КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 29.11.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Всем жителям острова задали вопрос: "Верно ли, что рыцарей на острове больше половины?" В результате ровно половина жителей ответила на этот вопрос утвердительно. Кого на самом деле на острове больше — рыцарей, или лжецов?

2. На доске написано число 1. Вася может задумать любую цифру. Затем он может за одну операцию либо умножить число на доске на задуманную цифру, либо прибавить к числу на доске единицу. Может ли Вася задумать цифру так, чтобы за 10 таких операций получить число 2015?

3. В вершинах A и C прямоугольника $ABCD$ сидит по муравью. Эти муравьи одновременно начинают двигаться по контуру прямоугольника с постоянными скоростями: один по часовой стрелке, другой — против. В первый раз эти муравьи встретились в вершине D, а во второй раз — в вершине A. Найдите длину стороны AD прямоугольника, если его периметр равен 45.

4. В таблице 10×10 расставлено 100 различных чисел. Вася отметил в каждом столбце наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных строках. Петя отметил в каждой строке наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных столбцах. Докажите, что Вася и Петя отметили одни и те же числа.

5. Дано 100-значное число. Если вычеркнуть у него последние 3 цифры, то полученное число разделится на 2015. Если вычеркнуть у него последние 6 цифр, то полученное число тоже разделится на 2015. Докажите, что если у этого числа вычеркнуть последние 4 цифры, то полученное число тоже разделится на 2015.

6. В кружок пришло 35 ребят. Оказалось, что есть 10 из них, каждый из которых знает более, чем 2/3 из остальных 25. Докажите, что найдутся такие двое ребят, не входящих в эту десятку, что каждый из десятки знает хотя бы одного из этих двоих.

7. В двух огромных корзинах лежат камни: в первой 10000, во второй 20000 камней. Петя и Вася играют в игру (ходят по очереди, начинает Петя). За один ход каждому из мальчиков разрешается взять сколько угодно камней из любой корзины, либо взять из обеих корзин любое количество камней так, чтобы общее число взятых на этом ходу камней делилось на 2015. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 29.11.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. На острове живут 2015 человек: рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Всем жителям острова задали вопрос: "Верно ли, что рыцарей на острове больше половины?" Какое наименьшее число утвердительных ответов могло быть?

2. В вершинах A и C прямоугольника $ABCD$ сидит по муравью. Эти муравьи одновременно начинают двигаться по контуру прямоугольника с постоянными скоростями: один по часовой стрелке, другой — против. В первый раз эти муравьи встретились в вершине D, а во второй раз — в вершине A. Найдите длину стороны AD прямоугольника, если его периметр равен 45.

3. В таблице 10×10 расставлено 100 различных чисел. Вася отметил в каждом столбце наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных строках. Петя отметил в каждой строке наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных столбцах. Докажите, что Вася и Петя отметили одни и те же числа.

4. Стороны AB и CD четырёхугольника $ABCD$ равны. Точка E такова, что $\angle EAB = \angle ECD$. Известно, что точка E лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC. Докажите, что точка E лежит на серединном перпендикуляре к диагонали BD.

5. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство $a^4+b^4 \geq 2a^2b^2+4ab+1$.

6. В двух огромных корзинах лежат камни: в первой 10000, во второй 20000 камней. Петя и Вася играют в игру (ходят по очереди, начинает Петя). За один ход каждому из мальчиков разрешается взять сколько угодно камней из любой корзины, либо взять из обеих корзин любое количество камней так, чтобы общее число взятых на этом ходу камней делилось на 2015. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

7. Для натурального числа n обозначим все его делители: $n = d_1 > d_2 > \ldots > d_k = 1$. Докажите, что существует такое $n > 10^{1000}$, что $d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1)^{k-1}d_k = 2n/3$.

8. На турнир приехало 185 ребят: 93 мальчика и 92 девочки. Оказалось, что каждый мальчик знает по крайней мере 82 девочки. Докажите, что найдутся такие две девочки, что каждый мальчик знает хотя бы одну из них.

XLVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ЕКАТЕРИНБУРГ, 28.11–04.12.2015

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 29.11.2015

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В клетках квадрата 4×4 расставлены числа так, что в каждом из пяти квадратов 2×2, расположенных в центре квадрата 4×4 и в его углах, сумма чисел равна 9, а в каждом пятиклеточном "кресте"  сумма чисел равна 10. Найдите сумму чисел в четырёх угловых клетках исходного квадрата.

2. На высоте AD остроугольного треугольника ABC отмечены три точки, разбивающие её на четыре равные части. Перпендикуляры к AD, проведённые через эти точки, и сама высота AD разбили треугольник ABC на восемь частей, которые окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке (то есть так, что части, граничащие по отрезку, окрашены в разные цвета). Оказалось, что суммарная площадь чёрных частей равна суммарной площади белых. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

3. В кружок записались 111 детей. Оказалось, что есть десять кружковцев, каждый из которых знаком более, чем с 4/5 из остальных 101. Докажите, что найдутся два кружковца, не входящих в эту десятку, таких, что каждый из десятки знает хотя бы одного из этих двоих.

4. Для натурального числа n обозначим все его делители: $n = d_1 > d_2 > \ldots > d_k = 1$. Докажите, что $d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1)^{k-1}d_k = n-1$ тогда и только тогда, когда n — простое или $n = 4$.

5. В двух огромных корзинах лежат камни: в первой 20000, во второй 40000 камней. Петя и Вася играют в игру (ходят по очереди, начинает Петя). За один ход каждому из мальчиков разрешается взять сколько угодно камней из любой корзины, либо взять из обеих корзин любое количество камней так, чтобы общее число взятых на этом ходу камней делилось на 2015. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

6. Числа x, y и z удовлетворяют условиям $xy+yz+zx > 0$ и $x+y > 0$. Докажите, что $xa^2+yb^2+zc^2 \geq 0$ для любых чисел a, b и c, сумма которых равна 0.

7. В треугольнике ABC, где $\angle B = 2\angle C$, проведена биссектриса AD. Оказалось, что $CD = AB$. Найдите угол A.

8. Внутри прямоугольника R отмечены n точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной какой-либо стороне прямоугольника. Прямоугольник R разрезали на меньшие прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам R, так, что все отмеченные точки оказались на линиях разрезов. Докажите, что прямоугольников разбиения не меньше $n+1$.

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Всем жителям острова задали вопрос: "Верно ли, что рыцарей на острове больше половины?" В результате ровно половина жителей ответила на этот вопрос утвердительно. Кого на самом деле на острове больше — рыцарей, или лжецов?*

Ответ. Поровну. Решение. Если бы рыцарей на острове в самом деле было больше половины, то все они ответили бы на вопрос утвердительно, что противоречит условию задачи. Значит, утвердительно на вопрос отвечали лжецы, и их на острове ровно половина.

Задача 2. *На доске написано число 1. Вася может задумать любую цифру. Затем он может за одну операцию либо умножить число на доске на задуманную цифру, либо прибавить к числу на доске единицу. Может ли Вася задумать цифру так, чтобы за 10 таких операций получить число 2015?*

Ответ. Может. Решение. Пусть Вася задумал цифру 5. Тогда он получит 2015 такими операциями: +1, +1, ×5, +1, ×5, ×5, +1, +1, +1, ×5.

Задача 3. *В вершинах A и C прямоугольника ABCD сидит по муравью. Эти муравьи одновременно начинают двигаться по контуру прямоугольника с постоянными скоростями: один по часовой стрелке, другой — против. В первый раз эти муравьи встретились в вершине D, а во второй раз — в вершине A. Найдите длину стороны AD прямоугольника, если его периметр равен 45.*

Ответ. 15. Решение. Понятно, что оба муравья поползли к вершине D — иначе их первая встреча случиться в этой вершине не могла бы. Тогда получается, что к моменту второй встречи муравей, который стартовал из вершины A, прополз весь контур прямоугольника, а второй муравей — половину контура (стороны CD и DA). Значит, первый муравей ползёт вдвое быстрее второго. Так как к моменту первой встречи первый муравей прополз сторону AD, а второй — сторону CD, получаем, что $AD = 2CD$. По условию $2(AD+CD) = 45$, откуда $CD = 7{,}5$ и $AD = 15$.

Задача 4. *В таблице 10×10 расставлено 100 различных чисел. Вася отметил в каждом столбце наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных строках. Петя отметил в каждой строке наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных столбцах. Докажите, что Вася и Петя отметили одни и те же числа.*

Решение. Возьмём самое большое число в таблице. Его, очевидно, отметили оба мальчика, и больше в строке и столбце, где оно стоит, отмеченных чисел нет. Вычеркнем эти столбец и строку, а оставшиеся числа сплотим в таблицу 9×9. В ней снова возьмём наибольшее число. Оно было наибольшим в своих столбце и строке и в исходной таблице 10×10 — иначе в вычеркнутых столбце и строке было бы отмечено больше одного числа. Значит, оно также отмечено обоими мальчиками, и больше отмеченных чисел в строке и столбце, где оно стоит, нет. Вычеркнем эти строку и столбец и оставшиеся числа сплотим в таблицу 8×8. Продолжая рассуждать, как и раньше, убеждаемся в справедливости утверждения задачи.

Задача 5. *Дано 100-значное число. Если вычеркнуть у него последние 3 цифры, то полученное число разделится на 2015. Если вычеркнуть у него последние 6 цифр, то полученное число тоже разделится на 2015. Докажите, что если у этого числа вычеркнуть последние 4 цифры, то полученное число тоже разделится на 2015.*

Решение. Пусть a — число, получающееся после вычёркивания последних 6 цифр. Тогда число, получающееся после вычёркивания последних 3 цифр, равно $1000a+b$, где b — трехзначное число, образованное четвёртой, пятой и шестой цифрами исходного 100-значного числа. Так как оба числа a и $1000a+b$ делятся на 2015, на 2015 делится и число $b = 1000a+b-1000a$. Но $0 \le b < 2015$. Значит, $b = 0$, а число, получающееся вычёркиванием из исходного последних 4 цифр равно $100a$, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 6. *В кружок пришло 35 ребят. Оказалось, что есть 10 из них, каждый из которых знает более, чем 2/3 из остальных 25. Докажите, что найдутся такие двое ребят, не входящих в эту десятку, что каждый из десятки знает хотя бы одного из этих двоих.*

Решение. Назовём десятерых, о которых идёт речь в задаче, *знатоками*, а остальных членов кружка — *дружками*. Будем говорить, что знаток портит пару дружков, если он не знает никого из этой пары. По условию каждый знаток знает более 50/3, то есть не меньше 17 дружков. Значит, он незнаком самое большее с 8 дружками и может испортить максимум $8\cdot 7/2 = 28$ пар дружков. Стало быть, вместе все 10 знатоков могут испортить максимум 280 пар дружков, а всего пар дружков — $25 \cdot 24/2 = 300$. Поэтому найдется неиспорченная пара дружков (и даже не меньше 20 таких пар), что и требовалось доказать.

Задача 7. *В двух огромных корзинах лежат камни: в первой 10000, во второй 20000 камней. Петя и Вася играют в игру (ходят по очереди, начинает Петя). За один ход каждому из мальчиков разрешается взять сколько угодно камней из любой корзины, либо взять из обеих корзин любое количество камней так, чтобы общее число взятых на этом ходу камней делилось на 2015. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Заметим, что $10000+20000 = 14\times2015+1790$. Пусть первым ходом Петя возьмёт 14×2015 камней так, чтобы в обеих корзинах осталось по $1790:2 = 895$ камней. В дальнейшем Вася на каждом ходу сможет брать камни только из одной корзины, и для победы Пете достаточно будет достаточно каждым своим ходом уравнивать число камней в корзинах: рано или поздно после очередного хода Васи одна из корзин опустеет, тогда Петя возьмёт все камни из другой корзины и выиграет.

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *На острове живут 2015 человек: рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Всем жителям острова задали вопрос: "Верно ли, что рыцарей на острове больше половины?" Какое наименьшее число утвердительных ответов могло быть?*

Ответ. 1008. Решение. Если рыцарей на острове в самом деле больше половины, то все они ответят на вопрос утвердительно, и таких ответов будет не меньше, чем 1008. В противном случае утвердительно ответят лжецы, и таких ответов снова будет не меньше, чем 1008. Пример, когда ответов ровно 1008: 1008 рыцарей и 1007 лжецов.

Задача 2. *В вершинах A и C прямоугольника ABCD сидит по муравью. Эти муравьи одновременно начинают двигаться по контуру прямоугольника с постоянными скоростями: один по часовой стрелке, другой — против. В первый раз эти муравьи встретились в вершине D, а во второй раз — в вершине A. Найдите длину стороны AD прямоугольника, если его периметр равен 45.*

Ответ. 15. Решение. Понятно, что оба муравья поползли к вершине D — иначе их первая встреча случиться в этой вершине не могла бы. Тогда получается, что к моменту второй встречи муравей, который стартовал из вершины A, прополз весь контур прямоугольника, а второй муравей — половину контура (стороны CD и DA). Значит, первый муравей ползёт вдвое быстрее второго. Так как к моменту первой встречи первый муравей прополз сторону AD, а второй — сторону CD, получаем, что $AD = 2CD$. По условию $2(AD+CD) = 45$, откуда $CD = 7{,}5$ и $AD = 15$.

Задача 3. *В таблице 10×10 расставлено 100 различных чисел. Вася отметил в каждом столбце наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных строках. Петя отметил в каждой строке наибольшее число и обнаружил, что все 10 отмеченных им чисел лежат в разных столбцах. Докажите, что Вася и Петя отметили одни и те же числа.*

Решение. Возьмём самое большое число в таблице. Его, очевидно, отметили оба мальчика, и больше в строке и столбце, где оно стоит, отмеченных чисел нет. Вычеркнем эти столбец и строку, а оставшиеся числа сплотим в таблицу 9×9. В ней снова возьмём наибольшее число. Оно было наибольшим в своих столбце и строке и в исходной таблице 10×10 — иначе в вычеркнутых столбце и строке было бы отмечено больше одного числа. Значит, оно также отмечено обоими мальчиками, и больше отмеченных чисел в строке и столбце, где оно стоит, нет. Вычеркнем эти строку и столбец и оставшиеся числа сплотим в таблицу 8×8. Продолжая рассуждать, как и раньше, убеждаемся в справедливости утверждения задачи.

Задача 4. *Стороны AB и CD четырёхугольника ABCD равны. Точка E такова, что $\angle EAB = \angle ECD$. Известно, что точка E лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC. Докажите, что точка E лежит на серединном перпендикуляре к диагонали BD.*

Решение. Из условия следует, что $EA = EC$. Поэтому треугольники EAB и ECD равны по первому признаку, откуда $EB = ED$. Но это и означает, что что точка E лежит на серединном перпендикуляре к диагонали BD.

Задача 5. *Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство $a^4+b^4 \geq 2a^2b^2+4ab+1$.*

Решение. Приведём неравенство к виду $(a^2-b^2)^2 \geq 4ab+1$. Левая часть тут равна $(a-b)^2(a+b)^2$. Так как $(a-b)^2 \geq 1$, достаточно доказать, что $(a+b)^2 \geq 4ab+1 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 1$. Последнее неравенство очевидно.

Задача 6. *В двух огромных корзинах лежат камни: в первой 10000, во второй 20000 камней. Петя и Вася играют в игру (ходят по очереди, начинает Петя). За один ход каждому из мальчиков разрешается взять сколько угодно камней из любой корзины, либо взять из обеих корзин любое количество камней так, чтобы общее число взятых на этом ходу камней делилось на 2015. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Заметим, что 10000+20000 = 14×2015+1790. Пусть первым ходом Петя возьмёт 14×2015 камней так, чтобы в обеих корзинах осталось по 1790:2 = 895 камней. В дальнейшем Вася на каждом ходу сможет брать камни только из одной корзины, и для победы Пете достаточно будет каждым своим ходом уравнивать число камней в корзинах: рано или поздно после очередного хода Васи одна из корзин опустеет, тогда Петя возьмёт все камни из другой корзины и выиграет.

Задача 7. *Для натурального числа n обозначим все его делители: $n = d_1 > d_2 > \ldots > d_k = 1$. Докажите, что существует такое $n > 10^{1000}$, что $d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1)^{k-1}d_k = 2n/3$.*

Решение. Покажем по индукции, что подходят все числа вида $3\cdot2^n$. Заметим, что $2\cdot3\cdot2^n/3 = 2^{n+1}$. При $n = 1$ имеем $6-3+2-1 = 2^2$ — верно. Пусть верно для $n = m$. Тогда при $n = m+1$ имеем:

$$d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1)^{k-1}d_k = 3\cdot 2^{m+1}-3\cdot 2^m+2^{m+1}-3\cdot 2^{m-1}+\ldots = 3\cdot 2^{m+1}-2\cdot 3\cdot 2^m+2^{m+1}+(3\cdot 2^m-3\cdot 2^{m-1}+\ldots) = 2^{m+1}+2^{m+1} = 2^{m+2},$$

что и завершает доказательство. При переходе в преобразованиях от второго выражения к третьему мы прибавили и вычли $3\cdot 2^m$.

Задача 8. *На турнир приехало 185 ребят: 93 мальчика и 92 девочки. Оказалось, что каждый мальчик знает по крайней мере 82 девочки. Докажите, что найдутся такие две девочки, что каждый мальчик знает хотя бы одну из них.*

Решение. Будем говорить, что мальчик знаком с парой девочек, если он знаком хотя бы с кем-то из этой пары. По условию каждый мальчик не знаком не более чем с 10 девочками, то есть он не знаком не более чем с $10\cdot 9/2 = 45$ парами девочек. Стало быть, вместе все 93 мальчика не знакомы не более чем $93\cdot 45$ парами девочек. Но всего пар девочек $92\cdot 91/2 > 93\cdot 90/2 = 93\cdot 45$. Поэтому найдётся пара девочек, с которой знакомы все мальчики, что и требовалось доказать.

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *В клетках квадрата 4×4 расставлены числа так, что в каждом из пяти квадратов 2×2, расположенных в центре квадрата 4×4 и в его углах, сумма чисел равна 9, а в каждом пятиклеточном "кресте"*  *сумма чисел равна 10. Найдите сумму чисел в четырёх угловых клетках исходного квадрата.*

Ответ. 14. Решение. В квадрате 4×4 крест из пяти клеток можно разместить четырьмя способами. Взяв все эти четыре креста, увидим, что каждая из четырёх центральных клеток квадрата покрыта тремя из них, а каждая из боковых, но не угловых клеток квадрата покрыта одним из них. Поэтому сумма всех чисел, стоящих не в угловых клетках квадрата, равна $4\cdot10-2\cdot9 = 22$. С другой стороны, квадрат 4×4 разбивается на четыре угловых квадрата 2×2, и потому сумма всех чисел в нём равна $4\cdot9 = 36$. Значит, сумма чисел в его угловых клетках равна $36-22 = 14$.

Задача 2. *На высоте AD остроугольного треугольника ABC отмечены три точки, разбивающие её на четыре равные части. Перпендикуляры к AD, проведённые через эти точки, и сама высота AD разбили треугольник ABC на восемь частей, которые окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке (то есть так, что части, граничащие по отрезку, окрашены в разные цвета). Оказалось, что суммарная площадь чёрных частей равна суммарной площади белых. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.*

Решение. Допустим, утверждение задачи неверно. Тогда отрезки BD и CD не равны. Не умаляя общности, будем считать, что $BD < CD$. Отложим на отрезке CD отрезок $DE = BD$. Тогда суммарная площадь чёрных частей треугольника BAE равна суммарной площади его белых частей в силу симметричности чёрных частей белым относительно прямой AD. Значит, у треугольника CAE суммарные площади чёрных и белых частей также должны быть равны. Но это не так, поскольку первая сверху его часть по площади, как легко видеть, меньше второй, а третья — меньше четвёртой. Противоречие.

Задача 3. *В кружок записались 111 детей. Оказалось, что есть десять кружковцев, каждый из которых знаком более, чем с 4/5 из остальных 101. Докажите, что найдутся два кружковца, не входящих в эту десятку, таких, что каждый из десятки знает хотя бы одного из этих двоих.*

Решение. Назовём десятерых, о которых идёт речь в задаче, *знатоками*, а остальных членов кружка — *дружками*. Будем говорить, что знаток портит пару дружков, если он не знает никого из этой пары. По условию каждый знаток знает более $4\cdot101/5$, то есть не меньше 81 дружка. Значит, он незнаком самое большее с 20 дружками и может испортить максимум $20\cdot19/2 = 190$ пар дружков. Стало быть, вместе все 10 знатоков могут испортить максимум 1900 пар дружков, а всего пар дружков — $101\cdot100/2 = 5050$. Поэтому найдется неиспорченная пара дружков (и даже не меньше 3150 таких пар), что и требовалось доказать.

Задача 4. *Для натурального числа n обозначим все его делители:* $n = d_1 > d_2 > \ldots > d_k = 1$. *Докажите, что* $d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1)^{k-1}d_k = n-1$ *тогда и только тогда, когда n — простое или n = 4.*

Решение. Если n — не квадрат натурального числа, то делители числа n разбиваются на пары (d, n/d), и потому их — чётное число: $k = 2m$. Но тогда $d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1)^{k-1}d_k = d_1-(d_2-d_3)-\ldots-(d_{2m-2}-d_{2m-1})-d_{2m} \le n-m$, откуда $m = 1$, то есть n — простое число. Нетрудно видеть, что все простые числа подходят. Пусть теперь $n = s^2$. Тогда k нечётно: $k = 2m-1$, откуда $d_1-d_2+d_3-\ldots+(-1)^{k-1}d_k = d_1-(d_2-d_3)-\ldots-(d_{2m-2}-d_{2m-1}) \le n-m+1$, откуда $m \le 2$. Если $m = 1$, то $k = 1$, откуда $n = 1$ — не подходит. Если же $m = 2$, то $k = 3$, откуда $n = p^2$, где p — простое число. Тогда $d_1-d_2+d_3 = p^2-p+1 = p^2-1$, откуда $p = 2$, $n = 4$.

Задача 5. *В двух огромных корзинах лежат камни: в первой 20000, во второй 40000 камней. Петя и Вася играют в игру (ходят по очереди, начинает Петя). За один ход каждому из мальчиков разрешается взять сколько угодно камней из любой корзины, либо взять из обеих корзин любое количество камней так, чтобы общее число взятых на этом ходу камней делилось на 2015. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. Решение. Заметим, что $20000+40000 = 29\times2015+1565$. Пусть первым ходом Петя возьмёт 28×2015 камней так, чтобы в обеих корзинах осталось по $(2015+1565):2 = 1790$ камней. Далее для победы Пете достаточно будет достаточно каждым своим ходом уравнивать число камней в корзинах: рано или поздно после очередного хода Васи одна из корзин опустеет, тогда Петя возьмёт все камни из другой корзины и выиграет. Вася своим ходом уравнять число камней не сможет: если он возьмёт камни только из одной корзины, то нарушит равенство, а если он захочет взять число камней, кратное 2015, то сможет взять только 2015 камней, и равенство нарушится, так как число 2015 нечётно.

Задача 6. *Числа x, y и z удовлетворяют условиям* $xy+yz+zx > 0$ *и* $x+y > 0$. *Докажите, что* $xa^2+yb^2+zc^2 \ge 0$ *для любых чисел a, b и c, сумма которых равна 0.*

Решение. Заметим, что $(x+y)(x+z) = xy+yz+zx+x^2 \geq xy+yz+zx > 0$, откуда $x+z > 0$. Аналогично $y+z > 0$. Заметим далее, что если $a+b+c = 0$, то $c^2 = (a+b)^2$. Подставив $(a+b)^2$ вместо c^2 в неравенство $xa^2+yb^2+zc^2 \geq 0$, приведём его к виду $(x+z)a^2+(y+z)b^2+2zab \geq 0$. По неравенству о средних

$$(x+z)a^2+(y+z)b^2 \geq 2\sqrt{(x+z)(y+z)a^2b^2} = 2\sqrt{(xy+yz+xz+z^2)a^2b^2} \geq 2\sqrt{z^2a^2b^2} = 2|zab|,$$

откуда и вытекает нужное нам неравенство.

Задача 7. *В треугольнике ABC, где $\angle B = 2\angle C$, проведена биссектриса AD. Оказалось, что CD = AB. Найдите угол A.*

Ответ. 72°. Решение. Пусть BE — биссектриса угла B. Тогда $\angle EBC = \angle C$, откуда $BE = EC$. Следовательно, треугольники DCE и ABE равны по первому признаку, откуда $AE = ED$. Значит, $\angle BAD = \angle EAD = \angle EDA$, то есть $ED \parallel AB$. Но тогда $\angle BED = \angle ABE = \angle CBE$, откуда $DE = DB$. Таким образом, $AE = ED = DB$, то есть $AEDB$ — равнобедренная трапеция, и потому $\angle A = \angle B = 2\angle C$. Отсюда по теореме о сумме углов треугольника находим, что $\angle C = 36°$, а $\angle A = 72°$.

Задача 8. *Внутри прямоугольника R отмечены n точек, никакие две из которых не лежат на прямой, параллельной какой-либо стороне прямоугольника. Прямоугольник R разрезали на меньшие прямоугольники со сторонами, параллельными сторонам R, так, что все отмеченные точки оказались на линиях разрезов. Докажите, что прямоугольников разбиения не меньше n+1.*

Решение. Обозначим через k количество прямоугольников разбиения и будем индукцией по k доказывать, что $n \leq k-1$. База для $k = 1$ очевидна. Пусть теперь $k > 1$. Если внутри прямоугольника проходят только вертикальные отрезки, то их всего $k-1$, и на каждом может находиться не более одной точки. В противном случае выберем горизонтальный отрезок, который лежит ниже всех остальных, и проведем через него прямую h. Эта прямая поделит исходный прямоугольник на два; верхний из них обозначим через R'. Добьемся, чтобы все отмеченные точки оказались внутри или на границе R'. Пусть есть точка вне R'. Если она лежит на отрезке, пересекающем h, то ее можно передвинуть выше по этому отрезку так, чтобы она попала в R', но не содержалась бы ни на одной горизонтальной прямой, проходящей через остальные отмеченные точки. Если же она лежит на отрезке, соединяющем прямую h и нижнюю сторону R, то этот отрезок и точку на нем можно стереть и получить новое разбиение. При этом количество точек и прямоугольников уменьшится ровно на 1, и из предположения индукции мы получим, что $n-1 \leq k-2$. Пусть теперь нет точек, лежащих ниже h. Тогда внутрь R' попало не менее $n-1$ точки, и разбивается он не более, чем на $k-1$ прямоугольник, так как в разбиении R хотя бы один прямоугольник лежал ниже h. Но по предположению индукции $n-1 \leq k-2$, значит, переход доказан.