МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. По кругу стоят $n > 10$ пустых блюдечек. Первым ходом Петя кладёт конфету на одно из них. Каждым следующим ходом он может положить конфету либо на блюдечко, следующее по часовой стрелке, либо на третье по часовой стрелке от предыдущего. (Так, если он положил на первое, то следующим ходом он может положить либо на второе, либо на четвёртое.) Класть конфету в непустое блюдечко запрещено. Также запрещено делать 4 хода одного типа подряд. Какое наибольшее количество конфет может оказаться в блюдечках?

2. Дано нечётное простое число p. Для каждого натурального $k \le p-1$ обозначим через a_k количество натуральных делителей числа $kp+1$, больших k и меньших p. Найдите $a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}$.

3. В каждой клетке таблицы 29×29 стоит 0. Каждую минуту в таблице выбирают квадрат 5×5 клеток и прибавляют по единице к числам во всех его клетках. Для какого наибольшего n можно наверняка сказать, что через 1000 минут в таблице найдутся четыре клетки, центры которых образуют вершины квадрата и такие, что сумма чисел в этих клетках не меньше n? (Стороны этого квадрата не обязательно должны быть параллельны сторонам таблицы.)

4. Каждые две из 77 точек соединены синим или зелёным отрезком. Известно, что 77 точек можно хотя бы одним способом разбить на 7 групп так, что в каждой группе любые две точки соединены зелёным отрезком. Известно также, что в любом таком разбиении каждая группа содержит ровно 11 точек. Найдите наибольшее возможное число зелёных отрезков.

5. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны основанию AD. Точки M и N — середины отрезков AB и BD соответственно. Докажите, что $CN+NM \ge DM$.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны 60°. Прямая, параллельная CD и проходящая через середину M стороны AD, пересекает сторону BC в точке P. Точка X на прямой CD такова, что $BX = MX$. Докажите, что $AB = BP$ тогда и только тогда, когда $\angle MXB = 60°$.

7. Сколько существует натуральных чисел $n \le 1526$, для которых можно подобрать вещественные числа x, y, z так, что $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$, а число $\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}+\sqrt{z+n}$ — целое?

8. Произведение положительных чисел a, b, c, d равно 1. Докажите, что $\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+d+2}+\frac{1}{d+a+2}\le1$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. По кругу стоят $n > 10$ пустых блюдечек. Первым ходом Петя кладёт конфету на одно из них. Каждым следующим ходом он может положить конфету либо на блюдечко, следующее по часовой стрелке, либо на третье по часовой стрелке от предыдущего. (Так, если он положил на первое, то следующим ходом он может положить либо на второе, либо на четвёртое.) Класть конфету в непустое блюдечко запрещено. Также запрещено делать 4 хода одного типа подряд. Какое наибольшее количество конфет может оказаться в блюдечках?

2. Дано нечётное простое число p. Для каждого натурального $k \le p-1$ обозначим через a_k количество натуральных делителей числа $kp+1$, больших k и меньших p. Найдите $a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}$.

3. В каждой клетке таблицы 29×29 стоит 0. Каждую минуту в таблице выбирают квадрат 5×5 клеток и прибавляют по единице к числам во всех его клетках. Для какого наибольшего n можно наверняка сказать, что через 1000 минут в таблице найдутся четыре клетки, центры которых образуют вершины квадрата и такие, что сумма чисел в этих клетках не меньше n? (Стороны этого квадрата не обязательно должны быть параллельны сторонам таблицы.)

4. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 9 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Докажите, что среди этих гирь есть 17 гирь одинакового веса.

5. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны основанию AD. Точки M и N — середины отрезков AB и BD соответственно. Докажите, что $CN+NM \ge DM$.

6. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, пересекает перпендикуляр к BI, проходящий через B, в точке P, а перпендикуляр к CI, проходящий через C, в точке Q. Прямая, проходящая через P параллельно BI, и прямая, проходящая через Q параллельно CI, пересекаются в точке R. Докажите, что $AI = AR$.

7. Сколько существует натуральных чисел $n \le 1526$, для которых можно подобрать вещественные числа x, y, z так, что $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$, а число $\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}+\sqrt{z+n}$ — целое?

8. Произведение положительных чисел a, b, c, d равно 1. Докажите, что
$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+d+2}+\frac{1}{d+a+2}\le 1.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. По кругу стоят $n > 10$ пустых блюдечек. Первым ходом Петя кладёт конфету на одно из них. Каждым следующим ходом он может положить конфету либо на блюдечко, следующее по часовой стрелке, либо на третье по часовой стрелке от предыдущего. (Так, если он положил на первое, то следующим ходом он может положить либо на второе, либо на четвёртое.) Класть конфету в непустое блюдечко запрещено. Также запрещено делать 4 хода одного типа подряд. Какое наибольшее количество конфет может оказаться в блюдечках?

2. Если подряд написать возраст Маши, а потом возраст Серёжи, получится четырёхзначный точный квадрат. Умный Серёжа обнаружил, что через 13 лет тоже будет так. Сколько лет Серёже?

3. В клетках доски 2016×2017 расставлены целые числа. Сумма всех чисел на доске равна нулю. Докажите, что существует 4 клетки с неотрицательной суммой, центры которых образуют квадрат со сторонами, параллельными сторонам доски.

4. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 9 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Докажите, что среди этих гирь есть 17 гирь одинакового веса.

5. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны основанию AD. Точки M и N — середины отрезков AB и BD соответственно. Докажите, что $CN+NM \geq DM$.

6. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая, параллельная BC и проходящая через точку A, пересекает перпендикуляр к BI, проходящий через B, в точке P, а перпендикуляр к CI, проходящий через C, в точке Q. Прямая, проходящая через P параллельно BI, и прямая, проходящая через Q параллельно CI, пересекаются в точке R. Докажите, что $AI = AR$.

7. На доске написано положительное число a. Если на доске написано число x, Вася может дописать на доску числа $x+1$ и $\dfrac{1}{x}$. А если на доске написаны числа x и y при $x > y$, то Вася может дописать на доску числа $x+y$ и $x–y$. Помогите Васе выписать на доску число a^3.

8. Произведение положительных чисел a, b, c, d равно 1. Докажите, что
$$\frac{1}{a+b+2}+\frac{1}{b+c+2}+\frac{1}{c+d+2}+\frac{1}{d+a+2}\leq 1.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. На доске написано положительное число a. Если на доске написано число x, Вася может дописать на доску числа $x+1$ и $\frac{1}{x}$. А если на доске написаны числа x и y при $x > y$, то Вася может дописать на доску числа $x+y$ и $x–y$. Помогите Васе выписать на доску число a^3.

2. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 9 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Докажите, что найдутся три такие гири, что сумма весов двух их них равна весу третьей.

3. Кузнечик Кузя прыгает по числовой прямой. Он начинает в точке 0 прыжком длины 1. Каждый следующий прыжок должен быть либо на 1 больше предыдущего, либо на 1 меньше предыдущего (направление прыжка может быть любым). Кузнечик хочет попасть в точку 2017, причем так, чтобы его последний прыжок имел длину 1. За какое наименьшее число прыжков он может этого добиться?

4. В клетках доски 2017×2017 расставлены целые числа. Сумма всех чисел на доске равна нулю. Докажите, что существует 4 клетки с неотрицательной суммой, центры которых образуют квадрат со сторонами, параллельными сторонам доски.

5. В стену вбито 77 гвоздей. Любые два гвоздя соединены синей или зелёной ленточкой. Известно, что эти 77 гвоздей можно хотя бы одним способом разбить на 7 групп так, что в каждой группе любые две гвоздя соединены зелёной ленточкой. Известно также, что в любом таком разбиении каждая группа содержит ровно 11 гвоздей. Найдите наибольшее возможное число зелёных ленточек.

6. Найдите все натуральные числа n, для которых число $3^n–2^n$ — простое и $6^n+2^{n+1}+1$ делится на $3^n–2^n$.

7. Числа a, b, c и d удовлетворяют соотношению $a^2+b^2+c^2 = d^2+2$ и $a, b, c, d \geq 1$. Докажите неравенство $a+b+c \geq d+2$.

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка L. На отрезок BL из точек A и C опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что $CP = DQ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7-8 МЕСТА; ПЕРВАЯ ЛИГА; ВТОРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1-4 МЕСТА

1. На доске написано положительное число a. Если на доске написано число x, Вася может дописать на доску числа $x+1$ и $\dfrac{1}{x}$. А если на доске написаны числа x и y при $x > y$, то Вася может дописать на доску числа $x+y$ и $x–y$. Помогите Васе выписать на доску число a^2.

2. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 9 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Докажите, что найдутся 12 гирь равного веса.

3. Кузнечик Кузя прыгает по числовой прямой. Он начинает в точке 0 прыжком длины 1. Каждый следующий прыжок должен быть либо на 1 больше предыдущего, либо на 1 меньше предыдущего (направление прыжка может быть любым). Кузнечик хочет попасть в точку 2017, причем так, чтобы его последний прыжок имел длину 1. За какое наименьшее число прыжков он может этого добиться?

4. В клетках доски 20×17 расставлены целые числа. Сумма всех чисел на доске равна нулю. Докажите, что существует 4 клетки с неотрицательной суммой, центры которых образуют квадрат со сторонами параллельными сторонам доски.

5. Сумма попарных произведений и произведение попарных сумм трёх натуральных чисел оба делятся на 41. Докажите, что произведение этих чисел делится на 41^2.

6. Найдите все натуральные числа n, для которых число $3^n–2^n$ — простое и $6^n+2^{n+1}+1$ делится на $3^n–2^n$.

7. Числа a, b и c удовлетворяют соотношению $a^2+b^2 = c^2+1$ и $a,b,c \geq 1$. Докажите неравенство $a+b \geq c+1$.

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка L. На отрезок BL из точек A и C опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что $CP = DQ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА

1. В классе было 25 учеников. После Нового года в нем стало на 7 учеников больше. При этом процент девочек увеличился на 10. Сколько в классе стало девочек?

2. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 9 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Докажите, что хотя бы три из этих гирь имеют одинаковый вес.

3. По кругу стоят 99 тарелок, на каждой из которых лежит одна сосиска. Эти сосиски поедают два голодных кота. Они ходят по очереди и каждый из них своим ходом может съесть либо одну сосиску, либо две сосиски, лежащие на соседних тарелках. Побеждает кот, съевший больше сосисок. Кто из котов — ходящий первым, или его соперник сможет гарантированно победить?

4. В клетках доски 7×7 расставлены целые числа. В центральной клетке стоит 0. Сумма всех чисел на доске равна нулю. Докажите, что существует 4 клетки с неотрицательной суммой, центры которых образуют квадрат.

5. Сумма попарных произведений и произведение попарных сумм трёх натуральных чисел оба делятся на 41. Докажите, что произведение этих чисел делится на 41^2.

6. Натуральные числа x, y, z и t удовлетворяют соотношению $24^x \cdot 25^y \cdot 27^z = 30^t$. Чему может быть равно отношение y/z?

7. Существует ли такая перестановка a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 чисел 1, 2, 3, 4, 5, что $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_1) = (a_1+a_3)(a_3+a_5)(a_5+a_2)(a_2+a_4)(a_4+a_1)$?

8. В равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и BC равны и $\angle B = 120°$. Точки D, E и F выбраны соответственно на отрезках AB, BC и AC. Докажите, что $DF+FE > AC/2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В классе было 25 учеников. После Нового года в нем стало на 7 учеников больше. При этом процент девочек увеличился на 10. Сколько в классе стало девочек?

2. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 9 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Докажите, что среди них найдутся две гири одинакового веса.

3. По кругу стоят 99 тарелок, на каждой из которых лежит одна сосиска. Эти сосиски поедают два голодных кота. Они ходят по очереди и каждый из них своим ходом может съесть либо одну сосиску, либо две сосиски, лежащие на соседних тарелках. Побеждает кот, съевший больше сосисок. Кто из котов — ходящий первым, или его соперник сможет гарантированно победить?

4. В клетках доски 5×5 расставлены целые числа. В центральной клетке стоит 0. Сумма всех чисел на доске равна нулю. Докажите, что существует 4 клетки с неотрицательной суммой, центры которых образуют квадрат.

5. Сумма попарных произведений и произведение попарных сумм трёх натуральных чисел оба делятся на 41. Докажите, что произведение этих чисел делится на 41^2.

6. Натуральные числа x, y, z и t удовлетворяют соотношению $24^x \cdot 25^y \cdot 27^z = 30^t$. Чему может быть равно отношение y/z?

7. Существует ли такая перестановка a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 чисел 1, 2, 3, 4, 5, что $(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_1) = (a_1+a_3)(a_3+a_5)(a_5+a_2)(a_2+a_4)(a_4+a_1)$?

8. В равнобедренном треугольнике ABC стороны AB и BC равны и $\angle B = 120°$. Точки D, E и F выбраны соответственно на отрезках AB, BC и AC. Докажите, что $DF+FE > AC/2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на доску 100×2017, чтобы каждый слон бил не более, чем двух других? (Слоны не бьют друг сквозь друга.)

2. В классе 11 мальчиков и 11 девочек. Каждый день дежурит группа из двух мальчиков и двух девочек. Могло ли в какой-то из дней оказаться, что каждый мальчик отдежурил с каждой девочкой ровно по четыре раза?

3. В квадрате 5×5 расставлены натуральные числа, сумма которых равна 1000. Докажите, что можно выбрать 4 клетки, центры которых образуют квадрат, стороны которого параллельны сторонам исходного, сумма чисел в которых не превосходит 160.

4. По кругу стоят 99 тарелок, на каждой из которых лежит одна сосиска. Эти сосиски поедают два голодных кота. Они ходят по очереди и каждый из них своим ходом может съесть либо одну сосиску, либо две сосиски, лежащие на соседних тарелках. Побеждает кот, съевший больше сосисок. Кто из котов — ходящий первым, или его соперник сможет гарантированно победить?

5. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 9 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Докажите, что найдутся три такие гири, что сумма весов двух их них равна весу третьей.

6. На острове живут 30 представителей двух племён — рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. У каждого из них ровно трое знакомых среди остальных. Каждый произнёс фразу: «Среди моих знакомых островитян не более одного моего соплеменника». Какое наибольшее количество рыцарей может быть среди них?

7. Вася выписывает числа 1, 2, 3, … . После выписывания каждого числа он считает сумму всех цифр у выписанных чисел. Докажите, что когда-нибудь эта сумма цифр будет делиться на 20172017.

8. И сумма попарных произведений, и произведение попарных сумм трёх натуральных чисел делятся на 41. Докажите, что произведение этих трёх чисел делится на 41^2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на доску 10×10, чтобы каждый слон бил не более, чем двух других? (Слоны не бьют друг сквозь друга.)

2. В классе 11 мальчиков и 11 девочек. Каждый день дежурит группа из двух мальчиков и двух девочек. Могло ли в какой-то из дней оказаться, что каждый мальчик отдежурил с каждой девочкой ровно по четыре раза?

3. В квадрате 5×5 расставлены натуральные числа, сумма которых равна 1000. Докажите, что можно выбрать 4 клетки, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязательно параллельны сторонам исходного) и сумма чисел в которых не превосходит 160.

4. По кругу стоят 99 тарелок, на каждой из которых лежит одна сосиска. Эти сосиски поедают два голодных кота. Они ходят по очереди и каждый из них своим ходом может съесть либо одну сосиску, либо две сосиски, лежащие на соседних тарелках. Побеждает кот, съевший больше сосисок. Кто из котов — ходящий первым, или его соперник сможет гарантированно победить?

5. Имеется 19 гирь. Оказалось, что если любые 5 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Могут ли все гири иметь различные веса?

6. На острове живут 30 представителей двух племён — рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. У каждого из них ровно трое знакомых среди остальных. Каждый произнёс фразу: «Среди моих знакомых островитян не более одного моего соплеменника». Какое наибольшее количество рыцарей может быть среди них?

7. Вася выписывает числа 1, 2, 3, … . После выписывания каждого числа он считает сумму всех цифр у выписанных чисел. Докажите, что когда-нибудь эта сумма цифр будет делиться на 20172017.

8. И сумма попарных произведений, и произведение попарных сумм трёх натуральных чисел делятся на 41. Докажите, что произведение этих трёх чисел делится на 41^2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Биолог целый день наблюдал ворон на дереве и отмечал галочкой в дневнике наблюдений события: отлёты и прилёты ворон. Между событиями он считал ворон, сидящих на дереве, и результат тоже записывал в дневник. Известно, что вороны, прилетевшие после того, как биолог начал наблюдение, до конца дня уже не улетали. Докажите, что число 99 могло быть записано в дневнике не более 100 раз.

2. В классе 11 мальчиков и 11 девочек. Каждый день дежурит группа из двух мальчиков и двух девочек. Могло ли в какой-то из дней оказаться, что каждый мальчик отдежурил с каждой девочкой ровно по два раза?

3. В клетках доски 5×5 расставлены целые числа. В центральной клетке стоит 0. Сумма всех чисел на доске равна нулю. Докажите, что существует 4 клетки с неотрицательной суммой, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязательно параллельны сторонам доски).

4. По кругу стоят 99 тарелок, на каждой из которых лежит одна сосиска. Эти сосиски поедают два голодных кота. Они ходят по очереди и каждый из них своим ходом может съесть либо одну сосиску, либо две сосиски, лежащие на соседних тарелках. Побеждает кот, съевший больше сосисок. Кто из котов — ходящий первым, или его соперник сможет гарантированно победить?

5. Имеется 20 гирь. Оказалось, что если любые 5 из них положить на одну чашу двухчашечных весов, то все остальные гири можно разложить по чашам весов таким образом, чтобы весы были в равновесии. Могут ли все гири иметь различные веса?

6. На острове живут 30 представителей двух племён — рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. У каждого из них ровно трое знакомых среди остальных. Каждый произнёс фразу: «Среди моих знакомых островитян не более одного моего соплеменника». Какое наибольшее количество рыцарей может быть среди них?

7. Вася выписывает числа 1, 2, 3, … . После выписывания каждого числа он считает сумму всех цифр у выписанных чисел. Докажите, что когда-нибудь эта сумма цифр будет делиться на 20172017.

8. И сумма попарных произведений, и произведение попарных сумм трёх натуральных чисел делятся на 41. Докажите, что произведение этих трёх чисел делится на 41^2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Найдите наибольшее 18-значное число, в записи которого использованы 9 двоек и 9 единиц, причём никакие четыре соседние цифры не образуют число 2111.

2. В классе 11 мальчиков и 11 девочек. Каждый день дежурит группа из двух мальчиков и двух девочек. Могло ли в какой-то из дней оказаться, что каждый мальчик отдежурил с каждой девочкой ровно по два раза?

3. В клетках доски 5×5 расставлены целые числа. В центральной клетке стоит 0. Сумма всех чисел на доске равна нулю. Докажите, что существует 4 клетки с неотрицательной суммой, центры которых образуют квадрат (стороны которого не обязательно параллельны сторонам доски).

4. По кругу стоят 99 тарелок, на каждой из которых лежит одна сосиска. Эти сосиски поедают два голодных кота. Они ходят по очереди и каждый из них своим ходом может съесть либо одну сосиску, либо две сосиски, лежащие на соседних тарелках. Побеждает кот, съевший больше сосисок. Кто из котов — ходящий первым, или его соперник сможет гарантированно победить?

5. В каждой вершине 13-угольника записали по натуральному числу, причём все числа оказались различными. Затем на каждой стороне записали сумму чисел, стоящих в её концах. Могло ли случиться, что любые два числа, записанные на соседних сторонах, отличались не более чем на 1?

6. На острове живут 30 представителей двух племён — рыцарей и лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. У каждого из них ровно трое знакомых среди остальных. Каждый произнёс фразу: «Среди моих знакомых островитян не более одного моего соплеменника». Какое наибольшее количество рыцарей может быть среди них?

7. Две бабушки выходят утром во двор, сидят на скамеечке и лузгают семечки, а ровно через 8 с половиной часов расходятся по домам. С 12 до 13 часов они уходят на обеденный перерыв, во время которого семечки не едят. Семёновна до обеда лузгает в 2 раза быстрее, чем после обеда, а Никитишна после обеда – в 4 раза быстрее, чем до обеда, и с такой же скоростью, как Семёновна до обеда. Когда бабушки должны выходить во двор, чтобы обе за день справились с одним и тем же количеством семечек?

8. Биолог целый день наблюдал ворон на дереве и отмечал галочкой в дневнике наблюдений события: отлёты и прилёты ворон. Между событиями он считал ворон, сидящих на дереве, и результат тоже записывал в дневник. Известно, что вороны, прилетевшие после того, как биолог начал наблюдение, до конца дня уже не улетали. Докажите, что число 99 могло быть записано в дневнике не более 100 раз.