МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано простое p. Докажите, что существует перестановка $(a_1, a_2, ..., a_p)$ чисел 1, 2, 3, ..., p такая, что числа a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, ..., $a_1a_2...a_p$ дают разные остатки при делении на p.

2. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении l и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.

4. В треугольнике ABC угол A равен 60°, AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC, пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.

5. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c, не превосходящих 1, $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1–a)(1–b)(1–c)\leq 9$.

6. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c, пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP'$, $BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие k человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Продолжительность проекта — n дней. При каком наибольшем k организаторы проекта наверняка смогут выгнать всех участников?

8. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?

2. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении l и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.

4. В треугольнике ABC угол A равен 60°, AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC, пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.

5. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c, не превосходящих 1, $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1–a)(1–b)(1–c)\leq 9$.

6. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c, пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP'$, $BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?

8. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?

2. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1001 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.

4. В треугольнике ABC угол A равен 60°, AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC, пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.

5. Решите систему уравнений $[x]-y=2[y]-z=3[z]-x=\dfrac{2016}{2017}$.

6. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c, пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP'$, $BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Могли ли участники подружиться перед началом проекта так, чтобы через неделю, независимо от действий жюри, хоть кто-нибудь из них гарантированно остался бы на проекте?

8. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Дано простое p. Докажите, что существует такая перестановка $(a_1, a_2, ..., a_p)$ чисел 1, 2, 3, ..., p, что числа a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, ..., $a_1a_2...a_p$ дают разные остатки при делении на p.

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?

4. На доске 100×100 отмечена 201 клетка. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Чему равно наименьшее число различных квадратов 2×2 (возможно, пересекающихся), все клетки которых отмечены?

5. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

7. Для положительных чисел x и y, меньших единицы, докажите неравенство
$$xy+\frac{1}{xy}+2>x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}.$$

8. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A, равным 110°, отмечена точка M. Оказалось, что $\angle BCM = 30°$ и $\angle CBM = 25°$. Найдите угол AMB.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 400 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.

4. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2, все клетки которых отмечены.

5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

7. Для положительных чисел x и y, меньших единицы, докажите неравенство

$$xy+\frac{1}{xy}+2>x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}.$$

8. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A, равным 110°, отмечена точка M. Оказалось, что $\angle BCM = 30°$ и $\angle CBM = 25°$. Найдите угол AMB.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 20172017 и 20172018 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Натуральные числа m и n таковы, что $m^{2017}+m+n$ делится на mn. Докажите, что $m+n$ делится на m^2.

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.

4. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2, все клетки которых отмечены.

5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких–то натуральных чисел x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

7. Для положительных чисел x и y, меньших единицы, докажите неравенство

$$xy+\frac{1}{xy}+1>\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

8. Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE. Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE, он пересек продолжение стороны AB в точке P. Прямая PE пересекает сторону BC в точке S. Докажите, что $BS = SP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат по 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Натуральные числа x и y таковы, что числа $\dfrac{2y}{x(y-x)}$ и $\dfrac{(y-x)(y+1)}{2y^2}$ целые. Найдите все возможные значения чисел x и y.

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 42 человека, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 5 изгнаний на проекте никого не останется.

4. 30 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер имеет с моим общий делитель, больший 1, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов по 500 страниц каждый. Нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких–то натуральных чисел x и y страницы с номерами x, $2x$, $11x$, y, $3y$, $5y$ все попали в разные тома?

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 30 по кругу в таком порядке, что все 30 сумм пар соседних чисел давали различные остатки от деления на 30?

7. Может ли семизначное число, начинающееся на 2017, делиться на все числа от 1 до 9?

8. Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE. Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE, он пересек продолжение стороны AB в точке P. Прямая PE пересекает сторону BC в точке S. Докажите, что $BS = SP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после семи заседаний на проекте не осталось ни одного участника?

3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.

4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.

5. В группе из 5 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие–то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 10 минут любые двое ровно один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?

6. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2, все клетки которого отмечены.

7. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

8. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами x, y, $2x$, $3y$, $5y$, $11x$ все попали в разные тома?

2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 30 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после 4 заседаний на проекте не осталось ни одного участника?

3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.

4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.

5. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие–то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 6 минут любые двое ровно один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?

6. На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причём в любой строке и в любом столбце лежит не менее пяти отмеченных клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Какое наименьшее количество квадратов 5×5 (возможно, пересекающихся), состоящих из отмеченных клеток, может быть?

7. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

8. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких–то натуральных x, y страницы с номерами x, y, $2x$, $3y$, $5y$, $11x$ все попали в разные тома?

2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 14 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после трёх заседаний на проекте не осталось ни одного участника?

3. В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.

5. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?

6. На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причем в любом столбце и в любой строке отмечено не менее двух клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2, все клетки которого отмечены.

7. Числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 расставили по кругу в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать две группы из 50 идущих подряд чисел (возможно, пересекающиеся) так, чтобы суммы чисел в этих группах давали одинаковые остатки от деления на 100.

8. На столе стоят две корзинки, в одной из них лежит 44 пирожка, а во второй — 55. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

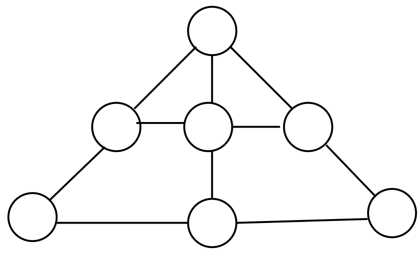
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Малыш и Карлсон играют в пирожки, лежащие на двух тарелках. За один ход можно взять два пирожка из любой одной тарелки, один — съесть, а второй — переложить на другую тарелку. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Начинает Карлсон. Кто выиграет, если сначала на одной тарелке лежало 44, а на второй – 55 пирожков?

2. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.

3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.



4. Сколькими способами можно вписать в кружочки числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы суммы всех троек чисел, расположенных вдоль каждого из пяти отрезков, были равны?

5. В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

6. Найдите наименьшее число, которое начинается с цифр 2017 и делится на все числа от 1 до 10.

7. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами x, y, $2x$, $3y$, $11x$, $5y$ все попали в разные тома?

8. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?