МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 29.11.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать без остатка на полоску 1×25 клеток и 122 "уголка" из трёх клеток?

2. На острове Политики живут 2015 политиков. Каждый из них при ответе на вопрос лжёт, если знает правильный ответ, и говорит что угодно, если не знает. Как-то на острове провели выборы губернатора, в которых участвовали два кандидата — А и Б, после чего каждому политику задали два вопроса: "За кого Вы голосовали?" и "Кто выиграл выборы?". Ровно 1000 политиков ответила: "Голосовал за кандидата А" и "Выиграл кандидат А". Остальные 1015 ответили: "Голосовал за кандидата Б" и "Выиграл кандидат Б". Известно, что все политики голосовали, и каждый помнит, за кого отдал голос. Какое наибольшее количество политиков могли знать реальные итоги выборов?

3. В школе прошел забег с участием 20 спортсменов, и все заняли разные места. На следующий день каждого из них спросили, какое место он занял, и каждый назвал одно из чисел от 1 до 20. Некоторые (хотя бы один) завысили свой результат, а некоторые занизили, и ни одно из чисел не прозвучало дважды. Школьный психолог для каждого участника нашёл полусумму места, которое тот занял, и места, которое тот назвал. Все найденные числа оказались целыми. Могли ли все они оказаться различными?

4. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2+S(n) = 99\ldots98$ (99 девяток), где через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n? Напомним, что n^2 — это произведение n на n.

5. В математический кружок пришло заниматься 20 ребят. Каждый ребёнок знаком ровно с 14 другими, причём есть 10 ребят, любые двое из которых знакомы. Докажите, что этот кружок можно разбить на две группы таким образом, чтобы любые двое детей, попавших в одну группу, были знакомы между собой.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 29.11.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать без остатка на полоску 1×37 клеток и 135 "уголков" из трёх клеток?

2. Найдите такое наименьшее натуральное число n, что в каждом наборе, состоящем из n натуральных чисел, найдутся три различных числа a, b и c, для которых $ab+bc+ca$ делится на 3.

3. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2+S(n)+1 = 2015^{2014}$, где через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n?

4. В математический кружок пришло заниматься 20 ребят. Каждый ребёнок знаком ровно с 14 другими, причём есть 10 ребят, любые двое из которых знакомы. Докажите, что этот кружок можно разбить на две группы таким образом, чтобы в любые двое детей, попавших в одну группу, были знакомы между собой.

5. 23 юных спортсмена в тренировочном забеге заняли места с 1 по 23 (одинаковых результатов не было). На следующий день 22 из них подошли к тренеру и сказали какое место они заняли в этом забеге (каждый назвал одно из чисел от 1 до 23). Для каждого пришедшего спортсмена тренер вычислил полусумму его реального места и того, которое этот спортсмен назвал. В результате тренер получил 22 попарно различных натуральных числа. Докажите, что каждый спортсмен верно назвал свое место.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 29.11.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать без остатка на полоску 1×37 клеток и 135 "уголков" из трёх клеток?

2. Точки P, Q, R и S — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Треугольники AQR и CSP — равносторонние. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

3. В математический кружок пришло заниматься 20 детей. Каждый ребёнок знаком ровно с 14 другими, причём есть 10 человек, любые двое из которых знакомы. Докажите, что этот кружок можно разбить на две группы таким образом, чтобы каждые два ученика, попавших в одну группу, были знакомы между собой.

4. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число d_n+d_{n+1} является точным квадратом.

5. На плоскости расположены n квадратов 2×2 со сторонами, параллельными координатным осям. Ни один из этих квадратов не содержит центра другого квадрата. Прямоугольник П со сторонами, параллельными координатным осям, содержит все эти квадраты. Докажите, что периметр П не меньше $4\sqrt{n}$.

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать без остатка на полоску 1×25 клеток и 122 "уголка" из трёх клеток?*

Ответ. Нельзя. Решение. Если бы такой прямоугольник существовал, его площадь составляла бы $25+122\cdot3 = 391$ клетку. Так как $391 = 17\times23$, а числа 17 и 23 — простые, такой прямоугольник имеет размеры либо 17×23, либо 1×391. Но в первом случае из него нельзя вырезать полоску 1×25, а во втором — уголок.

Задача 2. *На острове Политики живут 2015 политиков. Каждый из них при ответе на вопрос лжёт, если знает правильный ответ, и говорит что угодно, если не знает. Как-то на острове провели выборы губернатора, в которых участвовали два кандидата — А и Б, после чего каждому политику задали два вопроса: "За кого Вы голосовали?" и "Кто выиграл выборы?". Ровно 1000 политиков ответила: "Голосовал за кандидата А" и "Выиграл кандидат А". Остальные 1015 ответили: "Голосовал за кандидата Б" и "Выиграл кандидат Б". Известно, что все политики голосовали, и каждый помнит, за кого отдал голос. Какое наибольшее количество политиков могли знать реальные итоги выборов?*

Ответ. 1015. Решение. Все соврали про то, за кого голосовали. Поэтому 1000 политиков голосовала за Б, а 1015 — за А. Стало быть, выбрали А. Те, кто это знал, не могли сказать, что А выиграл. Поэтому хотя бы 1000 политиков не знала итогов выборов. Значит, знающих было не больше 1015. А 1015 знающих могло быть — все, кто сказал, что выиграл Б.

Задача 3. *В школе прошел забег с участием 20 спортсменов, и все заняли разные места. На следующий день каждого из них спросили, какое место он занял, и каждый назвал одно из чисел от 1 до 20. Некоторые (хотя бы один) завысили свой результат, а некоторые занизили, и ни одно из чисел не прозвучало дважды. Школьный психолог для каждого участника нашёл полусумму места, которое тот занял, и места, которое тот назвал. Все найденные числа оказались целыми. Могли ли все они оказаться различными?*

Ответ. Не могли. Решение. Если бы все числа оказались различными, это были бы все целые числа от 1 до 20. При этом самое маленькое и самое большое числа 1 и 20 могли получиться только если первое и двадцатое места назвали бегуны, которые действительно их заняли. Но тогда и числа 2 и 19 могли получиться только так, потому что 1 и 20 уже и заняты, и названы. Рассуждая так дальше, получаем, что каждый сказал правду о занятом месте. Но в условии сказано, что кто-то завысил свой результат. Противоречие.

Задача 4. *Существует ли такое натуральное число n, что $n^2+S(n) = 99...98$ (99 девяток), где через $S(n)$ обозначена сумма цифр числа n? Напомним, что n^2 — это произведение n на n.*

Ответ. Не существует. Решение. Как известно, число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки от деления на 9. Перебирая все возможные остатки 0, 1, …, 8 от деления числа n на 9, убеждаемся, что ни в одном из случаев сумма $n^2+S(n)$ не даёт остатка 8, как число 99…998.

Задача 5. *В математический кружок пришло заниматься 20 ребят. Каждый ребёнок знаком ровно с 14 другими, причём есть 10 ребят, любые двое из которых знакомы. Докажите, что этот кружок можно разбить на две группы таким образом, чтобы любые двое детей, попавших в одну группу, были знакомы между собой.*

Решение. Пусть каждые двое знакомых совершат рукопожатие. Зафиксируем десятерых, любые двое из которых знакомы. Назовём их *синими*, а остальных десятерых — *зелёными*. Каждый из синих знаком с девятерыми синими и, стало быть, с пятью зелёными. Значит, всего зелёные совершили с синими 50 рукопожатий. Поскольку в сумме у зелёных должно быть $14\cdot10 = 140$ рукопожатий, 90 из них приходятся на рукопожатия зелёных между собой. Так как каждый из зелёных мог пожать руки только 9 зелёным, отсюда следует, что между зелёными были совершены все возможные рукопожатия, то есть каждый из зелёных дружит с каждым, что и завершает доказательство.

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать без остатка на полоску 1×37 клеток и 135 "уголков" из трёх клеток?*

Ответ. Нельзя. Решение. Если бы такой прямоугольник существовал, его площадь составляла бы $37+135\cdot 3 = 442$ клетки. Чтобы из прямоугольника можно было вырезать полоску 1×37, одна из его сторон должна быть не короче 37. Так как $442 = 2\times 13\times 17$, нам подойдут только прямоугольники 1×442 и 2×221. Но из первого нельзя вырезать ни одного уголка, а у второго участок, из которого нельзя вырезать ни одного уголка, образуется после вырезания полоски 1×37.

Задача 2. *Найдите такое наименьшее натуральное число n, что в каждом наборе, состоящем из n натуральных чисел, найдутся три различных числа a, b и c, для которых ab+bc+ca делится на 3.*

Ответ. 6. Решение. Недолгий перебор показывает, что $ab+bc+ca$ делится на 3 тогда и только тогда, когда все остатки от деления чисел a, b и c на 3 одинаковы, либо хотя бы два из этих чисел делятся на 3. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 такую тройку выбрать нельзя, так что чисел должно быть хотя бы шесть. Возьмём любые 6 натуральных чисел. Если среди них нет двух чисел, делящихся на 3, то хотя бы у пяти из них остатки от деления на 3 равны 1 или 2. Но тогда найдутся три числа с одинаковыми остатками.

Задача 3. *Существует ли такое натуральное число n, что $n^2+S(n)+1 = 2015^{2014}$, где через S(n) обозначена сумма цифр числа n?*

Ответ. Не существует. Решение. Положим $k = 2015^{1007}$. Тогда равенство из условия можно переписать в виде $S(n)+1 = n^2-k^2 = (n-k)(n+k)$, откуда $S(n) \geq n+k-1 > n$. Но, как легко видеть, $S(n) \leq n$ при любом натуральном n.

Задача 4. *В математический кружок пришло заниматься 20 ребят. Каждый ребёнок знаком ровно с 14 другими, причём есть 10 ребят, любые двое из которых знакомы. Докажите, что этот кружок можно разбить на две группы таким образом, чтобы в любые двое детей, попавших в одну группу, были знакомы между собой.*

Решение. Пусть каждые двое знакомых совершат рукопожатие. Зафиксируем десятерых, любые двое из которых знакомы. Назовём их *синими*, а остальных десятерых — *зелёными*. Каждый из синих знаком с девятерыми синими и, стало быть, с пятью зелёными. Значит, всего зелёные совершили с синими 50 рукопожатий. Поскольку в сумме у зелёных должно быть $14\cdot 10 = 140$ рукопожатий, 90 из них приходятся на рукопожатия зелёных между собой. Так как каждый из зелёных мог пожать руки только 9 зелёным, отсюда следует, что между зелёными были совершены все возможные рукопожатия, то есть каждый из зелёных дружит с каждым, что и завершает доказательство.

Задача 5. *23 юных спортсмена в тренировочном забеге заняли места с 1 по 23 (одинаковых результатов не было). На следующий день 22 из них подошли к тренеру и сказали какое место они заняли в этом забеге (каждый назвал одно из чисел от 1 до 23). Для каждого пришедшего спортсмена тренер вычислил полусумму его реального места и того, которое этот спортсмен назвал. В результате тренер получил 22 попарно различных натуральных числа. Докажите, что каждый спортсмен верно назвал свое место.*

Решение. Очевидно, все числа, полученные тренером, не больше 23 и не меньше 1. Поэтому среди них есть либо число 1, либо число 23. Пусть там есть число 1 (случай 23 разбирается аналогично). Оно могло получиться только если первое место назвал бегун, действительно его занявший. Удалим этого бегуна, вычтем по единице из места и показаний каждого из остальных, повторим проведённое выше рассуждение и т.д., пока бегуны не закончатся.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать без остатка на полоску 1×37 клеток и 135 "уголков" из трёх клеток?*

Ответ. Нельзя. Решение. Если бы такой прямоугольник существовал, его площадь составляла бы 37+135·3 = 442 клетки. Чтобы из прямоугольника можно было вырезать полоску 1×37, одна из его сторон должна быть не короче 37. Так как 442 = 2×13×17, нам подойдут только прямоугольники 1×442 и 2×221. Но из первого нельзя вырезать ни одного уголка, а у второго участок, из которого нельзя вырезать ни одного уголка, образуется после вырезания полоски 1×37.

Задача 2. *Точки P, Q, R и S — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника ABCD соответственно. Треугольники AQR и CSP — равносторонние. Докажите, что ABCD — ромб.*

Решение. Как известно, *PQRS* — параллелограмм. При симметрии относительно его центра отрезки *QR* и *SP* переходят друг в друга. Значит, друг в друга переходят и треугольники *AQR* и *CSP*, отрезки *CQ* и *AS* и отрезки *CR* и *AP*. Но тогда друг в друга переходят и вершины *B* и *D*, откуда следует, что *ABCD* — параллелограмм. Так как диагональ *AC* параллелограмма делит отрезок *PS* пополам, она является медианой и высотой в равностороннем треугольнике *CPS*. Поскольку $PS \parallel BD$, диагонали параллелограмма *ABCD* перпендикулярны, то есть он — ромб.

Задача 3. *В математический кружок пришло заниматься 20 детей. Каждый ребёнок знаком ровно с 14 другими, причём есть 10 человек, любые двое из которых знакомы. Докажите, что этот кружок можно разбить на две группы таким образом, чтобы каждые два ученика, попавших в одну группу, были знакомы между собой.*

Решение. Пусть каждые двое знакомых совершат рукопожатие. Зафиксируем десятерых, любые двое из которых знакомы. Назовём их *синими*, а остальных десятерых — *зелёными*. Каждый из синих знаком с девятью синими и, стало быть, с пятью зелёными. Значит, всего зелёные совершили с синими 50 рукопожатий. Поскольку в сумме у зелёных должно быть 14·10 = 140 рукопожатий, 90 из них приходятся на рукопожатия зелёных между собой. Так как каждый из зелёных мог пожать руки только 9 зелёным, отсюда следует, что между зелёными были совершены все возможные рукопожатия, то есть каждый из зелёных дружит с каждым, что и завершает доказательство.

Задача 4. *Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число d_n+d_{n+1} является точным квадратом.*

Решение. Заметим, что $d_{6+420k}+d_{7+420k} = 3+210k+1+60k = 4+270k$. Среди чисел вида $4+270k$ содержатся квадраты всех чисел, дающих остаток 2 при делении на 270, значит, квадратов такого вида бесконечно много, откуда и вытекает утверждение задачи.

Задача 5. *На плоскости расположены n квадратов 2×2 со сторонами, параллельными координатным осям. Ни один из этих квадратов не содержит центра другого квадрата. Прямоугольник П со сторонами, параллельными координатным осям, содержит все эти квадраты. Докажите, что периметр П не меньше $4\sqrt{n}$.*

Решение. Разлинуем плоскость прямыми, параллельными координатным осям, на клеточки со стороной 1. Из условия следует, что центры разных квадратов 2×2 находятся в разных клеточках. С другой стороны, если центр квадрата 2×2 находится в клеточке, то эта клеточка целиком лежит в квадрате 2×2. Из сказанного следует, что площадь прямоугольника П не меньше *n*. Пусть его стороны равны *a* и *b*. Тогда его периметр равен $2(a+b)$, что по неравенству о средних не меньше $4\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{n}$, что и требовалось доказать.