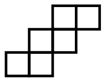
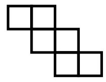
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC с острыми углами B и C проведена высота AD. Биссектрисы острых углов B и C треугольника ABC пересекают высоту AD в точках E и F соответственно. Докажите, что если $BE = CF$, то треугольник ABC равнобедренный.

2. Целые числа x и y таковы, что $x^2–2xy+y^2–5x+7y$ и $x^2–3xy+2y^2+x–y$ делятся на 17. Докажите, что $xy–12x+15y$ также делится на 17.

3. *Аскентум* — это фигура  , а *дескентум* — фигура  . Поворачивать и переворачивать аскентумы и дескентумы запрещено. Из 2017 аскентумов и n дескентумов собрали некоторую клетчатую фигуру. Может ли оказаться, что эта фигура разбивается на 2015 аскентумов и n+2 дескентума?

4. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

5. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \le 1$. Докажите, что $12xy \le 4x(1–y)+9y(1–x)$.

6. Дано бесконечное множество натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное подмножество чисел таких, что как сумма любых 2015, так и сумма любых 2017 выбранных чисел будет составным числом. (Напоминаем, что в множестве все элементы должны быть различны).

7. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

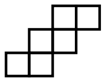
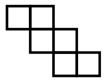
8. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC с острыми углами B и C проведена высота AD. Биссектрисы острых углов B и C треугольника ABC пересекают высоту AD в точках E и F соответственно. Докажите, что если $BE = CF$, то треугольник ABC равнобедренный.

2. Целые числа x и y таковы, что $x^2–2xy+y^2–5x+7y$ и $x^2–3xy+2y^2+x–y$ делятся на 17. Докажите, что $xy–12x+15y$ также делится на 17.

3. *Аскентум* — это фигура  , а *дескентум* — фигура  . Поворачивать и переворачивать аскентумы и дескентумы запрещено. Существует ли на клетчатой плоскости фигура, которая разбивается как на 1968 аскентумов, так и на 1968 дескентумов?

4. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

5. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \le 1$. Докажите, что $12xy \le 4x(1–y)+9y(1–x)$.

6. Дан бесконечный набор различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное количество чисел так, чтобы сумма любых 2015 выбранных чисел была составным числом.

7. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

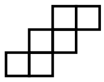
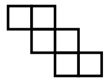
8. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

2. Целые числа x и y таковы, что $x^2–2xy+y^2–5x+7y$ и $x^2–3xy+2y^2+x–y$ делятся на 17. Докажите, что $xy–12x+15y$ также делится на 17.

3. *Аскентум* — это фигура , а *дескентум* — фигура . Поворачивать и переворачивать аскентумы и дескентумы запрещено. Существует ли на клетчатой плоскости фигура, которая разбивается как на 999 аскентумов, так и на 999 дескентумов?

4. В тупоугольном треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Точка M симметрична точке A относительно точки C, а прямая AB пересекает серединный перпендикуляр к AM в точке P. Оказалось, что прямая PM перпендикулярна BC. Докажите, что треугольник APM равносторонний.

5. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \le 1$. Докажите, что $8xy \le 5x(1–x)+5y(1–y)$.

6. Дан набор из 1526 различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать 300 чисел так, чтобы сумма любых пяти выбранных чисел была составным числом.

7. Решите уравнение $$\frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}}} = \frac{x}{36}.$$

8. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

2. Вася выписывает на доску в порядке возрастания все числа, являющиеся степенями тройки, а также суммами различных степеней тройки: 1; 3; 4; 9; 10; 12; 13; 27; 28; 30; 31, … . Какое число у Васи на 2050 месте?

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x.

4. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

5. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Найдите наименьшее натуральное a, для которого неравенство $(n!)^2\cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дан бесконечный набор различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное количество чисел так, чтобы сумма любых 2015 выбранных чисел была составным числом и сумма любых 2017 выбранных чисел была составным числом.

2. Школьник написал олимпиаду из 5 задач и за каждую получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, и руководитель хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а школьник отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. Как за 15 вопросов отгадать баллы школьника?

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x.

4. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

5. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Найдите наименьшее натуральное a, для которого неравенство $(n!)^2\cdot a^n > (2n)!$ справедливо при всех натуральных n.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle ACB = 76°$, $\angle ABC = 33°$. Точка D — пересечение биссектрисы угла C и серединного перпендикуляра к AC. Докажите, что $2CD < BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан бесконечный набор различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное количество чисел так, чтобы сумма любых 2015 выбранных чисел была составным числом.

2. Школьник написал олимпиаду из 5 задач и за каждую получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, и руководитель хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а школьник отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. Как за 15 вопросов отгадать баллы школьника?

3. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых xy^2+7 делится на x^2y+x.

4. Клетки доски 9×9 раскрашены в два цвета так, что в любом уголке из 3 клеток есть клетки обоих цветов. Оказалось, что цвет трёх угловых клеток доски — чёрный. Докажите, что четвёртая угловая клетка — тоже чёрная.

5. По кругу расставлены 17 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

6. На доске написаны числа 2,3, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. В частности, проигрывает оставивший одно число. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Докажите неравенство $3^{3000}\cdot(1000!)^3 > 3000!$ ($n!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

8. Пять игроков баскетбольной команды SUPER–MEGA–DREAM–TEAM на протяжении всего матча разное число раз попадали в корзину и набрали различное количество очков. При этом чем меньше игрок раз попал в кольцо, тем больше очков он заработал. Какое наименьшее число очков могла заработать команда за матч? Подразумевается, что за каждый бросок можно заработать 2 или 3 очка.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан набор из 1000 различных натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать 100 чисел так, чтобы сумма любых девяти выбранных чисел была составным числом.

2. Школьник написал олимпиаду из 5 задач и за каждую получил от 0 до 7 баллов. Но он не говорит свои баллы, и руководитель хочет их угадать. Он пишет последовательность из пяти оценок, а школьник отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. Как за 15 вопросов отгадать баллы школьника?

3. Найдите наименьшее число, состоящее из четырёх единиц, четырёх двоек и четырёх троек, которое делится на 4.

4. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все шесть сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каким может быть наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

5. По кругу расставлены 17 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

6. Клетки доски 8×8 раскрашены в черный и белый цвета так, что в любом уголке из 3 клеток есть клетки обоих цветов. Сколько клеток черного цвета может оказаться?

7. Докажите неравенство $2^{2000}\cdot(1000!)^2 > 2000!$ ($n!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n: $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

8. Пять игроков баскетбольной команды SUPER–MEGA–DREAM–TEAM на протяжении всего матча разное число раз попадали в корзину и набрали различное количество очков. При этом чем меньше игрок раз попал в кольцо, тем больше очков он заработал. Какое наименьшее число очков могла заработать команда за матч? Подразумевается, что за каждый бросок можно заработать 2 или 3 очка.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В поезде 50 вагонов. В нём едут два контролёра и несколько "зайцев". Контролёр ловит "зайца", если в какой-то момент оказывается с ним в одном вагоне. Пока поезд едет между станциями, каждый контролёр проверяет один вагон. На остановке каждый "заяц" может выскочить из вагона и перебежать в другой, но не далее, чем через два вагона в третий, после чего каждый из контролёров переходит в соседний вагон (в любую сторону). Новых "зайцев" на остановках не входит. Докажите, что если поезд делает 100 остановок, то за это время контролёры могут действовать так, что переловят всех "зайцев", независимо от того, в каких вагонах изначально оказались контролёры и "зайцы".

2. Найдите наименьшее число, состоящее из четырёх единиц, четырёх двоек, четырёх троек и четырёх четвёрок, которое делится на 16.

3. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

4. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел?

5. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все шесть сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каково наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Даны $4n$ натуральных чисел ($n > 10$), не превосходящих $6n$ (каждое число встречается не более одного раза). Какое наибольшее количество различных пар чисел a и b таких, что a делится на b, можно гарантированно выбрать из этого набора чисел (разные пары могут иметь общее число)?

8. Дано бесконечное множество натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать бесконечное подмножество чисел таких, что как сумма любых 2015, так и сумма любых 2017 выбранных чисел будет составным числом. (Напоминаем, что в множестве все элементы должны быть различны).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В поезде 50 вагонов. В нём едут два контролёра и несколько "зайцев". Контролёр ловит "зайца", если в какой–то момент оказывается с ним в одном вагоне. Пока поезд едет между станциями, каждый контролёр проверяет один вагон. На остановке каждый "заяц" может выскочить из вагона и перебежать в другой, но не далее, чем через два вагона в третий, после чего каждый из контролёров переходит в соседний вагон (в любую сторону). Новых "зайцев" на остановках не входит. Докажите, что если поезд делает 100 остановок, то за это время контролёры могут действовать так, что переловят всех "зайцев", независимо от того, в каких вагонах изначально оказались контролёры и "зайцы".

2. Найдите наименьшее число, состоящее из трёх единиц, трёх двоек, трёх троек и трёх четвёрок, которое делится на 8.

3. В квадрате 11×11 отметили чётное число клеток. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 также отмечено чётное число клеток. Докажите, что на каждой из главных диагоналей большого квадрата отмечено чётное число клеток.

4. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

5. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все 6 сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каково наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

6. На доске написаны числа 1, 2, ..., 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если на доске останется только единица, то игра считается закончившейся вничью, а если одно число, большее 1, то тот, кто его получил, проиграл. Каков будет результат при правильной игре обоих мальчиков?

7. Пять игроков баскетбольной команды SUPER–MEGA–DREAM–TEAM на протяжении всего матча разное число раз попадали в корзину и набрали различное количество очков. При этом чем меньше игрок раз попал в кольцо, тем больше очков он заработал. Какое наименьшее число очков могла заработать команда за матч? Подразумевается, что за каждый бросок можно заработать 2 или 3 очка.

8. Дано множество из 10000 натуральных чисел. Докажите, что из него можно выбрать 100 чисел так, что как сумма любых пяти, так и сумма любых семи выбранных чисел будет составным числом. (Напоминаем, что в множестве все элементы должны быть различны).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 1.12.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В поезде 50 вагонов. В нём едут два контролёра и несколько "зайцев". Контролёр ловит "зайца", если в какой–то момент оказывается с ним в одном вагоне. Пока поезд едет между станциями, каждый контролёр проверяет один вагон. На остановке каждый "заяц" может выскочить из вагона и перебежать в другой, но не далее, чем через два вагона в третий, после чего каждый из контролёров переходит в соседний вагон (в любую сторону). Новых "зайцев" на остановках не входит. Докажите, что если поезд делает 100 остановок, то за это время контролёры могут действовать так, что переловят всех "зайцев", независимо от того, в каких вагонах изначально оказались контролёры и "зайцы".

2. Найдите наименьшее число, состоящее из трёх единиц, трёх двоек, трёх троек и трёх четвёрок, которое делится на 8.

3. Клетки доски 9×9 раскрашены в два цвета так, что в любом «уголке» из 3 клеток есть клетки обоих цветов. Оказалось, что цвет трёх угловых клеток доски — чёрный и есть чёрная клетка, соседняя по стороне с одной из этих угловых. Докажите, что четвёртая угловая клетка — тоже чёрная.

4. По кругу расставлено 2015 положительных чисел таким образом, что каждое число равно произведению соседних. Чему может быть равна сумма всех этих чисел? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

5. В клетки таблицы 3×3 расставлены натуральные числа. Оказалось, что все шесть сумм чисел в строках и столбцах этой таблицы различны. Каково наименьшее возможное значение суммы чисел во всей таблице?

6. На доске написаны числа 2, …, 2015. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди (начинает Петя) вычёркивают эти числа. Тот, после хода которого числа, оставшиеся на доске, впервые будут иметь общий делитель, отличный от единицы, проиграл. Если же на доске останется только одно число, то игра считается закончившейся вничью. Может ли Вася не проиграть?

7. Один покупатель купил несколько товаров в магазине «Всё за 36 рублей», а второй — в магазине «Всё за 47 рублей». Первый покупатель потратил меньше рублей, но купил больше товаров. Докажите, что вместе они купили не менее 9 товаров.

8. Докажите, что из чисел 1, 2, …, 1000 можно выбрать 100 чисел так, что сумма любых пяти выбранных чисел будет нечётным составным числом.