МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$, $a \neq c$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a\times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c\times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a\times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c\times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

2. Докажите, что не существует натурального n такого, что $n+k^2$ оказывается квадратом по крайней мере для n различных натуральных k.

3. Наташа написала на доске n различных целых чисел и сообщила находящемуся в соседней комнате Васе их сумму и количество. Вася может обращаться к Наташе с просьбами следующих видов: 1) сообщить, есть ли на доске число k (k он выбирает сам); 2) сообщить, можно ли все числа на доске разбить на две группы с равными суммами (сумма чисел в пустой группе считается равной 0); 3) стереть с доски число k, если оно на ней есть (k он выбирает сам); 4) дописать на доску число k, если его на ней нет (k он выбирает сам). Наташа исполняет все желания Васи, но не сообщает, пришлось ли ей стереть число в случае 3 или дописать число в случае 4. Докажите, что, высказав не более $3n$ желаний, Вася сможет узнать, был ли в начале на доске набор чисел с суммой 2017.

4. Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $\dfrac{2CN}{BC} = \dfrac{AM}{AB}$. Точка P лежит на прямой AC. Докажите, что прямые MN и NP перпендикулярны тогда и только тогда, когда PN — биссектриса угла MPC.

5. Числа x_1, x_2, …, x_n удовлетворяют условиям $x_1 = 1+\dfrac{1}{x_2}, x_2 = 1+\dfrac{1}{x_3}, \ldots, x_{n-1} = 1+\dfrac{1}{x_n}$ и $x_n = 1+\dfrac{1}{x_1}$. Докажите, что все они равны.

6. Докажите, что для бесконечно многих пар натуральных чисел x и y число $\dfrac{x^3+y^3+2}{x^2+y^2+1}$ является удвоенным квадратом целого числа.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$. На стороне AB отмечена точка D, на стороне BC — точка E, а на стороне AC — точка F, причём $AD = CD$ и $CE = DE = DF$. Докажите, что $BE < AF$.

8. В связном графе степень каждой вершины равна 2016, и его вершины можно покрасить в 2017 цветов правильным образом так, что среди соседей каждой вершины есть все цвета, кроме ее цвета. Сколько вершин может быть в таком графе?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$, $a \neq c$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a\times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c\times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a\times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c\times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

2. Докажите, что не существует натурального n такого, что $n+k^2$ оказывается квадратом по крайней мере для n различных натуральных k.

3. Наташа написала на доске три различных целых числа с суммой 1000000 и сообщила находящемуся в соседней комнате Васе их сумму и количество. Вася может обращаться к Наташе с просьбами следующих видов: 1) сообщить, есть ли на доске число k (k он выбирает сам); 2) сообщить, можно ли все числа на доске разбить на две группы с равными суммами (сумма чисел в пустой группе считается равной 0); 3) стереть с доски число k, если оно на ней есть (k он выбирает сам); 4) дописать на доску число k, если его на ней нет (k он выбирает сам). Наташа исполняет все желания Васи, но не сообщает (в случаях 3 и 4), стерла ли она число и дописала ли она число. Докажите, что, высказав не более 10 желаний, Вася сможет узнать, был ли в начале на доске набор чисел с суммой 2017.

4. Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $\frac{2CN}{BC}=\frac{AM}{AB}$. Точка P лежит на прямой AC. Докажите, что прямые MN и NP перпендикулярны тогда и только тогда, когда PN — биссектриса угла MPC.

5. Числа x_1, x_2, …, x_{2017} таковы, что $x_1=1+\frac{1}{x_2}, x_2=1+\frac{1}{x_3},\ldots,x_{2016}=1+\frac{1}{x_{2017}}$ и $x_{2017}=1+\frac{1}{x_1}$. Докажите, что все они равны.

6. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}=n$. Докажите, что n^2-5n делится на 700.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$. На стороне AB отмечена точка D, на стороне BC — точка E, а на стороне AC — точка F, причём $AD = CD$ и $CE = DE = DF$. Докажите, что $BE < AF$.

8. Федеративная Республика Руритания (ФРР) состоит из 2017 субъектов федерации. Из каждого города ФРР летают самолёты ровно в 2016 городов, расположенных во всех субъектах федерации, кроме того, к которому относится этот город. Известно, что из любого города ФРР можно добраться самолётами до любого другого. Сколько городов может быть в Руритании?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники 2×3, причём ровно 100 этих прямоугольников оказались расположены вертикально. Докажите, что невозможно разбить исходный прямоугольник на прямоугольники 2×3 так, чтобы ровно 2017 прямоугольников были расположены вертикально.

2. Докажите, что не существует натурального n такого, что $n+k^2$ оказывается квадратом по крайней мере для n различных натуральных k.

3. Компания друзей сыграла 20 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более трех, а проигравший — более трёх следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в этой компании?

4. Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $\frac{2CN}{BC}=\frac{AM}{AB}$. Точка P лежит на прямой AC. Докажите, что прямые MN и NP перпендикулярны тогда и только тогда, когда PN — биссектриса угла MPC.

5. Числа x_1, x_2, …, x_{2017} таковы, что $x_1=1+\frac{1}{x_2}, x_2=1+\frac{1}{x_3}, \ldots, x_{2016}=1+\frac{1}{x_{2017}}$ и $x_{2017}=1+\frac{1}{x_1}$. Докажите, что все они равны.

6. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}=n$. Докажите, что n делится на 20.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$. На стороне AB отмечена точка D, на стороне BC — точка E, а на стороне AC — точка F, причём $AD = CD$ и $CE = DE = DF$. Докажите, что $BE < AF$.

8. Федеративная Республика Руритания (ФРР) состоит из 2017 субъектов федерации. Из каждого города ФРР летают самолёты ровно в 2016 городов, расположенных во всех субъектах федерации, кроме того, к которому относится этот город. Известно, что из любого города ФРР можно добраться самолётами до любого другого. Сколько городов может быть в Руритании?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

2. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $a > c > d > b$ и $ab = cd$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a \times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c \times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a \times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c \times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

3. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2-1}{2} = \frac{y^2-1}{3} = n$. Докажите, что n делится на 20.

4. Дана доска 3×100. Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

5. Дано натуральное число $n > 100$. На доске написаны натуральные числа a_1, a_2, …, a_n, каждое из которых не превосходит n. Известно, что при всех различных i и k от 1 до n число ia_i+ka_k делится на $i+k$. Докажите, что все написанные на доске числа совпадают.

6. В связном графе степень каждой вершины равна 2016, и его вершины можно покрасить в 2017 цветов правильным образом так, что среди соседей каждой вершины есть все цвета, кроме ее цвета. Сколько вершин может быть в таком графе?

7. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a^2-1}{b} + \frac{b^2-1}{a} \geq a+b$.

8. В треугольнике ABC, где $\angle A = \frac{4}{3}\angle B < 90°$, на биссектрисе AE выбрана такая точка F, что $AF = AC$ и $2\angle ABF = \angle BAC$. Найдите угол BCF.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

2. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников 60×21 (60 строчек и 21 столбец) и нескольких прямоугольников 36×35 (36 строчек и 35 столбцов). Один из прямоугольников 60×21 потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник 36×35. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

3. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}=n$. Докажите, что n делится на 20.

4. Дана доска 3×100. Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

5. Дано натуральное число $n > 100$. На доске написаны натуральные числа a_1, a_2, …, a_n, каждое из которых не превосходит n. Известно, что при всех различных i и k от 1 до n число ia_i+ka_k делится на $i+k$. Докажите, что среди написанных на доске чисел не менее половины одинаковы.

6. На Марсе проживают марсиане 100 различных видов. Каждый марсианин знаком ровно с одним марсианином любого другого вида. Сколько марсиан может проживать на Марсе?

7. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a^2-1}{b}+\frac{b^2-1}{a}\geq a+b$.

8. Стороны AB и AC тупоугольного треугольника ABC равны. На продолжении стороны AC за точку C отмечена такая точка M, что $AC = CM$. К отрезку AC в точке C проведен перпендикуляр, пересекающий прямую AB в точке P. Оказалось, что PM перпендикулярно BC. Докажите, что треугольник APM — равносторонний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?

2. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники 2×3, причём ровно 100 этих прямоугольников оказались расположены вертикально. Докажите, что невозможно разбить исходный прямоугольник на прямоугольники 2×3 так, чтобы ровно 2017 прямоугольников были расположены вертикально.

3. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}=n$. Докажите, что n делится на 10.

4. Дана доска 3×100. Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

5. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$, каждое из которых не превосходит 101. Известно, что при всех различных i и k от 1 до 101 число ia_i+ka_k делится на $i+k$. Докажите, что среди написанных на доске чисел не менее 50 одинаковы.

6. На Марсе проживают марсиане 100 различных видов. Каждый марсианин знаком ровно с одним марсианином любого другого вида. Сколько марсиан может проживать на Марсе?

7. Для натуральных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a-1}{b}+\frac{b+1}{a}\geq 2$.

8. Стороны AB и AC тупоугольного треугольника ABC равны. На продолжении стороны AC за точку C отмечена такая точка M, что $AC = CM$. К отрезку AC в точке C проведен перпендикуляр, пересекающий прямую AB в точке P. Оказалось, что PM перпендикулярно BC. Докажите, что треугольник APM — равносторонний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 3, а из другого вычесть 1 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

2. На доске написано 100-значное натуральное число, не имеющее нулей в записи. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвёртую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.

3. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2-1}{2}=\frac{y^2-1}{3}=n$. Докажите, что n делится на 10.

4. В компании из шести человек имеются один рыцарь (всегда говорит правду), два дипломата (говорят правду или лгут по своему усмотрению) и три лжеца (всегда лгут). Каждого спросили, кем он является. Первый сказал о себе, что он рыцарь, второй — что дипломат, третий — что лжец, четвёртый — что не рыцарь, пятый — что не дипломат, а шестой — что не лжец. Который из них — рыцарь?

5. Пусть $S(n)$ — это сумма цифр числа n. Решите уравнение $n = 6\cdot S(n)$.

6. На Марсе проживают марсиане 100 различных видов. Каждый марсианин знаком ровно с одним марсианином любого другого вида. Сколько марсиан может проживать на Марсе?

7. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?

8. Стороны AB и AC тупоугольного треугольника ABC равны. На продолжении стороны AC за точку C отмечена такая точка M, что $AC = CM$. К отрезку AC в точке C проведен перпендикуляр, пересекающий прямую AB в точке P. Оказалось, что PM перпендикулярно BC. Докажите, что треугольник APM — равносторонний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На конгрессе собралось несколько учёных. Есть k официальных языков этого конгресса. Выполняется следующее свойство: любые двое учёных могут общаться, используя только официальные языки, возможно, с помощью одного переводчика из числа других ученых, присутствующих на конгрессе. При каком наименьшем k может так оказаться, что отъезд любого ученого нарушает это свойство?

2. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$, $a \neq c$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a\times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c\times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a\times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c\times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

3. На столе стоят 6 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 6 гирь?

4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвёртую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.

5. Дана доска 3×100. Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

6. Компания друзей сыграла 100 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более 10, а проигравший – более 10 следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в компании?

7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

8. Дано натуральное число $n > 100$. На доске написаны натуральные числа a_1, a_2, …, a_{2n}, каждое из которых не превосходит $2n$. Известно, что при всех различных i и k от 1 до $2n$ число ia_i+ka_k делится на $i+k$. Докажите, что среди написанных на доске чисел можно выбрать n равных.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На конгрессе собралось 13 учёных. Есть 6 официальных языков этого конгресса, причем каждый ученый знает не более двух из них. Известно, что выполняется следующее свойство: любые двое учёных могут общаться, используя только официальные языки, возможно, с помощью одного переводчика из числа других ученых, присутствующих на конгрессе. Докажите, что найдется ученый, отъезд которого не нарушит это свойство.

2. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники 2×3, причём ровно 100 этих прямоугольников оказались расположены вертикально. Докажите, что невозможно разбить исходный прямоугольник на прямоугольники 2×3 так, чтобы ровно 2017 прямоугольников были расположены вертикально.

3. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?

4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвёртую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.

5. Дана доска 3×100. Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

6. Компания друзей сыграла 100 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более 10, а проигравший — более 10 следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в компании?

7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

8. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$, каждое из которых не превосходит 101. Известно, что при всех различных i и k от 1 до 101 число ia_i+ka_k делится на $i+k$. Докажите, что все написанные на доске числа равны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На конгрессе собралось 15 учёных. Есть 6 официальных языков этого конгресса, причем каждый ученый знает не более двух из них. Известно, что выполняется следующее свойство: любые двое учёных могут общаться, используя только официальные языки, возможно, с помощью одного переводчика из числа других ученых, присутствующих на конгрессе. Докажите, что найдется ученый, отъезд которого не нарушит это свойство.

2. За какое наименьшее положительное время часовая и минутная стрелки часов могут поменяться местами? (Т.е. минутная стрелка должна оказаться на исходном месте часовой, а часовая — на исходном месте минутной.)

3. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?

4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвёртую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.

5. Дана доска 3×100. Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

6. Компания друзей сыграла 20 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более трех, а проигравший — более трёх следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в этой компании?

7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

8. Пусть $S(n)$ — это сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение $n = 6\cdot S(n)$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В компании из шести человек имеются один рыцарь (всегда говорит правду), два дипломата (говорят правду или лгут по своему усмотрению) и три лжеца (всегда лгут). Каждого спросили, кем он является. Первый сказал о себе, что он рыцарь, второй — что дипломат, третий — что лжец, четвёртый — что не рыцарь, пятый — что не дипломат, а шестой — что не лжец. Который из них — рыцарь?

2. За какое наименьшее положительное время часовая и минутная стрелки часов могут поменяться местами? (Т.е. минутная стрелка должна оказаться на исходном месте часовой, а часовая — на исходном месте минутной.)

3. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?

4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвёртую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.

5. Вова хочет вырезать из доски 5×5 одну клетку, а все оставшиеся обойти ходом шахматного коня, побывав в каждой ровно по одному разу. Возможно ли это?

6. Компания друзей сыграла 20 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более трех, а проигравший — более трёх следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в этой компании?

7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

8. Пусть $S(n)$ — это сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение $n = 6 \cdot S(n)$.