z делится на n, а T — количество упорядоченных трёхцветных троек с теми же свойствами. Докажите, что* $2S \geq T$.

<u>Решение</u>. Назовём тройку (x, y, z) *двуцветной*, если x и y одного цвета, а z — другого. Обозначим через G количество двуцветных троек (x, y, z), в которых $x, y, z \in M$, и число $x+y+z$ делится на n. Пусть w, r и b — количества чисел белого, красного и синего цвета соответственно.

Для каждой пары одноцветных $x, y \in M$ существует единственное $z \in M$ такое, что $x+y+z$ делится на n; при этом z может иметь либо тот же цвет, что и x, либо другой. Соответственно, тройка (x, y, z) будет либо одноцветной, либо двуцветной; наоборот, каждая одноцветная или двуцветная тройка с кратной n суммой получается описанным образом по разу. Поскольку количество рассматриваемых пар (x, y) равно $w^2+r^2+b^2$, получаем $S+G = w^2+r^2+b^2$.

Аналогично, каждая пара трёхцветных $x, y \in M$ порождает тройку (x, y, z) с суммой, кратной n. При этом, если цвет z отличен от цветов x и y, эта тройка трёхцветна; если цвет z совпадает с цветом x, то переставленная тройка (x, z, y) двуцветна; наконец, если цвет z совпадает с цветом y, то переставленная тройка (y, z, x) двуцветна. Более того, каждая трёхцветная тройка с кратной n суммой получается описанным образом по разу, а каждая двуцветная тройка (a, b, c) — по два раза: из троек (a, c, b) и (c, a, b). Количество рассматриваемых пар (x, y) равно $2(wr+wb+rb)$; значит, $T+2G = 2(wr+wb+rb)$.

Из полученных двух формул получаем $2S–T = 2(S+G)–(T+2G) = 2(w^2+r^2+b^2)–2(wr+wb+rb) = (w–r)^2+(w–b)^2+(b–r)^2 \geq 0$, что и требовалось доказать.