МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вася и Петя играют в такую игру. У каждого из них имеется набор из 40 карточек, на каждой из которых записано некоторое число. На Васиных карточках записаны по 10 раз числа 1, 5, 7 и 9, а на Петиных — по 10 раз числа 2, 3, 6 и 8. За один ход оба мальчика одновременно выбирают из своих карточек по одной и сравнивают записанные на них числа. Тот игрок, у которого число больше, делит его на меньшее число, результат записывает на свою карточку вместо написанного на ней числа и забирает эту карточку обратно; карточка с меньшим числом выбрасывается. Если на карточках одинаковые числа, то обе карточки выбрасываются. Вслед за этим делается новый ход и т.д. Тот, у кого закончились карточки, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

2. В шахматном турнире участвовали 2017 человек, каждые два из которых играли друг с другом не более одного раза. После турнира оказалось, что среди каждых двух участников, игравших между собой, хотя бы один сыграл не более 22 игр. Какое наибольшее количество игр могло быть в турнире?

3. Прямоугольная площадь 1526×1526 выложена плитками 1×1. В некоторые углы плиток (в том числе, возможно, находящиеся на краю площади) вставляют лампочки (вставлять в одну точку две лампочки нельзя). Лампочка освещает все плитки, в углах которых находится. Какое наименьшее количество лампочек нужно вставить, чтобы каждая плитка была освещена, даже если одна из лампочек перегорит?

4. В строчку выписано несколько единиц и нулей, причём единиц не меньше 1526. Докажите, что можно вставить плюсы между некоторыми цифрами так, чтобы сумма полученных чисел, прочитанных в двоичной системе, оказалась степенью двойки.

5. Параллелограмм $ABCD$ не является ромбом. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC. Прямая, проходящая через E и перпендикулярная BD, пересекает отрезок ВС в точке F и прямую AB в точке G. Докажите, что $EF = EG$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ — прямоугольник.

6. Точки A', B', C' симметричны центру I вписанной окружности треугольника ABC относительно его сторон BC, CA и AB соответственно. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ остроугольный.

7. Натуральное число n даёт остаток 4 при делении на 8. Числа $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$ — все натуральные делители n. Докажите, что если число $k < m$ не кратно 3, то $d_{k+1} \le 2d_k$.

8. Пусть $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_{2n-1} \ge a_{2n} \ge 0$, $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n} = 1$. Докажите, что $a_1a_2+3a_3a_4+5a_5a_6+\ldots+(2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \le 1/4$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вася и Петя играют в такую игру. У каждого из них имеется набор из 40 карточек, на каждой из которых записано некоторое число. На Васиных карточках записаны по 10 раз числа 1, 5, 7 и 9, а на Петиных -- по 10 раз числа 2, 3, 6 и 8. За один ход оба мальчика одновременно выбирают из своих карточек по одной и сравнивают записанные на них числа. Тот игрок, у которого число больше, делит его на меньшее число, результат записывает на свою карточку вместо написанного на ней числа и забирает эту карточку обратно; карточка с меньшим числом выбрасывается. Если на карточках одинаковые числа, то обе карточки выбрасываются. Вслед за этим делается новый ход и т.д. Тот, у кого закончились карточки, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

2. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

3. Прямоугольная площадь 100×101 выложена плитками 1×1. В некоторые углы плиток (в том числе, возможно, находящиеся на краю площади) вставляют лампочки (вставлять в одну точку две лампочки нельзя). Лампочка освещает все плитки, в углах которых находится. Какое наименьшее количество лампочек нужно вставить, чтобы каждая плитка была освещена, даже если одна из лампочек перегорит?

4. В строчку в произвольном порядке выписано 999 единиц и несколько нулей. Докажите, что можно вставить плюсы между некоторыми цифрами так, чтобы сумма полученных чисел оказалась степенью тройки.

5. Параллелограмм $ABCD$ не является ромбом. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC. Прямая, проходящая через E и перпендикулярная BD, пересекает отрезок ВС в точке F и прямую AB в точке G. Докажите, что $EF = EG$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ — прямоугольник.

6. Биссектрисы треугольника ABC пересеклись в точке I. Из точки I опущены перпендикуляры IA', IB', IC' на стороны BC, CA и AB соответственно. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ остроугольный.

7. Натуральное число n даёт остаток 4 при делении на 8. Числа $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$ — все натуральные делители n. Докажите, что если число $k < m$ не кратно 3, то $d_{k+1} \leq 2d_k$.

8. Докажите, что если действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2+y = y^2+z = z^2+x$, то $x^3+y^3+z^3 = xy^2+yz^2+zx^2$.

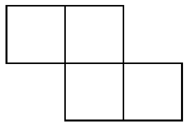
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Вася и Петя играют в такую игру. У каждого из них имеется набор из 50 карточек, на каждой из которых записано некоторое число. На Васиных карточках записаны по 10 раз числа 1, 5, 6, 7 и 9, а на Петиных — по 10 раз числа 2, 3, 4, 8 и 10. За один ход оба мальчика одновременно выбирают по одной из своих карточек и сравнивают записанные на них числа. Тот игрок, у которого число больше, вычитает из него меньшее число, результат записывает на свою карточку вместо написанного на ней числа и забирает её обратно; карточка с меньшим числом выбрасывается. Если на обеих карточках одинаковые числа, то обе карточки выбрасываются. Вслед за этим делается новый ход и т.д. Тот, у кого закончились карточки, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

2. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

3. Можно ли клетки какого-нибудь квадрата покрыть Z-тетрамино (см. рис.), не выступающими за пределы квадрата, таким образом, чтобы все клетки квадрата были покрыты одним и тем же количеством тетраминошек? Тетраминошки можно поворачивать и переворачивать.



4. В строчку в произвольном порядке выписано 999 единиц и несколько нулей. Докажите, что можно вставить плюсы между некоторыми цифрами так, чтобы сумма полученных чисел оказалась степенью тройки.

5. Прямоугольник $ABCD$ не является квадратом. Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC. Прямая, проходящая через E и перпендикулярная BD, пересекает отрезок BC в точке F и прямую AB в точке G. Докажите, что $EF = EG$.

6. Биссектрисы треугольника ABC пересеклись в точке I. Из точки I опущены перпендикуляры IA', IB', IC' на стороны BC, CA и AB соответственно. Докажите, что треугольник $A'B'C'$ остроугольный.

7. Натуральное число n даёт остаток 2 при делении на 4. Числа $1=d_1 < d_2 < \ldots < d_m = n$ — все натуральные делители n. Докажите, что если число $k < m$ не кратно 2, то $d_{k+1} \leq 2d_k$.

8. Докажите, что если действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2+y = y^2+z = z^2+x$, то $x^3+y^3+z^3 = xy^2+yz^2+zx^2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано нечетное число n. Пусть A — количество решений уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ в натуральных числах, а B — количество решений уравнения $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{n}$ в натуральных числах. Какое из чисел A и B больше? (Ответ может зависеть от n).

2. Докажите, что если числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2+y = y^2+z = z^2+x$, то $x^3+y^3+z^3 = xy^2+yz^2+zx^2$.

3. Решите уравнение $p^8–p^4 = q^5–q$ в простых числах p и q.

4. В каждой клетке таблицы 17×17 стоит натуральное число, не превосходящее 4, причём в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 10. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

5. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

6. 2017 теннисистов хотят разыграть однокруговой турнир (каждый с каждым сыграет по одному матчу). Но поскольку у них всего один стол, а турнир может в любой момент прерваться, они хотят организовать его так, чтобы в любой момент количества сыгранных к этому моменту каждым из них матчей отличались не более, чем на 1. Докажите, что они могут так организоваться.

7. Сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 1. Докажите неравенство $xy+yz+2zx\le\frac{1}{2}$.

8. В равнобедренном треугольнике ABC с углом BAC, равным 100°, проведена биссектриса BD. Докажите, что $AD+DB = BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дано нечетное число n. Пусть A — количество решений уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ в натуральных числах, а B — количество решений уравнения $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{2}{n}$ в натуральных числах. Какое из чисел A и B больше? (Ответ может зависеть от n).

2. Докажите, что если числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2+y = y^2+z = z^2+x$, то $x^3+y^3+z^3 = xy^2+yz^2+zx^2$.

3. Решите уравнение $p^8+p^5+1 = q^2$ в простых числах p и q.

4. В каждой клетке таблицы 17×17 стоит натуральное число, не превосходящее 4, причём в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

5. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

6. В классе 30 учеников. Каждый из учеников дружит с двумя другими учениками и враждует с двумя учениками. В понедельник учитель рассадил учеников за 15 парт по двое таким образом, что за каждой партой оказались двое врагов. После этого во вторник ученики пересели таким образом, что за каждой партой оказались двое друзей. Докажите, что учитель может выгнать из класса не более 14 учеников таким образом, чтобы оставшихся можно было разбить на две группы, в которых не было бы ни врагов, ни друзей.

7. Сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 1. Докажите неравенство $xy+yz+2zx\le\frac{1}{2}$.

8. Точка M — середина отрезка AB. На отрезках AM и BM выбраны такие точки C и D соответственно, что $AC = BD$. На плоскости отметили такие не лежащие на прямой AB точки P и Q, что $AP = BQ$ и $DP = CQ$. Докажите, что $PM = QM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Сумма 20 натуральных чисел равна 2018. Найдите наименьшее возможное значение суммы цифр всех этих 20 чисел?

2. Докажите, что если числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2+y = y^2+z = z^2+x$, то $x^3+y^3+z^3 = xy^2+yz^2+zx^2$.

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

4. В клетках таблицы 17×17 расставлены натуральные числа, не превосходящие 4, таким образом, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

5. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

6. В классе 30 учеников. Каждый из учеников дружит с двумя другими учениками и враждует с двумя учениками. В понедельник учитель рассадил учеников за 15 парт по двое таким образом, что за каждой партой оказались двое врагов. После этого во вторник ученики пересели таким образом, что за каждой партой оказались двое друзей. Докажите, что учитель может выгнать из класса не более 15 учеников таким образом, чтобы оставшихся можно было разбить на две группы, в которых не было бы ни врагов, ни друзей.

7. Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство $(xy+2)(2x+y) \geq 8xy$.

8. Точка M — середина отрезка AB. На отрезках AM и BM выбраны такие точки C и D соответственно, что $AC = BD$. На плоскости отметили такие не лежащие на прямой AB точки P и Q, что $AP = BQ$ и $DP = CQ$. Докажите, что $PM = QM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

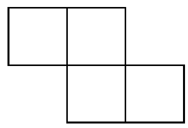
1. Верно ли, что любое целое число представимо в виде суммы попарных произведений четырех различных целых чисел, каждое из которых либо больше 1000, либо меньше −1000?

2. В клетках таблицы 17×17 расставлены натуральные числа, не превосходящие 4, таким образом, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 10. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

3. 89 теннисистов хотят разыграть однокруговой турнир (каждый с каждым сыграет по одному матчу). Но поскольку у них всего один стол, а турнир может в любой момент прерваться, они хотят организовать его так, чтобы в любой момент количества сыгранных к этому моменту каждым из них матчей отличались не более, чем на 1. Докажите, что они могут так организоваться.

4. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

5. В классе 30 учеников. У каждого ученика ровно два друга и ровно два врага (вражда и дружба между учениками взаимны). В понедельник учитель рассадил учеников за 15 парт по двое таким образом, что за каждой партой оказались двое врагов. После этого во вторник ученики пересели таким образом, что за каждой партой оказались двое друзей. Докажите, что учитель может выгнать из класса не более 14 учеников таким образом, чтобы оставшихся можно было разбить на две группы, в которых не было бы ни врагов, ни друзей.



6. Можно ли клетки какого-нибудь клетчатого квадрата покрыть Z-тетрамино (см. рис.), не выступающими за пределы квадрата, таким образом, чтобы все клетки квадрата были покрыты одним и тем же количеством тетраминошек? Тетраминошки можно поворачивать и переворачивать.

7. Сумма 20 натуральных чисел равна 2018. Оказалось, что суммы цифр всех этих 20 чисел равны s. Чему может быть равно s?

8. Вася и Петя играют в такую игру. У каждого из них в кармане имеется набор из 40 карточек, на каждой из которых записано некоторое число. У Васи есть карточки с числами 1, 5, 7, 9 (по 10 штук), у Пети карточки с числами 2, 3, 6, 8 (по 10 штук). За один ход оба мальчика одновременно извлекают наудачу по одной карточке из кармана и сравнивают записанные на них числа. Тот игрок, у которого число больше, делит его на меньшее число, результат записывает на свою карточку вместо написанного на ней числа и кладёт эту карточку обратно в карман; карточка с меньшим числом выбрасывается. Если на обеих карточках одинаковые числа, то обе карточки выбрасываются. Вслед за этим делается новый ход и т.д. У кого закончились карточки — проиграл. Кто победит в этой игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Верно ли, что любое целое число представимо в виде суммы попарных произведений четырех различных целых чисел?

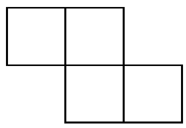
2. В клетках таблицы 17×17 расставлены натуральные числа, не превосходящие 4, таким образом, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

3. 11 теннисистов хотят разыграть однокруговой турнир (каждый с каждым сыграет по одному матчу). Но поскольку у них всего один стол, а турнир может в любой момент прерваться, они хотят организовать его так, чтобы в любой момент количества сыгранных к этому моменту каждым из них матчей отличались не более, чем на 1. Докажите, что они могут так организоваться.

4. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

5. В классе 30 учеников. У каждого ученика ровно два друга и ровно два врага (вражда и дружба между учениками взаимны). В понедельник учитель рассадил учеников за 15 парт по двое таким образом, что за каждой партой оказались двое врагов. После этого во вторник ученики пересели таким образом, что за каждой партой оказались двое друзей. Докажите, что учитель может выгнать из класса не более 14 учеников таким образом, чтобы оставшихся можно было разбить на две группы, в которых не было бы ни врагов, ни друзей.

6. Можно ли клетки какого-нибудь клетчатого квадрата покрыть Z-тетрамино (см. рис.), не выходящими за пределы квадрата, таким образом, чтобы все клетки квадрата были покрыты одним и тем же количеством тетраминошек? Тетраминошки можно поворачивать и переворачивать.



7. Сумма 20 натуральных чисел равна 2018. Оказалось, что суммы цифр всех этих 20 чисел равны s. Чему может быть равно s?

8. Вася и Петя играют в такую игру. У каждого из них в кармане имеется набор из 40 карточек, на каждой из которых записано некоторое число. У Васи есть карточки с числами 1, 5, 7, 9 (по 10 штук), у Пети карточки с числами 2, 3, 6, 8 (по 10 штук). За один ход оба мальчика одновременно извлекают наудачу по одной карточке из кармана и сравнивают записанные на них числа. Тот игрок, у которого число больше, делит его на меньшее число, результат записывает на свою карточку вместо написанного на ней числа и кладёт эту карточку обратно в карман; карточка с меньшим числом выбрасывается. Если на обеих карточках одинаковые числа, то обе карточки выбрасываются. Вслед за этим делается новый ход и т.д. У кого закончились карточки — проиграл. Кто победит в этой игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

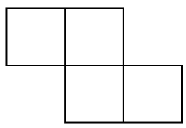
1. Верно ли, что любое целое число представимо в виде суммы попарных произведений четырех различных целых чисел?

2. В клетках таблицы 17×17 расставлены натуральные числа, не превосходящие 4, таким образом, что в каждом квадрате 2×2 сумма чисел равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

4. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

5. В классе 30 учеников. У каждого ученика ровно два друга и ровно два врага (вражда и дружба между учениками взаимны). В понедельник учитель рассадил учеников за 15 парт по двое таким образом, что за каждой партой оказались двое врагов. После этого во вторник ученики пересели таким образом, что за каждой партой оказались двое друзей. Докажите, что учитель может выгнать из класса не более 15 учеников таким образом, чтобы оставшихся можно было разбить на две группы, в которых не было бы ни врагов, ни друзей.



6. Можно ли клетки клетчатого прямоугольника 10×11 покрыть Z–тетрамино (см. рис.), не выходящими за пределы прямоугольника, таким образом, чтобы все клетки прямоугольника были покрыты одним и тем же количеством тетраминошек? Тетраминошки можно поворачивать и переворачивать.

7. Сумма 20 натуральных чисел равна 2018. Оказалось, что суммы цифр всех этих 20 чисел равны s. Чему может быть равно s?

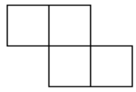
8. Вася и Петя играют в такую игру. У каждого из них в кармане имеется набор из 50 карточек, на каждой из которых записано некоторое число. У Васи есть карточки с числами 1, 5, 6, 7, 9 (по 10 штук), у Пети карточки с числами 2, 3, 4, 8, 10 (по 10 штук). За один ход оба мальчика одновременно извлекают наудачу по одной карточке из кармана и сравнивают записанные на них числа. Тот игрок, у которого число больше, вычитает из него меньшее число, результат записывает на свою карточку вместо написанного на ней числа и кладёт эту карточку обратно в карман; карточка с меньшим числом выбрасывается. Если на обеих карточках одинаковые числа, то обе карточки выбрасываются. Вслед за этим делается новый ход и т.д. У кого закончились карточки — проиграл. Кто победит в этой игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В 1742 году математик Кристиан Гольдбах высказал (но не смог доказать) две гипотезы: а) Любое чётное число, большее 2, можно представить в виде суммы двух простых чисел. б) Любое нечётное число, большее 5, можно представить в виде суммы трёх простых чисел. Докажите, что из гипотезы а) следует б).

2. Можно ли внутрь прямоугольника 8×9 с вырезанными угловыми клетками положить несколько Z-тетрамино (см. рис.) таким образом, чтобы все клетки фигуры были покрыты одним и тем же количеством тетраминошек?



3. Десять теннисистов хотят разыграть однокруговой турнир (каждый с каждым сыграет по одному матчу). Но поскольку у них всего один стол, а турнир может в любой момент прерваться, они хотят организовать его так, чтобы в любой момент количества сыгранных к этому моменту каждым из них матчей отличались не более, чем на 1. Докажите, что они смогут это сделать.

4. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 2 радиоактивны. Есть прибор, в который можно положить не более 10 образцов и прибор покажет, есть ли среди них радиоактивные. Как составить список из 20 проверок, проведя которые и проанализировав полученные результаты, можно указать не более четырёх образцов, среди которых будут оба радиоактивных? Менять список проверок в зависимости от получаемых результатов нельзя.

5. В классе 30 учеников. У каждого ученика ровно два друга и ровно два врага (вражда и дружба между учениками взаимны). В понедельник учитель рассадил учеников за 15 парт по двое так, что за каждой партой оказались двое врагов. После этого во вторник ученики пересели таким образом, что за каждой партой оказались двое друзей. Докажите, что учитель может выгнать из класса не более 15 учеников таким образом, чтобы оставшихся можно было разбить на две группы, в которых не было бы ни врагов, ни друзей.

6. На отрезке отмечено 5 точек. Петя измерил восемь из десяти попарных расстояний между ними. Могли ли у него получиться такие результаты: 1 см, 1 см, 2 см, 2 см, 3 см, 3 см, 3 см, 4 см?

7. Сумма 20 натуральных чисел равна 2018. Найдите наименьшее возможное значение суммы цифр всех этих 20 чисел.

8. Вася и Петя играют в такую игру. У каждого из них в кармане имеется набор из 50 карточек, на каждой из которых записано некоторое число. У Васи есть карточки с числами 1, 5, 6, 7, 9 (по 10 штук), у Пети карточки с числами 2, 3, 4, 8, 10 (по 10 штук). За один ход оба мальчика одновременно извлекают наудачу по одной карточке из кармана и сравнивают записанные на них числа. Тот игрок, у которого число больше, вычитает из него меньшее число, результат записывает на свою карточку вместо написанного на ней числа и кладёт эту карточку обратно в карман; карточка с меньшим числом выбрасывается. Если на обеих карточках одинаковые числа, то обе карточки выбрасываются. Вслед за этим делается новый ход и т.д. У кого закончились карточки — проиграл. Кто победит в этой игре?