МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Для данного натурального n рассмотрим все перестановки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ чисел 1, 2, ... , n такие, что при всех натуральных $k \leq n$ число ka_k является точным квадратом. При каком наименьшем n количество таких перестановок делится на 1526?

2. Точка S лежит на стороне BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через S параллельно AC, пересекает AB в точке P, а прямая, проходящая через S параллельно AB, пересекает AC в точке Q. Прямая, проходящая через B параллельно PQ, пересекает SQ в точке D. Докажите, что AD проходит через середину стороны BC.

3. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел n, для которых $(n!)^n+1$ делится на $n+2017$?

4. Сколько существует натуральных $k \leq 1000$, обладающих следующим свойством: если в квадрате 1000×1000 закрасить нечётное число клеток, то найдется прямоугольник со сторонами 1 и k, в котором закрашено нечётное число клеток?

5. Для каких натуральных N, больших 50, можно так познакомить между собой N человек, чтобы у каждых 50 из них был ровно один общий знакомый? (Человек не считается своим знакомым.)

6. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Высоты треугольников BCD, CAD и ABD пересекаются в точках H_a, H_b и H_c соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $H_aH_bH_c$ равновелики.

7. В наборе вещественных чисел разрешается выбрать два числа и заменить их двумя экземплярами их среднего арифметического. Докажите, что существует такой набор из 2017 различных вещественных чисел, что после применения этой операции к любой паре исходных чисел можно такими операциями сделать все числа равными.

8. В автобусах города Санкт-Шнур используются билеты с шестизначными номерами (номер может начинаться с любого количества нулей или даже целиком из них состоять). Суеверные жители города называют билет *счастливым*, если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме остальных трёх цифр. Делится ли сумма номеров всех счастливых билетов на 2?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Для данного натурального n рассмотрим все перестановки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ чисел 1, 2, ... , n такие, что при всех натуральных $k \le n$ число ka_k является точным квадратом. При каком наименьшем n количество таких перестановок делится на 1526?

2. Точка S лежит на стороне BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через S параллельно AC, пересекает AB в точке P, а прямая, проходящая через S параллельно AB, пересекает AC в точке Q. Прямая, проходящая через B параллельно PQ, пересекает SQ в точке D. Докажите, что AD проходит через середину стороны BC.

3. При каких натуральных n число $36^n–6$ представляется в виде произведения нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел?

4. Сколько существует натуральных $k \le 1000$, обладающих следующим свойством: если в квадрате 1000×1000 закрасить нечётное число клеток, то найдется прямоугольник со сторонами 1 и k, в котором закрашено нечётное число клеток?

5. Можно ли так познакомить между собой 2017 человек, чтобы у каждых 50 из них был ровно один общий знакомый? (Человек не считается своим знакомым.)

6. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Высоты треугольников BCD, CAD и ABD пересекаются в точках H_a, H_b и H_c соответственно. Докажите, что треугольники ABC и $H_aH_bH_c$ равновелики.

7. В наборе вещественных чисел разрешается выбрать два числа и заменить их двумя экземплярами их среднего арифметического. Докажите, что существует такой набор из 2017 различных вещественных чисел, что после применения этой операции к любой паре исходных чисел можно такими операциями сделать все числа равными.

8. В автобусах города Санкт-Шнур используются билеты с шестизначными номерами (номер может начинаться с любого количества нулей или даже целиком из них состоять). Суеверные жители города называют билет *счастливым*, если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме остальных трёх цифр. Делится ли сумма номеров всех счастливых билетов на 2?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Для данного натурального n рассмотрим все перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ такие, что при всех натуральных $k \le n$ число ka_k является точным квадратом. При каком наименьшем n количество таких перестановок делится на 1526?

2. Точка S лежит на стороне BC треугольника ABC. Прямая, проходящая через S параллельно AC, пересекает AB в точке P, а прямая, проходящая через S параллельно AB, пересекает AC в точке Q. Прямая, проходящая через B параллельно PQ, пересекает SQ в точке D. Докажите, что AD проходит через середину стороны BC.

3. При каких натуральных n число 36^n-12 представляется в виде произведения четырёх последовательных натуральных чисел?

4. Сколько существует натуральных $k \le 1000$, обладающих следующим свойством: если в квадрате 1000×1000 закрасить нечётное число клеток, то найдется прямоугольник со сторонами 1 и k, в котором закрашено нечётное число клеток?

5. В группе школьников, где больше 10 человек, у любых 10 человек есть хотя бы один общий знакомый из этой группы. Докажите, что среди этих школьников можно выбрать 11 попарно знакомых. (Человек не считается своим знакомым.)

6. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ ($AB > BC$) отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle BCM = 30°$, а N симметрично M относительно точки O пересечения диагоналей прямоугольника. Докажите, что треугольник CNM равносторонний тогда и только тогда, когда $OB \perp CM$.

7. В наборе вещественных чисел разрешается выбрать два числа и заменить их двумя экземплярами их среднего арифметического. Докажите, что существует такой набор из пяти различных вещественных чисел, что после применения этой операции к любой паре исходных чисел можно такими операциями сделать все числа равными.

8. В автобусах города Санкт-Шнур используются билеты с шестизначными номерами (номер может начинаться с любого количества нулей или даже целиком из них состоять). Суеверные жители города называют билет *счастливым*, если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме остальных трёх цифр. Делится ли сумма номеров всех счастливых билетов на 2?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2017 учеников нескольких спортивных школ, не более чем 40 от школы. Учеников каждой школы требуется разместить на один ряд. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы в любом случае это удалось сделать?

2. Дан правильный девятиугольник. В каждую его вершину сладкоежка Маша помещает конфеты (от 1 до 9 штук), причем количество конфет во всех вершинах различно. Петя выбирает три вершины девятиугольника, которые образуют вершины равнобедренного треугольника и отдает расположенные в них конфеты Маше. Остальные конфеты он съедает сам. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно получить Маша?

3. Существует ли такой палиндром, что его можно разложить в произведение двух других палиндромов не менее, чем 2017 способами? (Натуральное число называется палиндромом, если оно равно числу, получаемому из данного перестановкой всех цифр в обратном порядке. Например, 1209021).

4. На острове проживает 2017 человек. Может ли оказаться так, что у любых 50 островитян ровно один общий знакомый (отличный от этих 50)?

5. Сколько существует натуральных $k \le 1000$, обладающих следующим свойством: если в квадрате 1000×1000 закрасить нечётное число клеток, то найдется прямоугольник со сторонами 1 и k, в котором закрашено нечётное число клеток?

6. При каких натуральных n число 36^n–6 представляется в виде произведения нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел?

7. Для положительных чисел a, b и числа $c \ge 1$ докажите неравенство $\dfrac{1}{a^2+abc}+\dfrac{1}{b^2+abc}\le\dfrac{2}{ab(c+1)}$.

8. Точка D — середина стороны BC треугольника ABC. На отрезке AD отмечена такая точка E, что $AE = BD$. На биссектрисе угла $\angle ADC$ отмечена такая точка F, что $\angle BFD = 30°$. Докажите, что $ED+BF > AC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 168 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 2017 учеников нескольких спортивных школ, не более чем 40 от школы. Учеников каждой школы требуется разместить на один ряд. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы в любом случае это удалось сделать

2. Дан правильный восьмиугольник. В каждую его вершину сладкоежка Маша помещает конфеты (от 1 до 8 штук), причем количество конфет во всех вершинах различно. Петя выбирает три вершины девятиугольника, которые образуют вершины равнобедренного треугольника и отдает расположенные в них конфеты Маше. Остальные конфеты он съедает сам. Какое наибольшее количество конфет может гарантированно получить Маша?

3. Существует ли такой палиндром, что его можно разложить в произведение двух других палиндромов не менее, чем 2017 способами? (Натуральное число называется палиндромом, если оно равно числу, получаемому из данного перестановкой всех цифр в обратном порядке. Например, 1209021).

4. В математический лагерь приехало 52 школьника. Может ли оказаться так, что у любых 50 школьников ровно один общий знакомый (отличный от этих 50)?

5. Найдите все натуральные $k \le 12$, обладающие следующим свойством: если в квадрате 12×12 закрасить нечётное число клеток, то найдется прямоугольник со сторонами 1 и k, в котором закрашено нечётное число клеток.

6. При каких натуральных n число 36^n–6 представляется в виде произведения двух последовательных натуральных чисел?

7. Для положительных чисел a, b и числа $c \ge 1$ докажите неравенство $\dfrac{1}{a^2+abc}+\dfrac{1}{b^2+abc} \le \dfrac{2}{ab(c+1)}$.

8. Дан треугольник ABC. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Известно, что $AH : HB = 1 : 2$. Докажите, что $3BC < AB+3AC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На трибунах хоккейной арены несколько рядов по 75 мест в каждом ряду. На финальный матч в качестве зрителей пригласили 798 учеников нескольких спортивных школ, не более чем 40 от школы. Учеников каждой школы требуется разместить на один ряд. Какое наименьшее количество рядов должно быть на арене, чтобы в любом случае это удалось сделать?

2. На планете Шелезяка год длится некоторое число дней, которые пронумерованы числами 1, 2, 3, ... Все дни, номера которых делятся на 6, считаются выходными. Правительство Шелезяки провело реформу, в результате которой год был разделён на 15 месяцев (длины которых могут быть различны) и пронумеровало дни в каждом месяце числами 1, 2, 3, ... Теперь выходными считаются те дни, номер которых в текущем месяце делится на 6. На какое наибольшее число могло уменьшится число выходных в году в результате реформы?

3. Существует ли такой палиндром, что его можно разложить в произведение двух других палиндромов не менее, чем 2017 способами? (Натуральное число называется палиндромом, если оно равно числу, получаемому из данного перестановкой всех цифр в обратном порядке, например, 1209021).

4. В группе школьников у любых 10 человек есть хотя бы один общий знакомый. Докажите, что среди этих школьников можно выбрать 11 попарно знакомых.

5. В квадрате 10×10 закрашено нечётное число клеток. Обязательно ли найдется прямоугольник со сторонами 1 и 4, в котором закрашено нечётное число клеток?

6. При каких натуральных n число 36^n-6 представляется в виде произведения двух последовательных натуральных чисел?

7. Положительные числа x, y и z не превосходят 1. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{xy+x+y}+\frac{yz}{yz+y+z}+\frac{zx}{zx+z+x}\le 1.$$

8. Дан треугольник ABC. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Известно, что $AH : HB = 1 : 2$. Докажите, что $3BC < AB+3AC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Есть 20 шаров, среди которых 12 радиоактивных. У Васи имеется прибор, который по положенным в него нескольким шарам сообщает, больше среди них радиоактивных, чем нормальных, меньше, или поровну. Если же все положенные в прибор шары окажутся радиоактивными, то прибор взрывается. Может ли Вася гарантированно найти все радиоактивные шары, не взорвав прибор?

2. На планете Шелезяка год длится некоторое число дней, которые пронумерованы числами 1, 2, 3, ... Все дни, номера которых делятся на 6, считаются выходными. Правительство Шелезяки провело реформу, в результате которой год был разделён на 15 месяцев (длины которых могут быть различны) и пронумеровало дни в каждом месяце числами 1, 2, 3, ... Теперь выходными считаются те дни, номер которых в текущем месяце делится на 6. На какое наибольшее число могло уменьшится число выходных в году в результате реформы?

3. На доске записано выражение 1+2+3+4+5+6+7+8+9. Два игрока поочерёдно заменяют плюсы знаками умножения (одним ходом — один плюс). Выигрывает тот, после чьего хода выражение на доске впервые станет больше 1000. Кто из игроков может выиграть вне зависимости от действий соперника?

4. В стране несколько (больше трёх) городов. Некоторые пары городов соединены дорогами с двусторонним движением. Известно, что для любых трех городов найдется четвертый, соединенный дорогами с каждым из этих трех городов. Докажите, что в стране есть четыре города, попарно соединенные дорогами.

5. В квадрате 10×10 закрашено нечётное число клеток. Обязательно ли найдется прямоугольник со сторонами 1 и 4, в котором закрашено нечётное число клеток?

6. При каких натуральных n число 36^n-12 представляется в виде произведения четырёх последовательных натуральных чисел?

7. Положительные числа x, y и z не превосходят 1. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{xy+x+y}+\frac{yz}{yz+y+z}+\frac{zx}{zx+z+x}\le 1.$$

8. Дан треугольник ABC. Точка H — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Известно, что $AH:HB=1:2$. Докажите, что $3BC<AB+3AC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В клетчатом квадрате 100×100 отмечено несколько не лежащих на его границе узлов (узлом называется любая точка, являющаяся вершиной какой-нибудь клетки). В каждой клетке стоит число, равное количеству отмеченных узлов в вершинах этой клетки. Всегда ли можно установить, какие узлы были отмечены, если знать только числа, стоящие в клетках?

2. На планете Шелезяка год длится некоторое число дней, которые пронумерованы числами 1, 2, 3, ... Все дни, номера которых делятся на 6, считаются выходными. Правительство Шелезяки провело реформу, в результате которой год был разделён на 49 месяцев (длины которых могут быть различны) и пронумеровало дни в каждом месяце числами 1, 2, 3, ... Теперь выходными считаются те дни, номер которых в текущем месяце делится на 6. Докажите, что количество выходных в году изменится не более, чем на 40.

3. На столе в ряд лежат 100 монет, некоторые — орлом вверх, остальные — решкой. За один ход Петя выбирает две рядом лежащие монеты, левая из которых лежит орлом вверх, а правая — решкой (если такие есть), обе переворачивает, находит в ряду любую другую монету, лежащую орлом, и перекладывает её орлом между ними. Докажите, что через несколько ходов Петя не сможет сделать хода.

4. Найдите все натуральные $k \leq 1000$, обладающие следующим свойством: если в квадрате 1000×1000 закрасить нечётное число клеток, то и в каком-то прямоугольнике $1\times k$ будет нечётное число закрашенных клеток.

5. В лагерь приехало 2017 детей. Могло ли так случиться, что для любых десяти из них найдётся ровно один из остальных 2007, который знаком со всеми этими десятью детьми?

6. Есть 10 шаров, среди которых k ($k < 10$) радиоактивных. Вася знает, сколько шаров радиоактивны, но не знает, какие именно. У Васи имеется прибор, который по положенным в него нескольким шарам сообщает, больше среди них радиоактивных, чем нормальных, меньше, или поровну. Если же все положенные в прибор шары окажутся радиоактивными, то прибор взрывается. При каком наибольшем k Вася может найти все радиоактивные шары, не взорвав прибор?

7. Некоторое число k равно произведению 100 различных простых чисел. Докажите, что у k найдутся 100 различных натуральных делителей, сумма которых взаимно проста с k.

8. Существует ли такой палиндром, что его можно разложить в произведение двух других палиндромов не менее, чем 2017 способами? (Натуральное число называется палиндромом, если оно равно числу, получаемому из него перестановкой всех цифр в обратном порядке. Например, 1209021.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В клетчатом квадрате 100×100 отмечено несколько не лежащих на его границе узлов (узлом называется любая точка, являющаяся вершиной какой-нибудь клетки). В каждой клетке стоит число, равное количеству отмеченных узлов в вершинах этой клетки. Всегда ли можно установить, какие узлы были отмечены, если знать только числа, стоящие в клетках?

2. На планете Шелезяка год длится некоторое число дней, которые пронумерованы числами 1, 2, 3, ... Все дни, номера которых делятся на 6, считаются выходными. Правительство Шелезяки провело реформу, в результате которой год был разделён на 49 месяцев (длины которых могут быть различны) и пронумеровало дни в каждом месяце числами 1, 2, 3, ... Теперь выходными считаются те дни, номер которых в текущем месяце делится на 6. Докажите, что количество выходных в году изменится не более, чем на 40.

3. На столе в ряд лежат 100 монет, некоторые — орлом вверх, остальные — решкой. За один ход Петя выбирает две рядом лежащие монеты, левая из которых лежит орлом вверх, а правая — решкой (если такие есть), обе переворачивает, находит в ряду любую другую монету, лежащую орлом, и перекладывает её орлом между ними. Докажите, что через несколько ходов Петя не сможет сделать хода.

4. Шахматная фигура «недоферзь» бьёт почти как обычный ферзь, но не может бить на 7 клеток по вертикали, горизонтали и диагонали (обычный — может). Какое наибольшее количество недоферзей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

5. В лагерь приехало 150 детей. Могло ли так случиться, что для любых 100 из них найдётся ровно один из остальных 50, который знаком со всеми этими 100 детьми?

6. Есть 10 шаров, среди которых k ($k < 10$) радиоактивных. Вася знает, сколько шаров радиоактивны, но не знает, какие именно. У Васи имеется прибор, который по положенным в него нескольким шарам сообщает, больше среди них радиоактивных, чем нормальных, меньше, или поровну. Если же все положенные в прибор шары окажутся радиоактивными, то прибор взрывается. При каком наибольшем k Вася может найти все радиоактивные шары, не взорвав прибор?

7. Найдите все натуральные числа n, у которых ровно 4 (различных) натуральных делителя, и среди всех шести попарных сумм этих делителей ровно две взаимно просты с n.

8. Существует ли такой палиндром, что его можно разложить в произведение двух других палиндромов не менее, чем 2017 способами? (Натуральное число называется палиндромом, если оно равно числу, получаемому из него перестановкой всех цифр в обратном порядке. Например, 1209021).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В клетчатом квадрате 100×100 отмечено несколько не лежащих на его границе узлов (узлом называется любая точка, являющаяся вершиной какой-нибудь клетки). В каждой клетке стоит число, равное количеству отмеченных узлов в вершинах этой клетки. Всегда ли можно установить, какие узлы были отмечены, если знать только числа, стоящие в клетках?

2. В стране Анчурии год длится 365 дней, которые пронумерованы числами 1, 2, 3, … . Все дни, номера которых делятся на 6, считаются выходными. Правительство Анчурии провело реформу, в результате которой год был разделён на 2 сезона (длины которых могут быть различны) и пронумеровало дни в каждом сезоне числами 1, 2, 3, … . Теперь выходными считаются те дни, номера которых в текущем сезоне делятся на 6. На сколько могло измениться количество выходных дней в результате данной реформы?

3. На столе в ряд лежат 100 монет, две из них решкой вверх, остальные — орлом. За один ход Петя выбирает две рядом лежащие монеты, левая из которых лежит орлом вверх, а правая — решкой (если такие есть), обе переворачивает и кладёт между ними ещё одну новую монету орлом вверх. Докажите, что через несколько ходов Петя не сможет сделать хода.

4. Дано натуральное число n, у которого ровно 4 (различных) натуральных делителя. Докажите, что среди всех шести попарных сумм этих делителей найдутся хотя бы две, взаимно простые с n.

5. Шахматная фигура «недоферзь» бьёт почти как обычный ферзь, но не может бить на 7 клеток по вертикали, горизонтали и диагонали (обычный — может). Какое наибольшее количество недоферзей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

6. Есть 10 шаров, среди которых k ($k < 10$) радиоактивных. Вася знает, сколько шаров радиоактивны, но не знает, какие именно. У Васи имеется прибор, который по положенным в него нескольким шарам сообщает, больше среди них радиоактивных, чем нормальных, меньше, или поровну. Если же все положенные в прибор шары окажутся радиоактивными, то прибор взрывается. При каком наибольшем k Вася может найти все радиоактивные шары, не взорвав прибор?

7. В группе из 100 школьников у любых 10 человек есть хотя бы один общий знакомый среди остальных 90. Докажите, что среди этих школьников можно выбрать 11 попарно знакомых.

8. На доске записано выражение 1+2+3+4+5+6+7+8+9. Два игрока поочерёдно заменяют плюсы знаками умножения (одним ходом — один плюс), и выигрывает тот, после чьего хода выражение на доске впервые станет больше 1000. Кто выиграет?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В клетчатом квадрате 100×100 отмечено несколько не лежащих на его границе узлов (узлом называется любая точка, являющаяся вершиной какой-нибудь клетки). В каждой клетке стоит число, равное количеству отмеченных узлов в вершинах этой клетки. Всегда ли можно установить, какие узлы были отмечены, если знать только числа, стоящие в клетках?

2. На планете Шелезяка год длится 365 дней, которые пронумерованы числами 1, 2, 3, … . Все дни, номера которых делятся на 6, считаются выходными. Правительство Шелезяки провело реформу, в результате которой год был разделён на 2 сезона (длины которых различны) и пронумеровало дни в каждом сезоне числами 1, 2, 3, … . Теперь выходными считаются те дни, номер которых в текущем сезоне делится на 6. Может ли число выходных в году измениться в результате реформы?

3. На столе в ряд лежат 100 монет, две — решкой вверх, остальные — орлом. За один ход Петя выбирает две рядом лежащие монеты, левая из которых лежит орлом вверх, а правая — решкой (если такие есть), обе переворачивает и кладёт между ними ещё одну монету орлом вверх. Докажите, что через несколько ходов Петя не сможет сделать хода.

4. Аня провела через бумажный квадрат несколько прямых линий и по ним разрезала квадрат на несколько кусочков. Затем она выбрала кусочек с самым большим количеством сторон и двумя прямолинейными разрезами от края до края разделила его на треугольник, четырёхугольник и пятиугольник. Сколько сторон могло быть у выбранного кусочка? Укажите все возможности и докажите, что других нет.

5. Шахматная фигура «недоферзь» бьёт почти как обычный ферзь, но не может бить на 7 клеток по вертикали, горизонтали и диагонали (обычный — может). Какое наибольшее количество недоферзей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

6. Есть 10 шаров, среди которых k ($k < 10$) радиоактивных. Вася знает, сколько шаров радиоактивны, но не знает, какие именно. У Васи имеется прибор, который по положенным в него нескольким шарам сообщает, больше среди них радиоактивных, чем нормальных, меньше, или поровну. Если же все положенные в прибор шары окажутся радиоактивными, то прибор взрывается. При каком наибольшем k Вася может найти все радиоактивные шары, не взорвав прибор?

7. При помощи скобок и знаков четырёх арифметических действий сделайте из числа 1234567 выражение, равное 2017.

8. На доске записано выражение 1+2+3+4+5+6+7+8+9. Два игрока поочерёдно заменяют плюсы знаками умножения (одним ходом — один плюс), и выигрывает тот, после чьего хода выражение на доске впервые станет больше 1000. Кто выиграет?