XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Старшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *S — количество 33-элементных подмножеств множества **H** = {1, 2, ..., 2009} с четной суммой элементов, а N — количество подмножеств с нечетной суммой. Какое из чисел S и N больше?*

Ответ: N больше. Решение. Обозначим A_n^m разность количества m-элементных подмножеств множества $\{1, 2, ..., n\}$ с нечетной суммой и количества таких подмножеств с четной суммой. Если m четно, а n нечетно, $A_n^m = 0$. Действительно, если каждый элемент x подмножества заменить на $m+1-x$, его четность изменится. Поэтому такая операция взаимно однозначным образом сопоставляет n-элементным подмножествам с четной суммой подмножества с нечетной суммой.

Далее, $A_{2l+1}^{2k+1} = A_{2l}^{2k+1} - A_{2l}^{2k} = -A_{2l}^{2k}$. Действительно, все $(2k+1)$-элементные подмножества множества $\{1, 2, ..., 2l+1\}$ разбиваются на те, которые содержат число $2l+1$ и те, которые этого числа не содержат. У тех, которые содержат $2l+1$, имеется $2k$ элементов, не превосходящих $2l$, и сумма этих $2k$ элементов имеет четность, противоположную чётности суммы всех элементов множества. Поэтому разность количества множеств с нечетной суммой, содержащих $2l+1$, и количества таких множеств с четной суммой равна $-A_{2l}^{2k}$. Аналогичная разность для множеств, не содержащих $2l+1$, есть $-A_{2l}^{2k+1} = 0$. Рассуждая аналогично, находим, что $A_{2l+1}^{2k} = A_{2l}^{2k} - A_{2l}^{2k-1} = A_{2l}^{2k}$ Мы убедились, что все возможные значения A_n^m выражаются через значения с четными n и k.

Докажем теперь индукцией по n, что A_{2n}^{2k} положительно при нечетном $k \le n$ и отрицательно при четном. База индукции — $n = 0$ и $k = 0$ — очевидна (единственное $2k$-элементное множество, пустое, имеет четную сумму). Для перехода от n к $n+1$ разобьём $2k$-элементные подмножества множества $\{1, 2, ..., 2n+2\}$ на содержащие число $2n+2$ и не содержащие его. Так как наличие слагаемого $2n+2$ не меняет чётности суммы, $A_{2n+2}^{2k} = A_{2n+1}^{2k} + A_{2n+1}^{2k-1} = A_{2n}^{2k} - A_{2n}^{2k-2}$. Если k четно, то уменьшаемое отрицательно, а вычитаемое положительно, в противном случае наоборот. Для завершения перехода осталось найти A_{2n+2}^{2n+2}, а оно равно $(-1)^n$.

Возвращаясь к условию задачи, находим, что $A_{2009}^{33} = -A_{2008}^{32}$ а A_{2008}^{32} отрицательно.

Задача 2. *На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.*

Решение. Пусть дан прямоугольник $PQRS$. По неравенству треугольника $AP+AR \ge PR = 2$. Поэтому одно из расстояний AP и AR — пусть AR — не меньше 1. Аналогично, $AQ+AS \ge QS = 2$. Складывая это неравенство с неравенством $AR \ge 1$, получаем $AQ+AS+AR \ge 3$.

Задача 3. *На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?*

Ответ: 99. Решение. Клетки, не лежащие на краю доски 100×100, образуют квадрат 98×98. Разобьём его на квадраты 2×2. В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $49^2 = 2401$. Поэтому на краю доски стоят не менее 99 королей. Теперь разобьём на квадраты 2×2 всю доску 100×100, и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 2500 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 99.

♦ Только оценка — 4 балла, только пример — 2 балла.

Задача 4. *Натуральные числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа p^4+4 и q^4+4 не взаимно просты.*

Решение. $p^4+4 = (p^2+2p+2)(p^2-2p+2)$. $q^4+4 = (q^2+2q+2)(q^2-2q+2) = (q^2+2q+2)(p^2+2p+2)$. $p^2+2p+2 > 1$.

Задача 5. *Даны 100 попарно различных чисел. Докажите, что среди всех их средних арифметических по два, три, четыре, ... сто найдутся не менее 2597 различных.*

Решение. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ — данные числа. Тогда $(a_{100}+a_{99})/2 > (a_{100}+a_{99}+a_{98})/3 > \ldots > (a_{100}+\ldots+a_{51})/50$. Тут 49 средних арифметических. Далее $(a_{100}+\ldots+a_{52}+a_{51})/50 > (a_{100}+\ldots+a_{52}+a_{50})/50 > \ldots > (a_{100}+\ldots+a_{52}+a_1)/50$. Тут 50 новых средних арифметических. Далее так же «перегоним» a_{52} в a_2, потом a_{53} в a_3, …, a_{100} в a_{50}, Получим ещё 49 раз по 50 новых средних арифметических,. Наконец, $(a_{50}+\ldots+a_1)/50 > (a_{49}+\ldots+a_1)/49 < \ldots < (a_2+a_1)/2$ — ещё 48 новых средних арифметических. В итоге получается $49+50\cdot 50+48 = 2597$ средних арифметических, упорядоченных так, что каждое следующее будет меньше предыдущего. Поэтому все они различны.

Задача 6. *В связном графе G с n вершинами есть цикл. Докажите, что существует не более, чем $9\cdot 2^{n-3}$ правильных раскрасок вершин графа G в 3 цвета.*

Решение. **Лемма**. Количество правильных раскрасок простого цикла из k вершин в 3 цвета не превосходит $9\cdot 2^{k-3}$. **Доказательство**. Пусть $a_1a_2... a_k$ — наш цикл. Вершину a_1 можно покрасить 3 способами, вершину a_2 — двумя способами (ее цвет отличается от цвета a_1), и так далее, каждую из вершин a_3,..., a_{k-2} можно покрасить двумя способами (цвет a_i отличен от цвета a_{i-1}). Итого получаем $3\cdot 2^{k-3}$ способов покрасить вершины a_1,..., a_{k-2}. Остаются вершины a_{k-1} и a_k. Их цвета должны отличаться от цветов a_1 и a_{k-2}. Нетрудно проверить, что если цвета a_1 и a_{k-2} различны, дополнить раскраску можно тремя способами, а если одинаковы — двумя способами. Итого получаем не более $9\cdot 2^{k-3}$ правильных раскрасок цикла.

Найдем цикл C в нашем графе, пусть в нем k вершин, тогда существует не более $9\cdot 2^{k-3}$ правильных раскрасок вершин цикла (если какие–то не соседние вершины цикла смежны в нашем графе, количество раскрасок может лишь уменьшиться). Теперь будем добавлять по одной вершине нашего графа, каждый раз прибавляя вершину так, чтобы получался связный подграф (это, очевидно можно сделать ввиду связности исходного графа). Тогда каждая следующая вершина смежна хотя бы с одной из добавленных ранее и, следовательно, красится не более, чем двумя способами. Таким образом, каждая раскраска цикла дополняется не более, чем 2^{n-k} способами, что немедленно дает искомую оценку на количество правильных раскрасок графа.

Задача 7. *Докажите, что* $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ *при всех положительных a, b и c.*

Решение. $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)} \Leftrightarrow (a^2+ab+ac)+bc \geq 2\sqrt{bc(a^2+ab+ac)}$. А это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $a^2+ab+ac$ и a^2.

Задача 8. *На боковой стороне CD трапеции ABCD нашлась точка M такая, что треугольник ABM — равносторонний. Докажите, что на прямой AB есть точка N, для которой треугольник CDN — равносторонний.*

Решение. Очевидно, M — точка пересечения серединного перпендикуляра отрезка AB с прямой CD. Пусть E и F — середины отрезков AB и CD соответственно. Обозначим через N точку пересечения серединного перпендикуляра отрезка CD с прямой AB. Достаточно доказать, что $CD/FN = AB/EM$ (*), ибо это означает подобие треугольников ABM и CDN. Обозначим через S точку пересечения прямых AB и CD и заметим, что треугольники SEM и SFN подобны (по двум углам). Тогда $FN/EM = SF/SE = CD/AB$, откуда и вытекает равенство (*).

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Старшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *S — количество 33-элементных подмножеств множества* ***H*** *= {1, 2, ..., 2008} с четной суммой элементов, а N — количество подмножеств с нечетной суммой. Какое из чисел S и N больше и на сколько?*

Ответ: $S = N$. Решение. Пронумеруем все чётные числа от 1 до 2008 номерами от 1 до 1004. Теми же номерами пронумеруем все нечётные числа от 1 до 2007. Тогда между 33-элементными подмножествами множества ***H*** с чётными и нечётными суммами элементов можно установить взаимно-однозначное соответствие, заменяя каждый элемент множества на элемент другой чётности с тем же номером.

Задача 2. *На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.*

Решение. Пусть дан прямоугольник $PQRS$. По неравенству треугольника $AP+AR \ge PR = 2$. Поэтому одно из расстояний AP и AR — пусть AR — не меньше 1. Аналогично, $AQ+AS \ge QS = 2$. Складывая это неравенство с неравенством $AR \ge 1$, получаем $AQ+AS+AR \ge 3$.

Задача 3. *На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?*

Ответ: 99. Решение. Клетки, не лежащие на краю доски 100×100, образуют квадрат 98×98. Разобьём его на квадраты 2×2. В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $49^2 = 2401$. Поэтому на краю доски стоят не менее 99 королей. Теперь разобьём на квадраты 2×2 всю доску 100×100, и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 2500 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 99.

♦ Только оценка — 4 балла, только пример — 2 балла.

Задача 4. *Простые числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа p^4+4 и q^4+4 не взаимно просты.*

Первое решение. $p^4+4 = (p^2+2p+2)(p^2-2p+2)$. $q^4+4 = (q^2+2q+2)(q^2-2q+2) = (q^2+2q+2)(p^2+2p+2)$. $p^2+2p+2 > 1$. Второе решение. Если оба числа p и q больше 5, их четвёртые степени дают при делении на 5 остаток 1. Стало быть, оба числа p^4+4 и q^4+4 делятся на 5. Случай $p = 5$, $q = 7$ проверяется непосредственно.

Задача 5. *На доске написаны натуральные числа $a_0 = 1 < a_1 < \ldots < a_{10000}$, причём каждое из чисел, кроме a_0, не больше своего удвоенного номера (тот есть $a_1 \le 2$, $a_2 \le 4$, ..., $a_{10000} \le 20000$). Докажите, что разность каких-то двух из этих чисел равна 2008.*

Решение. Рассмотрим 2008 пар чисел: (1, 2009), (2, 2010), …, (2008, 2·2008). Если утверждение задачи неверно, в каждую пару входит не более одного из чисел $a_0, \ldots, a_{2008}$. Но их 2009, и все они он больше, чем 2·2008. Противоречие.

Задача 6. *В стране 2008 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками). Министерство региональной политики рассматривает все возможные проекты разбиения страны на 3 республики так, что никакие два города из одной республики не соединены авиалинией. Докажите, что количество таких проектов не превосходит $3{\cdot}2^{2007}$.*

Решение. Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам. Граф оказывается связным, выделим в нем остовное дерево T. Количество правильных раскрасок вершин графа G в три цвета (а именно о них идет речь в задаче) не превосходит количества правильных раскрасок вершин дерева T в 3 цвета. Докажем, что для дерева с n вершинами последнее количество равно $3{\cdot}2^{n-1}$. База для дерева с одной вершиной очевидна. Индукционный переход от k к $k+1$: рассмотрим дерево с $k+1$ вершиной и временно удалим его висячую вершину a. Останется дерево T' с k вершинами, для него количество раскрасок равно $3{\cdot}2^{k-1}$. Для каждой раскраски дерева T' существует два способа покрасить вершину a.

Задача 7. *Докажите, что $(a+b)(a+c) \ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ при всех положительных a, b и c.*

Решение. $(a+b)(a+c) \ge 2\sqrt{abc(a+b+c)} \Leftrightarrow (a^2+ab+ac)+bc \ge 2\sqrt{bc(a^2+ab+ac)}$. А это неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $a^2+ab+ac$ и a^2.

Задача 8. *Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 5 цифр и получить $2a^3$.*

Ответ: 224. Решение. Пусть a — искомое число. Тогда $2a^3 = 100000a+b \Leftrightarrow 2a(a^2-50000) = b$, где $0 \le b < 10^5$. Понятно, что $a^2 \ge 50000 \Leftrightarrow a \ge 224$, ибо $223^2 < 50000 < 224^2$. $a = 224$ подходит: $2{\cdot}224{\cdot}(224^2-50000) = 34048$, а $a \ge 225$ не подходят, потому что в этом случае $2a(a^2-50000) \ge 2{\cdot}225{\cdot}(225^2-50000) = 281250 > 10^5$.

Старшая группа, вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Решите в вещественных числах систему уравнений* $[x]–y = 2[y]–z = 3[z]–x = 2008/2009$. *Здесь* $[a]$ *— целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a.*

Ответ: $x = 2+1/2009 = 4019/2009$, $b = c = 2010/2009$. Решение. Пусть $y = [y]+\alpha$. Тогда $[x]–[y] = 2008/2009+\alpha$, откуда $\alpha = 1/2009$. Аналогично, $x = [x]+1/2009$, $z = [z]+1/2009$. Отсюда $[x]–[y] = 2[y]–[z] = 3[z]–[x] = 1$. Решая получившуюся линейную систему, получаем $[x] = 2$, $[y] = [z] = 1$, откуда и следует ответ.

♦ Только ответ — 2 балла.

Задача 2. *На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.*

Решение. Пусть дан прямоугольник $PQRS$. По неравенству треугольника $AP+AR \ge PR = 2$. Поэтому одно из расстояний AP и AR — пусть AR — не меньше 1. Аналогично, $AQ+AS \ge QS = 2$. Складывая это неравенство с неравенством $AR \ge 1$, получаем $AQ+AS+AR \ge 3$.

Задача 3. *На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?*

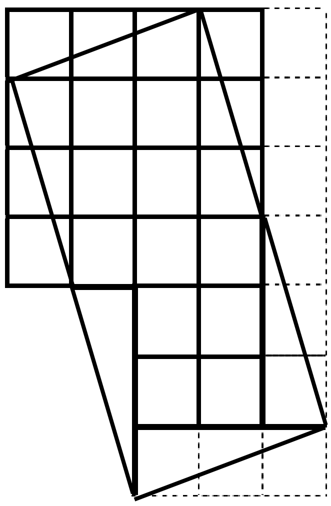
Ответ: 99. Решение. Клетки, не лежащие на краю доски 100×100, образуют квадрат 98×98. Разобьём его на квадраты 2×2. В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $49^2 = 2401$. Поэтому на краю доски стоят не менее 99 королей. Теперь разобьём на квадраты 2×2 всю доску 100×100, и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 2500 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 99.

♦ Только оценка — 4 балла, только пример — 2 балла.

Задача 4. *Простые числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа* p^4+4 *и* q^4+4 *не взаимно просты.*

Первое решение. $p^4+4 = (p^2+2p+2)(p^2–2p+2)$. $q^4+4 = (q^2+2q+2)(q^2–2q+2) = (q^2+2q+2)(p^2+2p+2)$. $p^2+2p+2 > 1$. Второе решение. Если оба числа p и q больше 5, их четвёртые степени дают при делении на 5 остаток 1. Стало быть, оба числа p^4+4 и q^4+4 делятся на 5. Случай $p = 5$, $q = 7$ проверяется непосредственно.

Задача 5. *Вася отрезал от показанной на рис. фигуры три одинаковых треугольника, переложил их и получил в результате прямоугольник, стороны которого относятся как 1:2. Покажите, как он это сделал.*



Решение. См.рис.

Задача 6. *На доске написаны натуральные числа* $a_0 = 1 < a_1 < \ldots < a_{10000}$, *причём каждое из чисел, кроме* a_0, *не больше своего удвоенного номера (то есть* $a_1 \le 2$, $a_2 \le 4$, …, $a_{10000} \le 20000$). *Докажите, что разность каких-то двух из этих чисел равна 2008.*

Решение. Рассмотрим 2008 пар чисел: (1, 2009), (2, 2010), …, (2008, 2·2008). Если утверждение задачи неверно, в каждую пару входит не более одного из чисел a_0, …, a_{2008}. Но их 2009, и все они он больше, чем 2·2008. Противоречие.

Задача 7. *У Саши есть 255 одинаковых по виду монет, ровно одна из которых фальшивая (легче настоящих). У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание, в результате которого весы остались в равновесии, он берет с Саши плату один рубль (взвешивания, в которых одна из чашек перевешивает, Костя разрешает делать бесплатно). Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Костиных весов?*

Ответ: 1 рубль. Решение. Множество подозрительных монет Саша делит на две одинаковые части с остатком в одну монету, и части кладёт на разные чаши весов. Если весы остались в равновесии, то фальшивая – оставшаяся монета, и за её определение пришлось заплатить 1 руб. Если же одна из частей оказывается легче, то она и образует новое множество подозрительных монет. В этом случае платить ничего не надо. Процесс повторяем, пока фальшивая монета не будет определена.

Задача 8. *Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 5 цифр и получить* $2a^3$.

Ответ: 224. Решение. Пусть a — искомое число. Тогда $2a^3 = 100000a+b \Leftrightarrow 2a(a^2–50000) = b$, где $0 \le b \le 10^5$. Понятно, что $a^2 \ge 50000 \Leftrightarrow a \ge 224$, ибо $223^2 < 50000 < 224^2$. $a = 224$ подходит: $2·224·(224^2–50000) = 34048$, а $a \ge 225$ не подходят, потому что в этом случае $2a(a^2–50000) \ge 2·225·(225^2–50000) = 281250 > 10^5$.

♦ Только ответ — 2 балла.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Младшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *На доске 100×100 стоят 2500 не бьющих друг друга королей. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?*

Ответ: 99. Решение. Клетки, не лежащие на краю доски 100×100, образуют квадрат 98×98. Разобьём его на квадраты 2×2. В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $49^2 = 2401$. Поэтому на краю доски стоят не менее 99 королей. Теперь разобьём на квадраты 2×2 всю доску 100×100, и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 2500 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 99.

♦ Только оценка — 4 балла, только пример — 2 балла.

Задача 2. *На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.*

Решение. Пусть дан прямоугольник $PQRS$. По неравенству треугольника $AP+AR \geq PR = 2$. Поэтому одно из расстояний AP и AR — пусть AR — не меньше 1. Аналогично, $AQ+AS \geq QS = 2$. Складывая это неравенство с неравенством $AR \geq 1$, получаем $AQ+AS+AR \geq 3$.

Задача 3. *Рассмотрим множество A натуральных чисел, наименьший элемент которого равен 1001, а произведение всех его элементов — квадрат натурального числа. Какое наименьшее значение может принимать наибольший элемент множества A?*

Ответ: 1040. Решение. Поскольку $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$, во множестве A должно быть ещё одно число, делящееся на 13. Число $1014 = 13^2\cdot 6$ не подойдёт. Число $1027 = 13\cdot 79$ требует ещё одного числа, делящегося на 79, и такое число будет не меньше, чем 1106. А вот число 1040 вместе с числами 1001, 1008, 1012 и 1035 даёт пример искомого множества A: $1001\cdot 1008\cdot 1012\cdot 1035\cdot 1040 = (5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 23\cdot 32)^2$,

♦ Только пример — 4 балла. Только оценка — 4 балла.

Задача 4. *Простые числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа p^4+4 и q^4+4 не взаимно просты.*

Первое решение. $p^4+4 = (p^2+2p+2)(p^2-2p+2)$. $q^4+4 = (q^2+2q+2)(q^2-2q+2) = (q^2+2q+2)(p^2+2p+2)$. $p^2+2p+2 > 1$. Второе решение. Если оба числа p и q больше 5, их четвёртые степени дают при делении на 5 остаток 1. Стало быть, оба числа p^4+4 и q^4+4 делятся на 5. Случаи $p = 3$, $q = 5$ и $p = 5$, $q = 7$ проверяется непосредственно.

Задача 5. *На доске написаны натуральные числа $a_0 = 1 < a_1 < \ldots < a_{10000}$, причём каждое из чисел, кроме a_0, не больше своего удвоенного номера (то есть $a_1 \leq 2$, $a_2 \leq 4$, …, $a_{10000} \leq 20000$). Докажите, что разность каких-то двух из этих чисел равна 2008.*

Решение. Рассмотрим 2008 пар чисел: (1, 2009), (2, 2010), …, (2008, 2·2008). Если утверждение задачи неверно, в каждую пару входит не более одного из чисел a_0, …, a_{2008}. Но их 2009, и все они он больше, чем 2·2008. Противоречие.

Задача 6. *Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 5 цифр и получить $2a^3$.*

Ответ: 224. Решение. Пусть a — искомое число. Тогда $2a^3 = 100000a+b \Leftrightarrow 2a(a^2-50000) = b$, где $0 \leq b < 10^5$. Понятно, что $a^2 \geq 50000 \Leftrightarrow a \geq 224$, ибо $223^2 < 50000 < 224^2$. $a = 224$ подходит: $2\cdot 224\cdot(224^2-50000) = 34048$, а $a \geq 225$ не подходят, потому что в этом случае $2a(a^2-50000) \geq 2\cdot 225\cdot(225^2-50000) = 281250 > 10^5$.

♦ Только ответ — 2 балла.

Задача 7. *Даны 100 попарно различных положительных чисел. Докажите, что среди всех их средних арифметических по два, три, четыре, ... сто найдутся не менее 2597 различных.*

Решение. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$ — данные числа. Тогда $(a_{100}+a_{99})/2 > (a_{100}+a_{99}+a_{98})/3 > \ldots > (a_{100}+\ldots+a_{51})/50$. Тут 49 средних арифметических. Далее $(a_{100}+\ldots+a_{52}+a_{51})/50 > (a_{100}+\ldots+a_{52}+a_{50})/50 > \ldots > (a_{100}+\ldots+a_{52}+a_1)/50$. Тут 50 новых средних арифметических. Далее так же «перегоним» a_{52} в a_2, потом a_{53} в a_3, …, a_{100} в a_{50}, Получим ещё 49 раз по 50 новых средних арифметических,. Наконец, $(a_{50}+\ldots+a_1)/50 > (a_{49}+\ldots+a_1)/49 < \ldots < (a_2+a_1)/2$ — ещё 48 новых средних арифметических. В итоге получается $49+50\cdot 50+48 = 2597$ средних арифметических, упорядоченных так, что каждое следующее будет меньше предыдущего. Поэтому все они различны.

Задача 8. *В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками). Министерство региональной политики рассматривает все возможные проекты разбиения страны на 3 республики так, что никакие два города из одной республики не соединены авиалинией. Докажите, что количество таких проектов не превосходит $3\cdot 2^{99}$.*

Решение. Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют городам, а ребра — дорогам. Граф оказывается связным, выделим в нем остовное дерево T. Количество правильных раскрасок вершин графа G в три цвета (а именно о них идет речь в задаче) не превосходит количества правильных раскрасок вершин дерева T в 3 цвета. Докажем, что для дерева с n вершинами последнее количество равно $3\cdot 2^{n-1}$. База для дерева с одной вершиной очевидна. Индукционный переход от k к k+1: рассмотрим дерево с k+1 вершиной и временно удалим его висячую вершину a. Останется дерево T' с k вершинами, для него количество раскрасок равно $3\cdot 2^{k-1}$. Для каждой раскраски дерева T' существует два способа покрасить вершину a.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Младшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?*

Ответ: 7. Решение. Клетки, не лежащие на краю доски 8×8, образуют квадрат 6×6. Разобьём его на квадраты 2×2. В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $3^2 = 9$. Поэтому на краю доски стоят не менее 16–9 = 7 королей. Теперь разобьём на квадраты 2×2 всю доску 8×8, и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 16 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 7.

♦ Только оценка — 4 балла, только пример — 2 балла.

Задача 2. *На плоскости дан прямоугольник, диагональ которого равна 2, и точка A. Докажите, что у прямоугольника можно выбрать три вершины таким образом, чтобы сумма расстояний от A до выбранных вершин была не меньше 3.*

Решение. Пусть дан прямоугольник $PQRS$. По неравенству треугольника $AP+AR \ge PR = 2$. Поэтому одно из расстояний AP и AR — пусть AR — не меньше 1. Аналогично, $AQ+AS \ge QS = 2$. Складывая это неравенство с неравенством $AR \ge 1$, получаем $AQ+AS+AR \ge 3$.

Задача 3. *Рассмотрим множество A натуральных чисел, наименьший элемент которого равен 33, а произведение всех его элементов — точный квадрат. Какое наименьшее значение может принимать наибольший элемент множества A?*

Ответ: 44. Решение. Поскольку 33 = 3·11, в множестве A должно быть ещё одно число, делящееся на 11. Это минимум 44. С другой стороны, числа 33, 35, 40, 42, 44 подходят: их произведение равно $(8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11)^2$.

♦ Только пример — 4 балла. Только оценка — 4 балла.

Задача 4. *Решите в вещественных числах систему уравнений [x]–y = 2[y]–z = 3[z]–x = 2008/2009. Здесь [a] — целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a.*

Ответ: $x = 2+1/2009 = 4019/2009$, $b = c = 1+1/2009 = 2010/2009$. Решение. Пусть $y = [y]+\alpha$. Тогда $[x]–[y] = 2008/2009+\alpha$, откуда $\alpha = 1/2009$. Аналогично, $x = [x]+1/2009$, $z = [z]+1/2009$. Отсюда $[x]–[y] = 2[y]–[z] = 3[z]–[x] = 1$. Решая получившуюся линейную систему, получаем $[x] = 2$, $[y] = [z] = 1$, откуда и следует ответ.

♦ Только ответ — 4 балла.

Задача 5. *У Саши есть 255 одинаковых по виду монет, ровно одна из которых фальшивая (легче настоящих). У жадного мальчика Кости есть весы, но за каждое взвешивание, в результате которого весы остались в равновесии, он берет с Саши плату один рубль (взвешивания, в которых одна из чашек перевешивает, Костя разрешает делать бесплатно). Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую монету с помощью Костиных весов?*

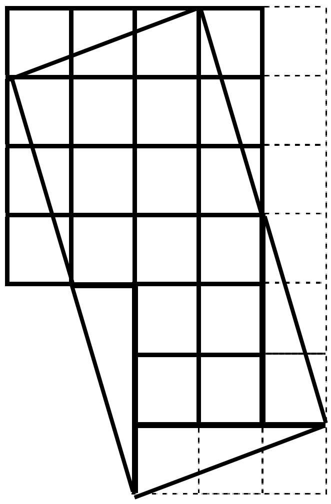
Ответ: 1 рубль. Решение. Множество подозрительных монет Саша делит на две одинаковые части с остатком в одну монету, и части кладёт на разные чаши весов. Если весы остались в равновесии, то фальшивая – оставшаяся монета, и за её определение пришлось заплатить 1 руб. Если же одна из частей оказывается легче, то она и образует новое множество подозрительных монет. В этом случае платить ничего не надо. Процесс повторяем, пока фальшивая монета не будет определена.

Задача 6. *Найдите все натуральные числа a, обладающие следующим свойством: к a можно приписать справа 3 цифры и получить a^3.*

Ответ: 32. Решение. Пусть a — искомое число. Тогда $a^3 = 1000a+b \Leftrightarrow a(a^2–1000) = b$, где $0 \le b < 1000$. Понятно, что $a^2 \ge 1000 \Leftrightarrow a \ge 32$, ибо $31^2 < 1000 < 32^2$. $a = 32$ подходит: $32\cdot(32^2–1000) = 768$, $a \ge 33$ не подходят, потому что в этом случае $a(a^2–1000) \ge 33\cdot(33^2–1000) = 2937 > 1000$.

♦ Только ответ — 2 балла.

Задача 7. *Вася отрезал от показанной на рис. фигуры три одинаковых треугольника, переложил их и получил в результате прямоугольник, стороны которого относятся как 1:2. Покажите, как он это сделал.*



Решение. См. рис.

Задача 8. *Новости в городе Сплетнинске распространяются так: каждый житель, узнавший какую-то новость, на следующее утро делится ею с двумя горожанами, ранее ее не знавшими. В декабре семь жителей Сплетнинска независимо друг от друга узнали важную новость, и в результате к 20-му декабря эта новость стала известна 120 жителям. В какой день узнал новость первый из горожан?*

В этой задаче из-за ошибки жюри в качестве правильного принимался ответ «такого не могло случиться». Ответ и решение задачи см. в лиге «Старт».

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

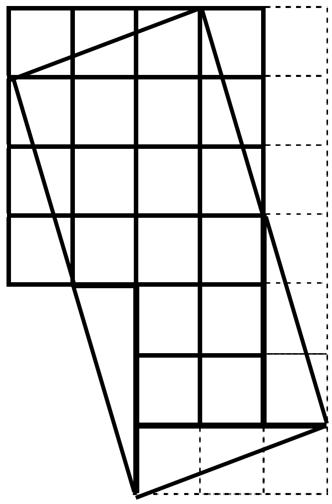
Лига «Старт», 3 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *На шахматной доске (8×8) стоят 16 королей, не бьющих друг друга. Какое наименьшее количество королей может стоять на краю доски?*

Ответ: 7. Решение. Клетки, не лежащие на краю доски 8×8, образуют квадрат 6×6. Разобьём его на квадраты 2×2. В каждом из них стоит не более одного короля, то есть всего королей во внутренних клетках доски — не более $3^2 = 9$. Поэтому на краю доски стоят не менее 16–9 = 7 королей. Теперь разобьём на квадраты 2×2 всю доску 8×8, и поставим по королю в левую верхнюю клетку каждого из них. Получим 16 королей, не бьющих друг друга, из которых на краю стоят ровно 7.

Задача 2. *Вася отрезал от показанной на рис. фигуры три одинаковых треугольника, переложил их и получил в результате прямоуголь*

ник, стороны которого относятся как 1:2. Покажите, как он это сделал.



Решение. См. рис.

Задача 3. *Катя загадала несколько различных натуральных чисел, самое маленькое из которых было равно 10. Оказалось, что произведение всех Катиных чисел — точный квадрат. Могли ли все они быть меньше 20?*

Решение. Да, например загаданы числа 10, 12, 15, 18. Их произведение равно 32 400 $=180^2$.

Задача 4. *Треть пути от Перми до Екатеринбурга – подъем в гору, треть – по ровной местности, и треть – спуск под гору. Турист прошел весь путь со средней скоростью 6 км/ч, при этом на первой трети его скорость была равна 4 км/ч, а на второй – 6 км/ч. Найдите скорость туриста на последнем участке пути.*

Решение. Пусть длина каждого участка равна S. Тогда первый участок турист прошел за время S/6, второй – за S/4, а весь путь – за 3S/6 = S/2. Поэтому третий участок пройден за время S/2 – S/4 – S/6 = S/12, а значит, скорость на нем была равна 12 км/ч.

Задача 5. *У Саши есть 60 одинаковых по виду гирек, одна из которых фальшивая (легче настоящих). У Кости есть весы, но за каждое взвешивание, в результате которого одна из чаш весов перевесила, он берет с Саши плату один рубль (а взвешивания, в которых весы остались в равновесии, Костя разрешает делать бесплатно). Какую наименьшую сумму должен приготовить Саша, чтобы заведомо определить фальшивую гирьку с помощью Костиных весов?*

Ответ: 1 рубль. Решение. Саша будет взвешивать гирьки по одной, сравнивая их с одной и той же гирькой, пока на весах будет равенство. В момент первого неравенства он фальшивую гирьку и заплатит первый рубль. Обойтись совсем без уплат ему не удастся, так как результатом первого же (любого) взвешивания может быть неравенство, если в этот момент фальшивая гирька находится среди взвешиваемых.

Задача 6. *Можно ли раскрасить доску 2008×2008 в три цвета так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали или большой диагонали никаких двух цветов не было поровну?*

Решение. Разных раскрасок очень много, надо внимательно проверять правильность. Например, расставляем первый цвет по одной диагонали, кроме последних трех клеток (см. рис.)

2	2	2	2	2			1
2	2	2	2	2		1	
					1		
				1			
			1				
	1						
1					2	2	2
		1			2	2	2

Цветом 2 покрасим верхние два ряда без правого прямоугольника 2×3 и нижний правый прямоугольник 2×3. Тогда в каждой вертикали одна клетка цвета 1 и две цвета 2. Для двух нижних горизонталей. Одна клетка цвета 1 и 3 клетки цвета 2, для двух верхних – одна клетка цвета 1, две клетки цвета 3, остальные – цвета 3. Для остальных горизонталей цвета 1 одна клетка, а цвета 2 вообще нет. Теперь на одной из диагоналей 4 клетки цвета 2, цвета 1 нет вообще, а на другой нет цвета 2, зато три клетки цвета 3.

Задача 7. *Ручка дороже трех карандашей на целое число рублей, а карандаш стоит дешевле 1 рубля. Комплект из ручки и 12 карандашей стоит ровно 5 рублей. Сколько стоит ручка?*

Решение. Заменяя ручку на три карандаша, получаем, что 15 карандашей стоят целое число рублей, меньшее 5. Следовательно, это число делится на 3, значит, ровно 3, и каждый карандаш стоит 20 копеек. Три карандаша стоят 60 коп., а ручка на 2 рубля дороже, то есть 2 руб. 60 копеек

Задача 8. *Новости в городе Сплетнинске распространяются так: каждый житель, узнавший какую-то новость, на следующее утро делится ею с двумя горожанами, ранее ее не знавшими. В декабре семь жителей Сплетнинска независимо друг от друга узнали важную новость, и в результате к 20-му декабря эта новость стала известна 120 жителям. В какой день узнал новость первый из горожан?*

Ответ: 14 декабря. Решение. От одного сплетника через k дней новость узнают $2^k+2^{k-1}+\ldots+2^1$ человек. С самим сплетником это — $2^{k+1}-1$ человек. Чтобы узнать, когда кто из сплетников узнал новость, надо представить число 120 в виде суммы не более чем семи чисел вида 2^a-1 или, что то же самое, число 127 в виде суммы не более 7 степеней двойки. Но последнее можно сделать единственным способом: 127 = 1+2+4+8+16+32+64. Поскольку $64 = 2^6$, первый сплетник узнал новость 6 дней назад. Отсюда — ответ. При этом последний из горожан (соответствующий меньшему из слагаемых) узнал новость уже после 20.12.