МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Докажите, что $\angle CED > 45°$.

2. Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Докажите, что если точку пересечения этих прямых соединить с серединами всех сторон четырёхугольника $ABCD$, он разобьётся на четыре равновеликих части.

3. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

4. При каких натуральных n можно разложить $n(n-1)/2$ карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до $n(n-1)/2$, в n стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках было по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и $n(n-1)/2$?

5. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

6. Найдите все тройки вещественных чисел (a, b, c) такие, что $a(b^2+c) = c(c+ab)$, $b(c^2+a) = a(a+bc)$ и $c(a^2+b) = b(b+ca)$.

7. Два разных нечётных простых числа p и q входят в разложение $n!$ на простые множители в одинаковой степени. Докажите, что $n < p(p+1)/2$.

8. Докажите, что если $a^2+b^2 = a^2b^2$ и $|a| \ne 1$, $|b| \ne 1$, то

$$\frac{a^7}{(1-a)^2}-\frac{a^7}{(1+a)^2}=\frac{b^7}{(1-b)^2}-\frac{b^7}{(1+b)^2}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. При этом $DO\cdot OB = AO\cdot OC$. Лучи DA и CB пересекаются в точке M. Оказалось, что $DB = BM$. Найдите угол AMB.

2. Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Докажите, что если точку пересечения этих прямых соединить с серединами всех сторон четырёхугольника $ABCD$, он разобьётся на четыре равновеликих части.

3. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — чётные натуральные числа $2a_1 \le 2a_2 \le \ldots \le 2a_n$. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

4. Дано 2016 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 2016. Можно ли эти карточки разложить в 64 стопки таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и 2016

5. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

6. Натуральные числа x, y и z таковы, что числа $\frac{y+1}{x-1}$, $\frac{z+1}{y-1}$ и $\frac{x+1}{z-1}$ — целые. Найдите наибольшее возможное значение произведения xyz.

7. Два разных нечётных простых числа p и q входят в разложение $n!$ на простые множители в одинаковой степени. Докажите, что $n < p(p+1)/2$.

8. Докажите, что если $a^2+b^2 = a^2b^2$ и $|a| \ne 1$, $|b| \ne 1$, то

$$\frac{a^7}{(1-a)^2}-\frac{a^7}{(1+a)^2}=\frac{b^7}{(1-b)^2}-\frac{b^7}{(1+b)^2}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O под прямым углом. При этом $AO = 2OB$ и $DO = 2OC$. Лучи DA и CB пересекаются в точке M. Оказалось, что $DB = BM$. Найдите угол AMB.

2. Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проведены прямые, параллельные BD и AC соответственно. Докажите, что если точку пересечения этих прямых соединить с серединами всех сторон четырёхугольника $ABCD$, он разобьётся на четыре равновеликих части.

3. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. У 11 участников конференции соответственно 20, 22, 24, …, 40 ног. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине?

4. Дана пачка карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до 150. Можно ли эти карточки разложить по вершинам 20-угольника таким образом, чтобы в любых двух вершинах нашлось по одной карточке с последовательными номерами?

5. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a-b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

6. Трёхзначное число $\overline{abc}$ назовём *геометрическим*, если его цифры различны и $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

На сколько наибольшее геометрическое число больше наименьшего?

7. Для скольких натуральных N, меньших 1000, уравнение $x^{[x]} = N$ имеет положительное решение? Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x.

8. Докажите, что если $a^2+b^2 = a^2b^2$ и $|a| \neq 1$, $|b| \neq 1$, то

$$\frac{a^7}{(1-a)^2} - \frac{a^7}{(1+a)^2} = \frac{b^7}{(1-b)^2} - \frac{b^7}{(1+b)^2}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $2^x+3^y+7 = z!$.

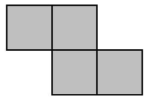
2. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. При каких натуральных n можно разложить $n(n-1)/2$ карточек, пронумерованных последовательно натуральными числами от 1 до $n(n-1)/2$, в n стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках было по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и $n(n-1)/2$?

4. Для любого натурального n докажите, что число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее, чем n простых делителей.

5. Международная конференция многоногих существ проводится на вершине Стеклянной Горы. Количества ног участников — это 100, 102, 104, …, 200. Склоны Стеклянной Горы скользки, очень скользки. Чтобы подняться на неё или спуститься с неё, существо должно обуть хотя бы половину своих ног в специальные альпинистские ботинки. Какое наименьшее количество таких ботинок необходимо запасти организаторам конференции, чтобы собрать всех участников на вершине? Поднимать ботинки на гору и спускать с горы можно только на ногах. Все ноги существ одинаковы.

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $1 \le \dfrac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \le \dfrac{9}{8}$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Докажите, что $\angle CED > 45°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $2^x+3^y-7 = z!$.

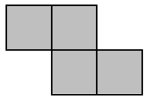
2. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. Дано 2016 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 2016. Можно ли эти карточки разложить в 64 стопки таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и 2016?

4. Дано натуральное число $n > 10$. Вокруг стола сидит n человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих n людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. При каких n по всем этим бумажкам можно наверняка установить, на ком какой колпак надет?

5. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Может ли выполняться равенство $d_1+d_2+d_3-d_4+d_5 = n$?

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $1 \le \dfrac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \le \dfrac{5}{4}$.

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке I. Оказалось, что треугольник CC_1B остроугольный. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\angle AIB = 120°$, а угол между высотой и биссектрисой треугольника ABC, проведенными из точки C равен 10°.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $2^x+3^y-7 = z!$.

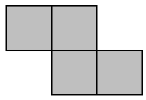
2. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a-2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных?

4. Вокруг стола сидит 30 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих 30 человек пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Всегда ли по всем этим бумажкам можно установить, на ком какой колпак надет?

5. Сумма 100 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Для положительных чисел x и y докажите неравенство $1 \le \dfrac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \le 2$.

8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке I. Оказалось, что треугольник CC_1B остроугольный. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\angle AIB = 120°$, а угол между высотой и биссектрисой треугольника ABC, проведенными из точки C равен $10°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

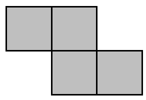
2. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a-b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

3. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных?

4. Вокруг стола сидит 20 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих 20 человек пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Всегда ли по всем этим бумажкам можно установить, на ком какой колпак надет?

5. Сумма 10 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

6. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из прямоугольника 4×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



7. Найдите все такие натуральные числа n и простые числа p, что $n+\dfrac{p}{n}$ — квадрат натурального числа.

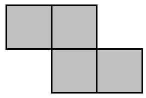
8. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1, они пересеклись в точке I. Оказалось, что треугольник CC_1B остроугольный. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\angle AIB = 120°$, а угол между высотой и биссектрисой треугольника ABC, проведенными из точки C равен $10°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Каждое натуральное число окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b если число $a–2b$ натуральное, то оно того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

2. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



3. Сумма 100 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

4. Дано 2016 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 2016. Можно ли эти карточки разложить в 64 стопки таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами, или с номерами 1 и 2016?

5. В некоторой компании у каждого, кроме одного, ровно 100 знакомых, а у оставшегося — 50 знакомых. Могло ли так случиться, что для любых трёх людей (A, B, C) из этой компании среди остальных есть ровно трое, каждый из которых знаком и с A, и с B, и с C?

6. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Может ли выполняться равенство $d_1+d_2+d_3–d_4+d_5 = n$?

7. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

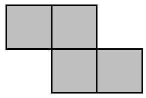
8. Дано натуральное число $n > 10$. Вокруг стола сидит n человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих n людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. При каких n по всем этим бумажкам можно наверняка установить, на ком какой колпак надет?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a–b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

2. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из квадрата 2015×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



3. Сумма 100 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

4. Дано 140 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 140. Можно ли эти карточки разложить в 17 стопок таким образом, чтобы в любых двух стопках были по одной карточке с последовательными номерами

5. В некоторой компании у каждого, кроме одного, ровно 100 знакомых, а у оставшегося — 50 знакомых. Могло ли так случиться, что у любых двух людей из этой компании ровно трое общих знакомых?

6. Дано натуральное число $n > 1000$, имеющее больше 5 делителей. Пусть $d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > d_5$ — пять его наибольших и отличных от n делителей. Может ли выполняться равенство $d_1+d_2+d_3–d_4+d_5 = n$?

7. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно, с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

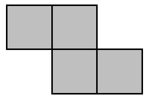
8. Вокруг стола сидит 50 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из этих 50 людей пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Докажите, что по всем этим бумажкам можно узнать, какого цвета колпак на каждом из сидящих.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 3.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Каждое натуральное число от 1 до 100 окрашено либо в синий, либо в красный цвет. Оказалось, что для любых двух одноцветных чисел a и b, где $a > b$, число $a–b$ того же цвета, что и a. Сколько существует таких раскрасок?

2. Какое наибольшее количество z-тетрамино (см. рисунок) можно вырезать (по клеточкам) из прямоугольника 4×2015 клеток? Тетрамино можно поворачивать и переворачивать.



3. Сумма 10 последовательных натуральных чисел делится на наименьшее из них. Какое наибольшее значение может принимать это наименьшее число?

4. Дано 140 карточек, пронумерованных числами 1, 2, …, 140. Можно ли эти карточки разложить по вершинам 17-угольника таким образом, чтобы в любых двух вершинах нашлось по одной карточке с последовательными номерами?

5. В Гамластане имеются в обращении разменные монеты нескольких номиналов (достоинств). Известно, что любую сумму от 1 до 99 крон можно уплатить не более чем 11 монетами. Какое наименьшее количество различных номиналов может быть в обращении?

6. Часовщик сделал шуточные часы, в которых стрелки идут с обычной скоростью, но часовая идёт по часовой стрелке, а минутная — против. Во сколько раз чаще стрелки встречаются в шуточных часах, чем в обычных?

7. Каким наименьшим количеством квадратов 2×2 можно покрыть, возможно с наложениями, поверхность кубика 3×3×3? (Покрывать надо по клеточкам, перегибать можно только через одно ребро куба и так, чтобы квадратик закрывал ровно 4 клетки).

8. Вокруг стола сидит 2015 человек. На каждом из них надет колпак синего или красного цвета, причём каждый из сидящих видит только цвет колпаков у двух соседей по столу. Каждый из сидящих пишет на бумажке два числа: номер своего места и количество синих колпаков, которое он видит. Можно ли по этим ответам установить, на ком какой колпак надет?