Старшая группа, высшая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Из чисел 1, 2, …, 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.*

Решение. Допустим противное. Тогда само число $169 = 13^2$ не выбрано, а из каждой из 84 пар чисел от 1 до 168, дающих в сумме 169: 1, 168; 2, 167; …, 84, 85 — выбрано ровно по одному числу. В частности, выбрано одно из чисел пары 25, 144. Но оба эти числа — квадраты. Противоречие.

Задача 2. *На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).*

Ответ: Нет. Решение. В качестве прямой возьмём числовую ось. Отрезки [0; 1], [0; 2], …, [0; 50] занумеруем числами 1, 3, …, 99, а отрезки [1; 51], [2; 51], …, [50; 51] — числами 2, 4, …, 100 соответственно. Нетрудно проверить, что каждая точка покрыта не более, чем 51 из данных отрезков.

Задача 3. *Докажите, что если* $x+y = 1$, *то* $|(x^3-1)(y^3-1)| \geq 3xy$.

Решение. Если $x+y = 1$, то $1 = (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y) = x^3+y^3+3xy$, откуда $x^3+y^3 = 1-3xy$. Раскрывая скобки в подмодульном выражении, получаем $x^3y^3-(x^3+y^3)+1 = x^3y^3+3xy$, откуда $|(x^3-1)(y^3-1)| = |xy||\,x^2y^2+3| \geq 3|xy| \geq 3xy$.

Задача 4. *Точка E лежит на отрезке AC. Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и CDE с прямыми углами в вершине C лежат по разные стороны от прямой AC. Точки P, Q, R, S — середины отрезков AB, BD, DE и EA соответственно. Докажите, что PQRS — квадрат.*

Решение. По теореме о средней линии треугольника отрезки PQ и RS параллельны отрезку AD и равны его половине, а отрезки SP и RQ параллельны отрезку BE и равны его половине. Далее, E — точка пересечения высот треугольника ABD, поскольку $AC \perp BD$ и $DE \perp AB$, откуда $BE \perp AD$. Наконец, $AD = BE$ из равенства прямоугольных треугольников ACD и BCE по двум катетам.

Задача 5. *У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 выписан наибольший нечётный делитель. Каких среди выписанных чисел больше: дающих остаток 1 или дающих остаток 3 при делении на 4?*

Ответ: Дающих остаток 1. Решение. Назовём числа, дающие при делении на 4 остаток 1, *белыми*, а дающие остаток 3 — *чётными*. Среди нечётных чисел белые чередуются с чёрными, причём начинается чередование с белого числа 1. Поэтому на любом отрезке ряда нечётных чисел, начинающемся с 1, белых и чёрных чисел поровну, если общее их количество чётно, и белых на одно больше, если оно нечётно. На отрезке от 1 до 999 999 — 500 000 чисел, так что тут белых и чёрных чисел поровну. Возьмём теперь все числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 1. Их наибольшие нечётные делители получатся, если поделить каждое на 2. Эти делители образуют отрезок ряда нечётных чисел от 1 до 499. Тут 250 000 чисел, белых и чёрных снова поровну. Далее возьмём числа, делящиеся на 4, но не делящиеся на 8, поделим каждое на 4 и т.д. Белых и чёрных всё время будет либо поровну, либо на одно больше. В частности, число, делящееся на 2^{19}, ровно одно — само 2^{19}, и его наибольший нечётный делитель 1 — белый. Значит, белых чисел больше.

Задача 6. *Каждая клетка первого ряда таблицы 2×200 окрашена в один из четырех цветов таким образом, что никакие две одноцветные клетки не имеют общей стороны. Докажите, что каждую клетку второго ряда можно окрасить в один из тех же четырех цветов таким образом, что по-прежнему никакие две одноцветные клетки не будут иметь общей стороны, а во всей таблице окажется ровно по 100 клеток каждого из цветов.*

Решение. Две левые нижние клетки таблицы окрасим в два цвета, отсутствующие в двух клетках над ними. Далее будем красить нижние клетки слева направо, окрашивая каждую очередную в цвет, которого нет в трёх клетках, граничащих с ней сверху, слева и слева-сверху. Тогда в каждом квадрате 2×2, содержащемся в таблице, все клетки будут разных цветов. Разбивая таблицу на 100 квадратов 2×2, убеждаемся, что клеток всех четырёх цветов в ней поровну.

Задача 7. *В графе 34 вершины, степень каждой не менее 4, и для каждой вершины есть еще ровно одна вершина той же степени. Докажите, что в этом графе есть три вершины, попарно соединенные ребрами.*

Решение. Пусть $4 \leq a_1 < a_2... < a_{17}$ — различные степени вершин этого графа. Тогда $a_{12} \geq 15$. Пусть A — множество всех вершин, степени которых не менее 15. Тогда вершины степеней $a_{12},..., a_{17}$ точно принадлежат A, то есть, в A не менее 12 вершин.

Предположим, что в нашем графе нет треугольника и докажем, что тогда между вершинами множества A нет ни одного ребра. Для этого отметим очевидный факт: если u и v — две смежные вершины графа G на n вершинах, и сумма степеней a и b не менее n+1, то u и v имеют общую смежную вершину, следовательно, в графе есть треугольник. Отсюда сразу же следует, что вершины степени 20 и более не смежны с другими вершинами множества A (так как 20+15 = 34+1). Теперь уберем из нашего графа все вершины степени 20 и более, таких вершин хотя бы две. Останется не более 32 вершин, а 18+15 = 33 = 32+1, следовательно, вершины степени 18 и 19 также не смежны с другими вершинами из A. Уберем теперь из графа все вершины степени не менее 18, останется не более 28 вершин. Так как 15+15 = 30 > 28+1, то оставшиеся вершины множества A также не смежны друг с другом.

Таким образом, все ребра из вершин множества A выходят к остальным вершинам графа. Сумма степеней вершин из A не менее $2(a_{12}+...+a_{17}) \geq 210$. А сумма степеней остальных вершин не более $2\cdot(4+5+...+14) = 198 < 210$, противоречие. Следовательно, треугольник в графе есть.

Задача 8. *На диагонали AC параллелограмма ABCD выбраны точки X и Y. Прямая, параллельная AB, проходящая через X, пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, параллельная BC, проходящая через Y, пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Докажите, что треугольники XRS и YPQ равновелики.*

Решение. Пусть O — точка пересечения PQ и RS. С помощью теоремы Фалеса нетрудно показать, что $OX/OY = PQ/RS$. Опуская из точек X и Y высоты XZ и YT на RS и PQ соответственно, из подобия треугольников XOZ и YOT получаем пропорцию $XZ/YT = OX/OY = PQ/RS$, откуда $2S_{XRS} = XZ\cdot RS = YT\cdot PQ = 2S_{YPQ}$.

Старшая группа, первая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Из чисел 1, 2, …, 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.*

Решение. Допустим противное. Тогда само число $169 = 13^2$ не выбрано, а из каждой из 84 пар чисел от 1 до 168, дающих в сумме 169: 1, 168; 2, 167; …, 84, 85 — выбрано ровно по одному числу. В частности, выбрано одно из чисел пары 25, 144. Но оба эти числа — квадраты. Противоречие.

Задача 2. *На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).*

Ответ: Нет. Решение. В качестве прямой возьмём числовую ось. Отрезки [0; 1], [0; 2], [0; 3], [0; 4], [0; 5] занумеруем числами 1, 3, 5, 7 и 9, а отрезки [1; 6], [2; 6], [3; 6], [4; 6], [5; 6] — числами 2, 4, 6, 8 и 10 соответственно. Нетрудно проверить, что каждая точка покрыта не более, чем шестью из данных отрезков.

Задача 3. *Сумма положительных чисел x и y равна 1. Докажите, что* $(1–x^3)(1–y^3) \ge 2xy$.

Решение. $(1-x^3)(1-y^3) = (1-x)(1-y)(x^2+x+1)(y^2+y+1) = yx(x^2+x+1)(y^2+y+1) \ge yx(x+1)(y+1) = yx(xy+x+y+1) =$

$= xy(xy+2) \ge 2xy$.

Задача 4. *Точка E лежит на отрезке AC. Равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и CDE с прямыми углами в вершине C лежат по разные стороны от прямой AC. Точки P, Q, R, S — середины отрезков AB, BD, DE и EA соответственно. Докажите, что PQRS — квадрат.*

Решение. По теореме о средней линии треугольника отрезки PQ и RS параллельны отрезку AD и равны его половине, а отрезки SP и RQ параллельны отрезку BE и равны его половине. Далее, E — точка пересечения высот треугольника ABD, поскольку $AC\perp BD$ и $DE\perp AB$, откуда $BE\perp AD$. Наконец, $AD = BE$ из равенства прямоугольных треугольников ACD и BCE по двум катетам.

Задача 5. *У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 выписан наибольший нечётный делитель. Каких среди выписанных чисел больше: дающих остаток 1 или дающих остаток 3 при делении на 4?*

Ответ: Дающих остаток 1. Решение. Назовём числа, дающие при делении на 4 остаток 1, *белыми*, а дающие остаток 3 — *чётными*. Среди нечётных чисел белые чередуются с чёрными, причём начинается чередование с белого числа 1. Поэтому на любом отрезке ряда нечётных чисел, начинающемся с 1, белых и чёрных чисел поровну, если общее их количество чётно, и белых на одно больше, если оно нечётно. На отрезке от 1 до 999 999 — 500 000 чисел, так что тут белых и чёрных чисел поровну. Возьмём теперь все числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 1. Их наибольшие нечётные делители получатся, если поделить каждое на 2. Эти делители образуют отрезок ряда нечётных чисел от 1 до 499. Тут 250 000 чисел, белых и чёрных снова поровну. Далее возьмём числа, делящиеся на 4, но не делящиеся на 8, поделим каждое на 4 и т.д. Белых и чёрных всё время будет либо поровну, либо на одно больше. В частности, число, делящееся на 2^{19}, ровно одно — само 2^{19}, и его наибольший нечётный делитель 1 — белый. Значит, белых чисел больше.

Задача 6. *Каждая клетка первого ряда таблицы 2×200 окрашена в один из четырех цветов таким образом, что никакие две одноцветные клетки не имеют общей стороны. Докажите, что каждую клетку второго ряда можно окрасить в один из тех же четырех цветов таким образом, что по-прежнему никакие две одноцветные клетки не будут иметь общей стороны, а во всей таблице окажется ровно по 100 клеток каждого из цветов.*

Решение. Две левые нижние клетки таблицы окрасим в два цвета, отсутствующие в двух клетках над ними. Далее, разобьем таблицу на 100 квадратов со стороной 2. Будем добиваться того, чтобы в каждом из этих квадратов были клетки четырех разных цветов. Для самого левого квадрата это выполнено. Допустим, это выполнено для самых левых нескольких квадратов. Добьемся, что это будет выполнено и для следующего квадрата. Для этого его левый нижний угол окрасим в цвет, отличающийся от цвета клеток слева, сверху и справа-сверху. Правый нижний угол этого квадрата окрасим в цвет, отличающийся от цвета клеток слева, сверху и слева-сверху. Таким образом можно окрасить все квадраты, что и даст искомую раскраску.

Задача 7. *В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга, ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей, ..., ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.*

Решение. Предположим противное. Возьмём кружковца, дружащего с 14 другими. Если он дружит с кем-то, у кого больше 7 друзей, то у них найдётся общий друг — противоречие. Но тогда среди его друзей могут быть только семеро, у которых не больше 7 друзей, и ещё шестеро, про число друзей которых в условии ничего не сказано. $6+7 < 14$ — снова противоречие.

Задача 8. *На диагонали AC квадрата ABCD выбраны точки X и Y таким образом, что Y лежит между C и X. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, проходящая через Y параллельно BC, пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Оказалось, что* $\angle RYP = \angle QXS$. *Докажите, что AX = CY.*

Решение. Пусть прямые PQ и RS пересекаются в точке O. Диагональ AC пересекает обе эти прямые под углом в 45°. Поэтому прямоугольный треугольник XOY — равнобедренный, то есть $OX = OY$. Поскольку $\angle RYP = \angle QXS$, равны прямоугольные треугольники OXS и OYP, откуда $OP = OS$ и $XP = OP–OX = OS – OY = YS$. Значит, равны равнобедренные прямоугольные треугольники AXP и CYS, откуда $AX = CY$.

Старшая группа, вторая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Из чисел 1, 2, …, 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.*

Решение. Допустим противное. Тогда само число $169 = 13^2$ не выбрано, а из каждой из 84 пар чисел от 1 до 168, дающих в сумме 169: 1, 168; 2, 167; …, 84, 85 — выбрано ровно по одному числу. В частности, выбрано одно из чисел пары 25, 144. Но оба эти числа — квадраты. Противоречие.

Задача 2. *На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).*

Ответ: Нет. Решение. В качестве прямой возьмём числовую ось. Отрезки [0; 1], [0; 2], [0; 3], [0; 4], [0; 5] занумеруем числами 1, 3, 5, 7 и 9, а отрезки [1; 6], [2; 6], [3; 6], [4; 6], [5; 6] — числами 2, 4, 6, 8 и 10 соответственно. Нетрудно проверить, что каждая точка покрыта не более, чем шестью из данных отрезков.

Задача 3. *Сумма положительных чисел x и y равна 1. Докажите, что* $(1-x^2)(1-y^2) \geq xy$.

Решение. $(1-x^3)(1-y^3) = (1-x)(1-y)(x+1)(y+1) = yx(x+1)(y+1) \geq xy$.

Задача 4. *Каждое натуральное число покрашено в один из двух цветов. Докажите, что какие-то два одноцветных числа отличаются либо на 6, либо на 8.*

Решение. Допустим число 1 — синее. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда 7 — красное, 13 — синее, 19 — красное, 25 — синее. С другой стороны, 9 — красное, 17 — синее, 25 — красное. Противоречие.

Задача 5. *Ваня задумал натуральное число, а учительница разрешила ему прибавлять к имеющемуся числу 1 или делить его на любой его натуральный делитель, отличный от 1. Докажите, что, как бы Ваня ни старался избежать этого, за несколько таких действий у него получится двойка или степень двойки.*

Решение. Назовём *ограничителем* наименьшую степень двойки, большую Ваниного числа. Если Ваня всё время будет только прибавлять 1, у него в конце концов получится число, равное ограничителю. Поэтому ему когда-то придётся поделить число на делитель, отличный от 1. Но тогда, поскольку этот делитель не меньше 2, и ограничитель уменьшится вдвое. Рано или поздно ограничитель станет равен 2, а у Вани будет 1. Он прибавит 1 и получит 2.

Задача 6. *Даны n куч камней: в первой куче 1 камень, во второй — 2, в третей — три, …, в n-й — n камней. За один ход разрешается взять любые три кучи, объединить их в одну, после чего добавить к получившейся куче еще один новый камень. Через несколько таких операций осталась всего одна куча. Докажите, что количество камней в этой куче не делится на 3.*

Решение. После каждой операции число куч уменьшается на 2, а общее число камней увеличивается на 1. Поскольку через несколько операций осталась одна куча, число n нечётно: $n = 2k+1$. Тогда вначале камней было $(2k+1)(k+1) = 2k^2+3k+1$, а в итоге стало $2k^2+4k+1$. Легко проверить, что $2k^2+4k+1$ при делении на 3 даёт остаток 1, если k при делении на 3 даёт остатки 0 или 1 и остаток 2, если k при делении на 3 даёт остаток 2.

Задача 7. *Запасы нефти к началу XX века составляли 20 млрд баррелей. Человечество тратит не менее 50 млн баррелей в год. До начала 2000 года истрачено 10 млрд баррелей, с середины XX века по конец 2008 года — тоже 10 млрд баррелей. Докажите, что при сохранении средних темпов расходования, сложившихся в период 2000 – 2008 гг., нефть закончится не позднее 2036 года.*

Решение. Из условия ясно, что за 2000–2008 годы нефти израсходовали столько же, сколько за первую половину XX века. Это не меньше, чем $50 \cdot 50\,000\,000 = 2{,}5$ млрд. баррелей. Осталось к началу 2000 года 10 млрд. баррелей. Осталось к началу 2009 года не больше 7,5 млрд. баррелей. При сохранении средних темпов расходования, сложившихся за 9 лет с 2000 по 2008 годы, их хватит не больше, чем на $(7{,}5:2{,}5)\cdot 9 = 27$ лет, то есть, в лучшем случае, до конца $2008+27 = 2035$ года, что и требовалось доказать.

Задача 8. *На диагонали AC квадрата ABCD выбраны точки X и Y таким образом, что Y лежит между C и X. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, проходящая через Y параллельно BC, пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Оказалось, что* $\angle RYP = \angle QXS$. *Докажите, что* $AX = CY$.

Решение. Пусть прямые PQ и RS пересекаются в точке O. Диагональ AC пересекает обе эти прямые под углом в 45°. Поэтому прямоугольный треугольник XOY — равнобедренный, то есть $OX = OY$. Поскольку $\angle RYP = \angle QXS$, равны прямоугольные треугольники OXS и OYP, откуда $OP = OS$ и $XP = OP-OX = OS - OY = YS$. Значит, равны равнобедренные прямоугольные треугольники AXP и CYS, откуда $AX = CY$.

Младшая группа, высшая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Из чисел 1, 2, …, 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.*

Решение. Допустим противное. Тогда само число $169 = 13^2$ не выбрано, а из каждой из 84 пар чисел от 1 до 168, дающих в сумме 169: 1, 168; 2, 167; …, 84, 85 — выбрано ровно по одному числу. В частности, выбрано одно из чисел пары 25, 144. Но оба эти числа — квадраты. Противоречие.

Задача 2. *На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).*

Ответ: Нет. Решение. В качестве прямой возьмём числовую ось. Отрезки [0; 1], [0; 2], [0; 3], [0; 4], [0; 5] занумеруем числами 1, 3, 5, 7 и 9, а отрезки [1; 6], [2; 6], [3; 6], [4; 6], [5; 6] — числами 2, 4, 6, 8 и 10 соответственно. Нетрудно проверить, что каждая точка покрыта не более, чем шестью из данных отрезков.

Задача 3. *В компании 34 человека, причем ровно двое имеют по четыре знакомых, ровно двое — по пять знакомых, …, ровно двое имеют по 20 знакомых. Докажите, что в этой компании найдутся трое попарно знакомых.*

Решение. Рассмотрим граф знакомств. Пусть A — множество всех его вершин, степень которых не меньше 15. Предположим, что в нашем графе нет треугольника и докажем, что тогда между вершинами множества A нет ни одного ребра. Для этого отметим очевидный факт: если u и v — две смежные вершины графа G на n вершинах, и сумма степеней a и b не менее $n+1$, то u и v имеют общую смежную вершину, следовательно, в графе есть треугольник. Отсюда сразу же следует, что вершины степени 20 и более не смежны с другими вершинами множества A (так как $20+15 = 34+1$). Теперь уберем из нашего графа все вершины степени 20 и более, таких вершин хотя бы две. Останется не более 32 вершин, а $18+15 = 33 = 32+1$, следовательно, вершины степени 18 и 19 также не смежны с другими вершинами из A. Уберем теперь из графа все вершины степени не менее 18, останется не более 28 вершин. Так как $15+15 = 30 > 28+1$, то оставшиеся вершины множества A также не смежны друг с другом.

Таким образом, все ребра из вершин множества A выходят к остальным вершинам графа. Сумма степеней вершин из A не менее $2(15+16+17+18+19+20) = 210$. А сумма степеней остальных вершин не более $2\cdot(4+5+...+14) = 198 < 210$, противоречие. Следовательно, треугольник в графе есть.

Задача 4. *В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все натуральные числа так, чтобы любые два натуральных числа, отличающиеся на 12 или 16, были покрашены в разные цвета?*

Ответ: В 3 цвета. Решение. Допустим, можно в 2 цвета. Пусть число 1 — синее, тогда 13 — красное, 25 — синее, 37 — красное, 49 — синее. С другой стороны, 17 — красное, 33 — синее, 49 — красное: противоречие. А в 3 цвета красится так: числа от 1 до 12 — синие, от 13 до 24 — красные, от 25 до 36 — зелёные, а далее каждое n красится в тот же цвет, что и $n–36$.

♦ За оценку — 4 балла, за пример раскраски в 3 цвета — 4 балла.

Задача 5. *У каждого из чисел от 1 до 1 000 000 выписан наибольший нечётный делитель. Каких среди выписанных чисел больше: дающих остаток 1 или дающих остаток 3 при делении на 4?*

Ответ: Дающих остаток 1. Решение. Назовём числа, дающие при делении на 4 остаток 1, *белыми*, а дающие остаток 3 — *чёрными*. Среди нечётных чисел белые чередуются с чёрными, причём начинается чередование с белого числа 1. Поэтому на любом отрезке ряда нечётных чисел, начинающемся с 1, белых и чёрных чисел поровну, если общее их количество чётно, и белых на одно больше, если оно нечётно. На отрезке от 1 до 999 999 — 500 000 чисел, так что тут белых и чёрных чисел поровну. Возьмём теперь все числа, делящиеся на 2, но не делящиеся на 1. Их наибольшие нечётные делители получатся, если поделить каждое на 2. Эти делители образуют отрезок ряда нечётных чисел от 1 до 499. Тут 250 000 чисел, белых и чёрных снова поровну. Далее возьмём числа, делящиеся на 4, но не делящиеся на 8, поделим каждое на 4 и т.д. Белых и чёрных всё время будет либо поровну, либо белых на одно больше. В частности, число, делящееся на 2^{19}, ровно одно — само 2^{19}, и его наибольший нечётный делитель 1 — белый. Значит, белых чисел больше.

Задача 6. *Каждая клетка первого ряда таблицы 2×200 окрашена в один из четырех цветов таким образом, что никакие две одноцветные клетки не имеют общей стороны. Докажите, что каждую клетку второго ряда можно окрасить в один из тех же четырех цветов таким образом, что по-прежнему никакие две одноцветные клетки не будут иметь общей стороны, а во всей таблице окажется ровно по 100 клеток каждого из цветов.*

Решение. Две левые нижние клетки таблицы окрасим в два цвета, отсутствующие в двух клетках над ними. Далее, разобьем таблицу на 100 квадратов со стороной 2. Будем добиваться того, чтобы в каждом из этих квадратов были клетки четырех разных цветов. Для самого левого квадрата это выполнено. Допустим, это выполнено для самых левых нескольких квадратов. Добьемся, что это будет выполнено и для следующего квадрата. Для этого его левый нижний угол окрасим в цвет, отличающийся от цвета клеток слева, сверху и справа-сверху. Правый нижний угол этого квадрата окрасим в цвет, отличающийся от цвета клеток слева, сверху и слева-сверху. Таким образом можно окрасить все квадраты, что и даст искомую раскраску.

Задача 7. *Запасы нефти к началу 1900 года составляли 20 млрд баррелей. Человечество тратит не менее 50 млн баррелей в год. До начала 2000 года истрачено 10 млрд баррелей, с начала 1950 года по конец 2008 года — тоже 10 млрд баррелей. Докажите, что при сохранении средних темпов расходования, сложившихся в период 2000 – 2008 гг., нефть закончится не позднее 2036 года.*

Решение. Из условия ясно, что за 2000–2008 годы нефти израсходовали столько же, сколько за период с начала 1900 по начало 1950 года. Это не меньше, чем $50\cdot 50\,000\,000 = 2{,}5$ млрд. баррелей. Осталось к началу 2000 года 10 млрд. баррелей. Осталось к началу 2009 года не больше 7,5 млрд. баррелей. При сохранении средних темпов расходования, сложившихся за 9 лет с 2000 по 2008 годы, их хватит не больше, чем на $(7{,}5:2{,}5)\cdot 9 = 27$ лет, то есть, в лучшем случае, до конца $2008+27 = 2035$ года, что и требовалось доказать.

Задача 8. *На диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y таким образом, что Y лежит между C и X. Прямая, проходящая через X параллельно AB, пересекает стороны AD и BC в точках P и Q соответственно. Прямая, проходящая через Y параллельно BC, пересекает стороны AB и CD в точках R и S соответственно. Оказалось, что $\angle RYP = \angle QXS$. Докажите, что $AX = CY$.*

Решение. Пусть прямые PQ и RS пересекаются в точке O. Диагональ AC пересекает обе эти прямые под углом в 45°. Поэтому прямоугольный треугольник XOY — равнобедренный, то есть $OX = OY$. Поскольку $\angle RYP = \angle QXS$, равны прямоугольные треугольники OXS и OYP, откуда $OP = OS$ и $XP = OP–OX = OS – OY = YS$. Значит, равны равнобедренные прямоугольные треугольники AXP и CYS, откуда $AX = CY$.

Младшая группа, первая лига, 1 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Из чисел 1, 2, ..., 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.*

Решение. Допустим противное. Тогда само число $169 = 13^2$ не выбрано, а из каждой из 84 пар чисел от 1 до 168, дающих в сумме 169: 1, 168; 2, 167; …, 84, 85 — выбрано ровно по одному числу. В частности, выбрано одно из чисел пары 25, 144. Но оба эти числа — квадраты. Противоречие.

Задача 2. *На прямой расположено 10 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 10 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем семью отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).*

Ответ: Нет. Решение. В качестве прямой возьмём числовую ось. Отрезки [0; 1], [0; 2], [0; 3], [0; 4], [0; 5] занумеруем числами 1, 3, 5, 7 и 9, а отрезки [1; 6], [2; 6], [3; 6], [4; 6], [5; 6] — числами 2, 4, 6, 8 и 10 соответственно. Нетрудно проверить, что каждая точка покрыта не более, чем шестью из данных отрезков.

Задача 3. *Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. На белой клетчатой доске размером 13×12 тот, чей ход, выбирает любую незакрашенную клетку и целиком закрашивает один из четырёх отрезков горизонталей или вертикалей, ведущих от этой клетки на край доски (есть ли там уже закрашенные клетки — неважно). Выигрывает тот, после хода которого доска оказалась закрашена целиком. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник.*

Ответ: Первый. Решение. Первый первым ходом проводит среднюю из 13 вертикалей, а потом делает ходы, центрально симметричные ходам второго.

♦ Докладчик должен не только описать выигрышную стратегию, но и объяснить, почему первый всегда может сделать ход в соответствии с ней. Если стратегия верно описана, но не обоснована — 6 баллов и задача не решена. Внимание: стратегия с вертикальной или горизонтальной *осевой* симметрией неверна!

Задача 4. *В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга, ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей, ..., ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.*

Решение. Предположим противное. Возьмём кружковца, дружащего с 14 другими. Если он дружит с кем-то, у кого больше 7 друзей, то у них найдётся общий друг — противоречие. Но тогда среди его друзей могут быть только семеро, у которых не больше 7 друзей, и ещё шестеро, про число друзей которых в условии ничего не сказано. 6+7 < 14 — снова противоречие.

Задача 5. *Ваня задумал натуральное число, а учительница разрешила ему прибавлять к имеющемуся числу 1 или делить его на 2, если оно чётно. Докажите, что за несколько таких действий у него получится степень двойки, как бы он ни пытался избежать этого.*

Решение. Назовём *ограничителем* наименьшую степень двойки, большую Ваниного числа. Если Ваня всё время будет только прибавлять 1, у него в конце концов получится число, равное ограничителю. Поэтому ему когда-то придётся поделить число на 2. Но тогда и ограничитель уменьшится вдвое. Рано или поздно ограничитель станет равен 2, а у Вани будет 1. Он прибавит 1 и получит 2.

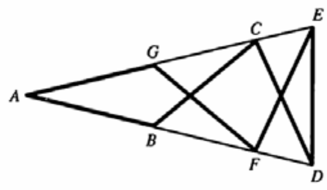
Задача 6. *На шахматной доске стоят несколько ладей. Их раскрашивают так, чтобы ладьи, бьющие друг друга, были раскрашены в разные цвета. Каким наименьшим количеством цветов гарантированно можно обойтись?*

Ответ: Тремя. Решение. Двух цветов не хватит уже для пяти ладей, стоящих на полях *a*1, *a*2, *a*3, *b*3, *b*1 (они образуют цикл длины 5). В три цвета ладьи будем красить слева направо по горизонталям, начиная с первой. Цвет, подходящий для покраски очередной ладьи, всегда можно выбрать, потому что побита не более чем двумя уже покрашенными.

♦ Только оценка или только пример раскраски в 3 цвета — 6 баллов и задача не решена.

Задача 7. *Запасы нефти к началу XX века составляли 20 млрд баррелей. Человечество тратит не менее 50 млн баррелей в год. До начала 2000 года истрачено 10 млрд баррелей, с середины XX века по конец 2008 года — тоже 10 млрд баррелей. Докажите, что при сохранении средних темпов расходования, сложившихся в период 2000 – 2008 гг., нефть закончится не позднее 2036 года.*

Решение. Из условия ясно, что за 2000–2008 годы нефти израсходовали столько же, сколько за первую половину XX века. Это не меньше, чем 50·50 000 000 = 2,5 млрд. баррелей. Осталось к началу 2000 года 10 млрд. баррелей. Осталось к началу 2009 года не больше 7,5 млрд. баррелей. При сохранении средних темпов расходования, сложившихся за 9 лет с 2000 по 2008 годы, их хватит не больше, чем на (7,5:2,5)·9 = 27 лет, то есть, в лучшем случае, до конца 2008+27 = 2035 года, что и требовалось доказать.



Задача 8. *Отрезки AG, GF, FE, ED, DC, CB, BA, изображённые на рисунке, равны. Найдите углы треугольника DAE.*

Ответ: α, 3α, 3α, где $\alpha = 180°/7$. Решение. Пусть $\angle A = \alpha$. Тогда $\angle BCA = \alpha$, $\angle CBD = \angle CDB = 2\alpha$, $\angle BCD = 180° – 4\alpha$, $\angle ACD = 180° – 3\alpha$, $\angle EDA = \angle DCE = \angle DEC = 3\alpha$.

Лига «Старт», 1 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Из чисел 1, 2, …, 169 выбраны 84 числа. Докажите, что либо сумма каких-то двух выбранных чисел равна 169, либо одно из чисел является квадратом натурального числа.*

Решение. Допустим противное. Тогда само число $169 = 13^2$ не выбрано, а из каждой из 84 пар чисел от 1 до 168, дающих в сумме 169: 1, 168; 2, 167; …, 84, 85 — выбрано ровно по одному числу. В частности, выбрано одно из чисел пары 25, 144. Но оба эти числа — квадраты. Противоречие.

Задача 2. *На прямой расположено 6 отрезков, пронумерованных числами от 1 до 6 таким образом, что любые два отрезка с соседними номерами пересекаются, а также любые два отрезка с номерами одной четности пересекаются. Вася утверждает, что тогда непременно какая-то точка покрыта не менее, чем четырьмя отрезками. Прав ли он? (Отрезки, имеющие общий конец, считаем пересекающимися).*

Ответ: Нет. Решение. В качестве прямой возьмём числовую ось. Отрезки [0; 1], [0; 2], [0; 3] занумеруем числами 1, 3, 5, а отрезки [1; 4], [2; 4], [3; 4] — числами 2, 4, 6 соответственно. Нетрудно проверить, что каждая точка покрыта не более, чем тремя из данных отрезков.

Задача 3. *На переправу пришли несколько мальчиков, вес каждого из которых был равен 40 кг, 50 кг или 60 кг, причем мальчиков каждого веса в этой компании было как минимум двое. Они собирались переправиться на другой берег, причем у них была с собой лодка. Какой минимальной грузоподъемности должна быть лодка, чтобы все мальчики сумели переправиться на другой берег?*

Ответ: 80 кг. Решение. Грузоподъёмность лодки должна быть не меньше 80 кг, иначе на тот берег никогда не смогут переправиться двое, и некому будет перегонять лодку назад, чтобы забрать остальных. С помощью лодки грузоподъёмностью 80 кг можно переправить всех следующим образом. двое потом один плывёт назад, потом переправляется любой из оставшихся, второй 40-килограммовый отгоняет лодку назад, потом двое 40-килограммовых снова переправляются и т.д., пока не переправятся все, кроме двух 40-килограммовых, Последним рейсом они переправляются — и вся копания на другом берегу!

Задача 4. *Каждое натуральное число покрашено в один из двух цветов. Докажите, что какие-то два одноцветных числа отличаются либо на 6, либо на 8.*

Решение. Допустим число 1 — синее. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда 7 — красное, 13 — синее, 19 — красное, 25 — синее. С другой стороны, 9 — красное, 17 — синее, 25 — красное. Противоречие.

Задача 5. *Ваня задумал натуральное число, а учительница разрешила ему прибавлять к имеющемуся числу 1 или делить его на 2, если оно чётно. Докажите, что за несколько таких действий у него получится степень двойки, как бы он ни пытался избежать этого.*

Решение. Назовём *ограничителем* наименьшую степень двойки, большую Ваниного числа. Если Ваня всё время будет только прибавлять 1, у него в конце концов получится число, равное ограничителю. Поэтому ему когда-то придётся поделить число на 2. Но тогда и ограничитель уменьшится вдвое. Рано или поздно ограничитель станет равен 2, а у Вани будет 1. Он прибавит 1 и получит 2.

Задача 6. *Шумахер убегает от тигра, кружа вокруг стадиона. За первый час Шумахер обогнал тигра на три круга, после чего увеличил скорость на 1 км/ч, и за второй час обогнал тигра на четыре круга. Найдите длину круга.*

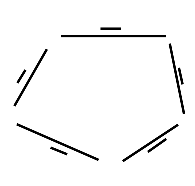
Ответ: 1 км. Решение. Можно считать, что тигра стоит на месте, а Шумахер бежит по кругу со скоростью, равной разности скоростей его и тигра. Тогда получается, что Шумахер за первый час пробежал три круга, а затем, увеличив скорость на 1 км/ч, за следующий час пробежал 4 круга. Поскольку, увеличив скорость на 1 км/ч, он пробежал за второй час на километр больше, чем за первый, этот километр равен длине круга.

Задача 7. *Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. На белой клетчатой доске размером 13×12 тот, чей ход, выбирает любую незакрашенную клетку и целиком закрашивает один из четырёх отрезков горизонталей или вертикалей, ведущих от этой клетки на край доски (есть ли там уже закрашенные клетки — неважно). Выигрывает тот, после хода которого доска оказалась закрашена целиком. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник.*

Ответ: Первый. Решение. Первый первым ходом проводит среднюю из 13 вертикалей, а потом делает ходы, центрально симметричные ходам второго.

♦ Докладчик должен не только описать выигрышную стратегию, но и объяснить, почему первый всегда может сделать ход в соответствии с ней. Если стратегия верно описана, но не обоснована — 6 баллов и задача не решена. Внимание: стратегия с вертикальной или горизонтальной *осевой* симметрией неверна!

Задача 8. *На рисунке справа — 10 отрезков. Можно ли так соединить концы некоторых из них, чтобы получились две несамопересекающиеся ломаные, не имеющие общих точек друг с другом?*



Решение. Заметим, что каждый из маленьких отрезков можно соединить только со стоящим прямо перед ним большим. Поэтому либо эти два отрезка образуют цикл, либо маленький отрезок является концом ломаной. Но у двух ломаных не более четырех концов, а маленьких отрезков пять.