МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Для составного натурального числа n нашлось такое натуральное k, что, каков бы ни был делитель d числа n, $1 < d < n$, число $n-kd$ — делитель n. Докажите, что n — квадрат простого числа.

2. Дано натуральное число n. Докажите, что все его натуральные делители можно выписать в строчку (по одному разу каждый) таким образом, чтобы для любых двух стоящих рядом делителей отношение большего из них к меньшему было простым числом.

3. Решите в действительных числах систему уравнений $x+yzt = y+ztx = z+txy = t+xyz = 2$.

4. На плоскости провели три попарно пересекающихся прямых a, b, c. Затем провели ещё 100 прямых, параллельных a, 200 прямых, параллельных b, и 300 прямых, параллельных c. На какое наименьшее число частей могли все эти прямые разбить плоскость?

5. Боря пишет на доске последовательность из 2016 чисел, 1008 из которых равны 1, а остальные 1008 равны -1. После этого Аня разбивает эту последовательность на несколько блоков последовательных чисел (не менее чем из одного числа) и находит сумму чисел в каждом блоке. Аня хочет, чтобы сумма квадратов полученных сумм была равна данному числу N. Найдите все N, при которых Аня сможет этого добиться, как бы Боря ни расставил числа вначале.

6. В треугольнике ABC с тупым углом A угол B в два раза больше угла C. Точка M — середина стороны BC. Перпендикуляр к AC, восставленный в точке C, пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что $\angle AMB = \angle DMC$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол A равен 72°. На стороне AB отмечены точки D и E такие, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB$. Точка F на отрезке BC — основание биссектрисы EF угла BEC. Докажите, что $AF = CF$.

8. В куче лежат маркеры нескольких цветов и размеров. Никакие два маркера не совпадают одновременно по цвету и размеру. На каждом маркере написаны два числа: количество маркеров того же цвета, но другого размера, и количество маркеров того же размера, но другого цвета. Каждое число от 0 до 10 написано хотя бы на одном маркере. Найдите наименьшую возможную сумму всех написанных чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Для составного натурального числа n нашлось такое натуральное k, что, каков бы ни был делитель d числа n, $1 < d < n$, число $n-kd$ — делитель n. Докажите, что n — квадрат простого числа.

2. Дано натуральное число n. Докажите, что все его натуральные делители можно выписать в строчку (по одному разу каждый) таким образом, чтобы для любых двух стоящих рядом делителей отношение большего из них к меньшему было простым числом.

3. Решите в действительных числах систему уравнений $x+yzt = y+ztx = z+txy = t+xyz = 2$.

4. В математическом кружке занимается 10 детей. После каждого занятия один из учеников стирает с доски. Начиная с восемнадцатого занятия, Александр Сергеевич считает, кто стирал с доски больше всего раз за последние 17 занятий, и поручает стирать с доски этому ученику (если наибольший результат одновременно у нескольких учеников, Александр Сергеевич выбирает любого). Докажите, что, начиная с какого-то момента, стирать с доски всегда будет один и тот же ученик.

5. Боря пишет на доске последовательность из 2016 чисел, 1008 из которых равны 1, а остальные 1008 равны -1. После этого Аня разбивает эту последовательность на несколько блоков последовательных чисел (не менее чем из одного числа) и находит сумму чисел в каждом блоке. Аня хочет, чтобы сумма квадратов полученных сумм была равна данному числу N. Найдите все N, при которых Аня сможет этого добиться, как бы Боря ни расставил числа вначале.

6. На прямую, проходящую через точку пересечения медиан треугольника ABC и пересекающую стороны CA и CB, опущены перпендикуляры AX, BZ и CY. Докажите, что $CY = AX+BZ$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол A равен 72°. На стороне AB отмечены точки D и E такие, что $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB$. Точка F на отрезке BC — основание биссектрисы EF угла BEC. Докажите, что $AF = CF$.

8. В куче лежат маркеры нескольких цветов и размеров. Никакие два маркера не совпадают одновременно по цвету и размеру. На каждом маркере написаны два числа: количество маркеров того же цвета, но другого размера, и количество маркеров того же размера, но другого цвета. Каждое число от 0 до 10 написано хотя бы на одном маркере. Найдите наименьшую возможную сумму всех написанных чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дано простое число p. Найдите все натуральные b такие, что все корни уравнения $x^2-bx+bp=0$ целые.

2. Дано натуральное число n, равное произведению нескольких различных простых чисел. Докажите, что все его натуральные делители можно выписать в строчку (по одному разу каждый) таким образом, чтобы для любых двух стоящих рядом делителей отношение большего из них к меньшему было простым числом.

3. При каком наименьшем r можно утверждать, что если вещественные числа a и b не меньше r, то $a^3+ab+b^3 \geq a^2+b^2$?

4. В математическом кружке занимается 10 детей. После каждого занятия один из учеников стирает с доски. Начиная с восемнадцатого занятия, Александр Сергеевич считает, кто стирал с доски больше всего раз за последние 17 занятий, и поручает стирать с доски этому ученику (если наибольший результат одновременно у нескольких учеников, Александр Сергеевич выбирает любого). Докажите, что, начиная с какого-то момента, стирать с доски всегда будет один и тот же ученик.

5. Боря пишет на доске последовательность из 2016 чисел, 1008 из которых равны 1, а остальные 1008 равны -1. После этого Аня разбивает эту последовательность на несколько блоков последовательных чисел (не менее чем из одного числа) и находит сумму чисел в каждом блоке. Аня хочет, чтобы сумма квадратов полученных сумм была равна данному числу N. Найдите наибольшее N, при котором Аня сможет этого добиться, как бы Боря ни расставил числа вначале.

6. На прямую, проходящую через точку пересечения медиан треугольника ABC и пересекающую стороны CA и CB, опущены перпендикуляры AX, BZ и CY. Докажите, что $CY=AX+BZ$.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) угол A равен 72°. На стороне AB отмечены точки D и E такие, что $\angle ACD=\angle DCE=\angle ECB$. Точка F на отрезке BC — основание биссектрисы EF угла BEC. Докажите, что $AF=CF$.

8. В куче лежат маркеры нескольких цветов и размеров. Никакие два маркера не совпадают одновременно по цвету и размеру. На каждом маркере написаны два числа: количество маркеров того же цвета, но другого размера, и количество маркеров того же размера, но другого цвета. Каждое число от 0 до 10 написано хотя бы на одном маркере. Найдите наименьшую возможную сумму всех написанных чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Несколько мальчиков стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 20 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Оказалось, что для любых двух мальчиков у одного процент попаданий и до обеда, и после выше, зато у другого больше попаданий в сумме. Какое наибольшее число мальчиков могло стрелять?

2. На очень большом клетчатом листе бумаги со стороной клетки, равной 1, отмечено 100 клеток. Между любыми двумя отмеченными клетками можно пройти за несколько ходов, переходя каждым ходом в соседнюю по стороне отмеченную клетку. Докажите, что все отмеченные клетки можно поместить в прямоугольник со сторонами 50 и 100.

3. Дима загадал целое число, а Петя пытается его угадать. На каждом шаге он выбирает целое число N и задает Диме вопрос: «Верно ли, что загаданное число равно N?». Если Петя не угадал, то Дима сообщает Пете, больше или меньше загаданное число, чем N, а затем обязан перезагадать свое число, либо увеличив его на N, либо уменьшив его на N (Петя не знает, какой из этих двух вариантов выберет Дима). Может ли Петя действовать так, чтобы через несколько шагов гарантированно угадать текущее загаданное число?

4. Клетки квадрата $n\times n$ окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат 2×2 и поменять в нём цвет всех 4 клеток на противоположный. При каких n за несколько таких ходов можно все клетки сделать одноцветными?

5. Для натуральных чисел a, b и n число a^2+2nb^2 является квадратом натурального числа. Докажите, что число a^2+nb^2 является суммой двух квадратов натуральных чисел.

6. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого–то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

7. Числа a, b, c, d и e лежат между 0 и 1. Докажите, что $(1+a+b+c+d+e)^2 \geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$.

8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка K, что AK — биссектриса угла $\angle BAC$. Оказалось, что $2BM = AK$. Найдите углы треугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Несколько мальчиков стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 20 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Оказалось, что для любых двух мальчиков у одного процент попаданий и до обеда, и после выше, зато у другого больше попаданий в сумме. Какое наибольшее число мальчиков могло стрелять?

2. В каждой вершине семиугольника записано три числа таким образом, что все числа от 1 до 21 встречаются по одному разу, а суммы всех шестёрок чисел, записанных в концах каждой из сторон, равны. Докажите, что какие-то два из чисел 13,14,15,16,17 попадут в одну вершину.

3. Дима загадал целое число, которое больше -100 и меньше 100, а Петя пытается его угадать. На каждом шаге он выбирает целое число N и задает Диме вопрос: «Верно ли, что загаданное число равно N?». Если Петя не угадал, то Дима сообщает Пете, больше или меньше загаданное число, чем N, а затем обязан перезагадать свое число, либо увеличив его на N, либо уменьшив его на N (Петя не знает, какой из этих двух вариантов выберет Дима). Может ли Петя действовать так, чтобы через несколько шагов гарантированно угадать текущее загаданное число?

4. Клетки квадрата $n\times n$ окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат 2×2 и поменять в нём цвет всех 4 клеток на противоположный. При каких n за несколько таких ходов можно все клетки сделать одноцветными?

5. Для натуральных чисел a, b и n число a^2+2nb^2 является квадратом натурального числа. Докажите, что число a^2+nb^2 является суммой двух квадратов натуральных чисел.

6. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого–то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

7. Числа a, b, c, d и e лежат между 0 и 1. Докажите неравенство $(1+a+b+c+d+e)^2 \geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$.

8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На стороне BC выбрана такая точка K, что AK — биссектриса угла $\angle BAC$. Оказалось, что $2BM = AK$. Найдите углы треугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Четверо мальчиков стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 11 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Могло ли так случиться, что для любых двух мальчиков у одного процент попаданий и до обеда, и после выше, зато у другого больше попаданий в сумме?

2. В каждой вершине семиугольника записано три числа таким образом, что все числа от 1 до 21 встречаются по одному разу, а суммы всех шестёрок чисел, записанных в концах каждой из сторон, равны. Докажите, что какие-то два из чисел 13,14,15,16,17 попадут в одну вершину.

3. Дима загадал целое число, которое не меньше -5 и не больше 5, а Петя пытается его угадать. На каждом шаге он выбирает целое число N и задает Диме вопрос: «Верно ли, что загаданное число равно N?». Если Петя не угадал, то Дима сообщает Пете, больше или меньше загаданное число, чем N, а затем обязан перезагадать свое число, либо увеличив его на N, либо уменьшив его на N (Петя не знает, какой из этих двух вариантов выберет Дима). Может ли Петя действовать так, чтобы через несколько шагов гарантированно угадать текущее загаданное число?

4. Клетки квадрата 50×50 окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат 2×2 и поменять в нём цвет всех 4 клеток на противоположный. Можно ли за несколько таких ходов сделать все клетки одноцветными?

5. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что НОД(x,y)+НОК$(x,y)+x+y = 20162017$?

6. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого–то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

7. Числа a и b лежат между 0 и 1. Докажите неравенство $(1+a+b)^2 \geq 4(a^2+b^2)$.

8. Отрезок AB — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC. На прямой AB отметили такие точки K и M, не лежащие на отрезке AB, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол KCM.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Четверо мальчиков стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 11 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Могло ли так случиться, что для любых двух мальчиков у одного процент попаданий и до обеда, и после выше, зато у другого больше попаданий в сумме?

2. В каждой вершине семиугольника записано два числа таким образом, что все числа от 1 до 14 встречаются по одному разу, а суммы всех четвёрок чисел, записанных в концах каждой из сторон, равны. Какое число могло быть записано вместе с числом 7?

3. Клетки квадрата 12×12 окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат 2×2 и поменять в нём цвет всех четырёх клеток на противоположный. Можно ли за несколько ходов все клетки сделать одноцветными?

4. Вася написал в первой строчке четыре последовательных натуральных числа по порядку. Потом он во второй строчке подписал под каждым написанным числом сумму его цифр. Оказалось, что сумма первых двух чисел второй строчки равна 100, а сумма второго и третьего чисел второй строчки равна 75. Чему может быть равна сумма двух последних чисел второй строчки?

5. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что НОД(x,y)+НОК(x,y)+x+y = 20162017?

6. На двух чашках весов, находящихся в равновесии, лежат дробинки двух разных калибров, но на каждой чашке только одного калибра. Всего дробинок 195. Если снять с одной чашки весов 11 дробинок, то для сохранения равновесия надо с другой чашки переложить на первую 2 дробинки. Сколько дробинок каждого калибра лежит на весах?

7. Числа a и b лежат между 0 и 1. Докажите неравенство $(1+a+b)^2 \geq 4(a^2+b^2)$.

8. Отрезок AB — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC. На прямой AB отметили такие точки K и M, не лежащие на отрезке AB, что $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол KCM.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В каждой вершине семиугольника записано три числа таким образом, что все числа от 1 до 21 встречаются по одному разу, а суммы всех шестёрок чисел, записанных в концах каждой из сторон, равны. Докажите, что какие-то два из чисел 13,14,15,16,17 попадут в одну вершину.

2. Клетки квадрата $n \times n$ окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат 2×2 и поменять в нём цвет всех 4 клеток на противоположный. При каких n за несколько таких ходов можно все клетки сделать одноцветными?

3. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого-то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

4. Дима загадал целое число, которое больше -1000 и меньше 1000, а Петя пытается его угадать. На каждом шаге он выбирает целое число N и задает Диме вопрос: «Верно ли, что загаданное число равно N?». Если Петя не угадал, то Дима сообщает Пете, больше или меньше загаданное число, чем N, а затем обязан перезагадать свое число, либо увеличив его на N, либо уменьшив его на N (Петя не знает, какой из этих двух вариантов выберет Дима). Может ли Петя действовать так, чтобы через несколько шагов гарантированно угадать текущее загаданное число?

5. В бассейн ведут четыре трубы, каждая из которых равномерно заполняет бассейн. Если включить первые три трубы, то бассейн заполнится за сорок минут. Если все, кроме третьей, то за 30 минут, если все, кроме второй, то за 25 минут, а если все, кроме первой, то за 24 минуты. Успеет ли бассейн заполниться за 20 минут, если включить все четыре трубы?

6. Шестеро мальчиков стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 17 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Могло ли так случиться, что для любых двух мальчиков у одного выше процент попаданий до обеда, выше процент попаданий после обеда, но меньше попаданий в сумме?

7. Вася написал в первой строчке четыре последовательных натуральных числа по порядку. Потом он во второй строчке подписал под каждым написанным числом сумму его цифр. Оказалось, что сумма первых двух чисел второй строчки равна 100, а сумма второго и третьего чисел второй строчки равна 75. Чему может быть равна сумма двух последних чисел второй строчки?

8. Дано натуральное число n. Докажите, что все его натуральные делители можно выписать в строчку (по одному разу каждый) таким образом, чтобы для любых двух стоящих рядом делителей отношение большего из них к меньшему было простым числом.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В каждой вершине семиугольника записано два числа таким образом, что все числа от 1 до 14 встречаются по одному разу, а суммы всех четвёрок чисел, записанных в концах каждой из сторон, равны. Какое число могло быть записано вместе с числом 7?

2. Клетки квадрата $n \times n$ окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат 2×2 и поменять в нём цвет всех 4 клеток на противоположный. При каких n за несколько таких ходов можно все клетки сделать одноцветными?

3. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого-то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

4. Дима загадал целое число, которое больше –1000 и меньше 1000, а Петя пытается его угадать. На каждом шаге он выбирает целое число N и задает Диме вопрос: «Верно ли, что загаданное число равно N?». Если Петя не угадал, то Дима сообщает Пете, больше или меньше загаданное число, чем N, а затем обязан перезагадать свое число, либо увеличив его на N, либо уменьшив его на N (Петя не знает, какой из этих двух вариантов выберет Дима). Может ли Петя действовать так, чтобы через несколько шагов гарантированно угадать текущее загаданное число?

5. В бассейн ведут три трубы, каждая из которых равномерно заполняет бассейн. Если включить первые две трубы, то бассейн заполнится за сорок минут. Если первую и третью, то за 30 минут, а если вторую и третью, то за 20 минут. Успеет ли бассейн заполниться за 18 минут, если включить все три трубы?

6. Четверо мальчиков стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 11 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Могло ли так случиться, что для любых двух мальчиков у одного выше процент попаданий до обеда, выше процент попаданий после обеда, но меньше попаданий в сумме?

7. Вася написал в первой строчке четыре последовательных натуральных числа по порядку. Потом он во второй строчке подписал под каждым написанным числом сумму его цифр. Оказалось, что сумма первых двух чисел второй строчки равна 100, а сумма второго и третьего чисел второй строчки равна 75. Чему может быть равна сумма двух последних чисел второй строчки?

8. Дано натуральное число n, равное произведению нескольких различных простых чисел. Докажите, что все его натуральные делители можно выписать в строчку (по одному разу каждый) таким образом, чтобы для любых двух стоящих рядом делителей отношение большего из них к меньшему было простым числом.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В каждой вершине семиугольника записано два числа таким образом, что все числа от 1 до 14 встречаются по одному разу, а суммы всех четвёрок чисел, записанных в концах каждой из сторон, равны. Верно ли, что суммы чисел, написанных во всех вершинах равны?

2. Клетки квадрата 12×12 окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат 2×2 и поменять в нём цвет всех 4 клеток на противоположный. Можно ли за несколько таких ходов сделать все клетки одноцветными?

3. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого-то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

4. Вася загадал натуральное число, не превосходящее десяти, а Петя пытается его угадать, задавая вопросы: «Верно ли что это число N?». Если Петя не угадал, то Вася обязан к загаданному числу либо прибавить N, либо вычесть из него N так, чтобы число оставалось натуральным (Петя не знает, какой из этих двух вариантов выберет Вася). Может ли Петя действовать так, чтобы через некоторое время гарантированно угадать число?

5. В бассейн ведут три трубы, каждая из которых равномерно заполняет бассейн. Если включить первые две трубы, то бассейн заполнится за сорок минут. Если первую и третью, то за 30 минут, а если вторую и третью, то за 20 минут. Успеет ли бассейн заполниться за 18 минут, если включить все три трубы?

6. Трое мальчиков стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 11 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Могло ли так случиться, что для любых двух мальчиков у одного процент попаданий и до обеда, и после выше, зато у другого больше попаданий в сумме?

7. Вася написал в первой строчке четыре последовательных натуральных числа по порядку. Потом он во второй строчке подписал под каждым написанным числом сумму его цифр. Оказалось, что сумма первых двух чисел второй строчки равна 100, а сумма второго и третьего чисел второй строчки равна 75. Чему может быть равна сумма двух последних чисел второй строчки?

8. На двух чашках весов, находящихся в равновесии, лежат дробинки двух разных калибров, но на каждой чашке только одного калибра. Всего дробинок 195. Если снять с одной чашки весов 11 дробинок, то для сохранения равновесия надо с другой чашки переложить на первую 2 дробинки. Сколько дробинок каждого калибра лежит на весах?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В каждой вершине семиугольника записано два числа таким образом, что все числа от 1 до 14 встречаются по одному разу, а суммы всех четвёрок чисел, записанных в концах каждой из сторон, равны. Верно ли, что суммы чисел, написанных во всех вершинах равны?

2. Клетки квадрата 12×12 окрашены в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. За один ход можно выделить любой квадрат $2{\times}2$ и поменять в нём цвет всех 4 клеток на противоположный. Можно ли за несколько таких ходов сделать все клетки одноцветными?

3. На экране калькулятора горит натуральное число, большее 1. В первую минуту к нему добавляется его максимальный простой делитель, потом вычитается максимальный простой делитель нового, потом опять добавляется и т. д. Докажите, что с какого-то момента числа будут повторяться каждые две минуты.

4. Вася загадал натуральное число, не превосходящее десяти, а Петя пытается его угадать, задавая вопросы: «Верно ли что это число N?». Если Петя не угадал, то Вася обязан к загаданному числу либо прибавить N, либо вычесть из него N так, чтобы число оставалось натуральным (Петя не знает, какой из этих двух вариантов выберет Вася). Может ли Петя действовать так, чтобы через некоторое время гарантированно угадать число?

5. В бассейн ведут три трубы, каждая из которых равномерно заполняет бассейн. Если включить первые две трубы, то бассейн заполнится за сорок минут. Если первую и третью, то за 30 минут, а если вторую и третью, то за 20 минут. Успеет ли бассейн заполниться за 18 минут, если включить все три трубы?

6. Два мальчика стреляли в тире. Каждый из них сделал суммарно 11 выстрелов: несколько (хотя бы один) до обеда и несколько (хотя бы один) — после обеда. Могло ли так случиться, что для любых двух мальчиков у одного процент попаданий и до обеда, и после выше, зато у другого больше попаданий в сумме?

7. Вася написал в первой строчке четыре последовательных натуральных числа по порядку. Потом он во второй строчке подписал под каждым написанным числом сумму его цифр. Оказалось, что сумма первых двух чисел второй строчки равна 100, а сумма второго и третьего чисел второй строчки равна 75. Чему может быть равна сумма двух последних чисел второй строчки?

8. На двух чашках весов, находящихся в равновесии, лежат дробинки двух разных калибров, но на каждой чашке только одного калибра. Всего дробинок 195. Если снять с одной чашки весов 11 дробинок, то для сохранения равновесия надо с другой чашки переложить на первую 2 дробинки. Сколько дробинок каждого калибра лежит на весах?