МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 0$, $a_n = a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + (-1)^{n(n+1)/2}$ (здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x). Для каждого натурального k найдите количество натуральных n таких, что $2^k \le n < 2^{k+1}$ и $a_n = 0$.

2. Дан треугольник ABC. Точки A', B' и C' симметричны точкам A, B и C относительно прямых BC, AC и AB соответственно. Известно, что периметр треугольника $A'B'C'$ больше периметра треугольника ABC на 4. Докажите, что все стороны треугольника ABC не меньше единицы.

3. Дано натуральное k, большее 1. Обозначим $F_k(n)$ наименьшее натуральное число, большее kn, для которого $F_k(n)\cdot n$ — точный квадрат. Докажите, что, если $F_k(n) = F_k(m)$, то $m = n$.

4. На сторонах треугольника ABC, углы B и C которого больше 45°, во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и ABN с прямыми углами при вершине A, а вовнутрь — равнобедренный прямоугольный треугольник BCP с прямым углом при вершине P. Докажите, что треугольник MNP — равнобедренный прямоугольный.

5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет условию $a_n \le \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n. Докажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \frac{a_0 + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n.

6. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 кочанов капусты. Три козлёнка: Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур — по очереди (начинает Алюль, затем ходит Булюль, а потом Хиштаки Саританур и далее по циклу) делают ходы в следующей игре. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы один кочан, и из всех этих клеток съесть по одному кочану. Выигрывает козлёнок, который сделает последний ход. Может ли какой-нибудь козлёнок играть так, чтобы выиграть, как бы ни играли два других?

7. На олимпиаде были туры по алгебре, геометрии, теории чисел и комбинаторике. В каждом туре все участники получили разное число баллов. При каком наименьшем N среди любых N участников обязательно найдутся десять, баллы которых на некоторых двух турах упорядочены одинаково (то есть если один из этих десяти превзошёл другого в одном туре, то превзошёл и в другом)?

8. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n можно найти несколько попарно различных чётных чисел, меньших n, сумма которых кратна n?

2. Дан треугольник ABC. Точки A', B' и C' симметричны точкам A, B и C относительно прямых BC, AC и AB соответственно. Известно, что периметр треугольника $A'B'C'$ больше периметра треугольника ABC на 4. Докажите, что все стороны треугольника ABC не меньше единицы.

3. Дано натуральное k, большее 1. Обозначим $F_k(n)$ наименьшее натуральное число, большее kn, для которого $F_k(n)\cdot n$ — точный квадрат. Докажите, что, если $F_k(n) = F_k(m)$, то $m = n$.

4. На сторонах треугольника ABC, углы B и C которого больше 45°, во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и ABN с прямыми углами при вершине A, а вовнутрь — равнобедренный прямоугольный треугольник BCP с прямым углом при вершине P. Докажите, что треугольник MNP — равнобедренный прямоугольный.

5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет условию $a_n \le \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n. Докажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \le \frac{a_0 + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n.

6. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 кочанов капусты. Три козлёнка: Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур — по очереди (начинает Алюль, затем ходит Булюль, а потом Хиштаки Саританур и далее по циклу) делают ходы в следующей игре. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы один кочан, и из всех этих клеток съесть по одному кочану. Выигрывает козлёнок, который сделает последний ход. Может ли какой-нибудь козлёнок играть так, чтобы выиграть, как бы ни играли два других?

7. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

8. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n можно найти несколько попарно различных чётных натуральных чисел, меньших n, сумма которых кратна n?

2. Дан треугольник ABC. Точки A', B' и C' симметричны точкам A, B и C относительно прямых BC, AC и AB соответственно. Известно, что периметр треугольника $A'B'C'$ больше периметра треугольника ABC на 4. Докажите, что все стороны треугольника ABC не меньше единицы.

3. Дано натуральное k, большее 1. Обозначим $F_k(n)$ наименьшее натуральное число, большее kn, для которого $F_k(n)\cdot n$ — точный квадрат. Докажите, что, если $F_k(n) = F_k(m)$, то $m = n$.

4. На сторонах треугольника ABC, углы B и C которого больше 45°, во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и ABN с прямыми углами при вершине A, а вовнутрь — равнобедренный прямоугольный треугольник BCP с прямым углом при вершине P. Докажите, что треугольник MNP — равнобедренный прямоугольный.

5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{20}$, удовлетворяет условию $a_n \le \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных $n \le 19$. Докажите, что $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{19}}{19} \le \dfrac{a_0+a_{20}}{2}$.

6. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 кочанов капусты. Два козлёнка: Алюль и Булюль — по очереди (начинает Алюль) делают ходы в следующей игре. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы один кочан, и из всех этих клеток съесть по одному кочану. Выигрывает козлёнок, который сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?

7. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

8. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА.

1. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 сосисок. Три кота: Полосатик, Волосатик и Толстопузик — играют в игру по следующим правилам. Коты ходят по очереди. Начинает Полосатик, затем ходит Волосатик, а потом Толстопузик и далее по циклу. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Выигрывает кот, съевший последнюю сосиску. Может ли один из котов выиграть вне зависимости от действий обоих соперников?

2. Набор натуральных чисел a_1, a_2, a_3, …, a_{100} заменили на набор чисел $\frac{a_1^2}{a_2^2-2a_2}, \frac{a_2^2}{a_3^2-2a_3}, \frac{a_3^2}{a_4^2-2a_4}, \ldots, \frac{a_{99}^2}{a_{100}^2-2a_{100}}, \frac{a_{100}^2}{a_1^2-2a_1}$. В результате набор совпал с исходным набором чисел (но не обязательно сохранился порядок, в котором идут числа). Найдите все наборы, для которых такое могло произойти.

3. Число A, не оканчивающееся на 0, состоит из n цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. При каких n найдется такое число A, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

5. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

6. В стране 2018 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.

7. Различные положительные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}$. Докажите неравенство $a+b+ab > 2$.

8. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена такая точка P, что $\angle PAB = 30°$. Докажите, что из отрезков AP, BP и DP можно сложить треугольник.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Клетчатый пол кладовой кота Полосатика имеет размер 2017×2018 клеток. Изначально в каждой клетке лежит по 99 сосисок. Каждый день Полосатик выбирает строку или столбец, в котором нет пустых клеток, и из всех этих клеток съедает по одной сосиске. Докажите, что, как бы кот ни действовал, через некоторое время он съест все сосиски.

2. Набор натуральных чисел x, y и z заменили на набор чисел $\frac{x}{yz-5}$, $\frac{y}{zx-2}$ и $\frac{z}{xy-1}$. В результате набор совпал с исходным набором чисел (но не обязательно сохранился порядок, в котором идут числа). Найдите числа x, y и z.

3. Число A, не оканчивающееся на 0, состоит из 2017 цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31. Найдите все значения, которые может принимать сумма четырёх таких чисел.

5. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

6. В стране 2016 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.

7. Различные положительные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}$. Докажите неравенство $a+b+ab \geq 2$.

8. Дан треугольник ABC. Точка M — середина стороны AB, а точка N — середина стороны AC. На стороне BC выбрана такая точка P, что $BP:PC = 3:1$. На прямой PN отмечена такая точка D, что $PN = ND$, а на прямой CM отмечена такая точка E, что $CM = ME$. Докажите, что $AE = 4AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке доски 4×6 лежит 100 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода. Коты ходят по очереди, начинает Полосатик. Какой кот выиграет при правильной игре?

2. Набор натуральных чисел x, y и z заменили на набор чисел $\frac{x}{yz-5}$, $\frac{y}{zx-2}$ и $\frac{z}{xy-1}$. В результате набор совпал с исходным набором чисел (но не обязательно сохранился порядок, в котором идут числа). Найдите числа x, y и z.

3. Число A, не оканчивающееся на 0, состоит из 17 цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 13, 14 и 15. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

5. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

6. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a. Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна $a+5$.

7. Различные положительные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a^2+a+1}=\frac{b}{b^2+b+1}$. Докажите неравенство $a^2+b^2 \geq 2$.

8. Дан треугольник ABC. Точка M — середина стороны AB, а точка N — середина стороны AC. На стороне BC выбрана такая точка P, что $BP:PC = 3:1$. На прямой PN отмечена такая точка D, что $PN = ND$, а на прямой CM отмечена такая точка E, что $CM = ME$. Докажите, что $AE = 4AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В каждой клетке доски 4×6 лежит 100 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Коты ходят по очереди, начинает Полосатик. Проигрывает не имеющий хода. Какой кот выиграет при правильной игре?

2. Два пирата играли в карты на золотые монеты. Проигравший в игре отдавал часть своих монет выигравшему. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. Потом второй проиграл половину своих монет и отдал их первому, потом снова первый проиграл половину своих монет. В результате у первого оказалось 19 монет, а у второго 43. Сколько монет было у каждого пирата до начала игры?

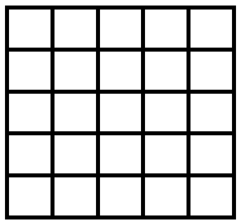
3. Число A, не оканчивающееся на 0, состоит из 11 цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 13, 14 и 15. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

5. Найдите три различных простых делителя у числа $2017^{2015}+2015^{2017}$.

6. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a. Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна $a+5$.

7. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать по линиям сетки 8 контуров квадратов, чтобы получилась квадратная клетчатая решётка 5×5, изображённая справа? (Контуры могут иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или большему числу контуров.)



8. Дан треугольник ABC. Точка M — середина стороны AB, а точка N — середина стороны AC. На стороне BC выбрана такая точка P, что $BP:PC = 3:1$. На прямой PN отмечена такая точка D, что $PN = ND$, а на прямой CM отмечена такая точка E, что $CM = ME$. Докажите, что $AE = 4AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Число A, не кратное 10, состоит из n цифр, а число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. При каких n найдется такое число A, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

2. В стране 250 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.

3. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

4. В каждой клетке доски 10×11 лежит 9 сосисок. Два кота Полосатик и Волосатик играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода, начинает Полосатик. Какой кот выиграет при правильной игре?

5. Даны два различных натуральных числа n и k. Петя нашел наименьшее натуральное число a, которое больше n и при умножении на n даёт квадрат натурального числа. Вася нашел наименьшее натуральное число b, которое больше k и при умножении на k даёт квадрат натурального числа. Оказалось, что числа a и b отличаются ровно в 4 раза. Докажите, что числа n и k отличаются не менее, чем в 4 раза.

6. Петя втайне от Васи записал на бумажке в ряд 3000 натуральных чисел. За один вопрос Вася может узнать либо сумму любых 2017 стоящих подряд чисел, либо сумму любых 2107 стоящих подряд чисел. Всегда ли Вася несколькими такими вопросами сможет узнать сумму всех написанных Петей чисел?

7. Докажите, что существует бесконечно много пар различных рациональных чисел (a, b) таких, что $(a+\frac{1}{b})^2 = b+\frac{1}{a}$. (Число называется рациональным, если его можно представить в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).

8. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

ГРУППА «СТАРТ»: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Число A, не кратное 10, состоит из n цифр, а число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. При каких n найдется такое число A, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

2. В стране 250 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.

3. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

4. В каждой клетке доски 10×11 лежит 9 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода, начинает Полосатик. Какой кот выиграет при правильной игре?

5. Даны два натуральных числа n и k. Петя нашел наименьшее натуральное число a, которое больше n и при умножении на n даёт квадрат натурального числа. Вася нашел наименьшее натуральное число b, которое больше k и при умножении на k даёт квадрат натурального числа. Оказалось, что числа a и b равны. Докажите, что числа n и k равны.

6. Петя втайне от Васи записал на бумажке в ряд 20 натуральных чисел. За один вопрос Вася может узнать либо сумму любых 13 стоящих подряд чисел, либо сумму любых 17 стоящих подряд чисел. Всегда ли Вася несколькими такими вопросами сможет узнать сумму всех написанных Петей чисел?

7. Докажите, что существует бесконечно много пар различных рациональных чисел (a, b) таких, что $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{a}$. (Число называется рациональным, если его можно представить в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).

8. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Число A, не кратное 10, состоит из 17 цифр, а число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

2. Даны четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

3. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

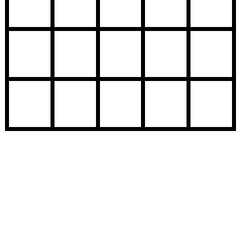
4. В каждой клетке доски 4×6 лежит 100 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода. Какой кот выиграет при правильной игре?

5. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a. Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна a+5.

6. Два пирата играли в карты на золотые монеты. Проигравший в игре отдавал часть своих монет выигравшему. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. Потом второй проиграл половину своих монет и отдал их первому, потом снова первый проиграл половину своих монет. В результате у первого оказалось 19 монет, а у второго 43. Сколько монет было у каждого пирата до начала игры?

7. Петя втайне от Васи записал на бумажке в ряд 205 натуральных чисел. За один вопрос Вася может узнать либо сумму любых 100 стоящих подряд чисел, либо сумму любых 111 стоящих подряд чисел. Всегда ли Вася несколькими такими вопросами сможет узнать сумму всех написанных Петей чисел?

8. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать по линиям сетки 8 контуров квадратов, чтобы получилась квадратная клетчатая решётка 5×5, изображённая справа? (Контуры могут иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или большему числу контуров.)



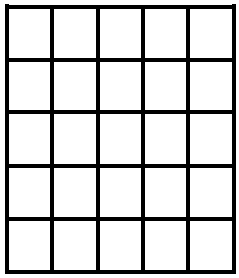
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Каждый год комиссия по климату заявляет, что среднегодовая температура на Земле выше, чем три года назад, но меньше чем сто лет назад. Сколько лет подряд это заявление может быть правдой?

2. Два пирата играли в карты на золотые монеты. Проигравший в игре отдавал часть своих монет выигравшему. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. Потом второй проиграл половину своих монет и отдал их первому, потом снова первый проиграл половину своих монет. В результате у первого оказалось 19 монет, а у второго 43. Сколько монет было у каждого пирата до начала игры?

3. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать по линиям сетки 8 контуров квадратов, чтобы получилась квадратная клетчатая решётка 5×5, изображённая справа? (Контуры могут иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или большему числу контуров.)



4. В каждой клетке доски 10×10 лежит по 100 сосисок. Два кота Полосатик и Волосатик играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Начинает Полосатик. Проигрывает не имеющий хода. Какой кот имеет выигрышную стратегию?

5. Можно ли отметить 1000 клеток клетчатого квадрата 63×63 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на трёхклеточные уголки в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

6. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

7. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a. Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна a+10.

8. 30 выпускников сдавали тест по математике. Средний балл тех, кто успешно прошёл тестирование — 84 балла, а тех, кто провалил испытания — 60 баллов. Средний балл всех сдающих составил 80 баллов. Сколько всего испытуемых успешно прошли тестирование?