МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1-2 МЕСТО

1. За круглым столом сидят $2n$ человек, у которых есть m печенек на всех. Любой человек, у которого есть хотя бы две печеньки, может съесть одну из них и дать одну печеньку соседу. Один из сидящих за столом — Вася. При каком наименьшем m люди, сидящие за столом, при любом начальном распределении печенек смогут добиться того, чтобы Вася получил хотя бы одну печеньку?

2. О треугольнике ABC известно, что $\angle ACB > 90°$, $\angle CBA > 45°$. На сторонах AC и AB соответственно нашлись точки P и T такие, что $PT = BC$ и $PT \perp BC$. Точки P_1 и T_1 на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $AP = CP_1$ и $AT = BT_1$. Докажите, что $\angle CBA - \angle P_1T_1A = 45°$.

3. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа, не превосходящие 2018, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1.

4. Назовем число n *сбалансированным*, если в последовательности $1, 2, \ldots, n$ каждая цифра встречается четное число раз. Докажите, что все сбалансированные числа четны.

5. В треугольнике ABC $AB = BC$. На продолжении отрезка CA за точку A выбрана точка D так, что $BD = 2BC$. Точки K и L на отрезках AC и AD соответственно таковы, что $AK = AL$ и $\angle DBL = \angle LBK$. Докажите, что $AB + AL \geq DL$.

6. Взаимно простые натуральные числа x и y таковы, что $x+3y^2$ — точный квадрат. Докажите, что x^2+9y^4 не является точным квадратом.

7. Дано натуральное n. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — все натуральные числа, взаимно простые с n и не превосходящие n. Докажите, что если $k > 8$, то $\sum_{i=1}^{k} \left|a_i - \frac{n}{2}\right| \leq \frac{n(k-4)}{2}$.

8. На прямой лежат n точек. Оказалось, что среди всех попарных расстояний между этими точками каждое встречается не более двух раз. Докажите, что имеется не менее $[n/2]$ расстояний, встречающихся ровно один раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА

1. За круглым столом сидят $2n$ человек, у которых есть m печенек на всех. Любой человек, у которого есть хотя бы две печеньки, может съесть одну из них и дать одну печеньку соседу. Один из сидящих за столом — Вася. При каком наименьшем m люди, сидящие за столом, при любом начальном распределении печенек смогут добиться того, чтобы Вася получил хотя бы одну печеньку?

2. О треугольнике ABC известно, что $\angle ACB > 90°$, $\angle CBA > 45°$. На сторонах AC и AB соответственно нашлись точки P и T такие, что $PT = BC$ и $PT \perp BC$. Точки P_1 и T_1 на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $AP = CP_1$ и $AT = BT_1$. Докажите, что $\angle CBA - \angle P_1T_1A = 45°$.

3. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа, не превосходящие 2018, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1.

4. Назовем число n *сбалансированным*, если в последовательности $1, 2, \ldots, n$ каждая цифра встречается четное число раз. Докажите, что все сбалансированные числа четны.

5. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Точки P, Q, R и S выбраны на отрезках AB, BC, CD и DA выбраны соответственно так, что четырехугольники $DPMR$ и $BQNS$ — прямоугольники. Докажите, что $PS+MN \geq QR$.

6. Докажите, что для любого натурального k и любого нечётного натурального m найдётся натуральное n такое, что $n^n - m$ кратно 2^k.

7. Дано натуральное n. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — все натуральные числа, взаимно простые с n и не превосходящие n. Докажите, что если $k > 8$, то $\sum_{i=1}^{k} |a_i - \frac{n}{2}| \leq \frac{n(k-4)}{2}$.

8. При каких натуральных n существуют n различных натуральных чисел, у которых натуральны среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1-2 МЕСТА

1. Сколькими способами можно выписать в строчку числа 1, 2, 3, …, n так, чтобы левее любого числа, кроме самого левого, можно было найти число, отличающееся от него на 1?

2. О треугольнике ABC известно, что $\angle ACB > 90°$, $\angle CBA > 45°$. На сторонах AC и AB соответственно нашлись точки P и T такие, что $PT = BC$ и $PT \perp BC$. Точки P_1 и T_1 на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $AP = CP_1$ и $AT = BT_1$. Докажите, что $\angle CBA - \angle P_1T_1A = 45°$.

3. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа 1, 2, 3, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1.

4. Назовем число n *сбалансированным*, если в последовательности 1, 2, …, n каждая цифра встречается четное число раз. Докажите, что все сбалансированные числа четны.

5. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Точки P, Q, R и S выбраны на отрезках AB, BC, CD и DA выбраны соответственно так, что четырехугольники $DPMR$ и $BQNS$ — прямоугольники. Докажите, что $PS+MN \geq QR$.

6. Докажите, что для любого натурального k и любого нечётного натурального m найдётся натуральное n такое, что $n^n - m$ кратно 2^k.

7. Различные натуральные числа x и y не являются точными квадратами. Докажите, что дробные части чисел $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ различны.

8. При каких натуральных n существуют n различных натуральных чисел, у которых натуральны среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА

1. Сколькими способами можно выписать в строчку числа 1, 2, 3, …, n так, чтобы левее любого числа, кроме самого левого, можно было найти число, отличающееся от него на 1?

2. О треугольнике ABC известно, что $\angle ACB > 90°$, $\angle CBA > 45°$. На сторонах AC и AB соответственно нашлись точки P и T такие, что $PT = BC$ и $PT \perp BC$. Точки P_1 и T_1 на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $AP = CP_1$ и $AT = BT_1$. Докажите, что $\angle CBA - \angle P_1T_1A = 45°$.

3. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа 1, 2, 3, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1.

4. Назовем число n *сбалансированным*, если в последовательности 1, 2, …, n каждая цифра встречается четное число раз. Докажите, что все сбалансированные числа четны.

5. Точки M и N — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки CN и DM пересекаются в точке K. Оказалось, что $KN = KD$. Докажите, что $KC = KM+MD$.

6. Существуют ли положительные числа a, b, c, x такие, что $a^2+b^2 = c^2$ и $(a+x)^2+(b+x)^2 = (c+x)^2$?

7. Различные натуральные числа x и y не являются точными квадратами. Докажите, что дробные части чисел $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ различны.

8. Существует ли 99 попарно различных натуральных чисел таких, что числа $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{99}}{99}$ и $\sqrt[99]{a_1a_2\ldots a_{99}}$ натуральны?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. Найдите все такие натуральные числа a и b, что число $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ является квадратом простого числа.

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a+c$ и $b+c$ — квадраты последовательных натуральных чисел. Докажите, что $ab+c$ и $ab+a+b+c$ — также квадраты последовательных натуральных чисел.

3. Даны нечетные числа a и b. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не превосходящих $(a+b)!$, можно выбрать таким образом, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ни на a, ни на b?

4. В вершинах связного графа можно так расставить натуральные числа, не превосходящие 2018, чтобы в вершинах, соединённых ребром, всегда стояли разные числа. Докажите, что это можно сделать так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь, состоящий из рёбер, у которых числа в концах отличаются ровно на 1 или ровно на 2017.

5. За круглым столом сидят 200 человек, у которых есть m печенек на всех. Любой человек, у которого есть хотя бы две печеньки, может съесть одну из них и дать одну печеньку соседу. Один из сидящих за столом — Вася. При каком наименьшем m люди, сидящие за столом, при любом начальном распределении печенек смогут добиться того, чтобы Вася получил хотя бы одну печеньку?

6. На длинном заборе написано слово из $3\cdot 2^{100}$ букв: *АБВАБВ…АБВ*. Аня и Боря играют в игру. Они делают ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно удалить либо все буквы, стоящие на чётных местах, либо все буквы, стоящие на нечётных местах (в слове, которое осталось к этому моменту). Боря перед началом игры сообщает Ане слово из трёх букв. Он выиграет, если это слово будет на доске после его 50-го хода. Может ли Боря добиться победы независимо от игры Ани?

7. Для положительных чисел a, b и c, докажите неравенство $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 3(a+b+c)$.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка N — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла ABC. Докажите, что $AB+AN > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Найдите все такие натуральные числа a и b, что число $\dfrac{a^2(b-a)}{b+a}$ является квадратом простого числа.

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a+c$ и $b+c$ — квадраты последовательных натуральных чисел. Докажите, что $ab+c$ и $ab+a+b+c$ — также квадраты последовательных натуральных чисел.

3. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не превосходящих 10 000 000, можно выбрать таким образом, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ни на 999, ни на 1001?

4. Даны четыре натуральных числа $a < b < c < d$, не превосходящих 1000 и таких, что $b+d$ делится на $a+c$ и $c+d$ делится на $a+b$. Докажите, что $a < 231$.

5. По окружности расставлено 100 точек, делящих эту окружность на 100 равных дуг. Можно ли эти точки разбить на пары таким образом, чтобы длины всех хорд, соединяющих точки в парах, были различны? (Длиной хорды будем называть количество точек деления, находящихся на меньшей из двух дуг, на которые хорда разделяет окружность. Если дуги равны, то на любой.)

6. На длинном заборе написано слово из $3\cdot 2^{100}$ букв: *АБВАБВ…АБВ*. Аня и Боря играют в игру. Они делают ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно удалить либо все буквы, стоящие на чётных местах, либо все буквы, стоящие на нечётных местах (в слове, которое осталось к этому моменту). Боря перед началом игры сообщает Ане слово из трёх букв. Он выиграет, если это слово будет на доске после его 50-го хода. Может ли Боря добиться победы независимо от игры Ани?

7. Для положительных чисел a, b и c, докажите неравенство $(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 3(a+b+c)$.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка N — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла ABC. Докажите, что $AB+AN > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Назовем число n *сбалансированным*, если в последовательности 1, 2, …, n каждая цифра встречается четное число раз. Докажите, что все сбалансированные числа четны.

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a+c$ и $b+c$ — квадраты последовательных натуральных чисел. Докажите, что $ab+c$ и $ab+a+b+c$ — также квадраты последовательных натуральных чисел.

3. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не превосходящих 1 000 000, можно выбрать таким образом, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ни на 3, ни на 8?

4. Даны четыре натуральных числа $a < b < c < d$, не превосходящих 1000 и таких, что $b+d$ делится на $a+c$ и $c+d$ делится на $a+b$. Докажите, что $a < 231$.

5. По окружности расставлено 100 точек, делящих эту окружность на 100 равных дуг. Можно ли эти точки разбить на пары таким образом, чтобы длины всех хорд, соединяющих точки в парах, были различны? (Длиной хорды будем называть количество точек деления, находящихся на меньшей из двух дуг, на которые хорда разделяет окружность. Если дуги равны, то на любой.)

6. На длинном заборе написано слово из $3\cdot 2^{100}$ букв: *АБВАБВ…АБВ*. Аня и Боря играют в игру. Они делают ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно удалить либо все буквы, стоящие на чётных местах, либо все буквы, стоящие на нечётных местах (в слове, которое осталось к этому моменту). Боря перед началом игры сообщает Ане слово из трёх букв. Он выиграет, если это слово будет на доске после его 50-го хода. Может ли Боря добиться победы независимо от игры Ани?

7. Для положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $a \le b \le c$ докажите неравенство $(-a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 3$.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка N — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла ABC. Докажите, что $AB+AN > BC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА

1. Назовем число n *сбалансированным*, если в последовательности 1, 2, …, n каждая цифра встречается четное число раз. Существует ли стозначное сбалансированное число?

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a+c$ и $b+c$ — квадраты последовательных натуральных чисел. Докажите, что $ab+c$ — квадрат натурального числа.

3. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать таким образом, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ни на 3, ни на 7?

4. Даны четыре натуральных числа $a < b < c < d$, не превосходящих 1000 и таких, что $b+d$ делится на $a+c$ и $c+d$ делится на $a+b$. Докажите, что $a+b < 666$.

5. По окружности расставлено 100 точек, делящих эту окружность на 100 равных дуг. Можно ли эти точки разбить на пары таким образом, чтобы длины всех хорд, соединяющих точки в парах, были различны? (Длиной хорды будем называть количество точек деления, находящихся на меньшей из двух дуг, на которые хорда разделяет окружность. Если дуги равны, то на любой.)

6. Петя и Вася делают ходы по очереди. Первым ходом Петя пишет на доске нечётную цифру, Вася приписывают справа к имеющемуся на доске числу чётную цифру, Петя опять нечётную, и т.д. После 10 ходов смотрят, делится ли полученное число на 16. Если делится, то выигрывает Вася, а если не делится, то Петя. Кто из игроков может выиграть независимо от игры другого?

7. Найдите все пары различных натуральных чисел a и b, что $a+\frac{66}{a}=b+\frac{66}{b}$.

8. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $BCKL$ и $ABDE$. Докажите, что отрезок DL в два раза больше медианы треугольника ABC, проведённой из вершины B.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. По окружности расставлено 100 точек, делящих эту окружность на 100 равных дуг. Можно ли эти точки разбить на пары таким образом, чтобы длины всех хорд, соединяющих точки в парах, были различны? (Длиной хорды будем называть количество точек деления, находящихся на меньшей из двух дуг, на которые хорда разделяет окружность. Если дуги равны, то на любой.)

2. Какое наибольшее натуральное значение может принимать выражение СЛОН/МУХА, если одинаковые буквы заменить одинаковыми цифрами, разные – разными цифрами, а О заменить на 0?

3. Дано натуральное число n такое, что если выписать по одному разу все натуральные числа от 1 до n, то каждая цифра будет встречаться чётное число раз среди всех выписанных цифр. Могут ли все цифры числа n быть различны?

4. На длинном заборе написано слово из $3\cdot2^{100}+1$ букв: АБВАБВ…АБВА. Аня и Боря играют в игру. Они делают ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно удалить либо все буквы, стоящие на чётных местах, либо все буквы, стоящие на нечётных местах (в слове, которое осталось к этому моменту). После первого хода Ани Боря сообщает ей слово из трёх букв. Он выиграет, если это слово будет на доске после его 50-го хода. Может ли Боря добиться победы независимо от игры Ани?

5. В Анчурии 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём из любого города можно проехать по дорогам в любой другой город. Анчурия состоит из трёх республик, причём никакие два города из одной и той же республики не соединены дорогой. Президент Анчурии хочет перераспределить города между республиками таким образом, чтобы по-прежнему никакие два города из одной республики не были соединены дорогой, и при этом можно было бы выбрать две республики и закрыть все дороги, ведущие из городов одной из них в города другой так, чтобы из любого города Анчурии можно было по-прежнему добраться до любого другого города по незакрытым дорогам. Докажите, что президент может так сделать.

6. Какое наибольшее количество ферзей можно поместить на доске 100×100, чтобы никакие 26 ферзей не стояли на одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали?

7. Даны четыре натуральных числа $a < b < c < d$, не превосходящих 1000 и таких, что $b+d$ делится на $a+c$ и $c+d$ делится на $a+b$. Докажите, что $a < 231$.

8. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел, не превосходящих 2018, можно выбрать таким образом, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ни на 8, ни на 13?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7-8 МЕСТА ПЕРВАЯ ЛИГА

1. По окружности расставлено 100 точек, делящих эту окружность на 100 равных дуг. Можно ли эти точки разбить на пары таким образом, чтобы длины всех хорд, соединяющих точки в парах, были различны? (Длиной хорды будем называть количество точек деления, находящихся на меньшей из двух дуг, на которые хорда разделяет окружность. Если дуги равны, то на любой.)

2. Какое наибольшее натуральное значение может принимать выражение СЛОН/МУХА, если одинаковые буквы заменить одинаковыми цифрами, разные – разными цифрами, а О заменить на 0?

3. Дано натуральное число n, обладающее таким свойством: если выписать по одному разу все натуральные числа от 1 до n, то каждая цифра будет встречаться чётное число раз среди всех выписанных цифр. Докажите, что число n чётно.

4. На длинном заборе написано слово из $3\cdot 2^{100}$ букв: *АБВАБВ…АБВ*. Аня и Боря играют в игру. Они делают ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно удалить либо все буквы, стоящие на чётных местах, либо все буквы, стоящие на нечётных местах (в слове, которое осталось к этому моменту). Боря перед началом игры сообщает Ане слово из трёх букв. Он выиграет, если это слово будет на доске после его 50-го хода. Может ли Боря добиться победы независимо от игры Ани?

5. В ряд лежат 100 монет орлом вверх. За один ход можно перевернуть три монеты: две рядом лежащие и монету, расположенную через одну от них справа. Сколько разных комбинаций расположения орлов и решек можно получить, делая такие ходы?

6. Какое наибольшее количество ферзей можно поместить на доске 100×100, чтобы никакие 26 ферзей не стояли на одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали?

7. Даны четыре натуральных числа $a < b < c < d$, не превосходящих 1000 и таких, что $b+d$ делится на $a+c$ и $c+d$ делится на $a+b$. Докажите, что $a < 231$.

8. Можно ли выбрать более 460 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, таким образом, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ни на 5, ни на 8?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На доске написано число 2018. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Каждым свои ходом Петя приписывает справа к имеющемуся на доске числу нечётную цифру, а Вася своим — чётную. После десятого хода Васи мальчики вычисляют, на какую степень двойки делится полученное число. Если степень больше третьей, выигрывает Вася, если меньше третьей — Петя, а если ровно третья, то ничья. Может ли один из игроков выиграть независимо от игры соперника?

2. Какое наибольшее натуральное значение может принимать выражение СЛОН/МУХА, если одинаковые буквы заменить одинаковыми цифрами, разные — разными цифрами, а О заменить на 0?

3. Дано натуральное число n, обладающее таким свойством: если выписать по одному разу все натуральные числа от 1 до n, то каждая цифра будет встречаться чётное число раз среди всех выписанных цифр. Докажите, что число n чётно.

4. В ряд лежат 100 монет орлом вверх. За один ход можно перевернуть три монеты: две рядом лежащие и монету, расположенную через одну от них справа. Сколько разных комбинаций расположения орлов и решек можно получить, делая такие ходы?

5. Какое наибольшее количество ферзей можно поместить на шахматной доске, чтобы никакие три ферзя не стояли на одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали?

6. Куб $N\times N\times N$ назовём *ущербным*, если из него удалён один из единичных кубиков. Докажите, что любой ущербный куб $4\times4\times4$ можно сложить из ущербных кубиков $2\times2\times2$.

7. Даны четыре натуральных числа $a < b < c < d$, не превосходящих 1000 и таких, что $b+d$ делится на $a+c$ и $c+d$ делится на $a+b$. Докажите, что $a+b < 666$.

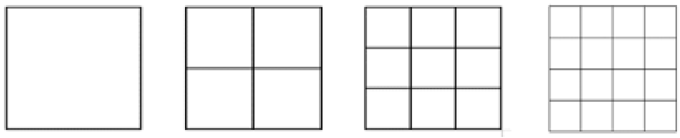
8. Можно ли выбрать более 460 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, таким образом, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ни на 5, ни на 8?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На доске написано число 2018. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. Каждым свои ходом Петя приписывает справа к имеющемуся на доске числу нечётную цифру, а Вася своим — чётную. После десятого хода Васи мальчики вычисляют, на какую степень двойки делится полученное число. Если степень больше третьей, выигрывает Вася, если меньше третьей — Петя, а если ровно третья, то ничья. Может ли один из игроков выиграть независимо от игры соперника?

2. Архитектор строит башню из кубиков. В основание он положил кубик с ребром 1 м, на него 4 кубика с ребром 1/2 м, на них — 9 кубиков с ребром 1/3 м, потом — 16 кубиков с ребром 1/4 м и т.д. (количество кубиков в очередном слое — квадрат очередного натурального числа, первые четыре слоя показаны на картинке справа). Достигнет ли высота башни Архитектора 5 м после того, как он уложит 1000 слоёв?



3. Какое наибольшее натуральное значение может принимать выражение СЛОН/МУХА, если одинаковые буквы заменить одинаковыми цифрами, разные — разными цифрами, а О заменить на 0?

4. В ряд лежат 100 монет орлом вверх. За один ход можно перевернуть три монеты: две рядом лежащие и монету, расположенную через одну от них справа. Сколько разных комбинаций расположения орлов и решек можно получить, делая такие ходы?

5. Какое наибольшее количество ферзей можно поместить на шахматной доске, чтобы никакие три ферзя не стояли на одной вертикали, одной горизонтали или одной диагонали?

6. Куб $N\times N\times N$ назовём *ущербным*, если из него удалён один из единичных кубиков. Докажите, что любой ущербный куб 4×4×4 можно сложить из ущербных кубиков 2×2×2.

7. В 20** году одну из групп в Лиге чемпионов образовали команды "Шинник", "Челси", "Бавария" и "Реал". После того, как каждая команда сыграла по одному разу с каждой из остальных, турнирные показатели выглядели так: "Шинник" — 1 победа, 2 ничьи, разность забитых и пропущенных мячей 3–1; "Челси" — 1 победа, 1 ничья, 1 поражение, разность мячей 3–1; "Бавария" — 1 победа, 1 ничья, 1 поражение, разность мячей 1–3; "Реал" — 1 победа, 2 поражения, разность мячей 2–4. Определите результат матча "Шинник" — "Реал".

8. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он побывал в государстве, в котором 10 городов. Из каждого выходят прямолинейные дороги ровно в 4 других города.

При этом, никакие две дороги не пересекаются. Могут ли слова барона быть правдой?