МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке таблицы $n\times n$ написано одно из чисел 0, 1 или –1 так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одно число 1 и ровно одно число –1. Разрешается поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы все числа в таблице заменились на противоположные.

2. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представимо в виде суммы трёх натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ с $AD > BC$ точки E и F суть середины AB и CD соответственно. Прямые AD и BC пересекают продолжение FE в точках H и G соответственно. Докажите, что $\angle AHE < \angle BGE$.

4. Обозначим через $d(X, YZ)$ обозначает расстояние от точки X до прямой YZ. Точка P внутри треугольника ABC такова, что отношения $d(A, BC)/d(P, BC)$, $d(B, CA)/d(P, CA)$ и $d(C, AB)/d(P, AB)$ равны. Найдите их значение.

5. Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение $\dfrac{a+1}{a(a+2)}+\dfrac{b+1}{b(b+2)}+\dfrac{c+1}{c(c+2)}$ при положительных a, b, c таких, что $a+b+c \le 3$.

6. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, …, P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\ldots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

7. Бесконечная в обе стороны последовательность …, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, … удовлетворяет условию $a_{n+2} = (a_n+a_{n+1})/2$ при всех целых n. Докажите, что если эта последовательность ограничена (то есть существует M такое, что $|a_n| < M$ при всех целых n), то все её члены равны.

8. 1526 монет выложены по кругу гербом вверх. Разрешается перевернуть четыре монеты, либо лежащие подряд, либо занимающие 4 из пяти последовательных мест, кроме среднего. Можно ли с помощью таких операций повернуть все монеты решкой вверх?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В детском саду есть 2014 мячиков 106 различных цветов, по 19 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу найдутся n последовательных мячиков по крайней мере 53 различных цветов?

2. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно представимо в виде суммы трёх натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a. Найдите наибольшее нехорошее число.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ с $AD > BC$ точки E и F суть середины AB и CD соответственно. Прямые AD и BC пересекают продолжение FE в точках H и G соответственно. Докажите, что $\angle AHE < \angle BGE$.

4. Обозначим через $d(X, YZ)$ обозначает расстояние от точки X до прямой YZ. Точка P внутри треугольника ABC такова, что отношения $d(A, BC)/d(P, BC)$, $d(B, CA)/d(P, CA)$ и $d(C, AB)/d(P, AB)$ равны. Найдите их значение.

5. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $128(a+b+c+d+2) < (5+a^2)(5+b^2)(5+c^2)(5+d^2)$.

6. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, …, P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\ldots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

7. Бесконечная в обе стороны последовательность …, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, … удовлетворяет условию $a_{n+2} = (a_n+a_{n+1})/2$ при всех целых n. Докажите, что если эта последовательность ограничена (то есть существует M такое, что $|a_n| < M$ при всех целых n), то все её члены равны.

8. 1526 монет выложены по кругу гербом вверх. Разрешается перевернуть четыре монеты, либо лежащие подряд, либо занимающие 4 из пяти последовательных мест, кроме среднего. Можно ли с помощью таких операций повернуть все монеты решкой вверх?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В детском саду есть 2014 мячиков 106 различных цветов, по 19 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу найдутся n последовательных мячиков по крайней мере 53 различных цветов?

2. Докажите, что каждое натуральное число, большее 2015, можно представить в виде суммы трёх натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b и b делится на a.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, I — точка их пересечения. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите углы треугольника.

4. Обозначим через $d(X, YZ)$ обозначает расстояние от точки X до прямой YZ. Точка P внутри треугольника ABC такова, что отношения $d(A, BC)/d(P, BC)$, $d(B, CA)/d(P, CA)$ и $d(C, AB)/d(P, AB)$ равны. Найдите их значение.

5. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $8(a+b+2) < (5+a^2)(5+b^2)$.

6. Вершины правильного 1526-угольника суть точки P_1, P_2, …, P_{1526} в некотором порядке. Докажите, что у ломаной $P_1P_2P_3\ldots P_{1526}P_1$ есть два параллельных звена.

7. Вася написал на доске два разных натуральных числа. Каждую минуту он дописывает на доску полусумму двух чисел, написанных на доске последними. Докажите, что скорее рано, чем поздно на доске появится нецелое число.

8. 1526 монет выложены по кругу гербом вверх. Разрешается перевернуть четыре монеты, либо лежащие подряд, либо занимающие 4 из пяти последовательных мест, кроме среднего. Можно ли с помощью таких операций повернуть все монеты решкой вверх?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n число $4^n+6^n+9^n$ является точным квадратом?

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2014 мячиков 106 различных цветов, по 19 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу найдутся n последовательных мячиков по крайней мере 53 различных цветов?

4. В ряд выписано 1000 натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — куб натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — куб натурального числа.

5. В кружок поступило 40 детей. Оказалось, что среди любых четверых из них есть кто-то, кто знает ещё хотя бы двоих из этой четвёрки. Кружковцы Петя и Вася незнакомы и не имеют общего знакомого; Вася знаком с кружковцем Колей. Учитель выгнал Петю из кружка. Докажите, что любые двое оставшихся либо знакомы, либо имеют общего знакомого, отличного от Пети.

6. При каком наибольшем n в таблицу из пяти строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $128(a+b+c+d) < (4+a^2)(4+b^2)(4+c^2)(4+d^2)$

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, I — точка их пересечения. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите углы треугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n число $4^n+6^n+9^n$ является точным квадратом?

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2000 мячиков 100 различных цветов, по 20 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 979 последовательных мячиков, среди которых есть мячики по крайней мере 50 различных цветов.

4. В ряд выписано 1000 натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — куб натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — куб натурального числа.

5. В стране 100 городов. Каждый город соединен дорогой хотя бы с одним другим городом. Оказалось, что из любых четырех городов можно выбрать такой, который соединен дорогами хотя бы с двумя другими городами из этой четверки. Докажите, что между любыми двумя городами есть путь не более чем из трех дорог.

6. При каком наибольшем n в таблицу из пяти строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство $128(a+b+c+d) < (4+a^2)(4+b^2)(4+c^2)(4+d^2)$

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, I — точка их пересечения. Известно, что $AI = BC$ и $\angle ACB = 2\angle BAC$. Найдите углы треугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа x и y и простое число p таковы, что $x^2–3xy+p^2y^2 = 12p$. Найдите p.

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2000 мячиков 100 различных цветов, по 20 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 980 последовательных мячиков, среди которых есть мячики по крайней мере 50 различных цветов.

4. В ряд выписано несколько натуральных чисел. Произведение любых двух соседних — квадрат натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — квадрат натурального числа.

5. Из пункта А в пункт Б выехали одновременно велосипедист и мотоциклист. Когда велосипедист проехал 15 км, мотоциклист был уже на полпути от велосипедиста до Б. А когда велосипедист проехал 20 км, мотоциклист как раз прибыл в Б. Найдите расстояние между пунктами А и Б.

6. При каком наибольшем n в таблицу из четырёх строк и n столбцов можно вписать числа 0 или 1 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. Для положительных чисел a и b докажите неравенство $8(a+b) < (4+a^2)(4+b^2)$

8. На доске написано восемь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11. Докажите, что среди этих чисел есть большее 150.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Вася задумал четыре различных натуральных числа и записал на доске (в каком-то порядке) все шесть их попарных сумм, после чего самую большую из них стёр. Всегда ли Петя, взглянув на оставшиеся пять сумм, сможет восстановить стёртую сумму?

2. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

3. В детском саду есть 2000 мячиков 100 различных цветов, по 20 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 980 последовательных мячиков, среди которых есть мячики по крайней мере 50 различных цветов.

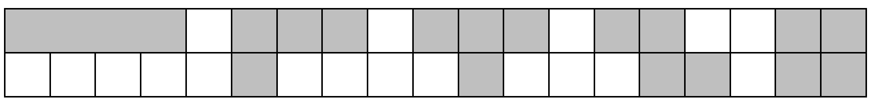
4. В ряд выписано четыре натуральных числа. Произведение любых двух соседних — квадрат натурального числа. Докажите, что произведение двух крайних — квадрат натурального числа.

5. Из пункта А в пункт Б выехали одновременно велосипедист и мотоциклист. Когда велосипедист проехал 15 км, мотоциклист был уже на полпути от велосипедиста до Б. А когда велосипедист проехал 20 км, мотоциклист как раз прибыл в Б. Найдите расстояние между пунктами А и Б.

6. При каком наибольшем n в таблицу из четырёх строк и n столбцов можно вписать числа 0 или 1 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

7. На доске написано восемь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11. Докажите, что среди этих чисел есть большее 150.

8. Можно ли из пяти нарисованных на чертеже фигурок сложить прямоугольник 4×5?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вася задумал четыре различных натуральных числа и записал на доске (в каком-то порядке) все шесть их попарных сумм, после чего одну из них стёр. Всегда ли Петя, взглянув на оставшиеся пять сумм, сможет восстановить стёртую сумму?

2. В ряд стоят 100 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых двух чисел, стоящих подряд, является квадратом натурального числа. Докажите, что произведение первого и последнего из этих чисел тоже является квадратом натурального числа.

3. В начале в углу доски 9×9 стоит конь. Гроссмейстеры Магнус и Володя по очереди (начинает Магнус) ходят этим конём. Запрещается ходить на клетку, с которой предыдущим ходом сходил соперник. Докажите, что Володя может играть так, чтобы конь не побывал по крайней мере на 45 клетках.

4. На доске написано семь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11 и ровно пять на 13. Докажите, что среди этих чисел есть большее 1000.

5. При каком наибольшем n в таблицу $5\times n$ можно вписать числа 0, 1, 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех n столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

6. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

7. В первый класс поступили 30 детей. Оказалось, что среди любых четверых из них есть кто-то, кто знает ещё хотя бы двоих из этой четвёрки. Группу детей назовём *правильной*, если любые двое из этой группы или знакомы между собой, или имеют общего знакомого. Докажите, что или этот первый класс является правильной группой, или можно удалить из него одного ученика таким образом, что оставшиеся 29 детей образуют правильную группу.

8. В детском саду есть 200 мячиков 20 различных цветов, по 10 мячиков каждого цвета. При каком наименьшем n для любой расстановки мячиков по кругу можно выбрать n последовательных мячиков, которые покрашены по крайней мере в 10 различных цветов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вася задумал четыре различных натуральных числа и записал на доске (в каком-то порядке) все шесть их попарных сумм, после чего одну из них стёр. Всегда ли Петя, взглянув на оставшиеся пять сумм, сможет восстановить стёртую сумму?

2. В ряд стоят 100 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых двух чисел, стоящих подряд, является квадратом натурального числа. Докажите, что произведение первого и последнего из этих чисел тоже является квадратом натурального числа.

3. В начале в углу доски 9×9 стоит конь. Гроссмейстеры Магнус и Володя по очереди (начинает Магнус) ходят этим конём. Запрещается ходить на клетку, с которой предыдущим ходом сходил соперник. Докажите, что Володя может играть так, чтобы конь не побывал по крайней мере на 36 клетках.

4. На доске написано семь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11 и ровно пять на 13. Докажите, что среди этих чисел есть большее 1000.

5. При каком наибольшем n в таблицу $5\times n$ можно вписать числа 0, 1, 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех n столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

6. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

7. В стране 100 городов, каждый город соединен дорогой хотя бы с одним другим городом. Оказалось, что из любых четырех городов можно выбрать город, соединенный дорогами хотя бы с двумя другими городами из этой четверки. Докажите, что между любыми двумя городами есть путь не более, чем из трех дорог.

8. В детском саду есть 100 мячиков 10 различных цветов, по 10 мячиков каждого цвета. Мячики разложены по кругу. Докажите, что можно выбрать 40 последовательных мячиков, которые покрашены по крайней мере в 5 различных цветов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 30.11.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Вася задумал 5 различных чисел и записал на доске (в каком-то порядке) все 10 их попарных сумм. Всегда ли Петя, взглянув на эти суммы, сможет восстановить исходные числа?

2. Каждое из произведений ab и bc натуральных чисел является квадратом натурального числа. Докажите, что произведение ac — тоже квадрат натурального числа.

3. В начале в углу доски 9×9 стоит конь. Гроссмейстеры Магнус и Володя по очереди (начинает Магнус) ходят этим конём. Запрещается ходить на клетку, с которой предыдущим ходом сходил соперник. Докажите, что Володя может играть так, чтобы конь **не** побывал по крайней мере на 15 клетках.

4. На доске написано восемь различных натуральных чисел. Ровно пять из них делятся на 7, ровно пять на 11. Докажите, что среди этих чисел есть большее 150.

5. При каком наибольшем n в таблицу из трёх строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

6. На праздничный стол поставили 20 графинов с соком: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Десять графинов выпил Вова, а восемь — Дима, пришедшие на утренник раньше остальных. Оказалось, что Вова выпил сока в 5/4 раза больше Димы. Сколько сока друзья оставили своим одноклассникам?

7. Из пункта А в пункт Б выехали одновременно велосипедист и мотоциклист. Когда велосипедист проехал 15 км, мотоциклист был уже на полпути от велосипедиста до Б. А когда велосипедист проехал 20 км, мотоциклист как раз прибыл в Б. Найдите расстояние между пунктами А и Б.

8. Можно ли из пяти нарисованных на чертеже фигурок сложить прямоугольник 4×5?