XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Старшая группа, высшая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Даны целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ такие, что $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{10}|-|x_1+x_2+\ldots+x_{10}| = 2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или –1.*

Решение. Не умаляя общности можно считать, что первые k из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ положительны, а остальные — нет. При этом $k < 10$, ибо иначе $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{10}| = |x_1+x_2+\ldots+x_{10}|$. Пусть $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_k| = a$, $|x_{k+1}|+\ldots+|x_{10}| = b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{10}| = a+b$, $|x_1+x_2+\ldots+x_{10}| = |a-b|$. Допустим, $a \ge b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_{10}|-|x_1+x_2+\ldots+x_{10}| = 2b$, откуда $b = 1$. Отсюда следует, что все числа $|x_k|, \ldots, |x_{10}|$, кроме одного — нули, а это одно по модулю равно 1. Случай $a < b$ аналогичен.

Задача 2. *Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника.*

Ответ: $\angle BCA = \angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$. Решение. Обозначим через D точку, симметричную B относительно M. Тогда $BD = 2BM = BC = AD$ и $\angle DAB = \angle DBA = 2\angle BAM$, откуда $\angle BCA = \angle MAD = \angle BAD-\angle BAM = \angle BAM$. Поэтому $AB = BC = AD = BD$, то есть треугольник ABD — равносторонний. Отсюда легко получается ответ.

Задача 3. *Докажите, что $(a^2+b+3/4)(b^2+a+3/4) \ge (2a+1/2)(2b+1/2)$ при всех положительных a и b.*

Решение. Поскольку $(x-1/2)^2 = x^2-x+1/4 \ge 0$, $x^2+1/4 \ge x$. Поэтому $a^2+b+3/4 \ge a+b+1/2$ и $b^2+a+3/4 \ge a+b+1/2$. Отсюда $(a^2+b+3/4)(b^2+a+3/4) \ge (a+b+1/2)^2 \ge (2a+1/2)(2b+1/2)$. Последнее неравенство после раскрытия скобок и и приведения подобных членов сводится к неравенству $a^2+b^2 \ge 2ab$.

Задача 4. *Внутри угла MON отмечена точка X такая, что $\angle OMX = \angle ONX = 90°$. На отрезках OM и ON отмечены точки Y и Z соответственно такие, что $XY\perp MZ$, а $XZ\perp NY$. Докажите, что $OM = ON$.*

Решение.

Задача 5. *Сумма обратных величин 100 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 10000?*

Ответ: Да. Решение. $1 = (1-1/2)+(1/2-1/3)+\ldots+(1/99-1/100)+1/100 = 1/2+1/6+\ldots+1/90+1/110+\ldots+1/9900+1/100$.

Задача 6. *В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что в нем можно выбрать 50 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.*

Решение. Заметим, что каждое ребро входит не менее, чем в 80 треугольников (из концов ребра выходит не менее, чем $2\cdot 189$ ребер в оставшиеся 298 вершин, следовательно, из них хотя бы $2\cdot 189-298 = 80$ вершин, смежных с обоими концами ребра). Выберем несколько непересекающихся треугольников так, что больше ни одного треугольника к ним добавить нельзя. Пусть T — множество вершин этих треугольников, а количество выбранных треугольников есть $k < 54$. Тогда осталось не менее, чем $300-3\cdot 54 = 138 > 114$ вершин, следовательно, мы можем выбрать два ребра ab и cd так, что вершины $a, b, c, d \notin T$. (Для любого множества M более чем из 111 вершин, очевидно, есть ребро, соединяющее две из вершин этого множества, так как каждая вершина множества M не смежна максимум со 110 вершинами графа.) Пусть S — множество вершин, образующих вместе с ребром ab треугольник, а R — множество вершин, образующих вместе с ребром cd треугольник. Тогда $R, S \subset T$, иначе мы можем добавить еще один треугольник.

Так как $|R|, |S| \ge 80$, а $k \le 53$, есть треугольник, вершины которого хотя бы четыре раза входят в S и R (если вершины каждого треугольника входят в множества S и R не более трех раз, то суммарное количество вершин в S и R не превосходит утроенное количество треугольников, то есть, $3\cdot 53 < 160$, противоречие).

Пусть вершины треугольника xyz входят в S и R хотя бы четыре раза, тогда не умаляя общности можно считать, что $x \in S$, $y \in S$, и мы можем заменить треугольник xyz на два треугольника abx и cdy, увеличив их количество, противоречие.

Задача 7. *В квадрате $n\times n$ лежат 1004 доминошки (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n?*

Ответ: 77. Решение. Присоединим к каждой доминошке четыре клетки справа и снизу так, чтобы вместе с доминошкой они образовали прямоугольник 2×3. Если у двух доминошек такие прямоугольники пересекаются, то у доминошек есть общая точка. Поэтому если 1004 доминошки, не имеющие общих точек, умещаются в квадрате $n\times n$, то все построенные по ним прямоугольники должны без наложений помещаться в квадрате $(n+1)\times(n+1)$, полученном добавлением к квадрату $n\times n$ строки снизу и столбца справа. Отсюда $(n+1) > 6\cdot 1004 = 6024$. Поскольку $77^2 < 6024 < 78^2$, $n \ge 77$. Для $n = 77$ строится пример: разместив в первой, третьей, …, 77-й строках по 52 доминошки, не имеющие общих точек, получим $39\cdot 52 = 2028$ доминошек без общих точек.

Задача 8. *Числа p и q — простые, q–p = 2. Решите в натуральных числах уравнение* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$.

Ответ: $((pq+1)/2,\ pq(pq+1)/2)$, $(p(q+1)/2,\ pq(q+1)/2)$, $(q(p+1)/2,\ pq(p+1)/2)$, $(p(p+q)/2,\ q(p+q)/2)$ (с точностью до перестановки) или $(2pq,\ 2pq)$, всего 9 решений.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x+y)/xy = 2/pq$, то есть $2xy–pq(x+y) = 0$. Это эквивалентно тому, что $(2x–pq)(2y–pq) = p^2q^2$. Число p^2q^2 может быть четырьмя способами разложено в произведение двух разных множителей (с точностью до перестановки) и одним — в произведение двух одинаковых.

Таким образом, числа $2x–pq$ и $2y–pq$ могут составлять одну из пар $(1, p^2q^2)$, (p, pq^2), (q, qp^2), (p^2, q^2) (в любом порядке) или быть оба равны pq. Поскольку в каждой паре оба числа нечетны, такие числа x и y всегда существуют. Отсюда — ответ.

Старшая группа, первая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Даны целые числа $x_1, x_2, .. ,x_{10}$ такие, что $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}|-|x_1+x_2+... +x_{10}| = 2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или –1.*

Решение. Не умаляя общности можно считать, что первые k из чисел $x_1, x_2, .. ,x_{10}$ положительны, а остальные — нет. При этом $k < 10$, ибо иначе $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}| = |x_1+x_2+... +x_{10}|$. Пусть $|x_1|+|x_2|+...+|x_k| = a$, $|x_{k+1}|+...+|x_{10}| = b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}| = a+b$, $|x_1+x_2+... +x_{10}| = |a-b|$. Допустим, $a \ge b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}|-|x_1+x_2+... +x_{10}| = 2b$, откуда $b = 1$. Отсюда следует, что все числа $|x_k|, \ldots, |x_{10}|$, кроме одного — нули, а это одно по модулю равно 1. Случай $a < b$ аналогичен.

Задача 2. *Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника.*

Ответ: $\angle BCA = \angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$. Решение. Обозначим через D точку, симметричную B относительно M. Тогда $BD = 2BM = BC = AD$ и $\angle DAB = \angle DBA = 2\angle BAM$, откуда $\angle BCA = \angle MAD = \angle BAD-\angle BAM = \angle BAM$. Поэтому $AB = BC = AD = BD$, то есть треугольник ABD — равносторонний. Отсюда легко получается ответ.

Задача 3. *Эксперт представляет судье 12 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2, 3 и 4 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?*

Ответ: За две. Решение. Покажем, как всё доказать за две операции. Сначала эксперт сравнит все монеты весом 1 г и 2 г и одну монету весом 3 г с тремя монетами весом 4 г. Равновесие докажет, что состав сравниваемых групп монет именно таков, ибо три монеты в сумме весят минимум 12 г, 7 монет — максимум 12 г, и эти минимум с максимумом достигаются ровно в одном случае каждый. Затем эксперт сравнит три одиограммовых монеты и одну трёхграммовую, участвовавшую в первом сравнении. Одна монета весит не больше 3 г (четырёхграммовой она заведомо быть не может), а три в сумме — не меньше 3 г, и равенство возможно только если три монеты — одиограммовые, а одна — трёхграммовая. Так мы определи все одно-, двух- и четырехграммовые монеты, а трёхграммовые тем самым определяются автоматически.

Что-то доказать за одно взвешивание можно только в случае, когда и на каждой чаше весов, и среди не лежащих на весах все монеты одного веса (иначе мы не сможем отличить две монеты разного веса, лежащие на одной чашке или не лежащие на весах). Но у нас монеты четырёх различных весов, поэтому такое невозможно.

Задача 4. *Внутри угла MON отмечена точка X такая, что $\angle OMX = \angle ONX = 90°$. На отрезках OM и ON отмечены точки Y и Z соответственно такие, что $XY \perp MZ$, а $XZ \perp NY$. Докажите, что OM = ON.*

Решение.

Задача 5. *Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?*

Ответ: Да. Решение. $1 = (1-1/2)+(1/2-1/3)+\ldots+(1/9-1/10)+1/10 = 1/2+1/6+1/12+\ldots+1/90+1/10$.

Задача 6. *В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что в нем можно выбрать 25 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.*

Решение. Возьмём любое ребро. Из его вершин в оставшиеся 298 выходит ещё минимум по 189 рёбер. Поэтому это ребро входит ещё минимум в $298-189\cdot 2 = 80$ треугольников. Возьмём любой из них, и выбросим из графа его вершины вместе с выходящими из них рёбрами. Будем повторять описанную процедуру. После k повторений у нас останется граф на $300-3k$ вершинах, степень каждой из которых не меньше $190-3k$. Повторение процедуры возможно, пока $298-3k \le 2\cdot(189-3k) \Leftrightarrow 3k \le 80$, то есть 25 раз повторить её можно.

Задача 7. *В квадрате $n\times n$ лежат 1004 доминошки (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n?*

Ответ: 77. Решение. Присоединим к каждой доминошке четыре клетки справа и снизу так, чтобы вместе с доминошкой они образовали прямоугольник 2×3. Если у двух доминошек такие прямоугольники пересекаются, то у доминошек есть общая точка. Поэтому если 1004 доминошки, не имеющие общих точек, умещаются в квадрате $n\times n$, то все построенные по ним прямоугольники должны без наложений помещаться в квадрате $(n+1)\times(n+1)$, полученном добавлением к квадрату $n\times n$ строки снизу и столбца справа. Отсюда $(n+1) > 6\cdot 1004 = 6024$. Поскольку $77^2 < 6024 < 78^2$, $n \ge 77$. Для $n = 77$ строится пример: разместив в первой, третьей, …, 77-й строках по 52 доминошки, не имеющие общих точек, получим $39\cdot 52 = 2028$ доминошек без общих точек.

Задача 8. *При каком наименьшем n найдутся такие натуральные x и y, что НОД(x, y) = 999 и НОК(x, y) = n! ?*

Ответ: При $n = 37$. Решение. Поскольку НОК(x, y) делится на НОД(x, y), равный $27 \cdot 37$, а число 37 — простое, $n \geq 37$. При $n = 37$ положим $x = 37!$, $y = 999$.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Старшая группа, вторая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Даны целые числа x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|-|x_1+x_2+x_3+x_4| = 2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или –1.*

Решение. Не умаляя общности можно считать, что первые k из чисел x_1, x_2, x_3 ,x_4 положительны, а остальные — нет. При этом $k < 4$, ибо иначе $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4| = |x_1+x_2+x_3+x_4|$. Пусть $|x_1|+...+|x_k| = a$, $|x_{k+1}|+...+|x_4| = b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4 = a+b$, $|x_1+x_2+x_3+x_4| = |a-b|$. Допустим, $a \geq b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|-|x_1+x_2+x_3+x_4| = 2b$, откуда $b = 1$. Отсюда следует, что все числа $|x_k|$, кроме одного — нули, а это одно по модулю равно 1. Случай $a < b$ аналогичен.

Задача 2. *Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника.*

Ответ: $\angle BCA = \angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$. Решение. Обозначим через D точку, симметричную B относительно M. Тогда $BD = 2BM = BC = AD$ и $\angle DAB = \angle DBA = 2\angle BAM$, откуда $\angle BCA = \angle MAD = \angle BAD-\angle BAM = \angle BAM$. Поэтому $AB = BC = AD = BD$, то есть треугольник ABD — равносторонний. Отсюда легко получается ответ.

Задача 3. *Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2 и 3 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?*

Ответ: за 2. Решение. Сначала эксперт сравнит три монеты весом 3 г со всеми остальными. Ответ прибора «одинаково» означает, что в каждой группе монеты весят половину общего веса всех монет. Три монеты могут весить половину общего веса всех монет только если все они весят по 3 г. Затем эксперт сравнит три одниграммовых монеты с одной уже известной трёхграммовой. Равновесие доказывает, что все три монеты — действительно однограммовые: иначе они вместе весили бы больше 3 г.

Что-то доказать за одно взвешивание можно только в случае, когда и на каждой чаше весов, и среди не лежащих на весах все монеты одного веса (иначе мы не сможем отличить две монеты разного веса, лежащие на одной чашке или не лежащие на весах). Но ясно, что при любом таком взвешивании одна из чашек перевесит, и мы ничего не узнаем.

Задача 4. Хитрый мальчик Игорь задумал 6 различных чисел a, b, c, d, e, f и произнес следующие утверждения: «$a > d$», «$f > c$», «$b > e$», «$a > f$», «$a > e$», «$d > b$», «$c > e$». Известно, что при этом он обманул не более двух раз. Докажите, что умный мальчик Костя на основании этих данных сможет найти хотя бы одно заведомо верное утверждение.

Решение. Нарисовав граф высказываний Игоря, обнаруживаем, что он состоит из трёх ориентированных цепей: $a > e$, $a > f > c > e$ и $a > d > b > e$ с общим началом a и общим концом e. Если бы высказывание $a > e$ было неверным, получились бы два ориентированных цикла $a > f > c > e \geq a$ и $a > d > b > e \geq a$, в каждом из которых минимум одно строгое неравенство неверно. Но тогда неверных высказываний оказалось бы не менее трёх. Значит, неравенство $a > e$ верно.

Задача 5. *Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?*

Ответ: Да. Решение. $1 = (1-1/2)+(1/2-1/3)+\ldots+(1/9-1/10)+1/10 = 1/2+1/6+1/12+\ldots+1/90+1/10$.

Задача 6. *В выпуклом 12-угольнике проведено 12 диагоналей. Докажите, что какие-то три из них попарно пересекаются (диагонали, выходящие из одной вершины, считаются пересекающимися).*

Решение. Если есть вершина, из которой выходит хотя бы три диагонали, возьмём их, В противном случае из каждой вершины выходит ровно по две диагонали. Тогда рассмотрим диагональ a, отсекающую наименьшее возможное число вершин. Пусть A — одна из этих вершин. Две выходящие из неё диагонали пересекают диагональ a: иначе одна из них отсекала бы меньше вершин, чем a. Эти две диагонали вместе с a и образуют искомую тройку.

Задача 7. *В треугольнике ABC из внутренней точки O опустили перпендикуляры на стороны AB и AC. Основания этих перпендикуляров обозначили D и E соответственно. Докажите, что если треугольники AOD и OEC равны, то точка E является серединой стороны AC.*

Решение. $OA = OC$ как гипотенузы равных прямоугольных треугольников AOD и OEC. Поэтому OE — серединный перпендикуляр к отрезку AC.

Задача 8. *При каком наименьшем n найдутся такие натуральные x и y, что НОД(x, y) = 999 и НОК(x, y) = n! ?*

Ответ: При $n = 37$. Решение. Поскольку НОК(x, y) делится на НОД(x, y), равный $27 \cdot 37$, а число 37 — простое, $n \geq 37$. При $n = 37$ положим $x = 37!$, $y = 999$.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Младшая группа, высшая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *В квадрате $n\times n$ лежат 1004 доминошки (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n?*

Ответ: 77. Решение. Присоединим к каждой доминошке четыре клетки справа и снизу так, чтобы вместе с доминошкой они образовали прямоугольник 2×3. Если у двух доминошек такие прямоугольники пересекаются, то у доминошек есть общая точка. Поэтому если 1004 доминошки, не имеющие общих точек, умещаются в квадрате $n\times n$, то все построенные по ним прямоугольники должны без наложений помещаться в квадрате $(n+1)\times(n+1)$, полученном добавлением к квадрату $n\times n$ строки снизу и столбца справа. Отсюда $(n+1) > 6\cdot1004 = 6024$. Поскольку $77^2 < 6024 < 78^2$, $n \geq 77$. Для $n = 77$ строится пример: разместив в первой, третьей, …, 77-й строках по 52 доминошки, не имеющие общих точек, получим $39\cdot52 = 2028$ доминошек без общих точек.

Задача 2. *Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?*

Ответ: Да. Решение. $1 = (1–1/2)+(1/2–1/3)+…+(1/9–1/10)+1/10 = 1/2+1/6+1/12+…+1/90+1/10$.

Задача 3. *В выпуклом 100-угольнике проведено 100 диагоналей. Докажите, что какие-то три из них попарно пересекаются (диагонали, выходящие из одной вершины, считаются пересекающимися).*

Решение. Если есть вершина, из которой выходит хотя бы три диагонали, возьмём их, В противном случае из каждой вершины выходит ровно по две диагонали. Тогда рассмотрим диагональ a, отсекающую наименьшее возможное число вершин. Пусть A — одна из этих вершин. Две выходящие из неё диагонали пересекают диагональ a: иначе одна из них отсекала бы меньше вершин, чем a. Эти две диагонали вместе с a и образуют искомую тройку.

Задача 4. *В компании из 300 человек каждый имеет не менее 190 знакомых. Докажите, что можно в этой компании найти не менее 25 троек попарно знакомых людей.*

Решение. Возьмём в графе знакомств любое ребро. Из его вершин в оставшиеся 298 выходит ещё минимум по 189 рёбер. Поэтому это ребро входит ещё минимум в $298–189\cdot2 = 80$ треугольников. Возьмём любой из них, и выбросим из графа его вершины вместе с выходящими из них рёбрами. Будем повторять описанную процедуру. После k повторений у нас останется граф на $300–3k$ вершинах, степень каждой из которых не меньше $190–3k$. Повторение процедуры возможно, пока $298–3k \leq 2\cdot(189–3k) \Leftrightarrow 3k \leq 80$, то есть 25 раз повторить её можно.

Задача 5. *Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2, 3 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?*

Ответ: За две. Решение. Покажем, как всё доказать за два взвешивания. Сначала эксперт положит на одну чашу весов все монеты весом 3 г, а на другую — все остальные. Весы в равновесии, то есть на каждой чаше монеты весят половину общего веса всех монет. Три монеты могут весить половину общего веса всех монет только если все они весят по 3 г. Затем эксперт положит на одну чашу весов три одниграммовых монеты, а на другую — одну трёхграммовую (про неё уже известно, что она трёхграммовая). Равновесие доказывает, что все три монеты — действительно одниграммовые: иначе они весили бы больше 3 г.

Что-то доказать за одно взвешивание можно только в случае, когда и на каждой чаше весов, и среди не лежащих на весах все монеты одного веса (иначе мы не сможем отличить две монеты разного веса, лежащие на одной чашке или не лежащие на весах). Но ясно, что при любом таком взвешивании одна из чашек перевесит, и мы ничего не узнаем.

Задача 6. *Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника.*

Ответ: $\angle BCA = \angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 120°$. Решение. Обозначим через D точку, симметричную B относительно M. Тогда $BD = 2BM = BC = AD$ и $\angle DAB = \angle DBA = 2\angle BAM$, откуда $\angle BCA = \angle MAD = \angle BAD–\angle BAM = \angle BAM$. Поэтому $AB = BC = AD = BD$, то есть треугольник ABD — равносторонний. Отсюда легко получается ответ.

Задача 7. *Даны целые числа $x_1, x_2, .. ,x_{10}$ такие, что $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}|–|x_1+x_2+... +x_{10}| = 2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или –1.*

Решение. Не умаляя общности можно считать, что первые k из чисел $x_1, x_2, .. ,x_{10}$ положительны, а остальные — нет. При этом $k < 10$, ибо иначе $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}| = |x_1+x_2+... +x_{10}|$. Пусть $|x_1|+|x_2|+...+|x_k| = a$, $|x_{k+1}|+...+|x_{10}| = b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}| = a+b$, $|x_1+x_2+... +x_{10}| = |a–b|$. Допустим, $a \geq b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+...+|x_{10}|–|x_1+x_2+... +x_{10}| = 2b$, откуда $b = 1$. Отсюда следует, что все числа $|x_k|, \ldots, |x_{10}|$, кроме одного — нули, а это одно по модулю равно 1. Случай $a < b$ аналогичен.

Задача 8. *Для натуральных чисел x и y нашлись такие различные простые числа p, q, r, что* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. *Докажите, что одно из этих простых чисел равно 2.*

Решение. Пусть нет. Тогда все числа p, q и r нечётны. Если $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$, то $xy(pq+pr+qr) = pqr(x+y)$. Поскольку $pq+pr+qr$ взаимно просто с pqr, $pq+pr+qr$ делится на $x+y$, а pqr делится на $x+y$. Но числа pqr и $pq+pr+qr$ нечётны, поэтому оба числа xy и $x+y$ должны быть нечётными, но это невозможно.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Младшая группа, первая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *В квадрате $n\times n$ лежат 150 доминошек (каждая покрывает две соседние клетки). Никакие две доминошки не имеют общих точек (даже угловых). Какое наименьшее значение может принимать число n?*

Ответ: 29. Решение. Присоединим к каждой доминошке четыре клетки справа и снизу так, чтобы вместе с доминошкой они образовали прямоугольник 2×3. Если у двух доминошек такие прямоугольники пересекаются, то у доминошек есть общая точка. Поэтому если 150 доминошек, не имеющих общих точек, умещаются в квадрате $n\times n$, то все построенные по ним прямоугольники должны без наложений помещаться в квадрате $(n+1)\times(n+1)$, полученном добавлением к квадрату $n\times n$ строки снизу и столбца справа. Отсюда $(n+1) > 6\cdot150 = 900 = 30^2$, откуда $n \geq 29$. Для $n = 29$ строится пример: разместив в первой, третьей, …, 29-й строках по 15 доминошек, не имеющие общих точек, получим ровно 150 доминошек без общих точек.

Задача 2. *Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?*

Ответ: Да. Решение. 1 = (1–1/2)+(1/2–1/3)+…+(1/9–1/10)+1/10 = 1/2+1/6+1/12+…+1/90+1/10.

Задача 3. *В выпуклом 12-угольнике проведено 12 диагоналей. Докажите, что какие-то три из них попарно пересекаются (диагонали, выходящие из одной вершины, считаются пересекающимися).*

Решение. Если есть вершина, из которой выходит хотя бы три диагонали, возьмём их, В противном случае из каждой вершины выходит ровно по две диагонали. Тогда рассмотрим диагональ a, отсекающую наименьшее возможное число вершин. Пусть A — одна из этих вершин. Две выходящие из неё диагонали пересекают диагональ a: иначе одна из них отсекала бы меньше вершин, чем a. Эти две диагонали вместе с a и образуют искомую тройку.

Задача 4. *Трамвайный билет стоит 1 тугрик. У нескольких пассажиров имеются лишь монеты достоинством в 3 и 5 тугриков, а у кондуктора вообще ничего. Оказалось, что все пассажиры смогли заплатить за проезд и получить сдачу. Какая наименьшая сумма денег могла быть у пассажиров?*

Ответ: 22 тугрика. Решение. Если кто-то дал кондуктору монету в 5 тугриков, то он должен дать и ещё одну такую же монет, ибо сдачу в 4 тугрика дать невозможно. Если он дал не менее 10 тугриков, он должен получить хотя бы 9 тугриков сдачи, и ещё не меньше 3 тугриков должно остаться у кондуктора. Таким образом, всего у пассажиров было не меньше 5+5+3+3+3+3 = 22 тугриков. С другой стороны, если у одного из трёх пассажиров есть 5+5 тугриков, а у двух других — по 3+3, то они сумеют рассчитаться: каждый отдаст кондуктору все свои деньги, первый получит 3+3+3 тугрика сдачи, а второй и третий — по 5 тугриков.

Задача 5. *Эксперт представляет судье 12 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет по три монеты весом 1, 2, 3 и 4 грамма. Эксперт сообщил судье, какая монета сколько весит, а также он принес с собой прибор, который за одну операцию с двумя группами монет сообщает, весят ли эти группы одинаково, или нет. За какое наименьшее число операций эксперт сможет доказать судье, что каждая монета действительно весит столько, сколько он сказал?*

Ответ: За две. Решение. Покажем, как всё доказать за две операции. Сначала эксперт сравнит все монеты весом 1 г и 2 г и одну монету весом 3 г с тремя монетами весом 4 г. Равновесие докажет, что состав сравниваемых групп монет именно таков, ибо три монеты в сумме весят минимум 12 г, 7 монет — максимум 12 г, и эти минимум с максимумом достигаются ровно в одном случае каждый. Затем эксперт сравнит три одنограммовых монеты и одну трёхграммовую, участвовавшую в первом сравнении. Одна монета весит не больше 3 г (четырёхграммовой она заведомо быть не может), а три в сумме — не меньше 3 г, и равенство возможно только если три монеты — одنограммовые, а одна — трёхграммовая. Так мы определи все одно-, двух- и четырехграммовые монеты, а трёхграммовые тем самым определяются автоматически.

Что-то доказать за одно взвешивание можно только в случае, когда и на каждой чаше весов, и среди не лежащих на весах все монеты одного веса (иначе мы не сможем отличить две монеты разного веса, лежащие на одной чашке или не лежащие на весах). Но у нас монеты четырёх различных весов, поэтому такое невозможно.

Задача 6. *Даны целые числа x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|-|x_1+x_2+x_3+x_4| = 2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или –1.*

Решение. Не умаляя общности можно считать, что первые k из чисел x_1, x_2, x_3 ,x_4 положительны, а остальные — нет. При этом $k < 4$, ибо иначе $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4| = |x_1+x_2+x_3+x_4|$. Пусть $|x_1|+...+|x_k| = a$, $|x_{k+1}|+...+|x_4| = b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4 = a+b$, $|x_1+x_2+x_3+x_4| = |a-b|$. Допустим, $a \geq b$. Тогда $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|-|x_1+x_2+x_3+x_4| = 2b$, откуда $b = 1$. Отсюда следует, что все числа $|x_k|$, …, $|x_4|$, кроме одного — нули, а это одно по модулю равно 1. Случай $a < b$ аналогичен.

Задача 7. *В треугольнике ABC из внутренней точки O опустили перпендикуляры на стороны AB и AC. Основания этих перпендикуляров обозначили D и E соответственно. Докажите, что если треугольники AOD и OEC равны, то точка E является серединой стороны AC.*

Решение. $OA = OC$ как гипотенузы равных прямоугольных треугольников AOD и OEC. Поэтому OE — серединный перпендикуляр к отрезку AC.

Задача 8. *Зал для танцев имеет форму N-угольника. На танцы собралось k девушек. При каких k они все могут расположиться вдоль стен так, чтобы у каждой стены стояло поровну девушек. Считается, что стоящий в углу человек находится у двух стен. Двое в одном углу стоять не могут.*

Ответ: При всех $k \geq N/2$ и при $k = 0$. Решение. Случай $k = 0$ ясен. Далее индукция по k. База: $k \geq [N+1]/2$. При чётном N ставим девушек в углы через один, при нечётном n двух девушек ставим посреди двух смежных стен, а остальных — в углы через один, чтобы «обслужить» все остальные стены. Переход. Пусть $k > 0$ девушек уже-расставлены нужным образом. Если хотя бы одна стоит в углу, сместим её оттуда на смежную стену, а $k+1$-ую девушку поставим у другой смежной с этим углом стены. Если никто не стоит в углу, сместим с каждой стены одну из девушек в ближайший по часовой стрелке угол, и всё сведётся к уже рассмотренному случаю.

XXXII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ПЕРМЬ, 1-7.12.2008

Лига «Старт», 4 тур, решения и указания для жюри.

Задача 1. *Из доски 8×8 вырезаны четыре центральные клетки, образующие квадрат 2×2. Какое наибольшее количество попарно не бьющих друг друга ферзей можно поставить на эту доску? (Ферзи, соединенные одним ходом, ведущим через одну или несколько вырезанных клеток, не бьют друг друга)*

Ответ: 10. Решение. 10 не бьющих друг друга ферзей можно поставить на клетки *a*5, *b*7, *c*4, *d*1, *d*6, *e*4, *e*8, *f*5, *g*2, *h*4. Осталось заметить, что в первых трёх и последних трёх горизонталях доски может стоять не больше шести не бьющих друг друга ферзей, а в каждом из двух прямоугольников 2×3, на которые делит две средние горизонтали вырезанный из доски квадрат — не больше двух не бьющих друг друга ферзей, итого не больше 6+2+2 = 10 не бьющих друг друга ферзей.

Задача 2. *Среди всех чисел, делящихся на 11 и имеющих сумму цифр 600, найдите два наименьших.*

Ответ: 3399…9 (66 девяток) и 399399…9 (64 девятки подряд). Решение.

Задача 3. *Хитрый мальчик Игорь задумал 6 различных чисел a, b, c, d, e, f и произнес следующие утверждения: «$a > d$», «$f > c$», «$b > e$», «$a > f$», «$a > e$», «$d > b$», «$c > e$». Известно, что при этом он обманул не более двух раз. Докажите, что умный мальчик Костя на основании этих данных сможет найти хотя бы одно заведомо верное утверждение.*

Решение. Нарисовав граф высказываний Игоря, обнаруживаем, что он состоит из трёх ориентированных цепей: $a > e$, $a > f > c > e$ и $a > d > b > e$ с общим началом a и общим концом b. Если бы высказывание $a > e$ было неверным, получились бы два ориентированных цикла $a > f > c > e \geq a$ и $a > d > b > e \geq a$, в каждом из которых минимум одно строгое неравенство неверно. Но тогда неверных высказываний оказалось бы не менее трёх. Значит, неравенство $a > e$ верно.

Задача 4. *Дети в садике мастерили подарки воспитателям к Новому году. Всего в группе 17 ребятишек, и получилось, что любая компания из 5 детей сделала не больше 25 подарков, а каждая компания из трех детей – не меньше 14 подарков. Найдите, сколько всего подарков получат воспитатели.*

Ответ: 84 или 85. Решение. Допустим, есть двое детей, каждый из которых сделал не больше 4 подарков. Тогда каждый из остальных пятнадцати сделал не меньше 6 подарков (иначе, добавив его к этим двоим, получим троих, сделавших меньше 14 подарков), и любые пятеро из этих пятнадцати сделали больше 25 подарков. Допустим, есть ребёнок, сделавший не меньше 6 подарков. Тогда любые четверо из оставшихся сделали не больше 19 подарков, и среди них найдётся такой, который сделал не больше четырёх подарков. Беря две непересекающиеся четвёрки, получим двоих таких, что невозможно. Итак, каждый из детей сделал не больше пяти подарков, и при этом есть не больше одного такого, который сделал не более 4 подарков. Стало быть, 16 детей сделали по 5 подарков, а один — 4 или 5 (меньше 4 подарков он сделать не мог, потому что тогда любая компания из него и ещё двоих сделала не больше 13 подарков). Легко видеть, что оба случая удовлетворяют условию задачи, откуда и получается ответ.

Задача 5. *Эксперт представляет судье 9 одинаковых по внешнему виду монет. Судья знает, что среди представленных монет есть три монеты веса 1 г, три монеты веса 2 г и три монеты веса 3 г, а эксперт знает вес каждой монеты. Эксперт принес с собой прибор, который для двух групп монет сообщает, весят ли эти две группы одинаково или нет. Покажите, что за две такие операции эксперт сможет доказать судье, какая монета имеет какой вес.*

Решение. Сначала эксперт сравнит три монеты весом 3 г со всеми остальными. Равенство весов означает, что в каждой группе монеты весят половину общего веса всех монет. Три монеты могут весить половину общего веса всех монет только если все они весят по 3 г. Затем эксперт сравнит три однограммовых монеты с одной уже известной трёхграммовой. Равновесие доказывает, что все три монеты — действительно однограммовые: иначе они вместе весили бы больше 3 г.

Задача 6. *На окружности отмечено 20 точек. Играют двое. За один ход разрешается закрасить треугольник с вершинами в отмеченных точках, если этот треугольник не пересекается с уже закрашенными (при этом новый треугольник может иметь с закрашенными треугольниками общие стороны). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?*

Ответ: соперник. Решение. Невозможность сделать ход означает, что 20-угольник разбит сторонами и диагоналями на треугольники (триангулирован). В любой триангуляции число треугольников одно и то же и равно 18. Следовательно, последним сделает ход второй игрок.

Задача 7. *Домики четырех друзей стоят на одной прямой. Каждый из друзей называет суммарное расстояние от своего домика до всех остальных. Всегда ли по этим данными можно однозначно определить расстояние между крайними домиками?*

Ответ: Да. Решение. Пусть расстояния между первым и вторым, вторым и третьим, третьим и четвёртым домиками равны, соответственно, a, b и c. Тогда суммы расстояний от первого, второго, третьего и четвёртого домика до остальных равны, соответственно, $3a+2b+c$, $a+2b+c$, $a+2b+c$, $a+2b+3c$. Два средних числа меньше двух крайних и равны между собой, поэтому их можно распознать, а с ними — и два крайних. Сумма двух крайних равна $3(a+b+c)$. Разделив её на 3, получим расстояние между крайними домиками.

Задача 8. *Зал для танцев имеет форму 10-угольника. На танцы собралось k девушек. При каких k они все могут расположиться вдоль стен так, чтобы у каждой стены стояло поровну девушек. Считается, что стоящий в углу человек находится у двух стен. Двое в одном углу стоять не могут.*

Ответ: При всех $k \geq 5$ и при $k = 0$. Решение. Случай $k = 0$ ясен. При $k=5$ ставим девушек в четные вершины 10-угольника. Далее покажем, как увеличить число девушек на 1. Если хотя бы одна девушка стоит в углу, сместим её оттуда на смежную стену, а новую девушку поставим у другой смежной стены. Если в углу не стоит никто, сместим с каждой стены одну из девушек в ближайший по часовой стрелке угол, и всё сведётся к уже рассмотренному случаю.