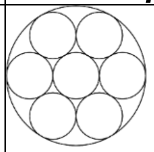
АБАКА-СЕНЬОРЫ

Ответ считается верным, если найдены ВСЕ правильные варианты и нет ни одного лишнего

	Целые и дробные	**Геометрия**	**Числа**
10	Сколько раз в последовательности $\{a_n\}$ $a_n=\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right]$ (n = 1,2,3,…) встречается число 5? ($[x]$ –наибольшее целое число, не превосходящее x)	 Из куска теста круглой формы вырезаны 7 кружочков радиуса 1. Как показано на рис. (они касаются друг друга и внешней окружности). Оставшееся тесто снова раскатали в круг. Найдите его радиус (толщина теста на протяжении всей задачи одинакова).	Найдите наименьшее простое число, сумма цифр которого является нечетным составным числом.
20°	Сколько решений имеет уравнение $20\{x\}+17[x]=2017$?	В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BAC = 48$, $\angle DAC = 66°$, $\angle CBD = \angle DBA$. Найдите $\angle BDC$	Для скольких натуральных n, $100<n\le 10000$, число n делится на $\sqrt{n-100}$?
30	Чему равно значение $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\cdots+\left[\sqrt{9999}\right]$?	В треугольнике ABC $\angle A= 20$, $\angle C = 40°$. Проведены биссектриса AL ($L\in BC$) и внешняя биссектриса CN ($N\in AB$). Найдите $\angle CLN$	Найдите все такие натуральные числа n и простые числа p, что $4n^3+p^3=3np^2$.
40	Найдите все такие натуральные n, что существуют натуральные числа k такие, что $\{\sqrt{n}\}=\{\sqrt{n+k}\}$.	$ABCDEFG$ – равносторонний выпуклый семиугольник. Известно, что $\angle A = \angle D=168°$ и $\angle B=\angle C=108°$. Найдите $\angle F$.	Найдите все простые p, для которых $6p+1$ – точная пятая степень.
50	Найдите все такие пары функций $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что $f(x+f(y))=\{y\}+g(x)$	Дан треугольник ABC, в котором $AC = 3$, $\angle B = 60°$. Обозначим за N точку касания вневписанной окружности, касающейся стороны BC, с продолжением стороны AC. Известно, что центр вписанной окружности треугольника ABC, середина стороны AB и точка N лежат на одной прямой. Найдите, чему равна сторона AB.	Решите в натуральных числах уравнение $7^x+13^y=2^z$
60	Пусть $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = x_n + \left[\dfrac{x_n}{n}\right] + 2$ для $n\ge 1$. Вычислить x_{2017}.	Вершины куба с ребром 1 образуют 8 правильных треугольников. Плоскости, в которых лежат эти треугольники, разбивают куб на части. Найдите объём части, содержащей центр.	Найдите все натуральные n, для которых все делители числа 30^n можно разбить на группы по 3 числа, произведения чисел в которых одинаковы.

АБАКА–СЕНЬОРЫ

Ответ считается верным, если найдены ВСЕ правильные варианты и нет ни одного лишнего

	Алгебра	**Комби**	**Разные задачи**
10	Вершина A треугольника ABC совпадает с вершиной параболы $y=x^2$, а точки B и C лежат на параболе так, что отрезок BC параллелен оси OX. Площадь треугольника ABC равна 64. Найдите длину BC .	Автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000000 до 999999. Билет называется призовым, если в нем есть две подряд идущие цифры, отличающиеся ровно на 5. Сколько существует призовых билетов?	Сколько существует упорядоченных троек (a, b, c) натуральных чисел, не превосходящих 17, таких, что обе разности $b–a$ и $c–b$ больше 3,и хотя бы одна из них равна 4?
20	Последовательность целых чисел $\{a_n\}$ задана условиями $a_1=2016$, $a_{n-1}+\frac{a_n}{2}=n^2–n+1$ при $n\geq1$. Найдите a_{100}.	На доске 13×13 расставлены 13 не бьющих друг друга ладей. При каком наименьшем k в любом квадрате $k\times k$ заведомо найдется хотя бы одна ладья?	Маша хочет заполнить клетки таблицы 2×3 крестиками и ноликами так, чтобы эта таблица разрезалась на три доминошки: одну с двумя крестиками, одну с двумя ноликами и одну с крестиком и ноликом. Сколькими способами это можно сделать?
30	Для некоторого N в выражении $(a+b+c+d+1)^N$ открыли скобки и привели подобные слагаемые. Полученное выражение содержало ровно 1001 одночленов. Найдите N.	Сколькими способами можно отметить 5 рёбер в полном графе на 6 вершинах так чтобы отмеченные рёбра не образовали ни одного треугольника?	Множество X состоит из $n>3$ чисел. Оказалось, что для любых разных a, $b\in X$ можно подобрать такое $c\in X$ (отличное от a и b), что среднее арифметическое a, b и c также лежит в X. При каком наименьшем n это возможно?
40	Какую длину может иметь сторона равностороннего треугольника на координатной плоскости, у которого координаты всех вершин удовлетворяют равенству $x^3+3xy+y^3=1$?	В компании из 20 человек некоторые знакомы друг с другом. Оказалось, что среди любых 13 человек этой компании число пар знакомых одно и то же. Сколько всего пар знакомых может быть во всей компании?	Квадрат со стороной $2\sqrt{2}$ и окружность радиуса 3 имеют общий центр. Какое наибольшее значение может иметь произведение расстояний от точки окружности до четырёх вершин квадрата?
50	Последовательность (a_n) задана такими условиями: $a_1=0$, $a_2=1$, $a_p=a_{p+1}+1$ при нечётных простых p, а для составных n $a_n=1+a_d$, где d -- наибольший делитель n, отличный от n. Найдите наибольшее a_n при $n<100$.	В однокруговом турнире участвовали $2n$ команд. После окончания турнира оказалось, что у каждой команды число ничьих равно числу побед. При каких n такое возможно?	Папа задумал угол α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, и написал на трёх карточках значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$ (на каждой карточке -- одно). Карточки он раздал по одной Маше, Тане и Серёже и попросил определить, кому досталось значение какой тригонометрической функции. Когда папа отвернулся, дети сказали друг другу, какие числа у них на карточках, но даже после этого свою функцию смогла определить только Маша. Что могло быть написано у неё на карточке?
60	Вещественные числа b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 – коэффициенты в тождестве $x^6– x^5+x^4 – x^3+x^2– x+1 = (x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)(x^2+b_3x+c_3)$. Найдите $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3$.	2017 школьников участвовали в олимпиаде с двумя турами. Каждый школьник мог выбрать один из двух туров или принять участие в обоих. На каждом туре участники получали целое число баллов от 0 до 40. Оказалось, что средний балл всех работ равен 20. Результатом школьника считается балл его работы, если он участвовал в одном туре, и лучший из двух баллов, если в обоих. Средний результат всех школьников равен 14. Какое наименьшее количество участников могло участвовать в обоих турах?	Натуральные числа $a<b<c<d$ таковы, что каждые три из них – стороны тупоугольного треугольника. При каком наименьшем d это возможно?

Ответы СЕНЬОРЫ

	Целые и дробные	***Геометрия***	***Числа***	***Алгебра***	***Комби***	***Разные задачи***
10	5 раз	$\sqrt{2}$	997	8	409510	81
20	1	24°	8	7986	7	18
30	661650	80°	n=1, p=2	14	1773	5
40	n - точные квадраты	132°	2801	$\sqrt{6}$	190	97
50	Таких не существует	1+$\sqrt{6}$	x=3, y=2, z=9	12	$N = 3k$, $N = 3k+2$.	1 и $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
60	24173	$\frac{1}{6}$	N=6k+2	–1	606	14.

Ответы СЕНЬОРЫ

	Целые и дробные	***Геометрия***	***Числа***	***Алгебра***	***Комби***	***Разные задачи***
10	5 раз	$\sqrt{2}$	997	8	409510	81
20	1	24°	8	7986	7	18
30	661650	80°	n=1, p=2	14	1773	5
40	n - точные квадраты	132°	2801	$\sqrt{6}$	190 (0 и 190 тоже засчитывать)	97
50	Таких не существует	1+$\sqrt{6}$	x=3, y=2, z=9	12	$N = 3k$, $N = 3k+2$.	1 и $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
60	24173	$\frac{1}{6}$	N=6k+2	–1	606	14.