МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.12.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. На круговой трассе расположено три флажка. От одного из них ровно в 8:00 начинает движение с постоянной скоростью велосипедист. Доехав до флажка, велосипедист отмечает время подъезда и либо двигается дальше, либо поворачивает в противоположную сторону, продолжая двигаться с той же скоростью. После окончания тренировки в блокноте велосипедиста было отмечено 8:05, 8:12, 8:19, 8:26, 8:36. За сколько времени велосипедист проехал бы весь круг, если бы ехал в одну сторону?

2. По окружности расставлено 99 точек, покрашенных в несколько цветов. Оказалось, что среди любых трёх идущих подряд точек есть две одноцветные. Докажите, что среди каких-то четырёх идущих подряд точек есть три одноцветные.

3. Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 127, имеет сумму цифр, равную 127, и не содержит нулей в записи.

4. Петя и Вася задумали по три различных натуральных числа, не превосходящих 1000. Оказалось, что произведение Петиных чисел равно произведению Васиных. Может ли сумма Петиных чисел быть ровно на 2000 больше суммы Васиных?

5. Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из 2017 квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила n кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась «зеленая полоса» из 2017 зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте. Мешатель пытается помешать этому. Для каких $n > 1$ Творитель сможет добиться успеха?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.12.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. В очереди стоят 100 человек, лжецы и рыцари. Каждый из них сказал: «Передо мной стоит больше лжецов, чем позади меня.» Сколько лжецов может быть в очереди?

2. Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 127, имеет сумму цифр, равную 127, и не содержит нулей в записи.

3. Различные числа x и y таковы, что $x+4 = (y-2)^2$ и $y+4 = (x-2)^2$. Найдите x^2+y^2.

4. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $ab = cd$. Докажите, что НОД$(a, c)\cdot$НОД$(a, d) = a\cdot$НОД(a, b, c, d).

5. Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из 2017 квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила n кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась «зеленая полоса» из 2017 зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте. Мешатель пытается помешать этому. Для каких $n > 1$ Творитель сможет добиться успеха?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.12.2017

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 8 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих рядом, сумма не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

2. Точки K, L и M расположены на сторонах AB, BC и CD квадрата $ABCD$ соответственно так, что треугольник KLM — равнобедренный прямоугольный с прямым углом при вершине L. Докажите, что прямые AL и DK перпендикулярны.

3. Различные числа x и y таковы, что $x+4 = (y-2)^2$ и $y+4 = (x-2)^2$. Найдите x^2+y^2.

4. Конечно или бесконечно множество решений уравнения $x^4+y^3 = z!+7$ в натуральных числах?

5. Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из 2017 квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила n кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась «зеленая полоса» из 2017 зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте. Мешатель пытается помешать этому. Для каких $n > 1$ Творитель сможет добиться успеха?

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *На круговой трассе расположено три флажка. От одного из них ровно в 8:00 начинает движение с постоянной скоростью велосипедист. Доехав до флажка, велосипедист отмечает время подъезда и либо двигается дальше, либо поворачивает в противоположную сторону, продолжая двигаться с той же скоростью. После окончания тренировки в блокноте велосипедиста было отмечено 8:05, 8:12, 8:19, 8:26, 8:36. За сколько времени велосипедист проехал бы весь круг, если бы ехал в одну сторону?*

Ответ. За 22 минуты. Решение. Три флажка разбивают трассу на три участка. Из записей велосипедиста видно, что есть участки, которые он проехал за 5 минут (с 8:00 до 8:05), 7 минут (с 8:05 до 8:12) и 10 минут (с 8:26 до 8:36). Очевидно, это три разных участка, и велосипедист проедет составленную из них трассу за 5+7+10 = 22 минуты.

Задача 2. *По окружности расставлено 99 точек, покрашенных в несколько цветов. Оказалось, что среди любых трёх идущих подряд точек есть две одноцветные. Докажите, что среди каких-то четырёх идущих подряд точек есть три одноцветные.*

Решение. Возьмём любые три точки, идущие подряд. Если они одноцветные, утверждение задачи очевидно. Иначе две из них раскрашены в один цвет, а одна — в другой. Уберём из нашей тройки левую точку и добавим к ней правую. Чтобы в новой тройке нашлись три точки одного цвета, добавленная точка также должна быть раскрашена в один из этих двух цветов. Продолжая эти рассуждения, убеждаемся, что все точки раскрашены в два цвета. Так как число 99 нечётно, цвета точек не могут чередоваться, и найдутся две точки одного цвета 1, стоящие рядом. Если нет четырёх идущих подряд точек, среди которых три одноцветные, с каждой стороны от этой пары должны стоять по две точки цвета 2, за ними — снова по две точки цвета 1 и т.д. Но тогда все точки разбиваются на пары, а их нечётное число. Противоречие.

Задача 3. *Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 127, имеет сумму цифр, равную 127, и не содержит нулей в записи.*

Решение. Сумма цифр числа 127 равна 10, а числа $127 \cdot 2 = 254$ — 11. Записав 7 раз подряд число 254 и приписав к нему потом 5 раз подряд число 127, получим искомое число.

Задача 4. *Петя и Вася задумали по три различных натуральных числа, не превосходящих 1000. Оказалось, что произведение Петиных чисел равно произведению Васиных. Может ли сумма Петиных чисел быть ровно на 2000 больше суммы Васиных?*

Ответ. Не может. Решение. Два натуральных числа, не превосходящих 1000, могут отличаться самое большее на 999. Поэтому чтобы сумма Петиных чисел была на 2000 больше суммы Васиных, каждое Петино число должно быть больше каждого Васиного. Но тогда произведение Петиных чисел будет больше произведения Васиных, что противоречит условию.

Задача 5. *Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из 2017 квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила n кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась «зеленая полоса» из 2017 зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте. Мешатель пытается помешать этому. Для каких $n > 1$ Творитель сможет добиться успеха?*

Ответ. При нечётных n. Решение. Пусть n чётно. Тогда М разбивает на пары все меловые клетки, кроме одной из крайних, и на каждый ход Т в одну из входящих в пары колонок отвечает ходом в парную колонку, а в непарной крайней колонке на каждый ход Т отвечает ходом в ту же колонку. При такой игре после каждого хода М колонны из кубиков в каждой выделенной М паре клеток будут одинаковой высоты, и потому в парных колонках в каждом горизонтальном ряду кирпичей рядом с зелёным кирпичом будет красный. В силу чётности n он сможет придерживаться такой стратегии до конца игры и потому выиграет.

Пусть n нечётно. Тогда Т разбивает на пары все меловые клетки, кроме одной из крайних, и первый ход делает в непарную крайнюю клетку. Далее он играет так. Если М очередным ходом поставил первый кубик в какую-то клетку, Т ставит первый кубик в парную клетку. Если же М ставит кубик на какой-то уже поставленный, то Т ставит свой кубик на тот, который только что поставил М. Так как число n нечётно, Т сможет придерживаться такой стратегии до конца игры. При этом, как легко видеть, полоса на высоте 3 окажется целиком зелёной ($n \geq 3$, так как n нечетно и больше 1).

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *В очереди стоят 100 человек, лжецы и рыцари. Каждый из них сказал: «Передо мной стоит больше лжецов, чем позади меня.» Сколько лжецов может быть в очереди?*

Ответ. Один. Решение. Очередь не может состоять из одних рыцарей: тогда все они солгут. Рассмотрим последнего в очереди лжеца. Позади него нет лжецов, и чтобы он солгал, надо, чтобы не было лжецов и впереди него. Значит, в очереди ровно один лжец.

Задача 2. *Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 127, имеет сумму цифр, равную 127, и не содержит нулей в записи.*

Решение. Сумма цифр числа 127 равна 10, а числа $127\cdot 2 = 254$ — 11. Записав 7 раз подряд число 254 и приписав к нему потом 5 раз подряд число 127, получим искомое число.

Задача 3. *Различные числа x и y таковы, что $x+4 = (y-2)^2$ и $y+4 = (x-2)^2$. Найдите x^2+y^2.*

Ответ. 15. Решение. Вычитая из первого равенства второе, получаем: $x-y = (y-x)(x+y-4)$, откуда, поскольку x и y различны, получаем, что $x+y = 3$. Складывая же первое равенство со вторым, после преобразований получаем, что $x^2+y^2 = 5(x+y)$, то есть $x^2+y^2 = 15$.

Задача 4. *Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $ab = cd$. Докажите, что НОД$(a, c)\cdot$НОД$(a, d) = a\cdot$НОД(a, b, c, d).*

Решение. Заменив каждое из чисел a, b, c, d частным от деления его на $k =$ НОД(a, b, c, d), мы сохраним оба равенства из условия задачи: обе части каждого из них поделятся на k^2. Теперь мы можем считать, что $k = 1$, и требуется доказать, что НОД$(a, c)\cdot$НОД$(a, d) = a$. Пусть $a =$ НОД$(a, c)\cdot a_1$, $c =$ НОД$(a, c)\cdot c_1$, $b =$ НОД$(b, d)\cdot b_1$, $d =$ НОД$(b, d)\cdot d_1$. Тогда НОД$(a_1, c_1) =$ НОД$(b_1, d_1) = 1$ и $a_1b_1 = c_1d_1$, откуда $a_1 = d_1$ и $b_1 = c_1$. Далее, поскольку НОД(НОД(a, c), НОД(b, d)) = НОД$(a, b, c, d) = 1$, получаем НОД$(a, d) =$ НОД(a_1НОД(a, c), a_1НОД(b, d)) $= a_1$, откуда $a =$ НОД$(a, c)\cdot a_1 =$ НОД$(a, c)\cdot$НОД(a, d), что и требовалось.

Задача 5. *Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из 2017 квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила n кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась «зеленая полоса» из 2017 зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте. Мешатель пытается помешать этому. Для каких $n > 1$ Творитель сможет добиться успеха?*

Ответ. При нечётных n. Решение. Пусть n чётно. Тогда М разбивает на пары все меловые клетки, кроме одной из крайних, и на каждый ход Т в одну из входящих в пары колонок отвечает ходом в парную колонку, а в непарной крайней колонке на каждый ход Т отвечает ходом в ту же колонку. При такой игре после каждого хода М колонны из кубиков в каждой выделенной М паре клеток будут одинаковой высоты, и потому в парных колонках в каждом горизонтальном ряду кирпичей рядом с зелёным кирпичом будет красный. В силу чётности n он сможет придерживаться такой стратегии до конца игры и потому выиграет.

Пусть n нечётно. Тогда Т разбивает на пары все меловые клетки, кроме одной из крайних, и первый ход делает в непарную крайнюю клетку. Далее он играет так. Если М очередным ходом поставил первый кубик в какую-то клетку, Т ставит первый кубик в парную клетку. Если же М ставит кубик на какой-то уже поставленный, то Т ставит свой кубик на тот, который только что поставил М. Так как число n нечётно, Т сможет придерживаться такой стратегии до конца игры. При этом, как легко видеть, полоса на высоте 3 окажется целиком зелёной ($n \geq 3$, так как n нечетно и больше 1).

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 8 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих рядом, сумма не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?*

Ответ. Нельзя. Решение. Рядом с двойкой должны стоять два числа. Но нетрудно проверить, что рядом с двойкой может стоять только шестёрка.

Задача 2. *Точки K, L и M расположены на сторонах AB, BC и CD квадрата ABCD соответственно так, что треугольник KLM — равнобедренный прямоугольный с прямым углом при вершине L. Докажите, что прямые AL и DK перпендикулярны.*

Решение. Заметим, что $\angle KLB+\angle MLC = 180°-\angle KLM = 90° = \angle LMC+\angle MLC$, откуда $\angle KLB = \angle LMC$ и $\angle MLC = \angle BKL$. Следовательно, треугольники KBL и LCM равны по стороне и двум углам. Положим $KB = LC = x$, а сторону квадрата $ABCD$ обозначим через y. Тогда $CM = BL = y-x = KF$. Значит, прямоугольные треугольники ABL и DAK равны по двум катетам, откуда $\angle KDA = \angle BAL = 90°-\angle LAD$. Обозначая через O точку пересечения отрезков KD и AL, из треугольника AOD находим, что $\angle AOD = 180°-\angle LAD-\angle KDA = 180°-90° = 90°$.

Задача 3. *Различные числа x и y таковы, что $x+4 = (y-2)^2$ и $y+4 = (x-2)^2$. Найдите x^2+y^2.*

Ответ. 15. Решение. Вычитая из первого равенства второе, получаем: $x-y = (y-x)(x+y-4)$, откуда, поскольку x и y различны, получаем, что $x+y = 3$. Складывая же первое равенство со вторым, после преобразований получаем, что $x^2+y^2 = 5(x+y)$, то есть $x^2+y^2 = 15$.

Задача 4. *Конечно или бесконечно множество решений уравнения $x^4+y^3 = z!+7$ в натуральных числах?*

Ответ. Число решений конечно. Решение. При $z \geq 13$ $z!$ делится на 13. Значит, x^4+y^3 при $z \geq 13$ должно при делении на 13 давать остаток 7. Но кубы при делении на 13 дают только остатки 0, 1, 5, 8, 12, а четвёртые степени — только остатки 0, 1, 3, 9. Нетрудно проверить, что остаток 7 получить сложением двух таких остатков нельзя.

Таким образом, наше уравнение не имеет решений при $z \geq 13$. Число же его решений при $z < 13$, очевидно, конечно.

Задача 5. *Творитель и Мешатель строят стену. Творитель имеет запас зеленых кубических кирпичей, а Мешатель — красных (все кирпичи одинакового размера). На полу мелом нарисована полоска из 2017 квадратных клеток. Творитель и Мешатель по очереди кладут по одному кирпичу: положить кирпич можно либо на одну из нарисованных на полу клеток, либо на любой из уже положенных кирпичей, но так, чтобы высота получившейся колонны не превосходила n кирпичей. Начинает Творитель. Он хочет, чтобы появилась «зеленая полоса» из 2017 зеленых кирпичей, расположенных на одной высоте. Мешатель пытается помешать этому. Для каких n > 1 Творитель сможет добиться успеха?*

Ответ. При нечётных n. Решение. Пусть n чётно. Тогда М разбивает на пары все меловые клетки, кроме одной из крайних, и на каждый ход Т в одну из входящих в пары колонок отвечает ходом в парную колонку, а в непарной крайней колонке на каждый ход Т отвечает ходом в ту же колонку. При такой игре после каждого хода М колонны из кубиков в каждой выделенной М паре клеток будут одинаковой высоты, и потому в парных колонках в каждом горизонтальном ряду кирпичей рядом с зелёным кирпичом будет красный. В силу чётности n он сможет придерживаться такой стратегии до конца игры и потому выиграет.

Пусть n нечётно. Тогда Т разбивает на пары все меловые клетки, кроме одной из крайних, и первый ход делает в непарную крайнюю клетку. Далее он играет так. Если М очередным ходом поставил первый кубик в какую-то клетку, Т ставит первый кубик в парную клетку. Если же М ставит кубик на какой-то уже поставленный, то Т ставит свой кубик на тот, который только что поставил М. Так как число n нечётно, Т сможет придерживаться такой стратегии до конца игры. При этом, как легко видеть, полоса на высоте 3 окажется целиком зелёной ($n \geq 3$, так как n нечетно и больше 1).