МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Квадрат 1525×1525 разбит на единичные квадратики. 1526^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 750 из этих отрезков в серединах.

2. Десятизначное число называется *няшным*, если все его цифры — единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Докажите, что сумма всех няшных чисел делится на 1408.

3. На ёлку пришли n детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. На ёлке некоторые дети познакомились, и к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся. При каких n такое возможно?

4. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из всех натуральных чисел от 1 до 2^n так, чтобы для любых двух различных выбранных чисел x и y наибольшая степень 2, на которую делится $x–y$, имела чётный показатель?

5. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}>\sqrt{a+b+c}$.

6. Пусть $p_1 = 2$, а p_{n+1} для каждого натурального n определяется как наименьший простой делитель числа $np_1^{1!}p_2^{2!}\ldots p_n^{n!}+1$. Докажите, что в последовательности p_1, p_2, … встречаются все простые числа.

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, а N — внутренняя точка отрезка AM. Прямая, проходящая через точку N параллельно AB, пересекает прямую BM в точке P; прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BN в точке Q; прямая, проходящая через точку N параллельно AQ, пересекает прямую BC в точке S. Докажите, что прямые PS и AC параллельны.

8. На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники ABD, BCE, CAF. Точки G, H, I — середины отрезков DE, EF, FD соответственно. Докажите, что $BG = CH = IA$.

XLVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЕКАТЕРИНБУРГ, 28.11-04.12.2015

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Квадрат 1525×1525 разбит на единичные квадратики. 1526^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 750 из этих отрезков в серединах.

2. Десятизначное число называется *няшным*, если все его цифры — единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Докажите, что сумма всех няшных чисел делится на 1408.

3. На ёлку пришли n детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. На ёлке некоторые дети познакомились, и к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся. При каких n такое возможно?

4. В стране Альфабетии из любого города в любой можно добраться либо на самолете, либо на прямом железнодорожном экспрессе (не останавливающемся на промежуточных станциях). Как самолёты, так и поезда курсируют между городами в обоих направлениях. Докажите, что эту Альфабетию можно так разделить на две республики Альфию и Бетию, что, путешествуя на поезде, можно объехать все города Альфии, не заезжая ни в один город дважды и не покидая Альфии, а путешествуя на самолете, можно облететь все города Бетии, не посещая ни один город дважды и не покидая Бетии.

5. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}>\sqrt{a+b+c}$.

6. Различные нечётные простые числа p и q таковы, что p^2+p делится на q^2+q. Докажите, что число $(p-q)/2$ составное.

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, а N — внутренняя точка отрезка AM. Прямая, проходящая через точку N параллельно AB, пересекает прямую BM в точке P; прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BN в точке Q; прямая, проходящая через точку N параллельно AQ, пересекает прямую BC в точке S. Докажите, что прямые PS и AC параллельны.

8. На отрезке AC отмечена точка B. На отрезках AB и BC в одной полуплоскости, ограниченной прямой AC, построены правильные треугольники ABD и BCE, а на отрезке АС в другой полуплоскости построен правильный треугольник CAF. Точки G, H, I — середины отрезков DE, EF, FD соответственно. Докажите, что $BG = CH = IA$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

2. Двадцатизначное число называется *няшным*, если все его цифры — единицы, двойки и тройки, а разность каждых двух соседних цифр равна 1. Сколько существует няшных чисел?

3. На городскую ёлку пришли 1526 детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. Могли ли на ёлке некоторые дети познакомиться так, чтобы к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся?

4. Для последовательности a_1, a_2, ... построили последовательности b_1, b_2, ... и c_1, c_2, ... по следующему правилу: $b_n = a_{n+1}-a_n$, $c_n = b_{n+1}-b_n$ для каждого натурального n. Оказалось, что для каждого натурального n выполнено $c_n = 1$. Найдите a_1, если известно, что $a_{19} = a_{92} = 0$.

5. Докажите, что при любых положительных a, b и c верно неравенство $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}>\sqrt{a+b+c}$.

6. Существуют ли такие целые числа a, b, c, d, что числа $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-a$ (не обязательно в таком порядке) — четыре последовательных целых числа?

7. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, а N — середина отрезка AM. Прямая, проходящая через точку N параллельно AB, пересекает прямую BM в точке P; прямая, проходящая через точку M параллельно BC, пересекает прямую BN в точке Q; прямая, проходящая через точку N параллельно AQ, пересекает прямую BC в точке S. Докажите, что прямые PS и AC параллельны.

8. На отрезке AC отмечена точка B. На отрезках AB и BC в одной полуплоскости, ограниченной прямой AC, построены правильные треугольники ABD и BCE, а на отрезке AC в другой полуплоскости построен правильный треугольник CAF. Точки G, H, I — середины отрезков DE, EF, FD соответственно. Докажите, что $BG = CH = IA$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Выбрано 40 различных натуральных чисел от 1 до 1024. Докажите, что среди них есть два таких числа x и y, что в разложении на простые множители числа $x-y$ нечетное число двоек.

2. Ребра полного графа на 2015 вершинах покрашены в черный и белый цвета. Докажите, что вершины графа можно разбить на две группы, удовлетворяющие следующим условиям: в первой группе существует путь по ребрам белого цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз, а во второй группе есть цикл из ребер черного цвета, проходящий через каждую вершину ровно один раз (в любой из групп допускается наличие ровно одной вершины).

3. Квадрат 2015×2015 разбит на единичные квадратики. 2016^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 1008 из этих отрезков во внутренних точках. Прямую, проходящую по линиям сетки проводить запрещается.

4. Назовем натуральное число *удивительным*, если оно либо равно 2, либо имеет вид 3^n5^k (k и n — неотрицательные целые числа). Докажите, что каждое натуральное число либо само удивительное, либо его можно представить в виде суммы различных удивительных чисел.

5. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

6. Найдите все натуральные числа l, m, n, для которых $5^l43^m+1 = n^3$.

7. Найдите все такие вещественные числа a, что для любых вещественных чисел x и y верно неравенство $x^4+y^4+axy+2 \geq 0$.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона BC в два раза больше стороны AB. Известно, что $\angle BDC = 90°$ и $\angle BAD = \angle CBD < 60°$. Докажите, что $AB+AD > 2BD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написаны числа от 1 до 2000 включительно. Каждое из них окрасили в красный или синий цвет таким образом, что для любого числа $a \leq 1000$ хотя бы одно число, кратное a, окрашено в цвет, отличный от a. Какое минимальное значение может принимать сумма всех синих чисел?

2. В стране Альфабетии из любого города в любой можно добраться либо на самолете, либо на прямом железнодорожном экспрессе (не останавливающемся на промежуточных станциях). Как самолёты, так и поезда курсируют между городами в обоих направлениях. Докажите, что эту Альфабетию можно так разделить на две республики Альфию и Бетию, что, путешествуя на поезде, можно объехать все города Альфии, не заезжая ни в один город дважды и не покидая Альфии, а путешествуя на самолете, можно облететь все города Бетии, не посещая ни один город дважды и не покидая Бетии.

3. Квадрат 2015×2015 разбит на единичные квадратики. 2016^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 506 из этих отрезков во внутренних точках. Прямую, проходящую по линиям сетки проводить запрещается.

4. Назовем натуральное число *удивительным*, если оно либо равно 2, либо имеет вид 3^n5^k (k и n — неотрицательные целые числа). Докажите, что каждое натуральное число либо само удивительное, либо его можно представить в виде суммы различных удивительных чисел.

5. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

6. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого n^4+1395 делится на $n+5$.

7. Найдите все такие вещественные числа a, что для любых вещественных чисел x и y верно неравенство $x^4+y^4+axy+2 \geq 0$.

8. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD равны, $AC+CD = 2AB$, $\angle BAC=60°$ и $\angle BCA = \angle CAD+\angle DCA$. Найдите $\angle ACD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

2. На столе стоит 50 гирь. Каждая весит не менее 490, но не более 1510 граммов. Оказалось, что при выкидывании любой гири суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все гири равны по весу.

3. Квадрат 2015×2015 разбит на единичные квадратики. 2016^2 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести прямую, пересекающую не менее 504 из этих отрезков во внутренних точках. Прямую, проходящую по линиям сетки проводить запрещается.

4. На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске?

5. Существует ли 2015-значное число, состоящее только из единиц и двоек, которое делится на число из 100 единиц?

6. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого n^4+1395 делится на $n+5$.

7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $x^4+y^4+2 \geq 2xy$.

8. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (степени двойки — это числа 1, 2, 4, 8, …, где каждое следующее число равно удвоенному предыдущему). Петя купил два одинаковых таких набора. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? Треугольники одинаковые, если у них одинаковые наборы длин сторон.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

2. На столе стоит 50 гирь. Каждая весит не менее 500, но не более1500 граммов (каждая гиря весит целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любой гири суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все гири равны по весу.

3. Квадрат 15×15 разбит на единичные квадратики. 256 вершин этих квадратиков разбиты на пары и точки каждой пары соединены отрезком длины 1. Докажите, что можно провести горизонтальную или вертикальную прямую, не проходящую по линиям сетки и пересекающую не менее 4 из этих отрезков в серединах.

4. На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске?

5. Существует ли 2015-значное число, состоящее только из единиц и двоек, которое делится на число из 100 единиц?

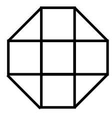
6. Четыре машины выехали из города, имея по полному баку бензина объёмом 100 л каждая. Бака бензина машине хватает на 600 км. Во время пути машинам можно остановиться, и из любых машин перелить часть или весь имеющейся бензин в любые другие, если в баке у тех машин есть место. Могут ли машины доставить на расстояние 1000 км от города более 40 л бензина?

7. Решите в простых числах уравнение $16pq = 21(p^2+q)$.

8. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (степени двойки — это числа 1, 2, 4, 8, ..., где каждое следующее число равно удвоенному предыдущему). Петя купил два одинаковых таких набора. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? Треугольники одинаковые, если у них одинаковые наборы длин сторон.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА



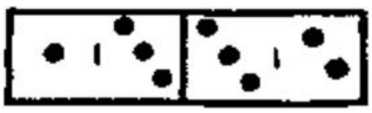
1. Даны квадрат 100×100 и восьмиугольник, состоящий из "креста" из 5 единичных квадратиков и 4 треугольничков (см. рисунок). Можно ли несколькими такими восьмиугольниками покрыть квадрат в несколько слоёв? (Восьмиугольники могут вылезать за пределы квадрата, каждая точка квадрата, не лежащая на сторонах восьмиугольников, должна быть покрыта одно и то же число раз).

2. При каком наименьшем $n > 100$ существует n-значное число, состоящее только из единиц и троек, которое делится на число из 100 единиц?

3. В стране Альфабетии из любого города в любой можно добраться либо на самолете, либо на прямом железнодорожном экспрессе (не останавливающемся на промежуточных станциях). Как самолёты, так и поезда курсируют между городами в обоих направлениях. Докажите, что эту Альфабетию можно так разделить на две республики Альфию и Бетию, что, путешествуя на поезде, можно объехать все города Альфии, не заезжая ни в один город дважды и не покидая Альфии, а путешествуя на самолете, можно облететь все города Бетии, не посещая ни один город дважды и не покидая Бетии.

4. На доске написаны числа от 1 до 2000 включительно. Каждое из них окрасили в красный или синий цвет таким образом, что для любого числа $a \leq 1000$ хотя бы одно число, кратное a, окрашено в цвет, отличный от a. Какое минимальное значение может принимать сумма всех синих чисел?

5. На столе стоит 50 камней. Каждый весит не менее 490, но не более 1510 граммов (не обязательно целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любого камня суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все камни равны по весу.



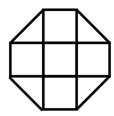
6. Расположенные в ряд по правилам игры две костяшки домино, изображённые на картинке, обладают тем свойством, что объединяя несколько очков, непосредственно прилегающих друг к другу, можно получить любое число от 1 до 9. Так, 1, 2, и 3 можно увидеть непосредственно, 4 получается как сумма 1+3, 5 — как сумма 3+2, 6 = 3+3, 7 = 1+3+3, 8 = 3+3+2, 9 = 1+3+3+2. Можно ли аналогичным образом расположить 4 костяшки, не являющиеся дублями, чтобы получить любое число от 1 до 24?

7. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

8. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА



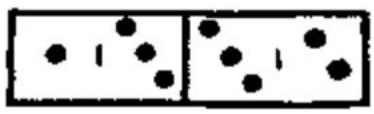
1. Даны квадрат 100×100 и восьмиугольник, состоящий из "креста" из 5 единичных квадратиков и 4 треугольничков (см. рисунок). Можно ли несколькими такими восьмиугольниками покрыть квадрат в несколько слоёв? (Восьмиугольники могут вылезать за пределы квадрата, каждая точка квадрата, не лежащая на сторонах восьмиугольников, должна быть покрыта одно и то же число раз).

2. При каком наименьшем $n > 100$ существует n-значное число, состоящее только из единиц и троек, которое делится на число из 100 единиц?

3. На ёлку пришли n детей. У каждого из них было ровно трое знакомых среди остальных собравшихся детей. На ёлке некоторые дети познакомились, и к концу праздника у каждого было уже ровно четверо знакомых среди собравшихся. Найдите все натуральные n, для которых такое возможно.

4. На некоторых клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для любой свободной клетки (причём хотя бы одна такая есть) количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, суммарно равно 8. Можно ли по этой информации однозначно определить, сколько всего шашек выставлено?

5. На столе стоит 50 камней. Каждый весит не менее 490, но не более 1510 граммов (не обязательно целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любого камня суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все камни равны по весу.



6. Расположенные в ряд по правилам игры две костяшки домино, изображённые на картинке, обладают тем свойством, что объединяя несколько очков, непосредственно прилегающих друг к другу, можно получить любое число от 1 до 9. Так, 1, 2, и 3 можно увидеть непосредственно, 4 получается как сумма 1+3, 5 — как сумма 3+2, 6 = 3+3, 7 = 1+3+3, 8 = 3+3+2, 9 = 1+3+3+2. Можно ли аналогичным образом расположить 4 костяшки, не являющиеся дублями, чтобы получить любое число от 1 до 24?

7. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

8. По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 4.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе лежат 50 камней. Каждый весит не менее 500, но не более 1500 грамм (не обязательно целое число граммов). Оказалось, что при выкидывании любого камня суммарный вес остальных составляет целое число килограммов. Докажите, что все камни равны по весу.

2. Существует ли 2015-значное число, состоящее только из единиц и двоек, которое делится на число из 100 единиц?

3. Четыре машины выехали из города, имея по полному баку бензина объёмом 100 л каждая. Бака бензина машине хватает на 600 км. Во время пути машинам можно остановиться, и из любых машин перелить часть или весь имеющейся бензин в любые другие, если в баке у тех машин есть место. Могут ли машины доставить на расстояние 1000 км от города более 40 л бензина?

4. Докажите, что существует 1000000 идущих подряд натуральных чисел, среди которых ровно два имеют сумму цифр, равную 2015.

5. На некоторых, но не всех, клетках шахматной доски 8×8 стоят шашки. Оказалось, что для каждой свободной клетки количество шашек, стоящих с ней на одной горизонтали и на одной вертикали, в сумме равно 2. Сколько всего шашек может быть на доске?

6. 12-значное число делится на 9. Его цифры зашифровали буквами, разные – разными, одинаковые — одинаковыми. Получилось слово ЕКАТЕРИНБУРГ. Чему равна сумма Р+Е?

7. Расположенные в ряд по правилам игры две костяшки домино, изображённые на картинке, обладают тем свойством, что объединяя несколько очков, непосредственно прилегающих друг к другу, можно получить любое число от 1 до 9. Так, 1, 2, и 3 можно увидеть непосредственно, 4 получается как сумма 1+3, 5 — как сумма 3+2, 6 = 3+3, 7 = 1+3+3, 8 = 3+3+2, 9 = 1+3+3+2. Можно ли аналогичным образом расположить 4 костяшки, не являющиеся дублями, чтобы получить любое число от 1 до 24?

8. В магазине продаются наборы из 10 палочек, длины которых равны разным степеням двойки (степени двойки – это числа 1, 2, 4, 8, …, где каждое следующее число равно удвоенному предыдущему). Петя купил два одинаковых таких набора. Сколько разных треугольников он может составить, выбирая три палочки из них? Известно, что для составления треугольника сумма длин двух меньших палочек должна быть больше большей палочки. Треугольники одинаковые, если у них одинаковые наборы длин сторон.