XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Старшая группа, высшая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?*

Ответ: Нет. Решение. Если стороны треугольника имеют целочисленные длины и одна из этих длин равна 1, то две другие стороны должны быть равны, иначе нарушится неравенство треугольника. Но тогда получается, что если сторона AB шестиугольника $ABCDEF$ равна 1, то оба треугольника ADB и AEB — равнобедренные с основанием AB. Но тогда обе вершины D и E лежат на серединном перпендикуляре к AB, и шестиугольник — невыпуклый.

Задача 2. *Параллельные прямые разбивают плоскость на одинаковые полосы ширины 1. Каждая полоса целиком покрашена в красный или синий цвет (точки на прямых, разделяющих полосы, не покрашены). Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 100, все вершины которого покрашены в один цвет.*

Решение. Разместим одну из сторон равностороннего треугольника со стороной 100, на прямой, разделяющей красную и синюю полосы. Пусть для определённости к этой стороне изнутри треугольника примыкает красная полоса. Третья вершина треугольника не может также лежать на разделяющей полосы линии, потому что у равностороннего треугольника с целочисленной стороной высота — не целое число. Если третья вершина уже в красной полосе — сдвинем наш треугольник вверх на расстояние, меньшее расстояния от третьей вершины треугольника до верхней границы той красной полосы, где она лежит. Если же третья вершина лежит в синей полосе, сдвинем наш треугольник вниз на расстояние, меньшее расстояния от третьей вершины треугольника до нижней границы той полосы, где она лежит. В обоих случаях получим треугольник с одноцветными вершинами.

Задача 3. *Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбраны 660 чисел. Докажите, что из этих 660 чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).*

Решение. Если среди выбранных чисел есть числа a и b, делящиеся на простое число p, и число c, не делящееся на p, они нам подойдут. Поэтому если есть 660 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, то для каждого простого p либо все они делятся на p, либо делится на p не более одного из них. При этом первое возможно только при $p = 2$ или $p = 3$, ибо уже $2008/5 < 660$. Итак, для каждого простого p, большего 2, среди 660 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, не более одного, делящегося на p. Но $p > 5$ может быть простым только если при делении на 30 оно даёт остаток, не делящийся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Таких остатков 8: это 1 и все простые числа от 7 до 29. Поэтому простых чисел, больших 3 и меньших 2008, не больше, чем $1+8\cdot2010/30 = 537$. Таким образом, чисел, имеющих простые делители, большие 2 и 3, среди выбранных не более, чем 537. Поскольку $2^{11} > 2008$ и $3^7 > 2008$, чисел, меньших 2008 и делящихся только на 2 и 3, не более, чем $7\cdot11 = 77$. Но $537+77 < 660$ — противоречие.

♦ Оценка, большая 660, но меньшая 700 — 2 балла.

Задача 4. *В левом нижнем углу доски $2\times n$ лежит 2^{n+1} конфет. Каждую минуту Вася находит две конфеты, лежащие в одной клетке, и перекладывает одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую конфету съедает. Докажите, что вне зависимости от порядка действий Василия рано или поздно хотя бы одна конфета окажется в правом верхнем углу.*

Решение. Разобьём доску на диагонали, идущие слева-сверху вправо-вниз, и пронумеруем их слева направо. Первая и (n+1)-ая диагонали будут состоять из одной клетки — левой нижней и правой верхней клеток доски соответственно, — а остальные — из двух клеток каждая. Запишем в каждой из клеток k-ой диагонали число 2^k ($k = 1, \ldots, n+1$). Назовём *энергией* конфеты число, записанное в клетке, где она находится. Легко видеть, что при перекладывании конфеты её энергия увеличивается вдвое, то есть становится равной прежней энергии этой конфеты плюс энергия выкинутой конфеты. Поэтому сумма энергий всех конфет, лежащих на доске, не меняется, то есть остаётся равной исходной суммарной энергии 2^{n+1}.

Пусть Вася не может съесть ни одной конфеты, а правая верхняя клетка пуста. Тогда на каждой из остальных клеток лежит не больше одной конфеты, и их суммарная энергия не больше $1+2\cdot2^1+\ldots+2\cdot2^{n-1} = 2^{n+1}-1$. А должна она равняться 2^{n+1}. Противоречие.

Задача 5. *Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.*

Решение. Пусть при разбиении на 200 квадратов в короткой стороне прямоугольника уложилось a квадратов, а в длинной — b квадратов, а разбиении на 288 квадратов — c и d квадратов соответственно. Тогда $ab = 200 = 2^3\cdot5^2$, а $cd = 288 = 2^5\cdot3^2$, и при этом $b/a = d/c$. Чтобы последнее равенство выполнялось, в числителях и знаменателях дробей $b/a = d/c$ после сокращения не должно быть ни пятёрок, ни троек. Заметим теперь, что $392 = 2^3\cdot7^2$. Поэтому, заменив в разложениях чисел a и b на простые множители все пятёрки семёрками, мы получим такие натуральные числа e и f, что $ef = 392$ и $e/f = b/a = c/d$. Это и означает справедливость утверждения задачи.

Задача 6. *Докажите, что* $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) \ge (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$ *при всех натуральных n.*

Решение. $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) \ge (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right) \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n} \Leftrightarrow \frac{n}{2}+\frac{n}{12}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)2n} \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Но уже $\frac{n}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}$ (n раз) $\ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

Задача 7. *В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, $\angle C = 90°+\angle B/2$, $\angle AMC = 45°$. Найдите углы треугольника ABC.*

Ответ: $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$. Решение. Пусть AK — высота треугольника ABC, а точка X симметрична точке C относительно точки K. Тогда $\angle BXA = \angle ACX = 90°-\angle B/2$. Тогда $\angle BAX = 180°-\angle B-\angle BXA = 90°-\angle B/2$, откуда $AB = BX$. Кроме того, треугольник AKM — прямоугольный равнобедренный, откуда $AK = KM = BX/2 = AB/2$. Следовательно, $\angle B = 30°$, откуда легко находятся $\angle A$ и $\angle C$.

♦ Ответ без обоснования — 0 баллов.

Задача 8. *Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение $2^{2m+1}-n^2$ при натуральных $m > 1$ и n?*

Ответ: 7. Решение. Поскольку $2^5-5^2 = 7$, достаточно показать, что $2^{2m+1}-n^2 \ge 7$ при $m > 1$. Если $n = 2k+1$ нечётно, разность $2^{2m+1}-n^2 = 8\cdot4^{m-1}-4k(k+1)-1$ даёт при делении на 8 остаток 7, то есть не меньше 7. Если $n = 4k+2$, разность $2^{2m+1}-n^2 = 8\cdot4^{m-1}-16k(k+1)-4$ даёт при делении на 16 остаток 12, то есть не меньше 12. Если $n = 4k$, разность $2^{2m+1}-n^2 = 8\cdot4^{m-1}-16k^2$ делится на 16, то есть не меньше 16.

♦ Только ответ — 0 баллов. За доказательство, что $2^{2m+1}-n^2 \ge 4$ — 2 балла.

Старшая группа, первая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?*

Ответ: Нет. Решение. Если стороны треугольника имеют целочисленные длины и одна из этих длин равна 1, то две другие стороны должны быть равны, иначе нарушится неравенство треугольника. Но тогда получается, что если сторона AB шестиугольника $ABCDEF$ равна 1, то оба треугольника ADB и AEB — равнобедренные с основанием AB. Но тогда обе вершины D и E лежат на серединном перпендикуляре к AB, что противоречит выпуклости шестиугольника.

♦ Простейшие свойства выпуклости считаются наглядно очевидными и обоснованию не подлежат.

Задача 2. *Параллельные прямые разбивают плоскость на одинаковые полосы ширины 1. Каждая полоса целиком покрашена в красный или синий цвет (точки на прямых, разделяющих полосы, не покрашены). Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 100, все вершины которого покрашены в один цвет.*

Решение. Разместим одну из сторон равностороннего треугольника со стороной 100, на прямой, разделяющей красную и синюю полосы. Пусть для определённости к этой стороне изнутри треугольника примыкает красная полоса. Третья вершина треугольника не может также лежать на разделяющей полосы линии, потому что у равностороннего треугольника с целочисленной стороной высота — не целое число. Если третья вершина уже в красной полосе — сдвинем наш треугольник вверх на расстояние, меньшее расстояния от третьей вершины треугольника до верхней границы той красной полосы, где она лежит. Если же третья вершина лежит в синей полосе, сдвинем наш треугольник вниз на расстояние, меньшее расстояния от третьей вершины треугольника до нижней границы той полосы, где она лежит. В обоих случаях получим треугольник с одноцветными вершинами.

♦ Тот факт, что высота равностороннего треугольника с целочисленной стороной — не целое число — считается известным.

Задача 3. *Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрано 800 чисел. Докажите, что из этих 800 чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).*

Первое решение. Если среди выбранных чисел есть числа a и b, делящиеся на простое число p, и число c, не делящееся на p, они нам подойдут. Поэтому если есть 800 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, то для каждого простого p либо все они делятся на p, либо делится на p не более одного из них. При этом первое возможно только при $p = 2$, ибо уже $2008/3 < 800$. Итак, для каждого простого p, большего 2, среди 800 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, не более одного, делящегося на p. Но $p > 5$ может быть простым только если при делении на 6 оно даёт остаток 1 или 5. Поэтому простых чисел, меньших 2008, не больше, чем $3+2002/3 < 671$. Таким образом, чисел, имеющих простые делители, большие 2, среди выбранных не более, чем 670. Десять степеней двойки, меньших 2008, положения не спасают: $680 < 800$. Противоречие.
Второе решение. Как показано в первом решении, либо все наши числа чётны, либо среди них хотя бы 799 нечётных. Среди чётных чисел от 2 до 2008 есть 334 числа, делящихся на 3, среди нечётных таких чисел 335. В обоих случаях в число выбранных попадут хотя бы два числа, делящихся на 3, и хотя бы одно, не делящееся на 3.

Задача 4. *В Простоквашинской школе 10 классов. Каждый ученик знаком ровно с 7 учениками в каждом из остальных девяти классов. Все знакомства — взаимные: если M знаком с N, то и N знаком с M. Докажите, что во всех классах поровну учеников.*

Решение. Возьмём два любых класса А и Б. Пусть в них a и b учеников соответственно. Допустим, любые двое знакомых обменялись рукопожатием. Тогда ученики класса А сделали $7a$ рукопожатий, а ученик класса Б — $7b$ рукопожатий. Но в каждом рукопожатии участвовал один ученик из класса А и один ученик из класс Б, поэтому $7a = 7b$, откуда $a = b$.

Задача 5. *В некоторых клетках доски $2\times n$ лежат монеты, всего монет 2^n. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.*

Решение. Индукция по n. База (для доски 2×1) очевидна. Переход. Возьмём доску $2\times(n+1)$, на которой лежат 2^{n+1} монет и разделим её на крайнюю левую «доминошку» 2×1 и оставшуюся часть $2\times n$, которую назовём *короткой доской* (КД). Если на КД есть хотя бы 2^n монет, сразу применяем предположение индукции.

Пусть на КД 2^n-k монет, где $2^n > k > 0$. Тогда в «доминошке» их 2^n+k. Будем «перебрасывать» монеты из «доминошки» на КД. Это возможно, пока в «доминошке» есть хотя бы три монеты, поэтому мы сможем перебросить хотя бы $[(2^n+k-1)/2] = 2^{n-1}+[(k-1)/2]$ монет. После этого $2^n > k$, на КД окажется хотя бы $2^n+2^{n-1}+[(k-1)/2]-k$ монет. Поскольку $2^n > k$, $[(k-1)/2]-k \ge k/2-1-k = -k/2-1 \ge -(2^n-1)/2-1 = -2^{n-1}-1/2$, откуда $[(k-1)/2]-k \ge 2^{n-1}$ и $2^n+2^{n-1}+[(k-1)/2]-k \ge 2^n$. Таким образом, на КД не менее 2^n монет, и мы снова можем применить индукционное предположение.

Остался случай, когда все 2^{n+1} монет находятся в «доминошке». Тогда, как легко видеть, не менее 2^n из них можно собрать в верхней её клетке, а оттуда, теряя на каждой новой клетке половину монет, мы сможем прогнать одну монету по верхней горизонтали доски до самого конца.

Задача 6. *Докажите, что* $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) \ge (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$ *при всех натуральных n.*

Решение. $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) \ge (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right) \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{n}{2}+\frac{n}{12}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)2n} \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}$. Но уже $\frac{n}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}$ (n раз) $\ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

Задача 7. *В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC и $\angle C = 90°+\angle B/2$. Докажите, что $\angle AMC < 60°$.*

Решение. Легко найти, что $\angle A = 90°-3\angle B/2$. Поэтому $\angle B < 60°$. Далее, поскольку $\angle C > 90° > \angle B$, $AB > AC$. Следовательно, основание биссектрисы AD угла A лежит ближе к C, чем к B, откуда $\angle CAM > \angle A/2 = 45°-3\angle B/4$. Значит, $\angle AMC = 180°-\angle C-\angle CAM < 180°-90°°-\angle B/2-45°+3\angle B/4 = 45°+\angle B/4 < 45°+60°/4 = 60°$.

Задача 8. *Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение $2^{2m+1}-n^2$ при натуральных $m > 1$ и n?*

Ответ: 7. Решение. Поскольку $2^5-5^2 = 7$, достаточно показать, что $2^{2m+1}-n^2 \ge 7$ при $m > 1$. Если $n = 2k+1$ нечётно, разность $2^{2m+1}-n^2 = 8\cdot4^{m-1}-4k(k+1)-1$ даёт при делении на 8 остаток 7, то есть не меньше 7. Если $n = 4k+2$, разность $2^{2m+1}-n^2 = 8\cdot4^{m-1}-16k(k+1)-4$ даёт при делении на 16 остаток 12, то есть не меньше 12. Если $n = 4k$, разность $2^{2m+1}-n^2 = 8\cdot4^{m-1}-16k^2$ делится на 16, то есть не меньше 16.

♦ Только ответ — 0 баллов. За доказательство, что $2^{2m+1}-n^2 \ge 4$ — 4 балла.

Старшая группа, вторая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?*

Ответ: Нет. Решение. Если стороны треугольника имеют целочисленные длины и одна из этих длин равна 1, то две другие стороны должны быть равны, иначе нарушится неравенство треугольника. Но тогда получается, что если сторона AB шестиугольника $ABCDEF$ равна 1, то оба треугольника ADB и AEB — равнобедренные с основанием AB. Но тогда обе вершины D и E лежат на серединном перпендикуляре к AB, что противоречит выпуклости шестиугольника.

♦ Простейшие свойства выпуклости считаются наглядно очевидными и обоснованию не подлежат.

Задача 2. *На столе лежат кучки спичек. Выбирается произвольная кучка, и из всех кучек, не меньших выбранной (включая саму выбранную), удаляется по столько спичек, сколько было в выбранной кучке. После нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько в ней может быть спичек, если сначала кучки содержат 1, 2, 3, …, 54 спички?*

Решение. Назовём «лесенкой» набор из нескольких кучек, которые можно расположить в ряд так, что в первой кучке 1 спичка, а в каждой следующей на одну спичку больше, чем в предыдущей. Первоначально на столе лежит одна «лесенка». Легко видеть, что если до описанной в условии операции кучки на столе образовывали несколько «лесенок», то это свойство сохранится и после операции. Поэтому если на столе в итоге осталась одна кучка, то она — тоже «лесенка», и, значит, в ней одна спичка.

Задача 3. *Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрано 1010 чисел. Докажите, что из этих 1010 чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).*

Решение. Среди чисел от 1 до 2008 есть 1004 чётных и 1004 нечётных. Поэтому среди любых 1010 выбранных чисел найдутся два чётных числа a и b и нечётное число c. Они подходят.

Задача 4. *В Простоквашинской школе 10 классов. Каждый ученик знаком ровно с одним учеником в каждом из остальных девяти классов. Все знакомства — взаимные: если M знаком с N, то и N знаком с M. Докажите, что во всех классах поровну учеников.*

Решение. Возьмём два любых класса А и Б. Попросим каждого ученика из класса А взять за руку своего знакомого из класса Б. Поскольку каждый ученик из класса Б знаком ровно с одним учеников из класса А, и все знакомства взаимны, все ученики из классов А и Б разобьются на пары держащихся за руки. Но это и означает, что в А и Б поровну учеников.

Задача 5. *В некоторых клетках доски $2\times n$ лежат монеты, всего монет 2^n. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.*

Решение. Индукция по n. База (для доски 2×1) очевидна. Переход. Возьмём доску $2\times(n+1)$, на которой лежат 2^{n+1} монет и разделим её на крайнюю левую «доминошку» 2×1 и оставшуюся часть $2\times n$, которую назовём *короткой доской* (КД). Если на КД есть хотя бы 2^n монет, сразу применяем предположение индукции.

Пусть на КД $2^n–k$ монет, где $2^n > k > 0$. Тогда в «доминошке» их 2^n+k. Будем «перебрасывать» монеты из «доминошки» на КД. Это возможно, пока в «доминошке» есть хотя бы три монеты, поэтому мы сможем перебросить хотя бы $[(2^n+k–1)/2] = 2^{n–1}+[(k–1)/2]$ монет. После этого $2^n > k$, на КД окажется хотя бы $2^n+2^{n–1}+[(k–1)/2]–k$ монет. Поскольку $2^n > k$, $[(k–1)/2]–k \geq k/2–1–k = –k/2–1 \geq –(2^n–1)/2–1 = –2^{n–1}–1/2$, откуда $[(k–1)/2]–k \geq 2^{n–1}$ и $2^n+2^{n–1}+[(k–1)/2]–k \geq 2^n$. Таким образом, на КД не менее 2^n монет, и мы снова можем применить индукционное предположение.

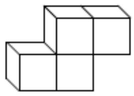
Остался случай, когда все 2^n+1 монет находятся в «доминошке». Тогда, как легко видеть, не менее 2^n из них можно собрать в верхней её клетке, а оттуда, теряя на каждой новой клетке половину монет, мы сможем прогнать одну монету по верхней горизонтали доски до самого конца.

♦ Стандартное неверное решение (стоящее 0 баллов) — потеря последнего случая из нашего решения.

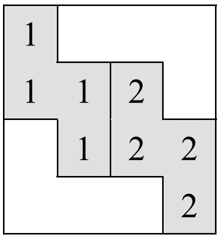
Задача 6. *Докажите, что* $n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)$ *при всех натуральных n.*

Решение. Достаточно раскрыть в обоих частях скобки и сравнить суммы почленно. Неравенство $\frac{n}{k} \geq \frac{n+1}{k+1}$ при всех $n \geq 1$ и $1 \leq k \leq n$ проверяется очевидным образом.

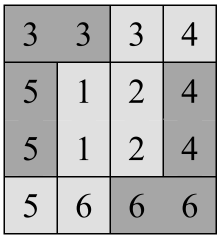
Задача 7. *Можно ли разрезать куб 4×4×4 на блоки из 4 кубиков, изображённые на картинке справа?*



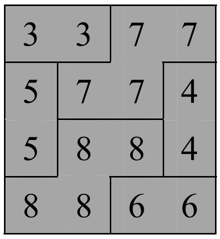
Ответ: Можно. Решение. Покажем, как из восьми таких блоков сложить параллелепипед 2×4×4. Сначала уложим два таких блока, кубики которых отмечены числами 1 и 2, “плашмя” на квадрат 4×4 (рис. A). Затем ещё четыре блока: 3, 4, 5 и 6 наложим на тот же квадрат “ребром” (рис. B). На рисунках указаны только видимые сверху грани кубиков. Более тёмным цветом отмечены клетки, покрытые большим количеством кубиков. Блоки 7 и 8 закрывают второй слой (рис. C). Куб 4×4×4 складывается из двух параллелепипедов 2×4×4.



A



B



C

Задача 8. *Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение* $2^{2m+1}–n^2$ *при натуральных m и n?*

Ответ: 4. Решение. Поскольку $2^3–2^2 = 4$, достаточно показать, что $2^{2m+1}–n^2 \geq 4$. При чётном n это очевидно, поскольку разность положительна и делится на 4. А если $n = 2k+1$ нечётно, разность $2^{2m+1}–n^2 = 8\cdot4^{m–1}–4k(k+1)–1$ даёт при делении на 8 остаток 7, то есть не меньше 7.

♦ Только ответ (даже с примером) — 0 баллов.

Младшая группа, высшая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, $\angle C = 90°+\angle B/2$, $\angle AMC = 45°$. Найдите углы треугольника ABC.*

<u>Ответ</u>: $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$. <u>Решение</u>. Пусть AK — высота треугольника ABC, а точка X симметрична точке C относительно точки K. Тогда $\angle BXA = \angle ACX = 90°-\angle B/2$. Тогда $\angle BAX = 180°-\angle B-\angle BXA = 90°-\angle B/2$, откуда $AB = BX$. Кроме того, треугольник AKM — прямоугольный равнобедренный, откуда $AK = KM = BX/2 = AB/2$. Следовательно, $\angle B = 30°$, откуда легко находятся $\angle A$ и $\angle C$.

♦ Ответ без обоснования — 0 баллов.

Задача 2. *Какое наименьшее натуральное значение может принимать выражение $2^{2m+1}-n^2$ при натуральных m и n?*

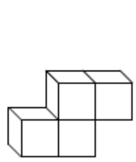
<u>Ответ</u>: 4. <u>Решение</u>. Поскольку $2^3-2^2 = 4$, достаточно показать, что $2^{2m+1}-n^2 \geq 4$. При чётном n это очевидно, поскольку разность положительна и делится на 4. А если $n = 2k+1$ нечётно, разность $2^{2m+1}-n^2 = 8\cdot4^{m-1}-4k(k+1)-1$ даёт при делении на 8 остаток 7, то есть не меньше 7.

♦ Ответ без обоснования — 0 баллов.

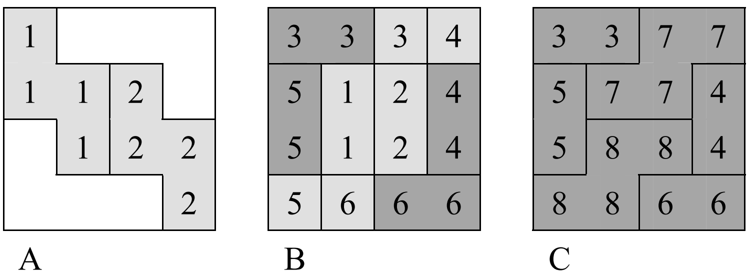
Задача 3. *Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрана тысяча чисел. Докажите, что из этой тысячи чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).*

<u>Первое решение</u>. Если среди выбранных чисел есть числа a и b, делящиеся на простое число p, и число c, не делящееся на p, они нам подойдут. Поэтому если есть 1000 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, то для каждого простого p либо все они делятся на p, либо делится на p не более одного из них. При этом первое возможно только при $p = 2$, ибо уже $2008/3 < 1000$. Итак, для каждого простого p, большего 2, среди 1000 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, не более одного, делящегося на p. Но $p > 5$ может быть простым только если при делении на 6 оно даёт остаток 1 или 5. Поэтому простых чисел, меньших 2008, не больше, чем $3+2002/3 < 671$. Таким образом, чисел, имеющих простые делители, большие 2, среди выбранных не более, чем 670. Десять степеней двойки, меньших 2008, положения не спасают: $680 < 1000$. Противоречие.
<u>Второе решение</u>. Как показано в первом решении, либо все наши числа чётны, либо среди них хотя бы 999 нечётных. Среди чётных чисел от 2 до 2008 есть 334 числа, делящихся на 3, среди нечётных таких чисел 335. В обоих случаях в число выбранных попадут хотя бы два числа, делящихся на 3, и хотя бы одно, не делящееся на 3.

Задача 4. *Можно ли разрезать куб 4×4×4 на блоки из 4 кубиков, изображённые на картинке справа?*



<u>Ответ</u>: Можно. <u>Решение</u>. Покажем, как из восьми таких блоков сложить параллелепипед 2×4×4. Сначала уложим два таких блока, кубики которых отмечены числами 1 и 2, "плашмя" на квадрат 4×4 (рис. A). Затем ещё четыре блока: 3, 4, 5 и 6 наложим на тот же квадрат "ребром" (рис. B). На рисунках указаны только видимые сверху грани кубиков. Более тёмным цветом отмечены клетки, покрытые большим количеством кубиков. Блоки 7 и 8 закрывают второй слой (рис. C). Куб 4×4×4 складывается из двух параллелепипедов 2×4×4.



A B C

Задача 5. *Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 392 равных квадрата.*

Решение. Пусть при разбиении на 200 квадратов в короткой стороне прямоугольника уложилось a квадратов, а в длинной — b квадратов, а разбиении на 288 квадратов — c и d квадратов соответственно. Тогда $ab = 200 = 2^3\cdot 5^2$, а $cd = 288 = 2^5\cdot 3^2$, и при этом $b/a = d/c$. Чтобы последнее равенство выполнялось, в числителях и знаменателях дробей $b/a = d/c$ после сокращения не должно быть ни пятёрок, ни троек. Заметим теперь, что $392 = 2^3\cdot 7^2$. Поэтому, заменив в разложениях чисел a и b на простые множители все пятёрки семёрками, мы получим такие натуральные числа e и f, что $ef = 392$ и $e/f = b/a = c/d$. Это и означает справедливость утверждения задачи.

Задача 6. *Дано натуральное число $n > 1$. Докажите, что* $n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

Решение. $$n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\right) \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{n}{2}+\frac{n}{12}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)2n} \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}$. Но уже $\frac{n}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}$ (n раз) $> \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}$ при всяком $n > 1$.

Задача 7. *В некоторых клетках доски $2\times n$ лежат монеты, всего монет 2^n. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.*

Решение. Индукция по n. База (для доски 2×1) очевидна. Переход. Возьмём доску $2\times(n+1)$, на которой лежат 2^{n+1} монет и разделим её на крайнюю левую «доминошку» 2×1 и оставшуюся часть $2\times n$, которую назовём *короткой доской* (КД). Если на КД есть хотя бы 2^n монет, сразу применяем предположение индукции.

Пусть на КД 2^n-k монет, где $2^n > k > 0$. Тогда в «доминошке» их 2^n+k. Будем «перебрасывать» монеты из «доминошки» на КД. Это возможно, пока в «доминошке» есть хотя бы три монеты, поэтому мы сможем перебросить хотя бы $[(2^n+k-1)/2] = 2^{n-1}+[(k-1)/2]$ монет. После этого $2^n > k$, на КД окажется хотя бы $2^n+2^{n-1}+[(k-1)/2]-k$ монет. Поскольку $2^n > k$, $[(k-1)/2]-k \ge k/2-1-k = -k/2-1 \ge -(2^n-1)/2-1 = -2^{n-1}-1/2$, откуда $[(k-1)/2]-k \ge 2^{n-1}$ и $2^n+2^{n-1}+[(k-1)/2]-k \ge 2^n$. Таким образом, на КД не менее 2^n монет, и мы снова можем применить индукционное предположение.

Остался случай, когда все 2^{n+1} монет находятся в «доминошке». Тогда, как легко видеть, не менее 2^n из них можно собрать в верхней её клетке, а оттуда, теряя на каждой новой клетке половину монет, мы сможем прогнать одну монету по верхней горизонтали доски до самого конца.

Задача 8. *В Простоквашинской школе 10 классов. Каждый ученик знаком ровно с тремя учениками в каждом из остальных девяти классов. Все знакомства — взаимные: если M знаком с N, то и N знаком с M. Докажите, что во всех классах поровну учеников.*

Решение. Возьмём два любых класса А и Б. Пусть в них a и b учеников соответственно. Допустим, любые двое знакомых обменялись рукопожатием. Тогда ученики класса А сделали $3a$ рукопожатий, а ученики класса Б — $3b$ рукопожатий. Но в каждом рукопожатии участвовал один ученик из класса А и один ученик из класса Б, поэтому $3a = 3b$, откуда $a = b$.

Младшая группа, первая лига, 2 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Существует ли выпуклый шестиугольник, в котором одна из сторон равна 1, а все диагонали имеют целочисленную длину?*

Ответ: Нет. Решение. Если стороны треугольника имеют целочисленные длины и одна из этих длин равна 1, то две другие стороны должны быть равны, иначе нарушится неравенство треугольника. Но тогда получается, что если сторона AB шестиугольника $ABCDEF$ равна 1, то оба треугольника ADB и AEB — равнобедренные с основанием AB. Но тогда обе вершины D и E лежат на серединном перпендикуляре к AB, что противоречит выпуклости шестиугольника.

♦ Простейшие свойства выпуклости считаются наглядно очевидными и обоснованию не подлежат.

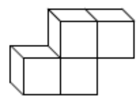
Задача 2. *На столе лежат кучки спичек. Выбирается произвольная кучка, и из всех кучек, не меньших выбранной (включая саму выбранную), удаляется по столько спичек, сколько было в выбранной кучке. После нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько в ней может быть спичек, если сначала кучки содержат 1, 2, 3, …, 54 спички?*

Решение. Назовём «лесенкой» набор из нескольких кучек, которые можно расположить в ряд так, что в первой кучке 1 спичка, а в каждой следующей на одну спичку больше, чем в предыдущей. Первоначально на столе лежит одна «лесенка». Легко видеть, что если до описанной в условии операции кучки на столе образовывали несколько «лесенок», то это свойство сохранится и после операции. Поэтому если на столе в итоге осталась одна кучка, то она — тоже «лесенка», и, значит, в ней одна спичка.

Задача 3. *Из натуральных чисел от 1 до 2008 выбрана тысяча чисел. Докажите, что из этой тысячи чисел можно выбрать 3 различных числа a, b, c таких, что c не делится на НОД(a, b).*

Первое решение. Если среди выбранных чисел есть числа a и b, делящиеся на простое число p, и число c, не делящееся на p, они нам подойдут. Поэтому если есть 1000 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, то для каждого простого p либо все они делятся на p, либо делится на p не более одного из них. При этом первое возможно только при $p = 2$, ибо уже $2008/3 < 1000$. Итак, для каждого простого p, большего 2, среди 1000 чисел, не удовлетворяющих условию задачи, не более одного, делящегося на p. Но $p > 5$ может быть простым только если при делении на 6 оно даёт остаток 1 или 5. Поэтому простых чисел, меньших 2008, не больше, чем $3+2002/3 < 671$. Таким образом, чисел, имеющих простые делители, большие 2, среди выбранных не более, чем 670. Десять степеней двойки, меньших 2008, положения не спасают: $680 < 1000$. Противоречие.
Второе решение. Как показано в первом решении, либо все наши числа чётны, либо среди них хотя бы 999 нечётных. Среди чётных чисел от 2 до 2008 есть 334 числа, делящихся на 3, среди нечётных таких чисел 335. В обоих случаях в число выбранных попадут хотя бы два числа, делящихся на 3, и хотя бы одно, не делящееся на 3.

Задача 4. *Можно ли разрезать куб 4×4×4 на блоки из 4 кубиков, изображённые на картинке справа?*



Ответ: Можно. Решение. Покажем, как из восьми таких блоков сложить параллелепипед 2×4×4. Сначала уложим два таких блока, кубики которых отмечены числами 1 и 2, “плашмя” на квадрат 4×4 (рис. A). Затем ещё четыре блока: 3, 4, 5 и 6 наложим на тот же квадрат “ребром” (рис. B). На рисунках указаны только видимые сверху грани кубиков. Более тёмным цветом отмечены клетки, покрытые большим количеством кубиков. Блоки 7 и 8 закрывают второй слой (рис. C). Куб 4×4×4 складывается из двух параллелепипедов 2×4×4.

1			
1	1	2	
	1	2	2
			2

A

3	3	3	4
5	1	2	4
5	1	2	4
5	6	6	6

B

3	3	7	7
5	7	7	4
5	8	8	4
8	8	6	6

C

Задача 5. *Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Докажите, что его можно разбить прямыми, параллельными сторонам, и на 32 равных квадрата.*

Решение. Пусть при разбиении на 200 квадратов в короткой стороне прямоугольника уложилось a квадратов, а в длинной — b квадратов, а разбиении на 288 квадратов — c и d квадратов соответственно. Тогда $ab = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, а $cd = 288 = 2^5 \cdot 3^2$, и при этом $b/a = d/c$. Чтобы последнее равенство выполнялось, в числителях и знаменателях дробей $b/a = d/c$ после сокращения не должно быть ни пятёрок, не троек. Заметим теперь, что $32 = 2^5$. Поэтому, убрав из разложений чисел c и d на простые множители все пятёрки, мы получим такие натуральные числа e и f, что $ef = 32$ и $e/f = b/a = c/d$. Это и означает справедливость утверждения задачи.

Задача 6. *Дано натуральное число $n > 1$. Докажите, что*

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Решение. Достаточно раскрыть в обоих частях скобки и сравнить суммы почленно. Последние слагаемые будут равны, а при всех $1 \le k < n$ выполнено строгое неравенство $\frac{n}{k} > \frac{n+1}{k+1}$, которое проверяется очевидным образом.

Задача 7. *В некоторых клетках доски 2×3 лежат монеты, всего монет 8. За один ход разрешается взять две монеты, лежащие в одной клетке, и переложить одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую монету выкинуть. Докажите, что такими операциями из любой начальной расстановки монет можно получить расстановку, в которой правая верхняя клетка не пуста.*

Решение. Пусть в правом и среднем столбцах доски есть хотя бы 4 монеты, и ни одна из них не лежит в правой верхней клетке. Если при этом есть хотя бы две монеты в верхней клетке среднего или нижней клетке правого столбца, мы сразу загоняем одну из них в правую верхнюю клетку. В противном случае в нижней клетке среднего столбца хотя бы две монеты. Если при этом в верхней клетке среднего или нижней клетке правого столбца есть хотя бы одна монета, загоняем туда вторую из нижней клетки среднего столбца и получаем уже рассмотренный случай. Если же в нижней клетке среднего столбца все 4 монеты, загоняем две из них в верхнюю клетку среднего столбца и тоже сводим дело к уже рассмотренному случаю.

Пусть в правом и среднем столбцах 3, 2 или 1 монета. Тогда в левом столбце 5, 6 или 7 монет соответственно, и мы сможем перегнать оттуда в средний столбец 2, 2 или 3 монеты соответственно, потому что пока в левом столбце больше 2 монет, найдётся клетка, где монет не меньше двух. Во всех случаях в среднем и правом столбцах после этого окажется не меньше 4 монет, а этот случай мы уже рассмотрели.

Пусть, наконец, все монеты в левом столбце. Тогда, как легко проверить, мы можем добиться, чтобы 4 из них оказались в его верхней клетке. Оттуда мы перегоним две монеты в верхнюю клетку среднего столбца, а из неё одну монету — в верхнюю правую клетку таблицы.

♦ Не исправленная потеря хотя бы одного случая в переборном решении — 0 баллов.

Задача 8. *В Простоквашинской школе 10 классов. Каждый ученик знаком ровно с одним учеником в каждом из остальных девяти классов. Докажите, что во всех классах поровну учеников.*

Решение. Возьмём два любых класса А и Б. Попросим каждого ученика из класса А взять за руку своего знакомого из класса Б. Поскольку каждый ученик из класса Б знаком ровно с одним учеников из класса А, и все знакомства взаимны, все ученики из классов А и Б разобьются на пары держащихся за руки. Но это и означает, что в А и Б поровну учеников.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Лига «Старт», 2 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *На столе лежат кучки спичек. Выбирается произвольная кучка, и из всех кучек, не меньших выбранной (включая саму выбранную), удаляется по столько спичек, сколько было в выбранной кучке. После нескольких таких операций на столе осталась одна кучка. Сколько в ней может быть спичек, если сначала кучки содержат 1, 2, 3, …, 20 спичек?*

Решение. Назовём «лесенкой» набор из нескольких кучек, которые можно расположить в ряд так, что в первой кучке 1 спичка, а в каждой следующей на одну спичку больше, чем в предыдущей. Первоначально на столе лежит одна «лесенка». Легко видеть, что если до описанной в условии операции кучки на столе образовывали несколько «лесенок», то это свойство сохранится и после операции. Поэтому если на столе в итоге осталась одна кучка, то она — тоже «лесенка», и, значит, в ней одна спичка.

Задача 2. *Ваня учился работать с отрицательными числами. Он записал в тетради числа 1, –1, –1, 1, –1, а затем начал писать дальше по следующему правилу: шестое число равно произведению первого и второго, 7-мое – произведению 2-го и 3-го, 8-мое – произведению 3-го и 4-го и так далее. Когда он достиг 2008-го числа, мама позвала его спать. Найдите сумму всех написанных Ваней чисел.*

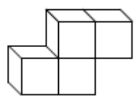
Решение. Продолжая считать произведения, получим последовательность (она написана, начиная с шестого числа до 20-го) –1, 1, –1, –1, 1, –1, –1, 1, –1, –1, 1, –1, –1, 1, –1. Заметим, что последние пять чисел совпадают с началом, следовательно, дальше она будет повторяться каждые 15 чисел. Сумма чисел в периоде равна –5, а полных периодов войдет 133, точнее, 134 периода без двух последних чисел. Следовательно, ответ равен –668.

♦ Арифметические ошибки при верно замеченной периодичности — дыра в 4 балла.

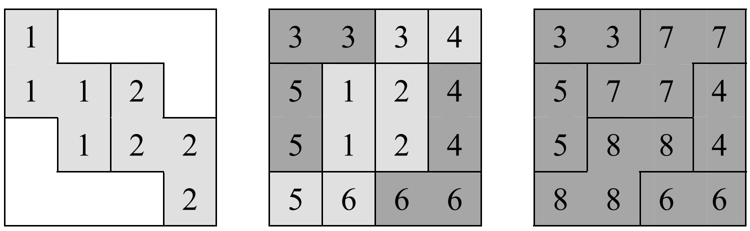
Задача 3. *В разложение натурального числа, меньшего 1200, на простые множители входит ровно 9 сомножителей, причём среди сомножителей есть хотя бы два различных. Докажите, что это число делится на 24.*

Решение. Заметим, что простые числа, большие 3, в разложение данного числа входить не могут, потому что даже $5\cdot 2^8 = 1280 > 1200$. Значит, это число раскладывается в произведение девяти двоек и троек, при этом троек не больше двух, так как $3^3\cdot 2^6 = 1728$. Следовательно, в нём не менее трёх двоек (и даже не меньше шести!)

Задача 4. *Можно ли разрезать куб 4×4×4 на блоки из 4 кубиков, изображённых на картинке справа?*



Ответ: Можно. Решение. Покажем, как из восьми таких блоков сложить параллелепипед 2×4×4. Сначала уложим два таких блока, кубики которых отмечены числами 1 и 2, “плашмя” на квадрат 4×4 (рис. A). Затем ещё четыре блока: 3, 4, 5 и 6 наложим на тот же квадрат “ребром” (рис. B). На рисунках указаны только видимые сверху грани кубиков. Более тёмным цветом отмечены клетки, покрытые большим количеством кубиков. Блоки 7 и 8 закрывают второй слой (рис. C). Куб 4×4×4 складывается из двух параллелепипедов 2×4×4.

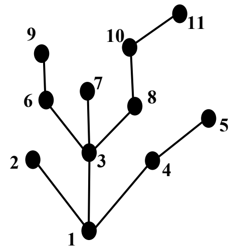


A B C

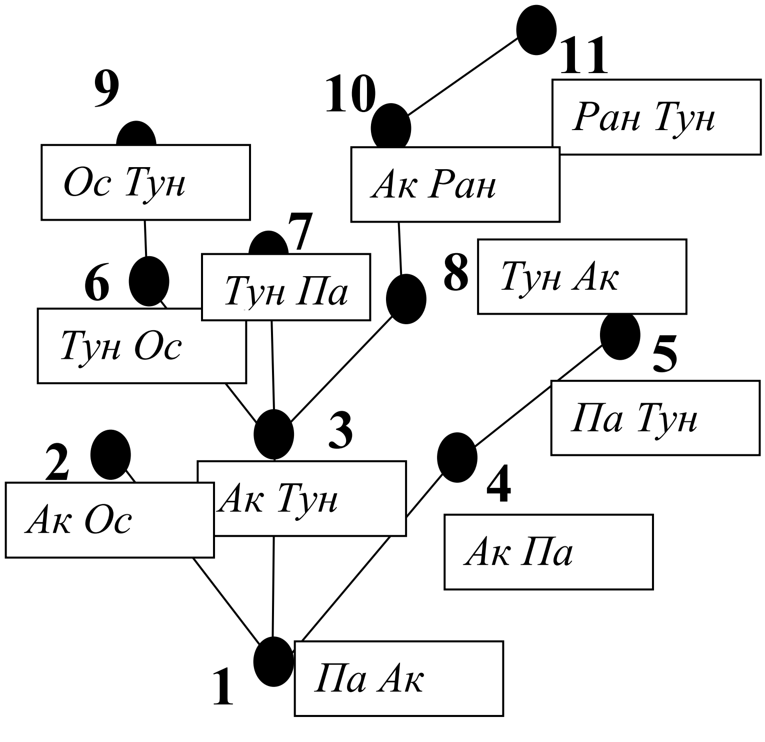
Задача 5. *Прямоугольник можно разбить линиями, параллельными сторонам, как на 200, так и на 288 равных квадратов. Обязательно ли одна сторона прямоугольника в два раза больше другой?*

Решение. Нет, не обязательно. Например, подходит прямоугольник 1×8. Чтобы получить 200 квадратов, надо Разделить его меньшую сторону на 5 отрезков, тогда на большей стороне вместится 40 таких отрезков. Если же мы разделим меньшую сторону на 6 отрезков, а большую – на 48, то получим разбиение на 288 квадратов.

Задача 6. В *языке племени Мумба-Румба нет фамилий, а вместо фамилии используется имя отца. Исследователь Африки Ливингстон записал имена 12 мужчин, являющихся кровными родственниками. Вот эти имена в алфавитном порядке: Ак Ос, Ак Па, Ак Ран, Ак Тун, Ос Тун, Па Ак, Па Тун, Ран Тун, Тун Ак, Тун Ос, Тун Па. Кроме того, он нарисовал их генеалогическое древо, но забыл, кто кому приходится отцом, дедом и так далее. Помогите ему восстановить информацию (найдите все варианты и докажите, что других нет). (Номера на рисунке не соответствуют списку)*



Решение. У вершин 1 и 3 есть по три потомка, поэтому их имена должны встречаться каждое минимум по три раза. Этому удовлетворяют первые части (там есть Ак и Тун), но не удовлетворяют вторые, поэтому имена отцов пишутся вначале. Рассмотрим первый случай. Пусть 1 зовут Тун, 3 – Ак. Тогда 2 – Тун Па, 3 – Тун Ос, 5 – Ос Тун. После этого 7 – Ак Ос, а у 6 и 8 должны быть свои потомки. Если написать туда Ак Туна, то у Туна больше нет потомков. Следовательно, одна ветка Ак Па и Па Тун, другая Ак Ран и Ран Тун, но тогда нет кандидата на 11. Рассмотрим второй случай. Пусть теперь 1 зовут Ак (точнее, Па Ак), 3 – Ак Тун. Дети Туна – Тун Ос, Тун Ак и Тун Па, при этом только у Ака может быть внук. Поэтому Тун Ак – номер 8. На ветках 6-9, 10-11 и 4-5 должны находиться Ран и его сын Тун, Па и его сын Тун и Ос с сыном Туном. В зависимости от их выбора на оставшиеся места 2 и 7 люди восстанавливаются однозначно. Всего имеется 4 варианта решения. Один из них приведен на рисунке.



♦ Доказательство, что имя отца стоит впереди — 4 балла. Если не разобран полностью один из двух основных случаев — дыра в 6 баллов, и задача не решена. Если в переборе второго случая упущены один из 4 ответов – дыра 2 балла, если упущены два или три ответа – дыра 4 балла.

Задача 7. *Жители острова рыцарей (которые всегда говорят правду) и лжецов (которые всегда лгут) встали в хоровод, при этом некоторые из них знакомы, а некоторые – нет. Каждый сказал своему левому соседу: «Я знаю, кто ты и знаю, что ты лжец». Докажите, что лжецов в круге не меньше половины.*

Решение. Заметим, что слева от каждого рыцаря стоит лжец. Кто стоит слева от рыцаря, неизвестно, но это и неважно, так как каждому рыцарю соответствует его левый сосед-лжец, поэтому лжецов не меньше, чем рыцарей.

Задача 8. *Можно ли найти 10 последовательных натуральных чисел и поставить их вместо звёздочек в выражения *–* = 2, *–* = 3, *–* = 4, *–* = 5, *–* = 6 так, чтобы получились пять верных равенств? Каждое из 10 чисел должно быть использовано ровно один раз.*

Ответ: Нельзя. Решение. Там, где разность чётная, вычитаемое и уменьшаемое — одной чётности, где нечётная — разной. Среди 6 чисел, образующих три пары одной чётности, есть либо 4 чётных числа, либо 4 нечётных, а среди 4 чисел, образующих две пары разной чётности, чётных и нечётных чисел по 2. В первом случае среди 10 выбранных нами чисел должно быть 6 чётных, во втором — 6 нечётных, а на самом деле их и тех, и других по пять.