L УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ВЛАДИМИР, 02–08.12.2017

Старшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *Дано простое p. Докажите, что существует перестановка $(a_1, a_2, ..., a_p)$ чисел 1, 2, 3, ..., p такая, что числа a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, ..., $a_1a_2...a_p$ дают разные остатки при делении на p.*

Решение. Положим $a_p = p$, $a_1 = 1$, а остальные a_k построим по индукции так, чтобы $a_1a_2... a_k$ давало при делении на p остаток k. Для этого достаточно брать a_k таким, чтобы $(k-1)a_k$ было сравнимо с k по модулю p. Так как p простое, такое a_k найдется. Осталось заметить, что все a_k будут различны, так как если a_k сравнимо с a_m по модулю p при $k \neq m$, то, перемножая сравнения $(k-1)a_k \equiv k$ и $m \equiv (m-1)a_k$, получаем $m(k-1)a_k \equiv k(m-1)a_k$, откуда $m(k-1) \equiv k(m-1) \Rightarrow m \equiv k$ — противоречие.

♦ Замечено только, что $a_p = 0$: *0 баллов*. Существованием первообразного корня пользоваться без доказательства нельзя.

2. *На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении l и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.*

Первое решение. Рассмотрим произвольную область T. Для каждой прямой, ее ограничивающей, поставим стрелочку в ту полуплоскость, в которой областей больше. Если областей поровну, то стрелочку не ставим. Заметим, что область S, из которой стрелочки не выходят, будет удовлетворять условию. Покажем, что такая область S найдется. Будем двигаться из произвольной области по стрелочкам в соседние по стороне области. Заметим, что для каждой прямой все стрелочки ведут в одну сторону, поэтому вернуться в пройденные ранее области мы не можем. Кроме того, областей конечное количество, поэтому рано или поздно мы остановимся в некоторой области S. Значит, из нее не ведет ни одной стрелочки, и она искомая. **Второе решение**. Назовём полуплоскость (относительно проведённой прямой) *большой*, если в ней не менее половины областей. Рассмотрим область S, покрытую наибольшим количеством больших полуплоскостей. Она — требуемая. Действительно, так как любая область, граничащая с S по отрезку прямой l, покрыта не бóльшим числом больших полуплоскостей, а это может случиться лишь если S лежит в большой полуплоскости относительно l.

3. *Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.*

Решение. Пронумеруем лампочки слева направо и покрасим каждую лампочку в цвет остатка ее номера при делении на 2017. Заметим, что каждый человек переключает по одной лампочке каждого цвета. Так как людей четное количество, то в конце будет гореть четное количество лампочек каждого цвета. Значит, если в конце лампочки какого-то цвета включены, то их хотя бы две штуки. Среди 2017 подряд идущих лампочек максимум одна включенная лампочка рассматриваемого цвета, то есть не более половины включённых. Проводя те же рассуждения для каждого цвета, получим, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более $k/2$ включенных, что и требовалось

4. *В треугольнике ABC угол A равен 60°, AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC, пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.*

Решение. Докажем, что $EL = EC$. Отметим на стороне AC точки K и N, а на ее продолжении за C точку T так, что $AK = KN = NC = CT$. Так как по условию $AC = 3AE$, то $AE = AK$. Из параллельности ED и AC следует, что $\angle EAD = 30° = \angle CAD = \angle ADE$, откуда $AE = ED$.

В силу симметричности точек E и K относительно биссектрисы AD имеем $ED = DK$. Из той же симметрии имеем $\angle AKD = 120°$, поэтому смежный с ним $\angle DKN = 60°$. А так как $DK = AK = KN$, то треугольник DKN — равносторонний.

В треугольнике ALN отрезок KD — средняя линия, поэтому $NL = 2KD$. Также в треугольнике ALT отрезок ND — средняя линия, поэтому $LT = 2ND$. Значит, $NL = 2KD = 2ND = LT$, и в равнобедренном треугольнике NLT медиана LC также является высотой, то есть $\angle ACB = 90°$.

В треугольнике ALC прямая ED проходит через середину D стороны AL и параллельна AC, поэтому является средней линией. Кроме того, $ED \parallel AC \perp LC$, значит, ED — серединный перпендикуляр к отрезку LC, откуда и следует равенство $EL = EC$.

5. *Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c, не превосходящих 1, $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1–a)(1–b)(1–c)\leq 9$.*

Первое решение. Так как a, b, c лежат в промежутке от 0 до 1, то $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1–a)(1–b)(1–c) \leq a+b+c+2(a+b+c)+3(1–a) = +3b+3c+3 \leq 9$. **Второе решение**. Заметим, что функция в левой части неравенства линейна по каждой из переменных, поэтому достаточно проверить неравенство в предположении, что все переменные равны 0 или 1. Если хотя бы одна из них равна 1, то левая часть не больше 9, так как каждое слагаемое не больше 1. А если все переменные равны 0, то функция равна 3, что меньше 9.

6. *Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c, пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP'$, $BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.*

Решение. Заметим, что из проведенных параллельных прямых ровно одна пересекает сторону, а две другие — их продолжения. Пусть именно BQ пересекает сторону AC, то есть точка Q лежит на отрезке AC.

В силу параллельности BQ и PA треугольники BCQ и PCA подобны, поэтому прямая CQ' пересекает PA в точке X такой, что $PX:XA = BQ':Q'Q = 1:2$. Аналогично прямая AQ' пересекает RC в такой точке Y, что $RY:YC = 1:2$.

Рассмотрим треугольники $XQ'A$ и $CQ'Y$. Так как прямые XA и YC параллельны, то эти треугольники подобны. Значит, $\angle XQ'P' = \angle CQ'R'$, как углы между соответственными медианой и стороной в подобных треугольниках. Отсюда и следует, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие k человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Продолжительность проекта — n дней. При каком наибольшем k организаторы проекта наверняка смогут выгнать всех участников?*

Ответ. При $k = 2^n–2$. **Решение**. *Пример*. Построим его по индукции. При $n = 1$ все очевидно: двоих можно выгнать, как если они дружат, так и если не дружат. Пусть утверждение уже доказано для $n = k$, и докажем его для $n = k+1$. Заметим, что жюри всегда может выгнать не менее половины участников. Поэтому если участников не больше, чем $2\cdot(2^k–2) = 2^{k+1}–4$, то переход доказан. Пусть их $2^{k+1}–3$. Тогда в графе знакомств либо чётных, либо нечётных вершин больше половины, то есть не меньше, чем 1. Выгнав их, жюри снова оставит не больше $2^k–2$ человек. Пусть, наконец, у нас $2^{k+1}–2$ человек. Тогда в силу чётности числа нечётных вершин их либо не меньше, чем 2^k, и тогда жюри выгонит их, либо не больше, чем $2^k–2$, и тогда жюри выгонит чётные вершины. В обоих случаях останется не больше $2^k–2$ человек. Переход доказан.

Оценка. Построим по индукции граф дружб для $2^{n+1}–1$ человек так, чтобы их нельзя было разогнать за n дней (если участников больше, пусть остальные ни с кем не дружат). При $n = 1$ достаточно взять простой путь G_1 длины 2. Заметим, что в нём нечётных вершин на одну больше, чем чётных — будем называть такие графы *полезными*. Назовем *наворотом* полезного графа G следующий граф G': рисуем рядом две копии графа G, каждой вершине четной степени в левой копии берем в пару вершину нечетной степени в правой копии и все вершины в парах соединяем ребром, а затем добавляем одну новую вершину и соединяем её ребром с непарной нечётной вершиной правой копии.

Наворот G' обладает замечательным свойством: если жюри удалит из него нечётные вершины, получится копия графа G, а если чётные — та же копия плюс одна изолированная вершина. Кроме того, граф G' — снова полезный.

Возьмем теперь граф G_1 и построим по индукции последовательность наворотов $G_2, \ldots, G_n, \ldots$, где при всех $n \geq 1$ G_{n+1} — наворот на G_n. В графе G_n будет $2^{n+1}-1$ вершина, и очевидно, что разогнать его за n дней не получится.

♦ Оценка и пример *по 6 баллов*. Правильная по порядку оценка, полученная без использования соображения о чётности количества нечётных вершин: *0 баллов*.

8. *Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.*

Ответ. $x+y = 1$. Пример: $x=1/2+\sqrt{2}, y=1/2-\sqrt{2}$. **Решение**. Предположим, что $x+y \neq 1$. Заметим, что $x^2+y-y^2-x = (x+y-1)(x-y)$, $x^2+y^2+x+y+2xy = (x+y)(x+y+1) = (x+y+1/2)^2-1/4$ — рациональные числа. Из последнего получим, что $x+y=-1/2+\sqrt{r}$, для некоторого рационального r, которое не квадрат рационального числа. Тогда из первого равенства получим, что $x-y = p+q\sqrt{r}$ для некоторых рациональных p и q. Таким образом $x=a+b\sqrt{r}$, $y=c+d\sqrt{r}$ для некоторых рациональных a, b, c, d, причем, b и d не равны 0. Тогда из условия имеем: $2ab+d = 2cd+b = ad+bc = 0$. Подставляя $d = -2ab$ в равенство $2cd+b = 0$, получаем $-4abc+b = 0$, откуда $ac = 1/4$ ($b \neq 0$ в силу иррациональности x) и d . Далее, подставляя $b = -2cd$ в уравнение $ad+bc = 0$, получаем $ad = 2c^2d$, далее $a = 2c^2$ и $1/4 = ac = 2c^3$, откуда $c = 1/2$, $a = 1/(4c) = 1/2$. Подставляя $a = c = 1/2$ в равенство $ad+bc = 0$, находим, что $b+d = 0$, откуда $x+y = 1$.

Старшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?*

Ответ. Верно. **Решение**. Зафиксируем шестую и пятую с конца цифры a и b (если число меньше 10^5, сначала сделаем его шестизначным, прибавив нужное количество раз 2017). Начнем прибавлять к данному числу 2017, не меняя порядок цифр. Тогда величина $\overline{ab}$ увеличивается не более чем на 1 или обнуляется. Не реже, чем через 100 ходов, мы будем получать $b = a+1$. При выполнении этого условия поменяем цифры a и b местами. Вместо увеличения числа на 2017, число увеличивается на 2017+90000. Так как (2017, 90000) = 1, то за 2017 таких замен мы можем получить все возможные остатки при делении на 2017. При этом мы увеличим наше число не более чем на $x = 2017\cdot(50\cdot2017+90000)$.

Пусть n — первоначальное число, и $10^k > n+x$. Заметим, что среди полученных выше чисел есть число n_1 дающее такой же остаток, что и 10^k. Тогда после получения n_1 будем только прибавлять 2017 не меняя порядок цифр. После получения 10^k переставим его цифры, чтобы получить 1.

2. *На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l, ограничивающей S, полуплоскость, образующаяся при проведении l и содержащая S, содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.*

Первое решение. Рассмотрим произвольную область T. Для каждой прямой, ее ограничивающей, поставим стрелочку в ту полуплоскость, в которой областей больше. Если областей поровну, то стрелочку не ставим. Заметим, что область S, из которой стрелочки не выходят, будет удовлетворять условию. Покажем, что такая область S найдется. Будем двигаться из произвольной области по стрелочкам в соседние по стороне области. Заметим, что для каждой прямой все стрелочки ведут в одну сторону, поэтому вернуться в пройденные ранее области мы не можем. Кроме того, областей конечное количество, поэтому рано или поздно мы остановимся в некоторой области S. Значит, из нее не ведет ни одной стрелочки, и она искомая. **Второе решение**. Назовём полуплоскость (относительно проведённой прямой) *большой*, если в ней не менее половины областей. Рассмотрим область S, покрытую наибольшим количеством больших полуплоскостей. Она — требуемая. Действительно, так как любая область, граничащая с S по отрезку прямой l, покрыта не бо́льшим числом больших полуплоскостей, а это может случиться лишь если S лежит в большой полуплоскости относительно l.

3. *Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем k/2 лампочек включены.*

Решение. Пронумеруем лампочки слева направо и покрасим каждую лампочку в цвет остатка ее номера при делении на 2017. Заметим, что каждый человек переключает по одной лампочке каждого цвета. Так как людей четное количество, то в конце будет гореть четное количество лампочек каждого цвета. Значит, если в конце лампочки какого-то цвета включены, то их хотя бы две штуки. Среди 2017 подряд идущих лампочек максимум одна включенная лампочка рассматриваемого цвета, то есть не более половины включённых. Проводя те же рассуждения для каждого цвета, получим, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более $k/2$ включенных, что и требовалось

4. *В треугольнике ABC угол A равен 60°, AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC, пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что AC = 3AE. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.*

Решение. Докажем, что $EL = EC$. Отметим на стороне AC точки K и N, а на ее продолжении за C точку T так, что $AK = KN = NC = CT$. Так как по условию $AC = 3AE$, то $AE = AK$. Из параллельности ED и AC следует, что $\angle EAD = 30° = \angle CAD = \angle ADE$, откуда $AE = ED$.

В силу симметричности точек E и K относительно биссектрисы AD имеем $ED = DK$. Из той же симметрии имеем $\angle AKD = 120°$, поэтому смежный с ним $\angle DKN = 60°$. А так как $DK = AK = KN$, то треугольник DKN — равносторонний.

В треугольнике ALN отрезок KD — средняя линия, поэтому $NL = 2KD$. Также в треугольнике ALT отрезок ND — средняя линия, поэтому $LT = 2ND$. Значит, $NL = 2KD = 2ND = LT$, и в равнобедренном треугольнике NLT медиана LC также является высотой, то есть $\angle ACB = 90°$.

В треугольнике ALC прямая ED проходит через середину D стороны AL и параллельна AC, поэтому является средней линией. Кроме того, $ED \parallel AC \perp LC$, значит, ED — серединный перпендикуляр к отрезку LC, откуда и следует равенство $EL = EC$.

5. *Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c, не превосходящих 1,* $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c)\le 9$.

Первое решение. Так как a, b, c лежат в промежутке от 0 до 1, то $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \le a+b+c+2(a+b+c)+3(1-a) = +3b+3c+3 \le 9$. **Второе решение**. Заметим, что функция в левой части неравенства линейна по каждой из переменных, поэтому достаточно проверить неравенство в предположении, что все переменные равны 0 или 1. Если хотя бы одна из них равна 1, то левая часть не больше 9, так как каждое слагаемое не больше 1. А если все переменные равны 0, то функция равна 3, что меньше 9.

6. *Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые* l_a, l_b *и* l_c, *пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что AP = 3AP', BQ = 3BQ' и CR = 3CR'. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.*

Решение. Заметим, что из проведенных параллельных прямых ровно одна пересекает сторону, а две другие — их продолжения. Пусть именно BQ пересекает сторону AC, то есть точка Q лежит на отрезке AC.

В силу параллельности BQ и PA треугольники BCQ и PCA подобны, поэтому прямая CQ' пересекает PA в точке X такой, что $PX:XA = BQ':Q'Q = 1:2$. Аналогично прямая AQ' пересекает RC в такой точке Y, что $RY:YC = 1:2$.

Рассмотрим треугольники $XQ'A$ и $CQ'Y$. Так как прямые XA и YC параллельны, то эти треугольники подобны. Значит, $\angle XQ'P' = \angle CQ'R'$, как углы между соответственными медианой и стороной в подобных треугольниках. Отсюда и следует, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?*

Ответ. Верно. **Решение**. Докажем по индукции более общий факт: если в проекте участвует не более $2^{n+1}-2$ человек ($n \ge 1$), то можно выгнать всех за не более чем n изгнаний. Так как $2^{11}-1 > 2017$, тем самым будет доказано и утверждение задачи. При $n = 1$ все очевидно: двоих можно выгнать, как если они дружат, так и если не дружат. Пусть утверждение уже доказано для $n = k$, и докажем его для $n = k+1$. Заметим, что жюри всегда может выгнать не менее половины участников. Поэтому если участников не больше, чем $2\cdot(2^k-2) = 2^{k+1}-4$, то переход доказан. Пусть их $2^{k+1}-3$. Тогда в графе знакомств либо чётных, либо нечётных вершин больше половины, то есть не меньше, чем 1. Выгнав их, жюри снова оставит не больше 2^k-2 человек. Пусть, наконец, у нас $2^{k+1}-2$ человек. Тогда в силу чётности числа нечётных вершин их либо не меньше, чем 2^k, и тогда жюри выгонит их, либо не больше, чем 2^k-2, и тогда жюри выгонит чётные вершины. В обоих случаях останется не больше 2^k-2 человек, что и завершает доказательство.

8. *Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy,* x^2+y, y^2+x *рациональны. Найдите все возможные значения x+y.*

Ответ. $x+y = 1$. Пример: $x = 1/2+\sqrt{2}, y = 1/2-\sqrt{2}$. **Решение**. Предположим, что $x+y \neq 1$. Заметим, что $x^2+y-y^2-x = (x+y-1)(x-y)$, $x^2+y^2+x+y+2xy = (x+y)(x+y+1) = (x+y+1/2)^2-1/4$ — рациональные числа. Из последнего получим, что $x+y = -1/2+\sqrt{r}$, для некоторого рационального r, которое не квадрат рационального числа. Тогда из первого равенства получим, что $x-y = p+q\sqrt{r}$ для некоторых рациональных p и q. Таким образом $x = a+b\sqrt{r}$, $y = c+d\sqrt{r}$ для некоторых рациональных a, b, c, d, причем, b и d не равны 0. Тогда из условия имеем: $2ab+d = 2cd+b = ad+bc = 0$. Подставляя $d = -2ab$ в равенство $2cd+b = 0$, получаем $-4abc+b = 0$, откуда $ac = 1/4$ ($b \neq 0$ в силу иррациональности x) и d . Далее, подставляя $b = -2cd$ в уравнение $ad+bc = 0$, получаем $ad = 2c^2d$, далее $a = 2c^2$ и $1/4 = ac = 2c^3$, откуда $c = 1/2$, $a = 1/(4c) = 1/2$. Подставляя $a = c = 1/2$ в равенство $ad+bc = 0$, находим, что $b+d = 0$, откуда $x+y = 1$.

Старшая группа, вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?*

Ответ. Верно. **Решение**. Зафиксируем шестую и пятую с конца цифры a и b (если число меньше 10^5, сначала сделаем его шестизначным, прибавив нужное количество раз 2017). Начнем прибавлять к данному числу 2017, не меняя порядок цифр. Тогда величина $\overline{ab}$ увеличивается не более чем на 1 или обнуляется. Не реже, чем через 100 ходов, мы будем получать $b = a+1$. При выполнении этого условия поменяем цифры a и b местами. Вместо увеличения числа на 2017, число увеличивается на 2017+90000. Так как (2017, 90000) = 1, то за 2017 таких замен мы можем получить все возможные остатки при делении на 2017. При этом мы увеличим наше число не более чем на $x = 2017\cdot(100\cdot2017+90000)$.

Пусть n — первоначальное число, и $10^k > n+x$. Заметим, что среди полученных выше чисел есть число n_1 дающее такой же остаток, что и 10^k. Тогда после получения n_1 будем только прибавлять 2017 не меняя порядок цифр. После получения 10^k переставим его цифры, чтобы получить 1, после чего прибавим 2017.

2. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1001 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Петя. **Решение**. Первым ходом Пете нужно взять из второй корзинки 678 пирожков. После этого в ней останется 1339 пирожков, в первой корзине их станет 1340, и очередь хода перейдет к Васе. Покажем теперь, что если в корзинах m и n пирожков, и $|m–n| \le 1$, то побеждает второй. Стратегия второго игрока будет симметрична. Если первый, скажем, взял $2a$ пирожков из первой корзины, то во второй корзине станет $a+n \ge a+m–1 \ge m$ пирожков, и второй может взять оттуда $2a$ пирожков: в результате в корзинах окажется $n–a$ и $m–a$ пирожков. Понятно, что при такой стратегии второй всегда может сделать ход, а значит, выиграет.

3. *Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем k/2 лампочек включены.*

Решение. Пронумеруем лампочки слева направо и покрасим каждую лампочку в цвет остатка при делении на 2017. Заметим, что каждый человек переключает по одной лампочке каждого цвета. Так как людей четное количество, то в конце будет гореть четное количество лампочек каждого цвета. Значит, если в конце лампочки какого-то цвета включены, то их хотя бы две штуки. Среди 2017 подряд идущих лампочек максимум одна включенная лампочка рассматриваемого цвета, то есть не более половины. Проводя те же рассуждения для каждого цвета, получим, что среди 2017 подряд идущих лампочек не более $k/2$ включенных, что и требовалось

4. *В треугольнике ABC угол A равен 60°, AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC, пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что AC = 3AE. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.*

Решение. Докажем, что $EL = EC$. Отметим на стороне AC точки K и N, а на ее продолжении за C точку T так, что $AK = KN = NC = CT$. Так как по условию $AC = 3AE$, то $AE = AK$. Из параллельности ED и AC следует, что $\angle EAD = 30° = \angle CAD = \angle ADE$, откуда $AE = ED$.

В силу симметричности точек E и K относительно биссектрисы AD имеем $ED = DK$. Из той же симметрии имеем $\angle AKD = 120°$, поэтому смежный с ним $\angle DKN = 60°$. А так как $DK = AK = KN$, то треугольник DKN — равносторонний.

В треугольнике ALN отрезок KD — средняя линия, поэтому $NL = 2KD$. Также в треугольнике ALT отрезок ND — средняя линия, поэтому $LT = 2ND$. Значит, $NL = 2KD = 2ND = LT$, и в равнобедренном треугольнике NLT медиана LC также является высотой, то есть $\angle ACB = 90°$.

В треугольнике ALC прямая ED проходит через середину D стороны AL и параллельна AC, поэтому является средней линией. Кроме того, $ED \parallel AC \perp LC$, значит, ED — серединный перпендикуляр к отрезку LC, откуда и следует равенство $EL = EC$.

5. *Решите систему уравнений* $[x]-y=2[y]-z=3[z]-x=\frac{2016}{2017}$.

Ответ. $x=2\frac{1}{2017}$, $y=1\frac{1}{2017}$, $z=1\frac{1}{2017}$. **Решение**. Обозначим для удобства число $\frac{2016}{2017}$ буквой a. Имеем $y = [x]–a$, $z = 2[y]–a$, $x = 3[z]–a$. Поскольку $0 < a < 1$, отсюда следует, что $[y] = [x]–1$, $[z] = 2[y]–1 = 2[x]–3$, $[x] = 3[z]–1 = 6[x]–10$. Из последнего равенства находим $[x] = 2$, а из остальных — $[y] = [z] = 1$. Отсюда подстановкой найденных целых частей в условие получается ответ.

6. *Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c, пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что AP = 3AP', BQ = 3BQ' и CR = 3CR'. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.*

Решение. Заметим, что из проведенных параллельных прямых ровно одна пересекает сторону, а две другие — их продолжения. Пусть именно BQ пересекает сторону AC, то есть точка Q лежит на отрезке AC.

В силу параллельности BQ и PA треугольники BCQ и PCA подобны, поэтому прямая CQ' пересекает PA в точке X такой, что $PX:XA = BQ':Q'Q = 1:2$. Аналогично прямая AQ' пересекает RC в такой точке Y, что $RY:YC = 1:2$.

Рассмотрим треугольники $XQ'A$ и $CQ'Y$. Так как прямые XA и YC параллельны, то эти треугольники подобны. Значит, $\angle XQ'P' = \angle CQ'R'$, как углы между соответственными медианой и стороной в подобных треугольниках. Отсюда и следует, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Могли ли участники подружиться перед началом проекта так, чтобы через неделю, независимо от действий жюри, хоть кто-нибудь из них гарантированно остался бы на проекте?*

Ответ. Могли. **Решение**. Представим компанию в виде графа, где вершинами являются люди, а ребра проводятся между друзьями. Пусть есть граф G, в котором поровну вершин четной и нечетной степени. Назовем *удвоением* такого графа следующий граф G': рисуем рядом две копии графа G и затем каждой вершине четной степени в левой копии берем в пару вершину нечетной степени в правой копии, и все вершины в парах соединяем ребром. Полученный граф G' обладает замечательным свойством: что бы с ним ни сделало жюри, из него получится копия графа G! Кроме того, в нем так же, как и в G, поровну вершин четной и нечетной степени.

Возьмем теперь граф G_1 на 4 вершинах и 3 ребрах, образующих простой путь длины 3. При помощи операции удвоения будем последовательно получать из G_1 граф G_2, из G_2 граф G_3, и так далее до G_7, в котором будет как раз $2^8 = 256$ вершин. Теперь достаточно подружить 300 участников так: 44 пусть останутся совсем без друзей, а остальных 256 подружим согласно графу G_7. Теперь, как бы ни действовало жюри, после первого дня образуется граф знакомств G_6 (не считая, возможно, 44 ни с кем не подружившихся), после второго G_5, и так далее, после шестого дня G_1, а после седьмого дня на проекте останутся как минимум двое.

8. *В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами 2x, 2y, 3x, 3y, 8x, 8y все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \le 10N$, $8y \le 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x$, $2y$, $3x$, $3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \le N$, но отсюда $8x \le 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, противоречие.

Младшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. При $|m–n| \geq 2$ выигрывает первый, а при $|m–n| \leq 1$ — второй. **Решение**. Сначала рассмотрим случай, когда $|m–n| \leq 1$. В этом случае стратегия второго игрока будет симметрична. Если первый, скажем, взял $2a$ пирожков из первой корзины, то во второй корзине станет $a+n \geq a+m–1 \geq m$ пирожков, и второй может взять оттуда $2a$ пирожков: в результате в корзинах окажется $n–a$ и $m–a$ пирожков. Понятно, что при такой стратегии второй всегда может сделать ход, а значит, выиграет.

Пусть теперь $m–n = d \geq 2$. Тогда первый возьмет $2k$ пирожков, где $3k$ — ближайшее к d кратное 3 (то есть, $|3k–d| \leq 1$). В результате в корзинах станет $m–2k$ и $n+k$ пирожков, а разность этих чисел по модулю не более 1. Как доказано выше, в этой ситуации выиграет второй, который в исходной игре был первым.

♦ Разобран только случай, когда $|m–n| \leq 1$: *4 балла*.

2. *Дано простое p. Докажите, что существует такая перестановка (a_1, a_2, ..., a_p) чисел 1, 2, 3, ..., p, что числа a_1, a_1a_2, $a_1a_2a_3$, ..., $a_1a_2...a_p$ дают разные остатки при делении на p.*

Решение. Положим $a_p = p$, $a_1 = 1$, а остальные a_k построим по индукции так, чтобы $a_1a_2... a_k$ давало при делении на p остаток k. Для этого достаточно брать a_k таким, чтобы $(k–1)a_k$ было сравнимо с k по модулю p. Так как p простое, такое a_k найдется. Осталось заметить, что все a_k будут различны, так как если a_k сравнимо с a_m по модулю p при $k \neq m$, то, перемножая сравнения $(k–1)a_k \equiv k$ и $m \equiv (m–1)a_k$, получаем $m(k–1)a_k \equiv k(m–1)a_k$, откуда $m(k–1) \equiv k(m–1) \Rightarrow m \equiv k$ — противоречие.

♦ Не пояснено, что можно делить по mod p — *дыра в 4 балла*, но если пояснение с ходу дано — дыры нет.

3. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?*

Ответ. Верно. **Решение**. Докажем по индукции более общий факт: если в проекте участвует не более $2^{n+1}–2$ человек ($n \geq 1$), то можно выгнать всех за не более чем n изгнаний. Так как $2^{11}–1 > 2017$, тем самым будет доказано и утверждение задачи. При $n = 1$ все очевидно: двоих можно выгнать, как если они дружат, так и если не дружат. Пусть утверждение уже доказано для $n = k$, и докажем его для $n = k+1$. Заметим, что жюри всегда может выгнать не менее половины участников. Поэтому если участников не больше, чем $2\cdot(2^k–2) = 2^{k+1}–4$, то переход доказан. Пусть их $2^{k+1}–3$. Тогда в графе знакомств либо чётных, либо нечётных вершин больше половины, то есть не меньше, чем 1. Выгнав их, жюри снова оставит не больше $2^k–2$ человек. Пусть, наконец, у нас $2^{k+1}–2$ человек. Тогда в силу чётности числа нечётных вершин их либо не меньше, чем 2^k, и тогда жюри выгонит их, либо не больше, чем $2^k–2$, и тогда жюри выгонит чётные вершины. В обоих случаях останется не больше $2^k–2$ человек, что и завершает доказательство.

4. *На доске 100×100 отмечена 201 клетка. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Чему равно наименьшее число различных квадратов 2×2 (возможно, пересекающихся), все клетки которых отмечены?*

Ответ. 2. **Решение**. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то s из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены. Поэтому, в рассматриваемых двух столбцах не менее s–1 квадратов 2×2. В любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее t–1 таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее 201–100 = 101. Пусть $t_{i,\, i+1}$ — количество пар соседних отмеченных клеток, лежащих в i-ом и (i+1)-ом столбцах. Тогда, как мы доказали, $t_{1,\,2}+\ldots+t_{99,\,100} \geq 101$, следовательно, $(t_{1,\,2}-1)+\ldots+(t_{99,\,100}-1) \geq 2$. Это означает, что существует хотя бы два искомых квадрата 2×2.

Пример. Отметим 199 клеток в нижней строке и левом столбце, после чего добавим к ним еще две соседние с левым краем клетки во второй снизу строке. Очевидно, здесь ровно два квадрата 2×2.

♦ Только ответ с примером: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

5. *На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018*

Ответ. Верно. **Решение**. Зафиксируем шестую и пятую с конца цифры a и b (если число меньше 10^5, сначала сделаем его шестизначным, прибавив нужное количество раз 2017). Начнем прибавлять к данному числу 2017, не меняя порядок цифр. Тогда величина $\overline{ab}$ увеличивается не более чем на 1 или обнуляется. Не реже, чем через 100 ходов, мы будем получать $b = a+1$. При выполнении этого условия поменяем цифры a и b местами. Вместо увеличения числа на 2017, число увеличивается на 2017+90000. Так как (2017, 90000) = 1, то за 2017 таких замен мы можем получить все возможные остатки при делении на 2017. При этом мы увеличим наше число не более чем на $x = 2017\cdot(100\cdot2017+90000)$.

Пусть n — первоначальное число, и $10^k > n+x$. Заметим, что среди полученных выше чисел есть число n_1 дающее такой же остаток, что и 10^k. Тогда после получения n_1 будем только прибавлять 2017 не меняя порядок цифр. После получения 10^k переставим его цифры, чтобы получить 1, после чего прибавим 2017.

6. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?*

Ответ. Нет. **Решение**. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. *Для положительных чисел x и y, меньших единицы, докажите неравенство* $xy+\dfrac{1}{xy}+2 > x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}$.

Решение. Умножив обе части неравенства на xy, после преобразования получим $(xy+1)^2 > (xy+1)(x+y)$. Разделив на $xy+1$, получим $xy+1 > x+y \Leftrightarrow (1-x)(1-y) > 0$. Последнее неравенство очевидно.

8. *Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A, равным 110°, отмечена точка M. Оказалось, что $\angle BCM = 30°$ и $\angle CBM = 25°$. Найдите угол AMB.*

Ответ. 85°. **Решение**. Отметим внутри треугольника ABC точку N такую, что $\angle CBN = 30°$ и $\angle BCN = 25°$. Тогда $\angle ABN = \angle NBM = 5°$. Обозначим через K точку пересечения лучей BN и CM. Из соображений симметрии очевидно, что AK — биссектриса угла A треугольника ABC. То есть $\angle BAK = 55°$. Тогда из суммы углов треугольника ABK получаем, что $\angle AKB = 120°$, а из суммы углов треугольника BKC — что $\angle BKM = 120°$. Следовательно, треугольники ABN и MBN равны по стороне и двум углам, откуда $AB = BM$ и треугольник ABM равнобедренный. Но тогда $\angle AMB = (180°-\angle ABM)/2 = 85°$.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

Младшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Первый выигрывает в следующих случаях: если m и n имеют одинаковые остатки от деления на 3, но разные остатки от деления на 2, или если m и n имеют разные остатки от деления на 3, но одинаковые остатки от деления на 2. **Решение**. Возможны три конечных позиции: (1, 0), (0, 1) и (1, 1). В результате игры остаток от деления $m-n$ на 3, очевидно, не меняется, а значит, всегда понятно, в какую из позиций мы попадем в результате. От действий игроков это не зависит, так как каждым ходом количество пирожков уменьшается на 1. Таким образом, при $m \equiv n \pmod 3$ конечной будет позиция (1, 1), тогда первый выигрывает, если $m+n$ нечетно, а второй — если четно. При m и n, не сравнимых по модулю 3, конечной будет одна из позиций (1, 0) и (0, 1), а значит, первый в этом случае выигрывает, если $m+n$ четно, а второй — если нечетно.

♦ Замечено только сохранение остатка по модулю 3: *2 балла*.

2. *К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.*

Решение. Пусть исходное число n-значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

3. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 400 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.*

Решение. Понятно, что каждый день жюри может выгнать не менее половины оставшихся участников, а если число оставшихся участников нечётно, то более половины. Поэтому оно может добиться, чтобы после первого дня в проекте осталось не более 200 человек, после второго — не более 100, после третьего — не более 50, после четвёртого — не более 25, после пятого — не более 12, после шестого — не более 6. Если их осталось 5, жюри четвертым изгнанием сможет выгнать хотя бы троих, а если 4 или меньше — не менее половины. Тогда после седьмого дня участников останется не больше двух, которых благополучно выгонят вечером пятого дня, будь они знакомы или незнакомы. Если же после шестого дня осталось 6 человек, то в силу теоремы о чётности числа нечётных вершин графа в графе их знакомств есть хотя бы 4 вершины одной четности, и потому жюри также сможет оставить после седьмого дня не более двоих.

4. *На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2, все клетки которых отмечены.*

Решение. Предположим противное. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то две из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены, и взяв любые две из них, соседние по вертикали, получим искомый квадрат. Следовательно, имеется всего не более 99 таких пар. С другой стороны, в любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее $t-1$ таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее 200−100 = 100. Противоречие.

5. *В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома? Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \le 10N$, $8y \le 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x$, $2y$, $3x$, $3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \le N$, но отсюда $8x \le 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, противоречие.

6. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?*

Ответ. Нет. **Решение**. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. *Для положительных чисел x и y, меньших единицы, докажите неравенство* $xy + \frac{1}{xy} + 2 > x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$.

Решение. Умножив обе части неравенства на xy, после преобразования получим $(xy+1)^2 > (xy+1)(x+y)$. Разделив на $xy+1$, получим $xy+1 > x+y \Leftrightarrow (1-x)(1-y) > 0$. Последнее неравенство очевидно.

8. *Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A, равным $110°$, отмечена точка M. Оказалось, что $\angle BCM = 30°$ и $\angle CBM = 25°$. Найдите угол AMB.*

Ответ. 85°. **Решение**. Отметим внутри треугольника ABC точку N такую, что $\angle CBN = 30°$ и $\angle BCN = 25°$. Тогда $\angle ABN = \angle NBM = 5°$. Обозначим через K точку пересечения лучей BN и CM. Из соображений симметрии очевидно, что AK — биссектриса угла A треугольника ABC. То есть $\angle BAK = 55°$. Тогда из суммы углов треугольника ABK получаем, что $\angle AKB = 120°$, а из суммы углов треугольника BKC — что $\angle BKM = 120°$. Следовательно, треугольники ABN и MBN равны по стороне и двум углам, откуда $AB = BM$ и треугольник ABM равнобедренный. Но тогда $\angle AMB = (180° - \angle ABM)/2 = 85°$.

Младшая группа, вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат 20172017 и 20172018 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Вася. **Решение**. Каждым своим ходом Вася действует так, чтобы после его хода количества пирожков в группах отличались не более чем на 1. Пусть разница между количествами пирожков в группах перед Васиным ходом равна $d > 1$. Тогда Васе нужно найти ближайшее к d кратное 3 число $3k$ (оно отличается от d не более чем на 1), и затем из большей группы взять $2k$ пирожков, а в меньшую добавить k. Теперь разница между группами уменьшилась на $3k$, а значит оказалась в промежутке от –1 до 1.

Заметим, что Петя своим ходом (включая и первый), имея две группы с разностью от –1 до 1, обязан изменить разность на кратное 3 ненулевое число, а значит, разность выйдет из диапазона от –1 до 1, и Вася сможет действовать по своей стратегии. Так как игра рано или поздно закончится — выигрывает Вася.

2. *Натуральные числа m и n таковы, что $m^{2017}+m+n$ делится на mn. Докажите, что $m+n$ делится на m^2.*

Решение. Из условия ясно, что n делится на m. Пусть $n = km$. Имеем $m^{2017}+(k+1)m$ делится на km^2, откуда $m^{2016}+(k+1)$ делится на km, откуда $k+1$ делится на m. Осталось заметить, что $m+n = (k+1)m$.

3. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.*

Решение. Понятно, что каждый день жюри может выгнать не менее половины оставшихся участников, а если число оставшихся участников нечётно, то более половины. Поэтому оно может добиться, чтобы после первого дня в проекте осталось не более 150 человек, после второго — не более 75, после третьего — не более 37, после четвёртого — не более 18, после пятого — не более 9, после шестого — не более 4, после седьмого — не более 2, которых благополучно выгонят вечером восьмого дня, будь они знакомы или незнакомы.

4. *На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2, все клетки которых отмечены.*

Решение. Предположим противное. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то две из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены, и взяв любые две из них, соседние по вертикали, получим искомый квадрат. Следовательно, имеется всего не более 99 таких пар. С другой стороны, в любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее $t-1$ таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее $200-100 = 100$. Противоречие.

5. *В собрании сочинений Н.Л. Художего 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких–то натуральных чисел x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \le 10N$, $8y \le 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x$, $2y$, $3x$, $3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \le N$, но отсюда $8x \le 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, противоречие.

6. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?*

Ответ. Нет. **Решение**. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. *Для положительных чисел x и y, меньших единицы, докажите неравенство* $xy + \frac{1}{xy} + 1 > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Решение. Умножив обе части неравенства на xy, получим $(xy)^2+xy+1 > x+y$. Перенося все члены в правую часть и разлагая на множители, получаем очевидное неравенство $(xy)^2+(1-x)(1-y) > 0$.

8. *Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE. Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE, он пересек продолжение стороны AB в точке P. Прямая PE пересекает сторону BC в точке S. Докажите, что $BS = SP$.*

Решение. Точки C и P симметричны относительно прямой BE. Поэтому относительно той же прямой симметричны и точки $S = PE \cap BC$ и $A = CE \cap BA$. Следовательно, $\angle BPS = \angle ACB = \angle ABC$, откуда и следует, что $BS = SP$.

Младшая группа, третья лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат по 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Вася. **Решение**. Делая ходы, симметричные ходам Пети, Вася добивается позиции (1, 1), в которой Петя проигрывает.

2. *Натуральные числа x и y таковы, что числа* $\dfrac{2y}{x(y-x)}$ *и* $\dfrac{(y-x)(y+1)}{2y^2}$ *целые. Найдите все возможные значения чисел x и y.*

Ответ. $x = y = 1$. **Решение**. По условию существуют натуральные u и v такие, что $2y = ux(y-x)$ и $2vy^2 = (y+1)(y-x)$. Деля второе равенство на первое и умножая потом обе части на ux, получаем $2uvxy = y+1$, откуда $y = 1$, так как иначе $y+1 < 2y \le 2uvxy$. При $y = 1$ имеем $2uvx = 2$, откуда $x = 1$.

♦ Только ответ: *0 баллов*.

3. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 42 человека, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 5 изгнаний на проекте никого не останется.*

Решение. В силу чётности числа нечётных вершин в графе знакомств на 42 вершинах не менее 22 вершин одной четности. Поэтому после первого изгнания жюри может оставить не более 20 человек. Выгнав на второй день не меньше половины из них, жюри оставит не более 10 человек. Если их осталось 10 или 9, жюри сможет выгнать хотя бы пятерых, а если 8 или меньше — не менее половины. В любом случае после третьего изгнания оно сможет оставить не более 5 человек. Если их осталось 5, жюри четвертым изгнанием сможет выгнать хотя бы троих, а если 4 или меньше — не менее половины. Тогда после четвертого дня участников останется не больше двух, которых благополучно выгонят вечером пятого дня, будь они знакомы или незнакомы.

4. *30 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер имеет с моим общий делитель, больший 1, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.*

Ответ. 15. **Решение**. Разобьём учеников на пары: (1, 2), (3, 4), …, (29, 30). В паре не может быть более одного всегда говорящего правду. Пример на 15: все ученики с чётными номерами.

♦ Только ответ с примером: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

5. *В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов по 500 страниц каждый. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных чисел x и y страницы с номерами x, 2x, 11x, y, 3y, 5y все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. По условию $11x \le 5000 \Rightarrow x \le 5000/11$, $2x \le 10000/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 1000 \Rightarrow 5y > 5000$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

6. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 30 по кругу в таком порядке, что все 30 сумм пар соседних чисел давали различные остатки от деления на 30?*

Ответ. Нет. **Решение**. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 30 пар стоящих рядом чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 30 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 15. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно дважды, поэтому этот остаток будет равен удвоенному остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. *Может ли семизначное число, начинающееся на 2017, делиться на все числа от 1 до 9?*

Ответ. Не может. **Решение**. Ясно, что последней цифрой числа должен быть 0. Чтобы число делилось на 9, надо, чтобы сумма дописанных цифр была сравнима с 8 по модулю 9. Предпоследняя цифра должна обеспечивать делимость на 4, т.е. быть чётной. Среди семизначных таких чисел шесть: 2017080, 2017260, 2017440, 2017620, 2017800 и 2017980, и среди них нет такого, которое делится на 7 и на 8 одновременно.

8. *Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE. Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE, он пересек продолжение стороны AB в точке P. Прямая PE пересекает сторону BC в точке S. Докажите, что $BS = SP$.*

Решение. Точки C и P симметричны относительно прямой BE. Поэтому относительно той же прямой симметричны и точки $S = PE \cap BC$ и $A = CE \cap BA$. Следовательно, $\angle BPS = \angle ACB = \angle ABC$, откуда и следует, что $BS = SP$.

Группа «Старт», высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

1. *В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких–то натуральных x, y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \le 10N$, $8y \le 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x$, $2y$, $3x$, $3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \le N$, но отсюда $8x \le 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, противоречие.

2. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после семи заседаний на проекте не осталось ни одного участника?*

Ответ. Неверно. **Решение**. Представим компанию в виде графа, где вершинами являются люди, а ребра проводятся между друзьями. Пусть есть граф G, в котором поровну вершин четной и нечетной степени. Назовем *удвоением* такого графа следующий граф G': рисуем рядом две копии графа G и затем каждой вершине четной степени в левой копии берем в пару вершину нечетной степени в правой копии, и все вершины в парах соединяем ребром. Полученный граф G' обладает замечательным свойством: что бы с ним ни сделало жюри, из него получится копия графа G! Кроме того, в нем так же, как и в G, поровну вершин четной и нечетной степени.

Возьмем теперь граф G_1 на 4 вершинах и 3 ребрах, образующих простой путь длины 3. При помощи операции удвоения будем последовательно получать из G_1 граф G_2, из G_2 граф G_3, и так далее до G_7, в котором будет как раз $2^8 = 256$ вершин. Теперь достаточно подружить 300 участников так: 44 пусть останутся совсем без друзей, а остальных 256 подружим согласно графу G_7. Теперь, как бы ни действовало жюри, после первого дня образуется граф знакомств G_6 (не считая, возможно, 44 ни с кем не подружившихся), после второго G_5, и так далее, после шестого дня G_1, а после седьмого дня на проекте останутся как минимум двое.

3. *К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017*

Решение. Пусть исходное число n-значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

4. *Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.*

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 ($111 = 23+4\times22$). Число 112 получаем так: 26+25+21+20+20. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 ($26+25+3\times22$). Число 118 получаем так: 26+25+25+22+20. И далее, 119 = 26+25+25+22+21, 120=26+25+25+22+22. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

5. *В группе из 5 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 10 минут любые двое ровно* *один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?*

Ответ. Может. **Решение**. Пронумеруем детей от 1 до 5 и проведем последовательно обмены в следующих парах: (25)(12)(15) (35)(34)(45) (13)(24) (23)(14). Нетрудно убедиться, что каждый шарик окажется в результате на исходном месте.

6. *На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2, все клетки которого отмечены.*

Решение. Предположим противное. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то две из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены, и взяв любые две из них, соседние по вертикали, получим искомый квадрат. Следовательно, имеется всего не более 99 таких пар. С другой стороны, в любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее $t-1$ таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее $200-100 = 100$. Противоречие.

7. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?*

Ответ. Нет. **Решение**. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

8. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Петя. **Решение**. Каждым своим ходом Петя действует так, чтобы после его хода количества пирожков в группах отличались не более чем на 1. Пусть разница между количествами пирожков в группах перед Петиным ходом равна $d > 1$. Тогда Пете нужно найти ближайшее к d кратное 3 число $3k$ (оно отличается от d не более чем на 1), и затем из большей группы взять $2k$ пирожков, а в меньшую добавить k. Теперь разница между группами уменьшилась на $3k$, а значит оказалась в промежутке от -1 до 1.

Заметим, что Вася своим ходом, имея две группы с разностью от -1 до 1, обязан изменить разность на кратное 3 ненулевое число, а значит, разность выйдет из диапазона от -1 до 1, и Петя сможет продолжить действовать по своей стратегии. Так как игра рано или поздно закончится — выигрывает Петя.

Группа «Старт», первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. *В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких–то натуральных x, y страницы с номерами x, y, $2x$, $3y$, $5y$, $11x$ все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть в каждом томе n страниц. Тогда $11x \le 10n \Rightarrow x \le 10n/11$, $2x \le 20n/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 2n \Rightarrow 5y > 10n$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

2. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 30 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после 4 заседаний на проекте не осталось ни одного участника?*

Ответ. Верно. **Решение**. В графе знакомств на 30 вершинах либо не более 14 чётных вершин, либо не более 14 нечётных. Поэтому жюри сможет оставить после первого дня не более 14 участников. В графе знакомств на не более чем 14 вершинах либо не более 6 чётных вершин, либо не более 6 нечётных. Поэтому жюри сможет оставить после первого дня не более 6 участников. В графах знакомств на 6, 5, 4 и 3 вершинах найдется хотя бы 4, 3, 2 и 2 вершины одной четности соответственно. Поэтому после второго дня жюри всегда может оставить не более 2 человек, и выгнать их после третьего дня.

3. *К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.*

Решение. Пусть исходное число n-значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

4. *Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.*

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 ($111 = 23+4\times22$). Число 112 получаем так: $26+25+21+20+20$. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 ($26+25+3\times22$). Число 118 получаем так: $26+25+25+22+20$. И далее, $119 = 26+25+25+22+21$, $120=26+25+25+22+22$. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

5. *В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие–то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 6 минут любые двое ровно один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?*

Ответ. Могло. **Решение**. Пронумеруем детей: 1, 2, 3, 4. Порядок ходов таков: $2\leftrightarrow1$, $3\leftrightarrow4$, $1\leftrightarrow3$, $2\leftrightarrow4$, $4\leftrightarrow1$, $2\leftrightarrow3$.

6. *На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причём в любой строке и в любом столбце лежит не менее пяти отмеченных клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Какое наименьшее количество квадратов 5×5 (возможно, пересекающихся), состоящих из отмеченных клеток, может быть?*

Ответ. 2. **Решение**. *Оценка*. Рассмотрим самую нижнюю строчку. В ней не менее 5 отмеченных клеток. Выберем из них 5 подряд стоящих. В столбцах, содержащих эти клетки, будет не менее, чем по 5 клеток, поэтому они будут образовывать квадрат, содержащий в качестве самой нижней строке выбранные 5 клеток. Аналогично построим ещё квадрат для верхней строки. Он, очевидно, не будет совпадать с ранее построенным, поэтому всегда найдутся 2 квадрата. *Пример*. Отметим все клетки диагонали, ведущей из левого нижнего угла исходного квадрата в правый верхний, также отметим все клетки, образующие квадраты 5×5, лежащие в этих углах и все клетки, соседние с диагональными по стороне или углу. Тогда все условия будут выполнены и образуется всего 2 квадрата.

♦ Только оценка: *4 балла*. Только пример: *2 балла*.

7. *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?*

Ответ. Нет. **Решение**. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

8. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Петя. **Решение**. Каждым своим ходом Петя действует так, чтобы после его хода количества пирожков в группах отличались не более чем на 1. Пусть разница между количествами пирожков в группах перед Петиным ходом равна $d > 1$. Тогда Пете нужно найти ближайшее к d кратное 3 число $3k$ (оно отличается от d не более чем на 1), и затем из большей группы взять $2k$ пирожков, а в меньшую добавить k. Теперь разница между группами уменьшилась на $3k$, а значит оказалась в промежутке от -1 до 1.

Заметим, что Вася своим ходом, имея две группы с разностью от -1 до 1, обязан изменить разность на кратное 3 ненулевое число, а значит, разность выйдет из диапазона от -1 до 1, и Петя сможет продолжить действовать по своей стратегии. Так как игра рано или поздно закончится — выигрывает Петя.

Группа «Старт», вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

1. *В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких–то натуральных x, y страницы с номерами x, y, 2x, 3y, 5y, 11x все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть в каждом томе n страниц. Тогда $11x \le 10n \Rightarrow x \le 10n/11$, $2x \le 20n/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 2n \Rightarrow 5y > 10n$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

2. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 14 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после трёх заседаний на проекте не осталось ни одного участника?*

Ответ. Верно. **Решение**. В графе знакомств на 14 вершинах либо не менее 8 чётных вершин, либо не менее 8 нечётных. Поэтому жюри сможет оставить после первого дня не более 6 участников. В графах знакомств на 6, 5, 4 и 3 вершинах найдется хотя бы 4, 3, 2 и 2 вершины одной четности соответственно. Поэтому после второго дня жюри всегда может оставить не более 2 человек, и выгнать их после третьего дня.

3. *В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.*

Ответ. 15. **Решение**. Разобьём учеников на пары: (1, 2), (3, 4), …, (29, 30). В паре не может быть более одного всегда говорящего правду. Пример на 15: все ученики с чётными номерами.

♦ Только оценка: *4 балла*. Только пример: *4 балла*.

4. *Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.*

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 ($111 = 23+4\times22$). Число 112 получаем так: $26+25+21+20+20$. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 ($26+25+3\times22$). Число 118 получаем так: $26+25+25+22+20$. И далее, $119 = 26+25+25+22+21$, $120=26+25+25+22+22$. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

5. *В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?*

Ответ. Могло. **Решение**. Пронумеруем детей: 1, 2, 3, 4. Порядок ходов таков: $2\leftrightarrow1$, $3\leftrightarrow4$, $1\leftrightarrow3$, $2\leftrightarrow4$, $4\leftrightarrow1$, $2\leftrightarrow3$.

6. *На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причем в любом столбце и в любой строке отмечено не менее двух клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2, все клетки которого отмечены.*

Решение. Рассмотрим верхнюю строчку, в ней найдутся две соседние отмеченные клетки. В столбцах с этими клетками есть еще хотя бы по одной отмеченной клетке, тогда, в силу условия, клетки на пересечении этих двух столбцов и второй сверху строки тоже будут отмечены. Вместе с отмеченными клетками первой строки они образуют квадрат 2×2.

7. *Числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 расставили по кругу в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать две группы из 50 идущих подряд чисел (возможно пересекающиеся) так, чтобы суммы чисел в этих группах давали одинаковые остатки от деления на 100.*

Решение. Сумма всех чисел в круге равна 5050, то есть дает остаток 50 при делении на 100. Предположим, что остатки сумм во всех группах различны. Так как групп ровно 100, каждый остаток должен встретиться ровно один раз. Но если сумма каких-то 50 идущих подряд чисел дает остаток 25 по модулю 100, то сумма оставшихся 50 тоже дает остаток 25. Противоречие

8. *На столе стоят две корзинки, в одной из них лежит 44 пирожка, а во второй — 55. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Петя. **Решение**. Заметим, что разность количеств пирожков в корзинках не меняет остаток по модулю три, поэтому игра закончится, когда в одноой корзине будет один пирожок, а во другой — 0. Суммарное количество пирожков за каждый ход уменьшается на один, то есть будет сделано 44+55-1 = 98 ходов. Значит выиграет Петя.

Группа «Старт», третья лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

1. *Малыш и Карлсон играют в пирожки, лежащие на двух тарелках. За один ход можно взять два пирожка из любой одной тарелки, один — съесть, а второй — переложить на другую тарелку. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Начинает Карлсон. Кто выиграет, если сначала на одной тарелке лежало 44, а на второй — 55 пирожков?*

Ответ. Карлсон. **Решение**. Заметим, что разность количеств пирожков в корзинках не меняет остаток по модулю три, поэтому игра закончится, когда в одной корзине будет один пирожок, а в другой — 0. Суммарное количество пирожков за каждый ход уменьшается на один, то есть будет сделано 44+55–1 = 98 ходов. Значит выиграет Карлсон.

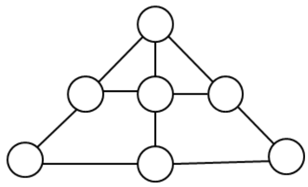
2. *Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.*

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 (111 = 23+4×22). Число 112 получаем так: 26+25+21+20+20. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 (26+25+3×22). Число 118 получаем так: 26+25+25+22+20. И далее, 119 = 26+25+25+22+21, 120=26+25+25+22+22. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

3. *К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.*

Решение. Пусть исходное число n-значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

4. *Сколькими способами можно вписать в кружочки числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы суммы всех троек чисел, расположенных вдоль каждого из пяти отрезков, были равны?*



Ответ. 12. **Решение**. Сумма всех чисел равна 28. Все числа, кроме верхнего, должны разбиваться на 2 группы по 3 с одинаковой суммой, а также — на 3 группы по 2 с одинаковой суммой. Это возможно, если сумма этих чисел делится на 6. Такое может случиться только, если верхнее число — 4. Вдоль «лучей», идущих от верхнего кружка должны располагаться пары чисел с суммой 8. Таких пар — три: (1, 7), (2, 6), (3, 5). Их можно расположить вдоль «лучей» шестью разными способами. Если мы зафиксируем одно из расположений, например, пару (1, 7) расположим на левом «луче» (это можно сделать двумя способами — 1 выше, 7 ниже, или наоборот), то остальные четыре числа располагаются однозначно: в горизонтальном ряду с семёркой должны стоять 2 и 3, а с единицей — 6 и 5 соответственно.

5. *В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.*

Ответ. 15. **Решение**. Разобьём учеников на пары: (1, 2), (3, 4), …, (29, 30). В паре не может быть более одного всегда говорящего правду. Пример на 15: все ученики с чётными номерами.

♦ Только оценка: *4 балла*. Только пример: *4 балла*.

6. *Найдите наименьшее число, которое начинается с цифр 2017 и делится на все числа от 1 до 10.*

Ответ. 20170080. **Решение**. Ясно, что последней цифрой числа должен быть 0. Чтобы число делилось на 9, надо, чтобы сумма дописанных цифр была сравнима с 8 по модулю 9. Единственное шестизначное такое число 201780 не делится на 7. Предпоследняя цифра должна обеспечивать делимость на 4, т.е. быть чётной. Среди семизначных таких чисел шесть: 2017080, 2017260, 2017440, 2017620, 2017800 и 2017980. Среди них нет такого, которое делится на 7 и на 8 одновременно. Наименьшее из восьмизначных чисел —–20170080 — нам подходит.

♦ Только ответ: *4 балла*.

7. *В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. В каждом из них страниц поровну, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная. Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами x, y, 2x, 3y, 11x, 5y все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть в каждом томе n страниц. Тогда $11x \le 10n \Rightarrow x \le 10n/11$, $2x \le 20n/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 2n \Rightarrow 5y > 10n$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

8. *В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?*

Ответ. Могло. **Решение**. Пронумеруем детей: 1, 2, 3, 4. Порядок ходов таков: 2↔1, 3↔4, 1↔3, 2↔4, 4↔1, 2↔3.