КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Перед Серёжей стоят двое песочных часов. Серёжа знает, что одни часы отмеряют ровно 5 минут, а вторые — либо 13, либо 14 минут, точно Серёжа не помнит.

а) Как Серёже точно определить, сколько именно отмеряют вторые часы?

б) Как ему сделать это, если у него в распоряжении всего один час времени?

2. В комнате находятся 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, причём все они разного роста. Каждый из находящихся в комнате сказал одну из двух фраз: «Хотя бы пятеро лжецов ниже меня»; «Хотя бы пятеро лжецов выше меня». Сколько лжецов может быть в комнате? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

3. Дан квадрат 30×30 клеток. Его разбили на трёхклеточные «уголки». Возле каждой из 31^2 вершин клеток написали, сколько «уголков» содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

4. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, … ,1000. Вася за одну операцию может стереть любые два числа и написать вместо них либо их сумму, либо произведение. Может ли он так действовать, чтобы после 999 операций на доске осталось число 1 000 000?

5. Есть три ящика и мешок, в котором лежат по 300 карточек синего, зеленого и красного цветов. Вася достает вслепую из мешка карточки по одной и раскладывает их по ящикам, причем два раза подряд нельзя класть карточку в один и тот же ящик. Верно ли, что он всегда может действовать так, чтобы в результате в каждом ящике оказалось по 100 карточек каждого цвета?

6. У Димы есть очень много игральных кубиков. Он играет в такую игру: сначала бросает один кубик. Если на нём выпало число N, то он помечает исходный и бросает ещё N–1 кубик. После этого он многократно повторяет процесс: находит ещё непомеченный кубик, на котором стоит число M, большее 1, помечает его и бросает ещё M–1 кубик. Через некоторое время на всех непомеченных кубиках оказались единицы, а сумма чисел на всех кубиках оказалась равна 2017. Сколько кубиков могло лежать в этот момент на столе?

7. Даны два натуральных двузначных числа a и b ($a > b$). Если приписать a слева к b, то полученное четырехзначное число поделится и на $a+b$, и на $a-b$. Чему может быть равно отношение a/b?

8. По кругу стоят 40 детей, на каждом написан номер от 1 до 40, все номера различны. Ведущий находит ребёнка, правый сосед которого имеет номер, хотя бы на 2 больший, чем у этого ребёнка, после чего просит их поменяться местами. Затем этот процесс повторяется. Докажите, что он когда-нибудь закончится.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Перед Серёжей стоят двое песочных часов. Серёжа знает, что одни часы отмеряют ровно 5 минут, а вторые — либо 13, либо 14 минут, точно Серёжа не помнит.

а) Как Серёже точно определить, сколько именно отмеряют вторые часы?

б) Как ему сделать это, если у него в распоряжении всего один час времени?

2. В комнате находятся 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, причём все они разного роста. Каждый из находящихся в комнате сказал одну из двух фраз: «Хотя бы пятеро лжецов ниже меня»; «Хотя бы пятеро лжецов выше меня». Сколько лжецов может быть в комнате? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

3. Пара натуральных чисел $a < b \leq 2017$ обладает следующим удивительным свойством: если числа x и y не целые, а $x+y$ целое, то $ax+by$ — не целое. Сколько существует таких пар (a, b)?

4. Число b больше числа a, а число a больше 1. В каком порядке могут идти на числовой оси числа $a+1$, $b+1$, $1+\dfrac{a+b}{2}$ и $\dfrac{a^2+b^2-2}{a+b-2}$?

5. У Димы есть очень много игральных кубиков. Он играет в такую игру: сначала бросает один кубик. Если на нём выпало число N, то он помечает исходный и бросает ещё N–1 кубик. После этого он многократно повторяет процесс: находит ещё непомеченный кубик, на котором стоит число M, большее 1, помечает его и бросает ещё M–1 кубик. Через некоторое время на всех непомеченных кубиках оказались единицы, а сумма чисел на всех кубиках оказалась равна 2017. Сколько кубиков могло лежать в этот момент на столе?

6. Биссектрисы треугольника ABC, пересекаясь в одной точке, разбивают его на шесть треугольников одинакового периметра. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

7. Дано простое число $p > 2017$. Сколько существует шестерок натуральных чисел a, b, c, d, e и f с суммой $3p$, для которых числа $\dfrac{a+b}{c+d}$, $\dfrac{b+c}{d+e}$, $\dfrac{c+d}{e+f}$, $\dfrac{d+e}{f+a}$ и $\dfrac{e+f}{a+b}$ являются натуральными?

8. По кругу стоят n детей, на каждом написан номер от 1 до n, все номера различны. Ведущий находит ребёнка, правый сосед которого имеет номер, хотя бы на 2 больший, чем у этого ребёнка, после чего просит их поменяться местами. Затем этот процесс повторяется.

а) Докажите, что процесс когда-нибудь закончится.

б) Докажите, что будет сделано менее n^3 перестановок.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В новогоднюю ночь Вася пожаловался своему другу Пете на то, что в новом году его день рождения приходится на пятницу и на 13 число. Петя попытался утешить друга, сказав, что, по крайней мере, эта пятница — не тринадцатая по счёту в году. Мог ли Петя ошибиться? В каком году происходил разговор, неизвестно.

2. Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, параллельная BC. Точка D лежит на стороне AC. Биссектриса угла ABD пересекает прямую l в точке E. Докажите, что $BD = CD+AE$.

3. Пара натуральных чисел $a < b \le 2017$ обладает следующим удивительным свойством: если числа x и y не целые, а $x+y$ целое, то $ax+by$ — не целое. Сколько существует таких пар (a, b)?

4. Дима бросал игральные кубики. Сначала он бросал один кубик, а затем действовал по следующему правилу: если на кубике выпадало N — он брал ещё $N-1$ кубик и бросал их все. Потом для каждого брошенного кубика, на котором выпало число, большее единицы, он повторял эту операцию, и так далее. Через некоторое время броски прекратились. Сумма чисел на всех брошенных кубиках оказалась равна 2017. Сколько могло быть бросков?

5. На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки F и E соответственно таким образом, что $\dfrac{AF}{FD} = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AB}{CD}$. Продолжение отрезка EF за точку F пересекает прямую AB в точке P, а прямую CD — в точке Q. Докажите, что $\angle BPE = \angle CQE$.

6. По кругу расставлены числа $1, 2, \ldots, n$. Если соседнее с числом a по часовой стрелке — число $b > a+1$, то числа a и b можно поменять местами. Докажите, что больше $n(n-1)(n-2)/6$ таких операций сделать не удастся.

7. Пусть $d_1, \ldots, d_k$ — все натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что $\sum\limits_i (-1)^{d_i} d_i$ — степень двойки. Докажите, что число n не может делиться на квадрат простого числа.

8. Докажите, что количество решений уравнения $x_1+2x_2+\ldots+nx_n = n$, в которых первые несколько из чисел $x_1, \ldots, x_n$ (быть может, одно) натуральны, а остальные равны 0, совпадает с количеством решений этого же уравнения, в которых все числа $x_1, \ldots, x_n$ равны 0 или 1.

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Перед Серёжей стоят двое песочных часов. Серёжа знает, что одни часы отмеряют ровно 5 минут, а вторые —либо 13, либо 14 минут, точно Серёжа не помнит.* ***а)*** *Как Серёже точно определить, сколько именно отмеряют вторые часы?* ***б)*** *Как ему сделать это, если у него в распоряжении всего один час времени?*

Решение. Начнём отмерять время обоими часами, переворачивая каждые из них сразу, как только пересыпается весь песок. **а)** Если в момент, когда весь песок в пятиминутных часах полностью пересыплется в 13-й раз, во вторых часах он полностью пересыплется в пятый раз, вторые часы — 13-минутные, иначе — 14-минутные. **б)** Если к моменту, когда весь песок в пятиминутных часах полностью пересыплется в восьмой раз, мы уже трижды перевернули вторые часы, то они 13-минутные, иначе — 14-минутные.

Задача 2. *В комнате находятся 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, причём все они разного роста. Каждый из находящихся в комнате сказал одну из двух фраз: «Хотя бы пятеро лжецов ниже меня»; «Хотя бы пятеро лжецов выше меня». Сколько лжецов может быть в комнате? Приведите все варианты и докажите, что других нет.*

Ответ. 5, 6, 7, 8, 9 или 10. Решение. Выстроим лжецов в шеренге по росту. Если их больше 10, то шестой в шеренге (с любого края) скажет правду. Если лжецов меньше 5, то все рыцари (а их тут не меньше 96) солгут. И то и другое невозможно. Пример же для случая, когда у нас k лжецов, где $5 \le k \le 10$, таков: каждый лжец выше всех рыцарей, пять самых высоких из них говорят первую фразу, остальные — вторую.

Задача 3. *Дан квадрат 30×30 клеток. Его разбили на трёхклеточные «уголки». Возле каждой из 31^2 вершин клеток написали, сколько «уголков» содержат эту вершину. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?*

Ответ. 2400. Решение. Очевидно, если мы в каждом «уголке» напишем, сколько вершин содержит этот «уголок», то сумма написанных чисел будет такой же, как чисел из условия задачи. В «уголке» 8 вершин клеток, а уголков в квадрате — $900:3 = 300$. Поэтому сумма всех написанных чисел равна $300\times8 = 2400$.

Задача 4. *На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, … ,1000. Вася за одну операцию может стереть любые два числа и написать вместо них либо их сумму, либо произведение. Может ли он так действовать, чтобы после 999 операций на доске осталось число 1 000 000?*

Ответ. Может. Решение. Достаточно найти такое число x, что если сложить все числа от 1 до 1000, кроме x и двойки, умножить эту сумму на 2 и прибавить x, то получится 1000000. Сумма всех натуральных чисел от 1 до 1000 равна 500500, откуда $2\cdot(500500-2-x)+x = 1000000$ и $x = 1001000-1000000-4 = 996$.

Задача 5. *Есть три ящика и мешок, в котором лежат по 300 карточек синего, зеленого и красного цветов. Вася достает вслепую из мешка карточки по одной и раскладывает их по ящикам, причем два раза подряд нельзя класть карточку в один и тот же ящик. Верно ли, что он всегда может действовать так, чтобы в результате в каждом ящике оказалось по 100 карточек каждого цвета?*

Ответ. Неверно. Решение. Пусть в мешке сидит злой дух, который подкладывает нам карточки по своему желанию. Рассмотрим момент, когда в мешке осталось три карточки. Дух может добиться того, что они будут трёх разных цветов. Если в этот момент в каком-то ящике не хватает двух или трёх карточек, дух подложит нам подряд две недостающие там карточки, и мы проиграем. Если же в каждом мешке по 299 карточек, рассмотрим мешок, куда мы клали карточку в последний раз. Если дух подложит нам карточку, которой не хватает в этом мешке, то мы также проиграли.

Задача 6. *У Димы есть очень много игральных кубиков. Он играет в такую игру: сначала бросает один кубик. Если на нём выпало число N, то он помечает исходный и бросает ещё N–1 кубик. После этого он многократно повторяет процесс: находит ещё непомеченный кубик, на котором стоит число M, большее*

1, помечает его и бросает ещё M–1 кубик. Через некоторое время на всех непомеченных кубиках оказались единицы, а сумма чисел на всех кубиках оказалась равна 2017. Сколько кубиков могло лежать в этот момент на столе?

Ответ. 1009. Решение. Будем считать, что повторно Дима однажды брошенный кубик не бросал. Возьмём столько коробок, сколько он бросил кубиков, и в каждую положим один из кубиков и столько монет, сколько очков выпало на этом кубике. Затем из каждой коробки переложим по монете в коробки, где лежат кубики, брошенные сразу после того, который лежит в этой коробке. После этого в коробке, где лежит кубик, брошенный первым, останется одна монета, а во всех остальных окажется по 2 монеты: оставшаяся после выкладывания и переложенная из «материнской» коробки. Так как всего монет у нас 2017, коробок должно быть (2017+1)/2 = 1009.

Задача 7. *Даны два натуральных двузначных числа a и b (a > b). Если приписать a слева к b, то полученное четырехзначное число поделится и на a+b, и на a–b. Чему может быть равно отношение a/b?*

Ответ. 2, 5/4, 6/5, 17/16, 50/49. Решение. Пусть НОД(a, b) = d, $a = md$, $b = nd$. Если приписать a слева к b, получится число $100a+b$. Заметим, что $100a+b = 99a+(a+b)$, то есть $99a = 99md$ должно делиться на $a+b = (m+n)d$, то есть $99m$ должно делиться на $m+n$. Так как m и n взаимно просты, $m+n$ взаимно просто с m, и потому 99 должно делиться на $m+n$, то есть $m+n$ должно равняться 99, 33, 11, 9 или 3 (случай $m+n = 1$, очевидно, невозможен).

Теперь заметим, что $100a+b = 101a-(a-b)$. Поэтому $101a = 101md$ должно делиться на $a-b = (m-n)d$, то есть $101m$ должно делиться на $m-n$. Поскольку число 101 — простое, а $m-n < 100$, это означает, что $m-n = 1$, то есть $m = n+1$. При $m+n = 3$ имеем $m = 2$, $n = 1$, при $m+n = 9$ — $m = 5$, $n = 4$, при $m+n = 11$ — $m = 6$, $n = 5$, при $m+n = 33$ — $m = 17$, $n = 16$, при $m+n = 99$ — $m = 50$, $n = 49$, откуда и получаем пять приведённых выше ответов. Примеры подходящих a и b: для $m+n = 3$ — 20 и 10, для $m+n = 9$ — 15 и 12, для $m+n = 11$ — 12 и 10, для $m+n = 33$ — 17 и 16, для $m+n = 99$ — 50 и 49.

Задача 8. *По кругу стоят 40 детей, на каждом написан номер от 1 до 40, все номера различны. Ведущий находит ребёнка, правый сосед которого имеет номер, хотя бы на 2 больший, чем у этого ребёнка, после чего просит их поменяться местами. Затем этот процесс повторяется. Докажите, что он когда-нибудь закончится.*

Решение. Возьмём ребёнка №1. Он может сдвигаться по кругу только вправо. Покажем, что он не может совершить более 39 полных оборотов. Допустим, он совершил 40 оборотов вправо. Так как он не может меняться местами с ребёнком №2, ребёнок №2 должен при этом совершить хотя бы 39 оборотов вправо. По аналогичной причине ребёнок №3 должен совершить хотя бы 38 оборотов, ребёнок №4 — хотя бы 37, …, ребёнок №40 — хотя бы один оборот вправо. Но ребёнок №40 может перемещаться по кругу только влево — противоречие.

Таким образом, через некоторое время ребёнок №1 остановится. Ребёнок №2, который тоже может двигаться только вправо, также когда-то остановится, так как может сделать не более 38 полных оборотов. После этого ребёнок №3, лишённый возможности меняться местами с №1, будет двигаться только вправо и сможет сделать не больше ходов, чем детей между ним и ребенком №2. Продолжая эти рассуждения, убеждаемся, что рано или поздно остановятся все 40 детей.

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Перед Серёжей стоят двое песочных часов. Серёжа знает, что одни часы отмеряют ровно 5 минут, а вторые —либо 13, либо 14 минут, точно Серёжа не помнит.* ***а)*** *Как Серёже точно определить, сколько именно отмеряют вторые часы?* ***б)*** *Как ему сделать это, если у него в распоряжении всего один час времени?*

Решение. Начнём отмерять время обоими часами, переворачивая каждые из них сразу, как только пересыпается весь песок. **а)** Если в момент, когда весь песок в пятиминутных часах полностью пересыплется в 13-й раз, во вторых часах он полностью пересыплется в пятый раз, вторые часы — 13-минутные, иначе — 14-минутные. **б)** Если к моменту, когда весь песок в пятиминутных часах полностью пересыплется в восьмой раз, мы уже трижды перевернули вторые часы, то они 13-минутные, иначе — 14-минутные.

Задача 2. *В комнате находятся 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, причём все они разного роста. Каждый из находящихся в комнате сказал одну из двух фраз: «Хотя бы пятеро лжецов ниже меня»; «Хотя бы пятеро лжецов выше меня». Сколько лжецов может быть в комнате? Приведите все варианты и докажите, что других нет.*

Ответ. 5, 6, 7, 8, 9 или 10. Решение. Выстроим лжецов в шеренге по росту. Если их больше 10, то шестой в шеренге (с любого края) скажет правду. Если лжецов меньше 5, то все рыцари (а их тут не меньше 96) солгут. И то и другое невозможно. Пример же для случая, когда у нас k лжецов, где $5 \le k \le 10$, таков: каждый лжец выше всех рыцарей, пять самых высоких из них, а также все рыцари говорят первую фразу, остальные — вторую.

Задача 3. *Пара натуральных чисел $a < b \le 2017$ обладает следующим удивительным свойством: если числа x и y не целые, а $x+y$ целое, то $ax+by$ — не целое. Сколько существует таких пар (a, b)?*

Ответ. 2016. Решение. Заметим, что число $ax+by = a(x+y)+y(b-a)$ не является целым тогда и только тогда, когда не является целым число $y(b-a)$. Если $b-a = 1$, то $y(b-a) = y$ является нецелым при любом нецелом y. Стало быть, все пары вида a, $b = a+1$ гам подходят. Их как раз 2016. Если же $b > a+1$, то при нецелом $y = 1/(b-a)$ (и $x = 1-y$) число $y(b-a) = 1$ — целое, и пара a, b нем не подходит.

Задача 4. *Число b больше числа a, а число a больше 1. В каком порядке могут идти на числовой оси числа* $a+1,\ b+1,\ 1+\dfrac{a+b}{2}$ и $\dfrac{a^2+b^2-2}{a+b-2}$?

Ответ. $a+1,\ 1+\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2-2}{a+b-2},\ b+1$. Решение. Так как число $1+\dfrac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое чисел $a+1$ и $b+1$, имеем $a+1<1+\dfrac{a+b}{2}<b+1$. Далее положим $c = \dfrac{a+b}{2}$, $d = \dfrac{a-b}{2}$. Тогда $a = c-d$, $b = c+d$, и $\dfrac{a^2+b^2-2}{a+b-2}=\dfrac{c^2+d^2-1}{c-1}=c+1+\dfrac{d^2}{c-1}$. Отсюда сразу получаем $\dfrac{a^2+b^2-2}{a+b-2}>c+1=1+\dfrac{a+b}{2}$. Теперь заметим, что $a = c-d > 1$, откуда $c-1 > d$ и $c+1+\dfrac{d^2}{c-1}<c+1+d=b+1$, что и завершает решение.

Задача 5. *У Димы есть очень много игральных кубиков. Он играет в такую игру: сначала бросает один кубик. Если на нём выпало число N, то он помечает исходный и бросает ещё N–1 кубик. После этого он многократно повторяет процесс: находит ещё непомеченный кубик, на котором стоит число M, большее 1, помечает его и бросает ещё M–1 кубик. Через некоторое время на всех непомеченных кубиках оказались единицы, а сумма чисел на всех кубиках оказалась равна 2017. Сколько кубиков могло лежать в этот момент на столе?*

Ответ. 1009. Решение. Будем считать, что повторно Дима однажды брошенный кубик не бросал. Возьмём столько коробок, сколько он бросил кубиков, и в каждую положим один из кубиков и столько монет, сколько очков выпало на этом кубике. Затем из каждой коробки переложим по монете в коробки, где лежат кубики, брошенные сразу после того, который лежит в этой коробке. После этого в коробке, где лежит кубик, брошенный первым, останется одна монета, а во всех остальных окажется по 2 монеты: оставшаяся после выкладывания и переложенная из «материнской» коробки. Так как всего монет у нас 2017, коробок должно быть (2017+1)/2 = 1009.

Задача 6. *Биссектрисы треугольника ABC, пересекаясь в одной точке, разбивают его на шесть треугольников одинакового периметра. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.*

Решение. Пусть AD, BE и CF — биссектрисы треугольника ABC, а I — точка их пересечения. Отложим на стороне AB отрезок $AE_1 = AE$. Треугольники AIE и AIE_1 равны по первому признаку. Допустим, точка E_1 лежит между A и F. Тогда $AE+AI+EI = AE_1+E_1I+AI < AE_1+E_1F+FI+AI = AF+FI+AI$, то есть периметр треугольника AEI меньше периметра треугольника AFI, что противоречит условию задачи. К аналогичному противоречию приводит и предположение, что точка F лежит между A и E_1. Значит, $F = E_1$, и треугольники AIE и AIF равны. Аналогично, равны треугольники BIF и BID и CID и CIE.

Положим $\angle AIE = \angle AIF = \varphi$. Тогда $\angle BIF = \angle BID = \angle AIE = \varphi$ и $\angle CIE = \angle CID = \angle AIF = \varphi$. Значит, все шесть углов, на которые три биссектрисы треугольника ABC делят полный угол при вершине I, равны, и их величина составляет 60°. Пусть углы треугольника ABC при вершинах A, B и C равны, соответственно, 2α, 2β и 2γ. Тогда по теореме о внешнем угле треугольника из треугольника AIB, AIC и BIC имеем $\alpha+\beta = \alpha+\gamma = \beta+\gamma = 60°$, откуда $2\alpha = 2\beta = 2\gamma = 60°$, что и требовалось доказать.

Задача 7. *Дано простое число $p > 2017$. Сколько существует шестерок натуральных чисел a, b, c, d, e и f с суммой 3p, для которых числа* $\frac{a+b}{c+d}$, $\frac{b+c}{d+e}$, $\frac{c+d}{e+f}$, $\frac{d+e}{f+a}$ и $\frac{e+f}{a+b}$ *являются натуральными?*

Ответ. $p+1$, если p дает при делении на 3 остаток 2, и $p+2$, если p дает при делении на 3 остаток 1.
Решение. Так как каждое натуральное число не меньше 1, рассматривая первую, третью и пятую дроби, получаем $a+b \ge c+d \ge e+f \ge a+b$, откуда $a+b = c+d = e+f = p$ (*). Обратно, если выполнено равенство (*), то первая, третья и пятая дроби равны 1. Значит, надо понять, когда при условии (*) являются натуральными числами вторая и четвёртая дроби, или, что равносильно, когда $p-a+c$ делится на $p-c+e$, а $p-c+e$ делится на $p-e+a$.

Из сказанного выше следует, что число $3p = (p-a+c)+(p-c+e)+(p-e+a)$ должно делиться на $p-e+a$. Так как $0 < p-e+a < 2p$, $p-e+a$ может равняться p, 3 или 1. Рассмотрим все эти случаи.

(1) $p-e+a = p \Leftrightarrow e = a$. Тогда числа $p-c+e$ и $p-a+c$, каждое из которых больше 0 и меньше $2p$, должны делиться на p, откуда $a = c = e$. В этом случае каждый набор чисел имеет вид a, $p-a$, a, $p-a$, a, $p-a$, где подходит любое натуральное a, меньшее p. Таких наборов имеется $p-1$.

(2) $p-e+a = 3$. Так как $p-e+a = f+a$, имеем $f = 2$, $a = 1$ (2.1) или $f = 1$, $a = 2$ (2.2).

Рассмотрим случай (2.1). Здесь шесть чисел равны 1, $p-1$, c, $p-c$, $p-2$, 2. При этом $b+c = p+c-1$ должно делиться на $d+e = 2p-c-2$, а $2p-c-2$ — на $f+a = 3$. Так как $3(2p-c-2) = 6p-3c-6 > p+c-1$, частное q от деления $p+c-1$ на $2p-c-2$ не превосходит 2. Пусть $q = 1$. Тогда $2p-c-2 = p+c-1 \Leftrightarrow c = (p-1)/2$. При этом $2p-c-2 = 3(p-1)/2$ действительно делится на 3, что даёт в этом случае единственное решение 1, $p-1$, $(p-1)/2$, $(p+1)/2$, $p-2$, 2. Пусть $q = 2$. Тогда $2\cdot(2p-c-2) = p+c-1 \Leftrightarrow c = p-1$. В этом случае $2p-c-1 = p+2$, и делимость на 3 получается только в случае, когда p дает остаток 1 при делении на 3. В этом случае решение выглядит так: 1, $p-1$, $p-1$, 1, $p-2$, 2.

Рассмотрим случай (2.2). Здесь шесть чисел равны 2, $p-2$, c, $p-c$, $p-1$, 1. При этом $b+c = p+c-2$ должно делиться на $d+e = 2p-c-1$, а $2p-c-1$ — на $f+a = 3$. Так как $2(2p-c-1) = 4p-2c-2 > p+c-2$, имеем $2p-c-1 = p+c-2 \Leftrightarrow c = (p+1)/2$. Тогда $2p-c-1 = 3(p-1)/2$ действительно делится на 3, что даёт и в этом случае единственное решение 2, $p-2$, $(p+1)/2$, $(p-1)/2$, $p-1$, 1.

3) $p-e+a = 1$. Это случай невозможен, так как $p-e+a = f+a \ge 2$.

Таким образом, всего искомых наборов имеется $p-1+2 = p+1$, если p дает при делении на 3 остаток 2, и $p+2$, если p дает при делении на 3 остаток 1.

Задача 8. *По кругу стоят n детей, на каждом написан номер от 1 до n, все номера различны. Ведущий находит ребёнка, правый сосед которого имеет номер, хотя бы на 2 больший, чем у этого ребёнка, после чего просит их поменяться местами. Затем этот процесс повторяется.*

а) *Докажите, что процесс когда-нибудь закончится.*

б) *Докажите, что будет сделано менее n^3 перестановок.*

Решение. Решим сразу пункт б). Для краткости заменим детей их номерами. Сначала покажем индукцией по k, что число m может меняться местами с числом $m+k$ не более $k-1$ раз. База для $k = 1$ очевидна. Пусть утверждение уже доказано для $k = s$. Заметим, что после каждой перестановки чисел m и $m+s+1$ между ними в направлении против часовой стрелки находится число $m+1$, с которым число m меняться не может. Чтобы числу m ещё раз поменяться с $m+s+1$, прежде с $m+s+1$ должно поменяться число $m+1$. Так как по предположению индукции числа $m+1$ и $m+s+1$ могут меняться не более $s-1$ раза, числа m и $m+s+1$ могут меняться не более, чем s раз.

Из доказанного следует, что число m могло меняться местами с большими числами не более чем $(n-m-1)+(n-m-2)+\ldots+1 < n(n-m-1) < n^2$ раз. Значит, всех перестановок было меньше, чем $n^2 \cdot n = n^3$.

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *В новогоднюю ночь Вася пожаловался своему другу Пете на то, что в новом году его день рождения приходится на пятницу и на 13 число. Петя попытался утешить друга, сказав, что, по крайней мере, эта пятница — не тринадцатая по счёту в году. Мог ли Петя ошибиться? В каком году происходил разговор, неизвестно.*

Ответ. Не мог. Решение. 13 марта — 72-ой или (в високосный год) 73-й день года, а 13 апреля — 103-й или 104-ый день года. 13-я же пятница года отстоит от первой пятницы на 84 дня, а та от 1 января — не более чем на 6 дней. Таким образом, 13-я пятница года бывает после 13 марта, но до 13 апреля, так что Петя прав.

Задача 2. *Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, параллельная BC. Точка D лежит на стороне AC. Биссектриса угла ABD пересекает прямую l в точке E. Докажите, что $BD = CD+AE$.*

Решение. Пусть $\angle ABD = 2\alpha$. На продолжении стороны AC за точку C отложим отрезок $CF = AE$. Так как $BC = BA$ и $\angle BCF = \angle BAE = 120°$, треугольники BCF и BAE равны, откуда $\angle BFC = \angle BEA = 60°-\alpha$. Но и $\angle DBF = \angle DBC+\angle CBF = \angle DBC+\angle ABE = (60°-2\alpha)+\alpha = 60°-\alpha$. Значит, $BD = DF = CD+CF = CD+AE$.

Задача 3. *Пара натуральных чисел $a < b \leq 2017$ обладает следующим удивительным свойством: если числа x и y не целые, а $x+y$ целое, то $ax+by$ — не целое. Сколько существует таких пар (a, b)?*

Ответ. 2016. Решение. Заметим, что число $ax+by = a(x+y)+y(b-a)$ не является целым тогда и только тогда, когда не является целым число $y(b-a)$. Если $b-a = 1$, то $y(b-a) = y$ является нецелым при любом нецелом y. Стало быть, все пары вида a, $b = a+1$ нам подходят. Их как раз 2016. Если же $b > a+1$, то при нецелом $y = 1/(b-a)$ (и $x = 1-y$) число $y(b-a) = 1$ — целое, и пара a, b нем не подходит.

Задача 4. *Дима бросал игральные кубики. Сначала он бросал один кубик, а затем действовал по следующему правилу: если на кубике выпадало N — он брал ещё $N-1$ кубик и бросал их все. Потом для каждого брошенного кубика, на котором выпало число, большее единицы, он повторял эту операцию, и так далее. Через некоторое время броски прекратились. Сумма чисел на всех брошенных кубиках оказалась равна 2017. Сколько могло быть бросков?*

Ответ. 1009. Решение. Будем считать, что повторно Дима однажды брошенный кубик не бросал. Возьмём столько коробок, сколько он бросил кубиков, и в каждую положим один из кубиков и столько монет, сколько очков выпало на этом кубике. Затем из каждой коробки переложим по монете в коробки, где лежат кубики, брошенные сразу после того, который лежит в этой коробке. После этого в коробке, где лежит кубик, брошенный первым, останется одна монета, а во всех остальных окажется по 2 монеты: оставшаяся после выкладывания и переложенная из «материнской» коробки. Так как всего монет у нас 2017, коробок должно быть $(2017+1)/2 = 1009$.

Задача 5. *На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбраны точки F и E соответственно таким образом, что $\frac{AF}{FD} = \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CD}$. Продолжение отрезка EF за точку F пересекает прямую AB в точке P, а прямую CD — в точке Q. Докажите, что $\angle BPE = \angle CQE$.*

Решение. Построим параллелограммы $ABGF$ и $CDFH$. Заметим, что $BG \parallel AD \parallel CH$, следовательно, углы GBE и ECH равны как накрест лежащие углы при секущей BC. Далее, $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \frac{BG}{CH}$. Поэтому треугольники BGE и CHE подобны по углу и отношению двух прилежащих сторон. Следовательно, $\angle GEB = \angle CEH$ и точки G, E, H лежат на одной прямой. Кроме того, $\frac{GE}{EH} = \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{GF}{FH}$. Таким образом FE является биссектрисой треугольника GFH и $\angle GFE = \angle HFE$. Осталось заметить, что в силу параллельности прямых PB и GF $\angle BPE = \angle GFE$, а в силу параллельности QC и FH $\angle CQE = \angle HFE$.

Задача 6. *По кругу расставлены числа 1, 2, ..., n. Если соседнее с числом a по часовой стрелке — число b > a+1, то числа a и b можно поменять местами. Докажите, что больше n(n–1)(n–2)/6 таких операций сделать не удастся.*

Решение. Покажем индукцией по k, что число m может меняться местами с числом $m+k$ не более $k–1$ раз. База для $k = 1$ очевидна. Пусть утверждение уже доказано для $k = s$. Заметим, что после каждой перестановки между числами m и $m+s+1$ между ними в направлении против часовой стрелки находится число $m+1$, с которым число m меняться не может. Чтобы числу m ещё раз поменяться с $m+s+1$, прежде с $m+s+1$ должно поменяться число $m+1$. Так как по предположению индукции числа $m+1$ и $m+s+1$ могут меняться не более $s–1$ раза, числа m и $m+s+1$ могут меняться не более, чем s раз.

Остался подсчёт. Число 1 может меняться с бóльшими числами не более $1+2+\ldots+(n–2) = (n–2)(n–1)/2$ раз, число 2 — не более $(n–2)(n–3)/2$ раз, …, число $n–2$ — не более $2\cdot1/2$ раз. По индукции нетрудно доказать, что $(n–2)(n–1)/2+\ldots+2\cdot1/2 = n(n–1)(n–2)/6$.

Задача 7. *Пусть $d_1, ..., d_k$ — все натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что $\sum_i (-1)^{d_i} d_i$ — степень двойки. Докажите, что число n не может делиться на квадрат простого числа.*

Решение. При нечетном n все слагаемые данной суммы были бы отрицательными, а вся сумма не равнялась бы степени двойки. Поэтому n четно. Пусть $n = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ — разложение n на простые множители. Поймем, что

$$\sum_i (-1)^{d_i} d_i = (2^a + 2^{a-1} + \ldots + 2 - 1)(1 + p_1 + \ldots + p_1^{a_1}) \ldots (1 + p_k + \ldots + p_k^{a_k}).$$

Действительно, после раскрытия скобок мы получим все четные делители со знаком плюс и все нечетные делители со знаком минус. Так как данная сумма равна степени двойки, то каждый из получившихся множителей тоже равен степени двойки. $2^a + 2^{a-1} + \ldots + 2 - 1 = 2^{a+1} - 3$, поэтому $a = 1$. Рассмотрим один из оставшихся множителей $1 + p + \ldots + p^b$. Так как p — нечетное число, то количество слагаемых должно быть четно, поэтому $1 + p + \ldots + p^b = (1+p)(1 + p^2 + \ldots + p^{b-1})$. Аналогично, во второй скобке количество слагаемых — четно, поэтому $1 + p + \ldots + p^b = (1+p)(1+p^2)(1 + p^4 + \ldots + p^{b-3})$. Заметим, что множитель $(1+p^2) \equiv 2 \pmod 4$ и поэтому не может являться степенью двойки. Поэтому в разложении n все $a_i = 1$.

Задача 8. *Докажите, что количество решений уравнения $x_1+2x_2+...+nx_n = n$, в которых первые несколько из чисел $x_1, ..., x_n$ (быть может, одно) натуральны, а остальные равны 0, совпадает с количеством решений этого же уравнения, в которых все числа $x_1, ..., x_n$ равны 0 или 1.*

Решение. Набору n чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ сопоставим набор чисел $s_1, s_2, ..., s_n$ по правилу $s_k = x_k+...+x_n$. Очевидно, $x_1+2x_2+...+nx_n = s_1+s_2+...+s_n$. Пусть $(x_1, x_2, ..., x_n)$ — решение первого вида, то есть числа $x_1, ..., x_m$ положительны, а остальные x_i равны 0. Тогда $s_1 > s_2 > ... > s_m > 0 = s_{m+1} = ... = s_n$. Рассмотрим набор $(y_1, ..., y_n)$, в котором y_k равно 1, если k встречается среди чисел $s_1, ..., s_m$, и 0 в противном случае. Если $k = s_i$, то $ky_k = s_i$, а если k не встречается среди чисел $s_1, ..., s_m$, то $y_k = 0$ и $ky_k = 0$. Поэтому $y_1+2y_2+...+ny_n = s_1+s_2+...+s_n = n$, и $(y_1, ..., y_n)$ — решение второго вида. Использованная нами процедура обратима. Действительно, если дано решение второго вида $(y_1, ..., y_n)$, по нему однозначно восстанавливается набор $(s_1, ..., s_n)$ (в котором сначала стоят номера ненулевых y_i в порядке возрастания, а потом нули), а затем набор $(x_1, ..., x_n)$ ($x_i = s_i–s_{i+1}$ при $i < n$, $x_n = s_n$). При этом $x_1+2x_2+...+nx_n = s_1+s_2+...+s_n = y_1+2y_2+...+ny_n = n$. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между решениями первого и второго вида, следовательно, их количества равны.