КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.12.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Петя сказал Васе, что задумал два различных натуральных числа, больших 2017. Потом он сообщил Васе их сумму. Вася, подумав, сказал: «Я не могу точно определить задуманные числа». Петя ответил: «Среди них есть чётное». Тогда Вася сказал: «А тогда я их точно знаю». Какие числа задумал Петя? Ответ обоснуйте.

2. Бизнесмен Борис Михайлович выехал из города Мегасити в деревню Навозы на своём "Бугатти". Одновременно навстречу ему из Навозов выехал тракторист Вася на своём тракторе. Оба ехали с постоянной скоростью. Однако, ровно посередине пути автомобиль бизнесмена попал колесом в яму и сломался. Ровно через час подъехал Вася и помог бизнесмену починить машину, после чего оба поехали дальше — Вася с прежней скоростью, а Борис Михайлович вдесятеро медленнее, чем до поломки. В результате Вася приехал в Мегасити на час раньше, чем бизнесмен в Навозы. За какое время доехал бы Борис Михайлович до Навозов, если бы не сломался?

3. Есть семь одинаковых с виду шариков, из которых два радиоактивны. Также имеется прибор, который по двум заложенным в него шарикам отвечает, есть ли среди этих шариков хотя бы один радиоактивный (но не отвечает, сколько их). Как за 5 применений этого прибора найти оба радиоактивных шарика?

4. На доске написаны числа от 1 до 2017. Вася за одну операцию может прибавить к любому числу на доске его первую или последнюю цифру и выписать результат на доску. Верно ли, что любое натуральное число Вася сможет выписать на доску через несколько таких операций?

5. Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток таким образом, чтобы в любом прямоугольнике со сторонами 4 и 5 было отмечено ровно 4 клетки, а в любом квадрате 8×8 — ровно 13 клеток?

6. На столе лежат две кучи по 2017 камней. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход Петя должен взять один камень из любой кучи, а Вася своим ходом должен либо взять из каждой кучи по одному камню, либо взять из каждой кучи по два камня, либо взять из одной кучи один камень, а из другой — два. Проигрывает не имеющий хода. Кто из мальчиков может обеспечить себе победу?

7. Даны четыре различных натуральных числа такие, что если к произведению любых двух из них прибавить 13, то получится квадрат натурального числа. Может ли сумма каких-то трёх из этих четырёх чисел равняться 1 000 000?

8. На окружности отмечено 20 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком, причём синих отрезков ровно 100. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Докажите, что такими операциями можно все отрезки покрасить в синий цвет.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.12.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Сумма четырёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 15. На сколько нулей может оканчиваться число A?

2. Есть семь одинаковых с виду шариков, из которых два радиоактивны. Также имеется прибор, который по двум заложенным в него шарикам отвечает, есть ли среди этих шариков хотя бы один радиоактивный (но не отвечает, сколько их). Как за 5 применений этого прибора найти оба радиоактивных шарика?

3. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $x^2+xy+y^2 \leq 3$. Докажите, что $x+y \leq 2$.

4. Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток таким образом, чтобы в любом прямоугольнике со сторонами 4 и 5 было отмечено ровно 4 клетки, а в любом квадрате 8×8 — ровно 13 клеток?

5. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Через точку B проведена прямая l, перпендикулярная гипотенузе BC. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке D, а прямую l в точке E. На прямой l отмечена такая точка $F \neq E$, что $BF = BE$. Докажите, что CE перпендикулярно FD.

6. Попарно различные числа a, b и c таковы, что $a(c–1) = c(b–1) = b(a–1)$. Чему может равняться произведение abc?

7. Дано множество из четырёх различных натуральных чисел такое, что если к произведению любых двух из них прибавить 13, то получится квадрат натурального числа. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть степенью натурального числа выше первой.

8. На окружности отмечено $n > 100$ точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. При каких n можно с помощью указанных операций сделать все отрезки одноцветными независимо от их начальной раскраски?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.12.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Вася придумал новую теорему: если произведение двух взаимно простых чисел x и y делится на произведение двух взаимно простых чисел a и b, то хотя бы одно из чисел x и y делится хотя бы на одно из чисел a или b. Верна ли эта теорема?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Через точку B проведена прямая l, перпендикулярная гипотенузе BC. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке D, а прямую l в точке E. На прямой l отмечена такая точка $F \neq E$, что $BF = BE$. Докажите, что CE перпендикулярно FD.

3. Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток таким образом, чтобы в любом прямоугольнике со сторонами 4 и 5 было отмечено ровно 4 клетки, а в любом квадрате 8×8 — ровно 13 клеток?

4. Докажите, что каждое натуральное число является суммой всех попарных произведений нескольких чисел, каждое из которых равно 1 или –1.

5. В классе учится n человек. Некоторые из них образуют кружки по интересам, наборы учащихся ни в каких двух кружках не совпадают. Известно, что каждый школьник ходит хотя бы в два кружка, но также есть два кружка, в которые он не ходит. Докажите, что можно выбрать пару школьников A и B такую, что найдутся кружок, в который ходят оба школьника, кружок, в который ходит только A, кружок, в который ходит только B, и кружок, в который не ходят ни A, ни B.

6. Дано множество из четырёх различных натуральных чисел такое, что если к произведению любых двух из них прибавить 13, то получится квадрат натурального числа. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть степенью натурального числа выше первой.

7. На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный прямоугольный треугольник ABE, $\angle E = 90°$. Пусть N — середина AD, M — точка пересечения прямых CE и AB, P — прямых CN и AB, F — прямых PE и MN. На прямой FP отмечена точка Q такая, что CE — биссектриса угла QCB. Докажите, что $MQ \perp CF$.

8. На окружности отмечено 30 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Верно ли, что для любой начальной раскраски отрезков можно их все сделать одноцветными с помощью указанных операций?

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Петя сказал Васе, что задумал два различных натуральных числа, больших 2017. Потом он сообщил Васе их сумму. Вася, подумав, сказал: «Я не могу точно определить задуманные числа». Петя ответил: «Среди них есть чётное». Тогда Вася сказал: «А тогда я их точно знаю». Какие числа задумал Петя? Ответ обоснуйте.*

Ответ. 2018 и 2022. Решение. Сумму меньше 4037 получить, очевидно, нельзя. Каждую из сумм 4037 = 2018+2019 и 4038 = 2018+2020 можно получить только одним способом, и Вася сразу отгадал бы задуманные числа. Сумму 4039 можно получить двумя способами: 2018+2021 и 2019+2020, но тут в обоих суммах есть чётное слагаемое, и Вася не отгадал бы Петины числа даже после подсказки. Сумму 4040 тоже можно получить двумя способами: 2018+2022 и 2019+2021, и тут чётные слагаемые есть только в одном случае, так что числа 2018 и 2022 удовлетворяют условию задачи. Сумму 4041 можно получить так, чтобы среди слагаемых было чётное, двумя способами: 2018+2023 и 2020+2021. Очевидно, что и всякое число k, большее 4041, тоже можно разложить в сумму двух слагаемых, хотя бы одно из которых четно, по крайней мере двумя способами: $2018+(k–2018)$ и $2020+(k–2020)$. Значит, других ответов у задачи нет.

Задача 2. *Бизнесмен Борис Михайлович выехал из города Мегасити в деревню Навозы на своём "Бугатти". Одновременно навстречу ему из Навозов выехал тракторист Вася на своём тракторе. Оба ехали с постоянной скоростью. Однако, ровно посередине пути автомобиль бизнесмена попал колесом в яму и сломался. Ровно через час подъехал Вася и помог бизнесмену починить машину, после чего оба поехали дальше — Вася с прежней скоростью, а Борис Михайлович вдесятеро медленнее, чем до поломки. В результате Вася приехал в Мегасити на час раньше, чем бизнесмен в Навозы. За какое время доехал бы Борис Михайлович до Навозов, если бы не сломался?*

Ответ. За 4/9 часа. Решение. Б. М. первую половину пути проехал на час быстрее, чем проехал свою половину пути Вася. Поэтому, если бы не яма, он добрался бы до деревни на 2 часа раньше, чем Вася — до города. На самом деле он добрался до деревни на час позже, чем Вася до города, то есть ехал на 3 часа дольше расчетного времени.

Пусть Б. М. потратил на первую половину пути T часов. Так как вторую половину пути он ехал в 10 раз медленнее, чем первую, то потратил на нее $10T$ часов. Из них $9T$ часов составляют 2 часа опоздания по сравнению с расчетным временем, откуда $T = 2/9$ и $2T = 4/9$.

Задача 3. *Есть семь одинаковых с виду шариков, из которых два радиоактивны. Также имеется прибор, который по двум заложенным в него шарикам отвечает, есть ли среди этих шариков хотя бы один радиоактивный (но не отвечает, сколько их). Как за 5 применений этого прибора найти оба радиоактивных шарика?*

Решение. Занумеруем шарики 1, 2, …, 7. Первыми тремя испытаниями проверим шарики 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6. Прибор, очевидно, сработает хотя бы раз. Если он сработал дважды, в двух парах есть по одному радиоактивному шарику, и мы легко находим их, испытав двумя последними применениями прибора по одному шарику из этих пар вместе с любым заведомо не радиоактивным шариком (пара таких к этому моменту уже определена). Если прибор сработал один раз, испытаем шарик 7 с любым не радиоактивным. Если он радиоактивный, мы последним испытанием без труда находим второй радиоактивный шар, если же нет, то оба шарика в паре, где прибор сработал, радиоактивны.

Задача 4. *На доске написаны числа от 1 до 2017. Вася за одну операцию может прибавить к любому числу на доске его первую или последнюю цифру и выписать результат на доску. Верно ли, что любое натуральное число Вася сможет выписать на доску через несколько таких операций?*

Ответ. Неверно. Решение. Вася не сможет выписать, например, число 4003. Прибавляя к числу его последнюю цифру, он не сможет получить 4003, потому что сумма будет чётной. Прибавляя 4 к числам 4000, 4001 и 4002, он получит числа, большие, чем 4003, а прибавляя первую цифру к числам, меньшим 4000, он получит не больше, чем 3999+3 = 4002.

Задача 5. *Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток таким образом, чтобы в любом прямоугольнике со сторонами 4 и 5 было отмечено ровно 4 клетки, а в любом квадрате 8×8 — ровно 13 клеток?*

Ответ. Нельзя. Решение. Заметим, что каждый прямоугольник 8×3 можно с одной из длинных сторон дополнить двумя прямоугольниками 4×5 до квадрата 8×8. Поэтому в каждом прямоугольнике 8×3 должно быть 13–2·4 = 5 отмеченных клеток. Теперь возьмём любой прямоугольник 8×15. Его можно разрезать на 5 прямоугольников 8×3. Поэтому в нем должно быть 25 отмеченных клеток. Его же можно разрезать на 6 прямоугольников 4×5. Поэтому в нем должно быть 24 отмеченных клетки. Противоречие.

Задача 6. *На столе лежат две кучи по 2017 камней. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход Петя должен взять один камень из любой кучи, а Вася своим ходом должен либо взять из каждой кучи по одному камню, либо взять из каждой кучи по два камня, либо взять из одной кучи один камень, а из другой —два. Проигрывает не имеющий хода. Кто из мальчиков может обеспечить себе победу?*

Ответ. Петя. Решение. Если Вася после каждого хода Пети своим ходом типа (2, 1) уравнивает число камней в кучах, то после 1008-го хода Васи в кучах будет по одному камню, и Петя выиграет следующим ходом. Если Вася в какой-то момент впервые возьмёт из кучек поровну камней или возьмёт два камня из кучи, из которой Петя брал камень предыдущим ходом, то следующим ходом Петя берёт камень из той же кучи, из которой брал накануне, и дальше все свои камни берёт из этой же кучи. Легко видеть, что при такой игре в этой куче после любого хода Пети будет хотя бы на два камня меньше, а после любого хода Васи — хотя бы на один камень меньше, чем в другой. Значит, камни в ней кончатся раньше, чем в другой. Если это случится после хода Пети, Вася не сможет сделать следующего хода, а если после хода Васи, то в другой куче ещё останется хотя бы один камень, и Петя сможет сделать ход. В обоих случаях Вася проиграет.

Задача 7. *Даны четыре различных натуральных числа такие, что если к произведению любых двух из них прибавить 13, то получится квадрат натурального числа. Может ли сумма каких-то трёх из этих четырёх чисел равняться 1 000 000?*

Ответ. Не может. Решение. Пусть a, b, c и d — данные числа. Допустим, a дает остаток 1 при делении на 4. Тогда ab+13 дает при делении на 4 такой же остаток, как b+13. Так как квадраты при делении на 4 могут давать только остатки 0 и 1, число b должно при делении на 4 давать остаток 3 или 0. То же верно и для чисел c и d. Значит, среди чисел b, c и d есть либо два числа, дающие при делении на 4 остаток 3, либо два числа, делящихся на 4. В первом случае произведение этих чисел плюс 13 даёт при делении на 4 остаток 2 и потому не может быть квадратом. Во втором случае произведение этих чисел плюс 13 даёт при делении на 16 остаток 13, которого, как нетрудно проверить, у квадратов тоже не бывает. Итак, среди наших чисел нет числа, дающего при делении на 4 остаток 1.

Допустим, a дает остаток 3 при делении на 4. Тогда ab+13 дает при делении на 4 такой же остаток, как 3b+13. Значит, число b должно при делении на 4 давать остаток 0 или 1. Но остаток 1 невозможен, значит, остаток 0. Такой же остаток и у чисел c и d. Но тогда получаем три числа, делящихся на 4, что, как уже было показано, также невозможно. Следовательно, чисел, дающих при делении на 4 остаток 3, среди наших чисел тоже нет.

Допустим, a делится на 4. Второго числа, делящегося на 4, а также чисел, дающих при делении на 4 остатки 1 и 3, среди наших чисел нет, поэтому числа b, c и d должны давать при делении на 4 остаток 2. Тогда $ab+13 = 4k(4m+2)+13 = 16km+8k+13$. Последняя сумма при делении на 16 даёт остаток 13 или 5, и оба таких остатка не встречаются у квадратов. Таким образом, среди наших чисел нет и чисел, делящихся на 4.

Получается, что все наши числа дают при делении на 4 остаток 2. Но тогда сумма любых трёх из них даёт при делении на 4 остаток 2, а число 1000000 делится на 4. Значит, получить его невозможно.

Задача 8. *На окружности отмечено 20 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком, причём синих отрезков ровно 100. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Докажите, что такими операциями можно все отрезки покрасить в синий цвет.*

Решение. Всего отрезков 20·19/2 = 190 — чётное число. Значит, отрезков каждого цвета — чётное число. Заметим, что при описанной в условии операции чётность числа отрезков каждого цвета не меняется.

Возьмём раскраску, которую можно получить нашими операциями, содержащую наибольшее возможное число синих отрезков (назовём её *максимальной*). Если красных отрезков в ней нет, мы победили. Пусть они есть. Назовём точку *красной*, если из неё выходит хотя бы один красный отрезок. Так как красных отрезков хотя бы два, красных вершин хотя бы три. Возьмём две из них — A и B — и покажем, что отрезок AB — красный. Допустим, он синий. Если есть такая вершина C, что отрезки AC и BC — красные, то отрезки AC и BC можно перекрасить в синий цвет, что противоречит максимальности. Значит такой вершины C нет. Но поскольку вершины A и B красные, найдутся вершины C и D такие, что AC, BD красные, BC, AD синие. Перекрасив последовательно треугольники ABC в красный, затем ABD в синий, и наконец ABC в синий, мы увеличим количество синих отрезков, что противоречит максимальности раскраски.

Из доказанного следует, что все отрезки между красными вершинами — красные. Все остальные отрезки, очевидно, синие. Пусть точки A, B, C — красные, а точка D — не красная (такая есть, так как иначе все точки — красные, и мы уже победили). Перекрасим в треугольнике ABD рёбра AD и BD в красный цвет, а потом в треугольниках ACD и BCD — рёбра AC, AD, BC и BD — в синий цвет. Число синих рёбер увеличилось на два, что противоречит максимальности раскраски. Значит, красных рёбер в максимальной раскраске нет, что нам и требовалось.

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Сумма четырёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 15. На сколько нулей может оканчиваться число A?*

Ответ. На 0 или на 1. Решение. Если A делится на 2 и на 3, то три его наименьших делителя — это 1, 2 и 3, а четвёртый не больше 6, то есть сумма четырёх наименьших делителей меньше 15. Допустим, A не делится на 2. Тогда сумма четырёх его наименьших делителей не меньше, чем $1+3+5+7 > 15$. Таким образом, оба рассмотренных случая невозможны, и остается только случай, когда A делится на 2, но не делится на 3. Если A при этом делится ещё и на 4, то четвёртый по величине его делитель равен $15-(1+2+4) = 8$. Значит, среди делителей числа A нет пятёрки, и последняя цифра этого числа — не 0. Если же A не делится на 4, оно должно делиться на 5, так как иначе сумма четырёх его наименьших делителей не меньше, чем $1+2+6+7 > 15$. Тогда в разложение числа A на простые множители входят одна двойка и одна пятёрка, и A оканчивается на один нуль.

Задача 2. *Есть семь одинаковых с виду шариков, из которых два радиоактивны. Также имеется прибор, который по двум заложенным в него шарикам отвечает, есть ли среди этих шариков хотя бы один радиоактивный (но не отвечает, сколько их). Как за 5 применений этого прибора найти оба радиоактивных шарика?*

Решение. Занумеруем шарики 1, 2, …, 7. Первыми тремя испытаниями проверим шарики 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6. Прибор, очевидно, сработает хотя бы раз. Если он сработал дважды, в двух парах есть по одному радиоактивному шарику, и мы легко находим их, испытав двумя последними применениями прибора по одному шарику из этих пар вместе с любым заведомо не радиоактивным шариком (пара таких к этому моменту уже определена). Если прибор сработал один раз, испытаем шарик 7 с любым не радиоактивным. Если он радиоактивный, мы последним испытанием без труда находим второй радиоактивный шар, если же нет, то оба шарика в паре, где прибор сработал, радиоактивны.

Задача 3. *Положительные числа x и y удовлетворяют условию $x^2+xy+y^2 \le 3$. Докажите, что $x+y \le 2$.*

Решение. Допустим, $x+y > 2$. Тогда $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = (x^2+xy+y^2)+xy > 4$, откуда $xy > 1$. Но $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 \ge 0$, откуда $x^2+y^2 \ge 2xy > 2$ и $x^2+xy+y^2 > 3$. Противоречие.

Задача 4. *Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток таким образом, чтобы в любом прямоугольнике со сторонами 4 и 5 было отмечено ровно 4 клетки, а в любом квадрате 8×8 — ровно 13 клеток?*

Ответ. Нельзя. Решение. Заметим, что каждый прямоугольник 8×3 можно с одной из длинных сторон дополнить двумя прямоугольниками 4×5 до квадрата 8×8. Поэтому в каждом прямоугольнике 8×3 должно быть $13-2\cdot4 = 5$ отмеченных клеток. Теперь возьмём любой прямоугольник 8×15. Его можно разрезать на 5 прямоугольников 8×3. Поэтому в нем должно быть 25 отмеченных клеток. Его же можно разрезать на 6 прямоугольников 4×5. Поэтому в нем должно быть 24 отмеченных клетки. Противоречие.

Задача 5. *Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Через точку B проведена прямая l, перпендикулярная гипотенузе BC. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке D, а прямую l в точке E. На прямой l отмечена такая точка $F \ne E$, что $BF = BE$. Докажите, что CE перпендикулярно FD.*

Решение. Положим $\angle ACB = 2\gamma$. Тогда $\angle EDB = \angle ADC = 90°-\gamma = 90°-\angle ECB = \angle DEB$, откуда $BD = BE = BF$. В равнобедренном треугольнике DBF угол при вершине B равен $2(90°-\gamma) = 180°-2\gamma$ как внешний угол треугольника EBD, откуда $\angle BDF = \gamma$. Следовательно, $\angle FDE = \angle EDB+\angle BDF = 90°-\gamma+\gamma = 90°$, что и требовалось доказать.

Задача 6. *Попарно различные числа a, b и c таковы, что $a(c-1) = c(b-1) = b(a-1)$. Чему может равняться произведение abc?*

Ответ. -1. Решение. Перепишем равенство $a(c-1) = c(b-1)$ в виде $c(a-b) = a-c$. Аналогично получаем равенства $a(b-c) = b-a$ и $b(c-a) = c-b$. Перемножив три полученных равенства и, поделив обе части получившегося равенства на $(b-a)(c-b)(a-c)$ (не равное 0, так как числа a, b и c попарно различны), получим $abc = -1$.

Задача 7. *Дано множество из четырёх различных натуральных чисел такое, что если к произведению любых двух из них прибавить 13, то получится квадрат натурального числа. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть степенью натурального числа выше первой.*

Решение. Пусть a, b, c и d — данные числа. Допустим, a дает остаток 1 при делении на 4. Тогда $ab+13$ дает при делении на 4 такой же остаток, как $b+13$. Так как квадраты при делении на 4 могут давать только остатки 0 и 1, число b должно при делении на 4 давать остаток 3 или 0. То же верно и для чисел c и d. Значит, среди чисел b, c и d есть либо два числа, дающие при делении на 4 остаток 3, либо два числа, делящихся на 4. В первом случае произведение этих чисел плюс 13 даёт при делении на 4 остаток 2 и потому не может быть квадратом. Во втором случае произведение этих чисел плюс 13 даёт при делении на 16 остаток 13, которого, как нетрудно проверить, у квадратов тоже не бывает. Итак, среди наших чисел нет числа, дающего при делении на 4 остаток 1.

Допустим, a дает остаток 3 при делении на 4. Тогда $ab+13$ дает при делении на 4 такой же остаток, как $3b+13$. Значит, число b должно при делении на 4 давать остаток 0 или 1. Но остаток 1 невозможен, значит, остаток 0. Такой же остаток и у чисел c и d. Но тогда получаем три числа, делящихся на 4, что, как уже было показано, также невозможно. Следовательно, чисел, дающих при делении на 4 остаток 3, среди наших чисел тоже нет.

Допустим, a делится на 4. Второго числа, делящегося на 4, а также чисел, дающих при делении на 4 остатки 1 и 3, среди наших чисел нет, поэтому числа b, c и d должны давать при делении на 4 остаток 2. Тогда $ab+13 = 4k(4m+2)+13 = 16km+8k+13$. Последняя сумма при делении на 16 даёт остаток 13 или 5, и оба таких остатка не встречаются у квадратов. Таким образом, среди наших чисел нет и чисел, делящихся на 4.

Получается, что все наши числа дают при делении на 4 остаток 2. Но степени натуральных чисел выше первой либо нечётны, либо делятся на 4, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 8. *На окружности отмечено $n > 100$ точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. При каких n можно с помощью указанных операций сделать все отрезки одноцветными независимо от их начальной раскраски?*

Ответ. При всех n, дающих при делении на 4 остатки 2 и 3. Решение. Всего отрезков $n(n-1)/2$. Это число нечётно, если n даёт при делении на 4 остатки 2 и 3 и чётно в остальных случаях. Заметим, что при описанной в условии операции чётность числа отрезков каждого цвета не меняется. Если число $n(n-1)/2$ чётно, то число отрезков каждого цвета можно сделать нечётным, и тогда сделать все отрезки одноцветными, очевидно, не удастся.

Пусть число $n(n-1)/2$ нечётно. Тогда отрезков одного цвета (пусть красного) чётное число, а другого (пусть синего) — нечётное. Очевидно, если мы сможем перекрасить все отрезки в один цвет, то он будет синим. Возьмём раскраску, которую можно получить нашими операциями, содержащую наибольшее возможное число синих отрезков (назовём её *максимальной*). Если красных отрезков в ней нет, мы победили. Пусть они есть. Назовём точку *красной*, если из неё выходит хотя бы один красный отрезок. Так как красных отрезков хотя бы два, красных вершин хотя бы три. Возьмём две из них — A и B — и покажем, что отрезок AB — красный. Допустим, он синий. Если есть такая вершина C, что отрезки AC и BC — красные, то отрезки AC и BC можно перекрасить в синий цвет, что противоречит максимальности. Значит такой вершины C нет. Но поскольку вершины A и B красные, найдутся вершины C и D такие, что AC, BD красные, BC, AD синие. Перекрасив последовательно треугольники ABC в красный, затем ABD в синий, и наконец ABC в синий, мы увеличим количество синих отрезков, что противоречит максимальности раскраски.

Из доказанного следует, что все отрезки между красными вершинами — красные. Все остальные отрезки, очевидно, синие. Пусть точки A, B, C — красные, а точка D — не красная (такая есть, так как иначе все точки — красные, и мы уже победили). Перекрасим в треугольнике ABD рёбра AD и BD в красный цвет, а потом в треугольниках ACD и BCD — рёбра AC, AD, BC и BD — в синий цвет. Число синих рёбер увеличилось на два, что противоречит максимальности раскраски. Значит, красных рёбер в максимальной раскраске нет, что нам и требовалось.

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Вася придумал новую теорему: если произведение двух взаимно простых чисел x и y делится на произведение двух взаимно простых чисел a и b, то хотя бы одно из чисел x и y делится хотя бы на одно из чисел a или b. Верна ли эта теорема?*

Ответ. Нет. Решение. Например, $10\cdot 21 = 14\cdot 15$, но ни один из сомножителей справа не делится ни на один из сомножителей слева.

Задача 2. *Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Через точку B проведена прямая l, перпендикулярная гипотенузе BC. Биссектриса угла ACB пересекает сторону AB в точке D, а прямую l в точке E. На прямой l отмечена такая точка $F \neq E$, что BF = BE. Докажите, что CE перпендикулярно FD.*

Решение. Положим $\angle ACB = 2\gamma$. Тогда $\angle EDB = \angle ADC = 90°-\gamma = 90°-\angle ECB = \angle DEB$, откуда $BD = BE = BF$. В равнобедренном треугольнике DBF угол при вершине B равен $2(90°-\gamma) = 180°-2\gamma$ как внешний угол треугольника EBD, откуда $\angle BDF = \gamma$. Следовательно, $\angle FDE = \angle EDB+\angle BDF = 90°-\gamma+\gamma = 90°$, что и требовалось доказать.

Задача 3. *Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток таким образом, чтобы в любом прямоугольнике со сторонами 4 и 5 было отмечено ровно 4 клетки, а в любом квадрате 8×8 — ровно 13 клеток?*

Ответ. Нельзя. Решение. Заметим, что каждый прямоугольник 8×3 можно с одной из длинных сторон дополнить двумя прямоугольниками 4×5 до квадрата 8×8. Поэтому в каждом прямоугольнике 8×3 должно быть $13-2\cdot 4 = 5$ отмеченных клеток. Теперь возьмём любой прямоугольник 8×15. Его можно разрезать на 5 прямоугольников 8×3. Поэтому в нем должно быть 25 отмеченных клеток. Его же можно разрезать на 6 прямоугольников 4×5. Поэтому в нем должно быть 24 отмеченных клетки. Противоречие.

Задача 4. *Докажите, что каждое натуральное число является суммой всех попарных произведений нескольких чисел, каждое из которых равно 1 или –1.*

Первое решение. Пусть в наборе a единиц и b минус единиц. Тогда сумма всех их попарных произведений равна $\frac{a(a-1)}{2}+\frac{b(b-1)}{2}-ab=\frac{(a-b)^2-(a+b)}{2}=\frac{c^2-c}{2}-b$, где $c = a-b$. Возьмём любое натуральное число n, число c такое, что $c^2-c > 2n$ и положим $b=\frac{c^2-c}{2}-n$ и $a = c+b$. Сумма всех попарных произведений набора из a единиц и b минус единиц будет равна n.

Второе решение. Очевидно, что существует набор, в котором сумма попарных произведений больше данного числа (можно взять много единиц). А добавление к набору чисел 1 и –1 уменьшает сумму попарных произведений на 1 (так как каждое из «старых чисел» даёт два противоположных произведения с добавленными числами, а произведение добавленных равно –1. Таким образом мы сможем уменьшить сумму до требуемого числа.

Задача 5. *В классе учится n человек. Некоторые из них образуют кружки по интересам, наборы учащихся ни в каких двух кружках не совпадают. Известно, что каждый школьник ходит хотя бы в два кружка, но также есть два кружка, в которые он не ходит. Докажите, что можно выбрать пару школьников A и B такую, что найдутся кружок, в который ходят оба школьника, кружок, в который ходит только A, кружок, в который ходит только B, и кружок, в который не ходят ни A, ни B.*

Решение. Пусть всего школьники образовали n кружков. Обозначим максимальное число кружков, в которые ходит один школьник, через k, а минимальное — через s. Без ограничения общности можно считать, что $k \le n-s$. В самом деле, пусть $k > n-s$. Тогда запишем каждого школьника во все кружки, в которые он не ходит, и исключим его из всех кружков, в которые он ходит. Пара искомых школьников при этом останется той же самой, но s превратится в $n-k$, k превратится в $n-s$, и неравенство $n-s \le n-(n-k)$, равносильное неравенству $k \ge n-s$, будет выполнено.

Пусть Петя — школьник, который ходит в k кружков. Посмотрим на два какие-то кружка, в которые он не ходит. Они состоят из разных наборов участников, значит, найдется школьник Вася, который ходит в один из этих кружков, а в другой не ходит.

Теперь посмотрим на все кружки, в которые Петя ходит. Вася не может ходить во все эти кружки, иначе бы он ходил в большее число кружков, чем Петя. Вася должен ходить хотя бы в один из этих кружков, иначе Вася не ходит в большее число кружков, чем количество кружков, в которые ходит Петя, что противоречит предположению $k \le n-s$. Значит, Петя и Вася подходят под условие.

Задача 6. *Дано множество из четырёх различных натуральных чисел такое, что если к произведению любых двух из них прибавить 13, то получится квадрат натурального числа. Докажите, что ни одно из данных чисел не может быть степенью натурального числа выше первой.*

Решение. Пусть a, b, c и d — данные числа. Допустим, a дает остаток 1 при делении на 4. Тогда $ab+13$ дает при делении на 4 такой же остаток, как $b+13$. Так как квадраты при делении на 4 могут давать только остатки 0 и 1, число b должно при делении на 4 давать остаток 3 или 0. То же верно и для чисел c и d. Значит, среди чисел b, c и d есть либо два числа, дающие при делении на 4 остаток 3, либо два числа, делящихся на 4. В первом случае произведение этих чисел плюс 13 даёт при делении на 4 остаток 2 и потому не может быть квадратом. Во втором случае произведение этих чисел плюс 13 даёт при делении на 16 остаток 13, которого, как нетрудно проверить, у квадратов тоже не бывает. Итак, среди наших чисел нет числа, дающего при делении на 4 остаток 1.

Допустим, a дает остаток 3 при делении на 4. Тогда $ab+13$ дает при делении на 4 такой же остаток, как $3b+13$. Значит, число b должно при делении на 4 давать остаток 0 или 1. Но остаток 1 невозможен, значит, остаток 0. Такой же остаток и у чисел c и d. Но тогда получаем три числа, делящихся на 4, что, как уже было показано, также невозможно. Следовательно, чисел, дающих при делении на 4 остаток 3, среди наших чисел тоже нет.

Допустим, a делится на 4. Второго числа, делящегося на 4, а также чисел, дающих при делении на 4 остатки 1 и 3, среди наших чисел нет, поэтому числа b, c и d должны давать при делении на 4 остаток 2. Тогда $ab+13 = 4k(4m+2)+13 = 16km+8k+13$. Последняя сумма при делении на 16 даёт остаток 13 или 5, и оба таких остатка не встречаются у квадратов. Таким образом, среди наших чисел нет и чисел, делящихся на 4.

Получается, что все наши числа дают при делении на 4 остаток 2. Но степени натуральных чисел выше первой либо нечётны, либо делятся на 4, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 7. *На стороне AB квадрата $ABCD$ вне его построен равнобедренный прямоугольный треугольник ABE, $\angle E = 90°$. Пусть N — середина AD, M — точка пересечения прямых CE и AB, P — прямых CN и AB, F — прямых PE и MN. На прямой FP отмечена точка Q такая, что CE — биссектриса угла QCB. Докажите, что $MQ \perp CF$.*

Решение. Обозначим через K и L середины сторон CD и AB соответственно, а сторону квадрата $ABCD$ для удобства вычислений положим равной 6.

Пусть $\angle QCE = \angle ECB = \alpha$. Тогда и $\angle KEC = \alpha$, так как $EK \parallel BC$. Далее, из равенства прямоугольных треугольников DNC и ANP ($AN = DN = 3$, $\angle DNC = \angle ANP$) следует, что $PA = CD = 6$, откуда $PL = 9 = EK$. Так как, кроме того, $EL = KC = 3$, прямоугольные треугольники ELP и CKE равны по двум катетам, откуда $\angle APE = \angle KEC = \alpha$. Следовательно, $\angle CEP = \angle CEK + \angle KEP = \alpha + (90° - \alpha) = 90°$.

Отложим на продолжении отрезка AB за точку B отрезок $BR = 3$. Прямоугольные треугольники ARN и KEC равны по двум катетам, поэтому $\angle ARN = \alpha = \angle APF$, откуда $NR \parallel PF$. Заметим далее, что $KC/LM = EK/EL = 3$, откуда $LM = 1$, $MR = LR - LM = 5 = MN$, $AM = AL + LM = 4$. Отсюда $MN = 5$, так как треугольник NAM — прямоугольный с катетами 3 и 4. Значит, $\angle PFN = \angle MNR = \angle ARN = \alpha$. Пусть S — точка пересечения прямых FN и QC. Тогда $\angle QSF = 180° - \angle PFN - \angle FQC = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$. Здесь равенство $\angle FQC = 90° - \alpha$ получается из прямоугольного треугольника QCE, где $\angle QCE = \alpha$.

Итак, CE и FS — высоты треугольника CQF, а M — точка пересечения его высот, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 8. *На окружности отмечено 30 точек. Любые две отмеченные точки соединены красным или синим отрезком. Можно проделывать следующую операцию: взять любой неодноцветный треугольник и перекрасить в нём два отрезка таким образом, чтобы он стал одноцветным. Верно ли, что для любой начальной раскраски отрезков можно их все сделать одноцветными с помощью указанных операций?*

Ответ. Верно. Решение. Всего отрезков $30 \cdot 29/2 = 15 \cdot 29$ — нечётное число. Значит, отрезков одного цвета (пусть красного) чётное число, а другого (пусть синего) — нечётное. Так как при описанной в условии операции чётность числа отрезков каждого цвета не меняется, если мы сможем перекрасить все отрезки в один цвет, то он будет синим.

Возьмём раскраску, которую можно получить нашими операциями, содержащую наибольшее возможное число синих отрезков (назовём её *максимальной*). Если красных отрезков в ней нет, мы победили. Пусть они есть. Назовём точку *красной*, если из неё выходит хотя бы один красный отрезок. Так как красных отрезков хотя бы два, красных вершин хотя бы три. Возьмём две из них — A и B — и покажем, что отрезок AB — красный. Допустим, он синий. Если есть такая вершина C, что отрезки AC и BC — красные, то отрезки AC и BC можно перекрасить в синий цвет, что противоречит максимальности. Значит такой вершины C нет. Но поскольку вершины A и B красные, найдутся вершины C и D такие, что AC, BD красные, BC, AD синие. Перекрасив последовательно треугольники ABC в красный, затем ABD в синий, и наконец ABC в синий, мы увеличим количество синих отрезков, что противоречит максимальности раскраски.

Из доказанного следует, что все отрезки между красными вершинами — красные. Все остальные отрезки, очевидно, синие. Пусть точки A, B, C — красные, а точка D — не красная (такая есть, так как иначе все точки — красные, и мы уже победили). Перекрасим в треугольнике ABD рёбра AD и BD в красный цвет, а потом в треугольниках ACD и BCD — рёбра AC, AD, BC и BD — в синий цвет. Число синих рёбер увеличилось на два, что противоречит максимальности раскраски. Значит, красных рёбер в максимальной раскраске нет, что нам и требовалось.