Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.17. СЕНЬОРЫ.

Довывод

1. Серёжа заменил в верном числовом примере цифры буквами (одинаковые — одинаковыми, а разные — разными) так, что получилось равенство $\underbrace{\text{БАХ}+\text{БАХ}+\ldots+\text{БАХ}}_{n\text{ раз}}=\text{БАБАХ}$. Чему может равняться n?

2. Найдите все функции $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такие, что для всех натуральных n и k верны равенства $g(nk) = g(n)g(k)$ и $\underbrace{g(g(\ldots(g}_{n\text{ букв } g}(n))\ldots))=n$.

3. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность Ω, отмечена точка E. Оказалось, что $BE = BC$ и $\angle DCE = 90°$. Точка K выбрана на дуге ABC окружности Ω так, что $KE \parallel BD$. Докажите, что треугольник AKD равнобедренный.

4. Дана последовательность положительных вещественных чисел a_1, a_2, …, a_{2017}, в которой $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{n+1}=a_n^2+a_{n-1}^2+a_{n-2}^2+a_{n-2}$ при всех $n \ge 3$. Найдите a_3, если известно, что $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2016}+1}+\frac{1}{a_{2017}}=1$.

Вывод

5. Пусть a_1, a_2, … — перестановка всех натуральных чисел. Докажите, что существует перестановка всех натуральных чисел $b_1, b_2, \ldots$ такая, что $\frac{1}{n}+\frac{1}{a_n}\le\frac{4}{b_n}$ при всех натуральных n.

6. Внутри треугольника ABC взята фиксированная точка T. По дуге BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A, движется переменная точка P. Окружности, описанные около треугольников BPT и CPT, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Точка P' симметрична P относительно прямой KL. Докажите, что точка P' движется по окружности.

7. Назовём граф *a-хорошим*, если в нём нет 100 попарно соединённых вершин, и степень каждой его вершины не превосходит a. Натуральные числа $d \ge 100$ и k таковы, что вершины любого d-хорошего графа можно правильно окрасить в k цветов. Докажите, что вершины любого $(d^2–2)$-хорошего графа можно правильно окрасить в $(d–1)k$ цветов.

Двадцать первый математический турнир старшеклассников
“Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Уфа, 27 октября – 3 ноября 2017 года

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.17. ЮНИОРЫ.

Довывод

1. Найдите какие-нибудь приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$, удовлетворяющие свойствам: $Q(P(x)) = P(x)Q(x)$ и $2P(Q(1)) = 1$.

2. Выпуклый 100-угольник разбит на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Треугольники раскрашены в красный и зелёный цвета так, что никакие два одноцветных треугольника не имеют общей стороны. Какое наименьшее количество зелёных треугольников может быть?

3. Окружности s_1 и s_2 пересекаются в двух точках. Докажите, что найдется такая точка X, что для любой окружности s с центром в X, имеющей общие хорды и с s_1, и с s_2, отношение длин этих хорд не зависит от выбора s.

4. Докажите, что существует только конечное число таких натуральных n, что $\left(\frac{n}{1}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\ldots\left(\frac{n}{n}+n\right)$ — целое число.

Вывод

5. Дано множество S из нескольких последовательностей длины 100, состоящих из нулей и единиц. Оказалось, что для каждого элемента S есть ровно 20 других элементов в S, отличающихся от него ровно в одном разряде. Какое наименьшее количество элементов может быть в множестве S?

6. Про натуральные числа a,b,c известно, что число $S = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ является степенью простого числа, а число $T = a^4+b^4+c^4$ делится на S. Чему может быть равно частное T/S?

7. Внутри треугольника ABC взята фиксированная точка T. По дуге BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A, движется переменная точка P. Окружности, описанные около треугольников BPT и CPT, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Точка P' симметрична P относительно прямой KL. Докажите, что точка P' движется по окружности.

Решения задач личной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *Найдите какие-нибудь приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$, удовлетворяющие свойствам: $Q(P(x)) = P(x)Q(x)$ и $2P(Q(1)) = 1$.*

Ответ. Подходят трёхчлены $P(x) = x^2-1/2x+1/2$ и $Q(x) = x^2-1/2x$. Замечание. И только они.

Задача 2. *Выпуклый 100-угольник разбит на треугольники не пересекающимися по внутренним точкам диагоналями. Треугольники раскрашены в красный и зелёный цвета так, что никакие два одноцветных треугольника не имеют общей стороны. Какое наименьшее количество зелёных треугольников может быть?*

Ответ. 33. Решение. Пусть всего имеется r красных и g зелёных треугольников. Занумеруем вершины числами от 1 до 100 и для каждого i найдём количество r_i красных и g_i зелёных треугольников с вершиной в i–й вершине 100 угольника. Очевидно, $r_1+...+r_{100} = 3r$, $g_1+...+g_{100} = 3g$, откуда $r-g = ((r_1-g_1)+...+(r_{100}-g_{100}))/3$. Так как цвета треугольников, сходящихся в одной вершине, чередуются, $r_i-g_i \le 1$ при всех i. Отсюда следует, что $r-g \le 100/3$, то есть $r-g \le 33$. Вычитая это неравенство из известного равенства $r+g = 98$, находим, что $2g \ge 65$, откуда $g \ge 33$. Построить триангуляцию с 33 зелёными треугольниками можно, например, так. Начнём с триангуляции четырёхугольника, в которой, очевидно, один зелёный треугольник. Если у n-угольника есть красная сторона, к ней можно пристроить пятиугольник, состоящий из двух красных и одного зелёного треугольника, и у полученного $(n+3)$-угольника тоже будет красная сторона, а в его (правильно раскрашенной) триангуляции на один зелёный треугольник больше. Проделав это 32 раза, получим триангуляцию 100-угольника, в которой 33 зелёных треугольника.

Задача 3. *Окружности s_1 и s_2 пересекаются в двух точках. Докажите, что найдется такая точка X, что для любой окружности s с центром в X, имеющей общие хорды и с s_1, и с s_2, отношение длин этих хорд не зависит от выбора s.*

Решение. Пусть A — одна из точек пересечения окружностей, O_1 и O_2 — центры s_1 и s_2 соответственно. Достроим точки A, O_1 и O_2 до параллелограмма AO_1XO_2 и убедимся, что точка X нам подойдёт. Радиусы окружностей s_1 и s_2 мы обозначим r_1 и r_2 соответственно. Пусть окружность радиуса x с центром в точке X пересекает s_1 в точках P и Q, а s_2 в точках R и S. Четырёхугольник XPO_1Q симметричен относительно диагонали XO_1, поэтому его диагональ PQ в два раза больше высоты треугольника QO_1X, опущенной на сторону O_1X. Аналогично RS в два раза больше высоты треугольника RO_2X, опущенной на сторону O_2X. Но треугольники QO_1X и RO_2X равны (потому что $O_1Q = r_1 = O_1A = O_2X$, $O_1X = O_2A = r_2 = O_2X$ и $QX = RX = x$), и их высоты, опущенные на стороны $O_1X = r_2$ и $O_2X = r_1$, относятся, как r_1 к r_2, что не зависит от радиуса x.

Задача 4. *Докажите, что существует только конечное число таких натуральных n, что $\left(\frac{n}{1}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)...\left(\frac{n}{n}+n\right)$ — целое число.*

Решение. Условие состоит в том, что произведение $P_n = (n+1^2)(n+2^2)...\ (n+n^2)$ делится на $n!$. Мы докажем, что при $n \ge 8$ это невозможно. Если n даёт при делении на 4 остаток 1 или 2, то число $n+k^2$ делится на 2, но не делится на 4 при k той же чётности, что и n, и нечётно при k другой чётности. Отсюда следует, что в разложении P_n на простые множители двойка входит в степени, не превосходящей $[n/2]+1$. С другой стороны, в $n!$ она входит в степени, не меньшей $[n/2]+[n/4]$, что уже при $n \ge 8$ больше, чем $[n/2]+1$. Поэтому P_n не кратно $n!$.

Для разбора остальных случаев нам понадобится следующий факт: простое число $p = 4m+3$ не может делить сумму двух квадратов, не кратных p (нам достаточно будет того, что оно не может делить выражение вида k^2+1 или k^2+4).

Если n кратно 4, то у числа $n-1$ есть простой делитель p, дающий остаток 3 при делении на 4. Тогда ни один из сомножителей вида $n+k^2 = (n-1)+k^2+1$ не будет делиться на p, потому что на p не делится k^2+1. А если n даёт остаток 3 при делении на 4 и больше 4, то простой делитель p вида $4m+3$ есть у числа $n-4$, и на него тоже не будет делиться ни один сомножитель вида $n+k^2 = (n-4)+(k^2+4)$. Таким образом, и в этих случаях при $n \ge 8$ число P_n не будет кратно $n!$.

Задача 5. *Дано множество S из нескольких последовательностей длины 100, состоящих из нулей и единиц. Оказалось, что для каждого элемента S есть ровно 20 других элементов в S, отличающихся от него ровно в одном разряде. Какое наименьшее количество элементов может быть в множестве S?*

Ответ. 2^{20}. Решение. Пример 2^{20} последовательностей, удовлетворяющих условию, доставляет множество всех последовательностей, оканчивающихся 80 нулями (у любой из них можно изменить любой из первых 20 разрядов, получив другую последовательность из множества). Для доказательства максимальности этого примера мы докажем более сильное утверждение: если в множестве S последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц, у каждого элемента есть хотя бы k других, отличающихся от него ровно в одном разряде, то S содержит хотя бы 2^k элементов. Доказательство проведём индукцией по k. База $k = 1$ очевидна. Пусть утверждение доказано для последовательностей с $k-1$ «соседями», и в множестве S у каждой последовательности есть хотя бы k отличающихся от неё в одном разряде. Возьмём две последовательности из S, отличающихся в одном разряде, скажем, первом, и разделим S на два множества: S_0, включающее последовательности из S, начинающиеся с 0, и S_1, включающее последовательности из S, начинающиеся с 1. Каждое из множеств S_0 и S_1 удовлетворяет условию для k–1 (потому что из k последовательностей, отличающихся от данной в одном разряде, не более одной отличается от неё именно в первом). Поэтому и в S_0, и в S_1 не более 2^{k-1} элементов, а в S не более 2^k, что и требовалось доказать.

Задача 6. *Про натуральные числа a, b, c известно, что число $S = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ является степенью простого числа, а число $T = a^4+b^4+c^4$ делится на S. Чему может быть равно частное T/S?*

Ответ. 1 или 2. Решение. Пусть S — степень простого числа p. Если у чисел a, b и c есть общий натуральный делитель d, сократим их на него. При этом условие задачи по-прежнему будет выполнено (и даже S останется степенью того же p). Теперь, когда числа a, b и c взаимно просты в совокупности, мы знаем, что $p \neq 2$ (потому что иначе S чётно, следовательно, среди a, b и c не более одного нечётного, но T тоже чётно, поэтому a, b и c должны быть все чётны).

$T-2S = a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ по формуле Герона Докажем, что только один из сомножителей в правой части кратен p. Действительно, если $a+b+c$ и один из оставшихся сомножителей, скажем, $a+b-c$, кратны p, то $2c$ и тем самым c делится на p, а $b \equiv -a \pmod p$. Получается, что $0 \equiv T \equiv 2a^4 \equiv p$, то есть a и b тоже кратны p — противоречие. Если же на p делятся два из трёх последних сомножителей, например, $b+c-a$ и $c+a-b$, то на p делятся их сумма $2c$ и разность $a-b$, откуда получаем такое же противоречие: $a^4+b^4+c^4 \equiv 2a^4 \equiv 0 \pmod p$.

Итак, все простые множители p, входящие в разложение $T-2S$, входят в один из сомножителей, который поэтому делится на S. Если этот сомножитель $a+b+c > 0$, то $a+b+c = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$, откуда $a = b = c = 1$ и $T/S = 1$. А если это один из оставшихся множителей, скажем, $a+b-c$, то он меньше S по абсолютной величине и, следовательно, равен 0. В этом случае $T-2S = 0$ и $T/S = 2$ (и этот случай действительно реализуется, например, при $a = 2$, $b = c = 1$).

Задача 7. *Внутри треугольника ABC взята фиксированная точка T. По дуге BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A, движется переменная точка P. Окружности, описанные около треугольников BPT и CPT, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Точка P' симметрична P относительно прямой KL. Докажите, что точка P' движется по окружности.*

Решение. Заметим, что точка T лежит на отрезке KL, поскольку $\angle KTP+\angle PTL = 180°-\angle KBP+180°-\angle PCL = 360°-(\angle ABP+\angle PCA) = 180°$.

Отметим точку O — центр описанной окружности треугольника ABC. Обозначим $\angle ACP = \alpha$. Тогда $\angle AOP = 2\alpha$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу, а также $\angle P'TP = 2\angle KTP = 2\angle PCL = 2\alpha$ в силу симметрии P' и P относительно KL.

Сделаем композицию поворотов с центром в точке O на угол 2α и с центром в точке T на угол -2α. Поскольку сумма углов этих поворотов равна 0°, их композиция является параллельным переносом. При этой композиции A переходит в P' (так как при первом повороте A переходит в P, а второй поворот P отправляет в P'). Пусть O' — образ точки O при этой композиции. Заметим, что $TO' = TO$, поскольку первый поворот оставляет O на месте, а второй поворачивает O вокруг T. Значит, при движении точки P по дуге BC и соответствующем изменении угла α, образ точки O движется по фиксированной окружности s с центром в точке T и радиуса TO. Но тогда (здесь мы вспоминаем, что композиция поворотов оказалась параллельным переносом) при изменении α точка P', как образ точки A, тоже движется по фиксированной окружности (получаемой из s параллельным переносом на вектор OA), что и требовалось доказать.

Замечание. Из решения следует, как построить искомую окружность. Ее центр находится в такой точке Q, что $AOTQ$ — параллелограмм, а радиус равен OT.

Решения задач личной олимпиады старшей группы.

Задача 1. *Серёжа заменил в верном числовом примере цифры буквами (одинаковые — одинаковыми, а разные — разными) так, что получилось равенство* $\underbrace{\text{БАХ}+\text{БАХ}+\ldots+\text{БАХ}}_{n\text{ раз}}=\text{БАБАХ}$. *Чему может равняться n?*

Ответ. 97 или 101. Решение. Вычтем по одному БАХ из левой и правой частей. Получим равенство $(n–1)\cdot$БАХ = БА000. Тогда правая часть делится на БАХ, а кроме того, БАХ00 делится на БАХ, поэтому их разность Х00 делится на БАХ. Если БАХ не делится на 5, то 4Х делится на БАХ, что невозможно при Х ≠ 0. Значит, Х = 0 или Х = 5. При Х = 0 получаем, что $n = 101$. При Х = 5 трехзначное число БАХ является делителем числа Х00 = 500, то есть 125, 250 или 500. Тогда в качестве еще одного значения n находим $n = 97$ при БАХ = 125.

Задача 2. *Найдите все функции* $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *такие, что для всех натуральных n и k верны равенства g(nk) = g(n)g(k) и* $\underbrace{g(g(\ldots(g}_{n\text{ букв }g}(n))\ldots))=n$.

Ответ. $g(n) = n$. Решение. Из условия следует, что $g(1) = 1$. Покажем, что других значений n, где $g(n) = 1$, нет. Действительно, пусть такое n существует, тогда $g(g\ldots(g(n))\ldots)) = 1$. Противоречие.

Из этого следует, что из составного числа получается составное. Действительно, пусть $a = bc$, тогда $g(a) = g(b)g(c)$, где каждый из множителей больше 1.

Пусть p — простое число, покажем, что $g(p)$ тоже простое. Действительно, пусть $g(p)$ — составное, тогда из доказанного выше $g(g(\ldots(g(p))\ldots))$ — тоже составное, противоречие. Пусть k — такое минимальное число, что $g^k(p) = p$, при этом отметим, что k является делителем числа p. Пусть $g(p) = q \neq p$, тогда из $g\{^{k+1}\}(p) = g(p)$ следует $g^k(q) = q$, то есть k — также делитель числа q. Следовательно, $k = 1$ и $g(p) = p$. Вспоминая, что $g(ab) = g(a)g(b)$, получаем $g(n) = n$. Нетрудно убедиться, что такая функция подходит.

Задача 3. *На стороне AB четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность Ω, отмечена точка E. Оказалось, что BE = BC и ∠DCE = 90°. Точка K выбрана на дуге ABC окружности Ω так, что KE || BD. Докажите, что треугольник AKD равнобедренный.*

Решение. Пусть биссектриса угла ABC вторично пересекает окружность Ω в точке L. Поскольку $BE = BC$, биссектриса и высота треугольника BEC, проведенные из вершины B, совпадают. Значит, $BL \perp CE$. Тогда $BL \parallel CD$ и трапеция $BCDL$ — равнобедренная, потому что она вписана в окружность Ω. Следовательно, $DL = BC = BE$ и $\angle DLB = \angle CBL = \angle EBL$. Из этих равенств мы получаем, что $DL \parallel BE$ и $DL = BE$, поэтому $BDLE$ — параллелограмм. Значит, точки K, E, L лежат на одной прямой, параллельной BD. Тогда $BDLK$ — равнобедренная трапеция, откуда $DK = BL$. Поскольку $DL \parallel AB$, четырехугольник $ABDL$ — тоже равнобедренная трапеция. Значит, $AD = BL$. Таким образом, $AD = BL = DK$, то есть треугольник ADK равнобедренный.

Задача 4. *Дана последовательность положительных вещественных чисел a_1, a_2, …, a_{2017}, в которой $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и* $a_{n+1}=a_n^2+a_{n-1}^2+a_{n-2}^2+a_{n-2}$ *при всех* $n\geq 3$. *Найдите a_3, если известно, что* $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2016}+1}+\frac{1}{a_{2017}}=1$.

Ответ. $a_3 = 6$. Решение. Пусть $a_3 = 6$. Тогда $a_3=a_2^2+a_2$. Покажем по индукции, что $a_k=a_{k-1}^2+a_{k-1}$. База проверена. Переход. Имеем

$$a_{k+1}=a_k^2+a_{k-1}^2+a_{k-2}^2+a_{k-2}=a_k^2+a_{k-1}^2+a_{k-1}=a_k^2+a_k.$$

Тогда $\frac{1}{a_k+1}=\frac{(a_k+1)-1}{a_k(a_k+1)}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}$. Подставляя полученный результат в равенство $\frac{1}{a_1+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2016}+1}+\frac{1}{a_{2017}}=1$ получаем, что оно верно. Заметим, что при увеличении (уменьшении) a_3 все следующие элементы последовательности также увеличиваются (уменьшаются). Поэтому равенство $\frac{1}{a_1+1}+\ldots+\frac{1}{a_{2016}+1}+\frac{1}{a_{2017}}=1$ не может достигаться при $a_3 \neq 6$.

Задача 5. *Пусть a_1, a_2, ... — перестановка всех натуральных чисел. Докажите, что существует перестановка всех натуральных чисел b_1, b_2, ... такая, что* $\frac{1}{n}+\frac{1}{a_n}\leq\frac{4}{b_n}$ *при всех натуральных n.*

Решение. Будем строить перестановку b_i следующим образом. На очередном шаге с номером k найдем $a_i = k$. Тогда выберем для b_i и b_k наименьшие из еще не использованных в ряду b_j натуральные числа. Если же одна из этих b-шек была определена ранее, то оставляем ее без изменения. Заметим, что оба числа в таком случае не превосходят $2k$. Таким образом получится, что b_1, b_2, … — перестановка чисел натурального ряда, и осталось лишь проверить для нее указанное неравенство.

В самом деле, рассмотрим некоторое фиксированное n. Обозначим через x минимальное из чисел n и a_n. Тогда по построению b_n не превосходит $2x$, значит, указанное неравенство действительно выполнено.

Задача 6. *Внутри треугольника ABC взята фиксированная точка T. По дуге BC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A, движется переменная точка P. Окружности, описанные около треугольников BPT и CPT, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Точка P′ симметрична P относительно прямой KL. Докажите, что точка P′ движется по окружности.*

Решение. Заметим, что точка T лежит на отрезке KL, поскольку $\angle KTP+\angle PTL = 180°-\angle KBP+180°-\angle PCL = 360°-(\angle ABP+\angle PCA) = 180°$.

Отметим точку O — центр описанной окружности треугольника ABC. Обозначим $\angle ACP = \alpha$. Тогда $\angle AOP = 2\alpha$ как центральный угол, опирающийся на ту же дугу, а также $\angle P'TP = 2\angle KTP = 2\angle PCL = 2\alpha$ в силу симметрии P' и P относительно KL.

Сделаем композицию поворотов с центром в точке O на угол 2α и с центром в точке T на угол -2α. Поскольку сумма углов этих поворотов равна 0°, их композиция является параллельным переносом. При этой композиции A переходит в P' (так как при первом повороте A переходит в P, а второй поворот P отправляет в P'). Пусть O' — образ точки O при этой композиции. Заметим, что $TO' = TO$, поскольку первый поворот оставляет O на месте, а второй поворачивает O вокруг T. Значит, при движении точки P по дуге BC и соответствующем изменении угла α, образ точки O движется по фиксированной окружности s с центром в точке T и радиуса TO. Но тогда (здесь мы вспоминаем, что композиция поворотов оказалась параллельным переносом) при изменении α точка P', как образ точки A, тоже движется по фиксированной окружности (получаемой из s параллельным переносом на вектор OA), что и требовалось доказать.

Замечание. Из решения следует, как построить искомую окружность. Ее центр находится в такой точке Q, что $AOTQ$ — параллелограмм, а радиус равен OT.

Задача 7. *Назовём граф* ***a-хорошим****, если в нём нет 100 попарно соединённых вершин, и степень каждой его вершины не превосходит a. Натуральные числа $d \geq 100$ и k таковы, что вершины любого d-хорошего графа можно правильно окрасить в k цветов. Докажите, что вершины любого (d^2-2)-хорошего графа можно правильно окрасить в (d–1)k цветов.*

Решение. *Лемма*. Пусть $a, b \geq 1$. Пусть каждый a-хороший граф правильно окрашивается в x цветов, а любой y-хороший граф — в y цветов. Тогда каждый $(a+b+1)$-хороший граф правильно окрашивается в $x+y$ цветов. *Доказательство*. Покажем, как разбить вершины любого $(a+b+1)$-хорошего графа на два множества A и B так, чтобы индуцированные подграфы на этих множествах имели максимальные степени, не превосходящие a и b соответственно. Поскольку в этих подграфах не будет 100 попарно соединённых вершин, они будут a- и b-хорошими. Значит, эти множества вершин можно будет раскрасить в x и y цветов соответственно, что и докажет лемму.

Для каждого разбиения всех вершин на два множества A и B назовём его *ценой* сумму be_A+ae_B, где e_A и e_B — количества рёбер в индуцированных подграфах на множествах вершин A и B соответственно. Выберем разбиение наименьшей цены. Предположим, что, например, в A есть вершина v, соединённая хотя бы с $a+1$ вершинами из A; тогда она соединена с не более, чем b вершинами из B. Значит, если перекинуть v из A в B, цена разбиения уменьшится хотя бы на $b(a+1)-ab = b > 0$. Противоречие с выбором нашего разбиения завершает доказательство леммы.

Вернёмся к задаче. Используя лемму, непосредственной индукцией по n получаем, что любой $(n(d+1)-1)$-хороший граф правильно окрашивается в nk цветов: база верна по условию, а для перехода достаточно применить лемму при $a = (n-1)(d+1)-1$ и $b = d$. При $n = d-1$ получаем утверждение задачи.