МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Существует ли натуральное число, большее 1, которое можно представить в виде n^{n^k} с натуральными n и k по крайней мере 2018 способами?

2. Пусть x и y — положительные вещественные числа, причём $x+y \leq 3$. Докажите неравенство $\frac{y+2x}{xy}+\frac{4y-3x}{4} \geq 2$.

3. Рахбар и Зандре играют на клетчатой доске 2017×2017. В начале Рахбар объявляет некоторые клетки доски харамом: это значит, что на них ничего нельзя класть. После этого Рахбар и Зандре по очереди кладут на доску по одной монете, начинает Зандре. Запрещается класть монету на клетку, объявленную харамом, или находящуюся в строке или столбце, где уже лежит монета. Проигрывает не имеющий хода. Какое наименьшее количество клеток Рахбар может объявить харамом, чтобы при этом он имел возможность выиграть независимо от действий Зандре?

4. В стране 300 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 296 городов. При каком наибольшем k в стране обязательно можно выбрать k городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой?

5. На плоскости отмечены $2n+1$ точек, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности и никакие три — на одной прямой. Окружность называется *уполовинивающей*, если она проходит через три отмеченных точки и внутри неё лежит ровно $n-1$ отмеченная точка. Каким может быть количество уполовинивающих окружностей?

6. Точка D — середина стороны BC остроугольного треугольника ABC. Точки E на стороне AC и F на стороне AB таковы, что $DE = DF$ и $\angle EDF = \angle BAC$. Докажите, что $DE \geq (AB+AC)/4$.

7. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую CM, а точка N — середина CP. Биссектриса угла DAN пересекает прямую DP в точке Q. Докажите, что четырёхугольник $BMQN$ — параллелограмм.

8. Натуральное число n назовём *няшным*, если для любой пары натуральных чисел a и b такой, что $a+b = n$ хотя бы одно из чисел a/b и b/a представляется в виде конечной десятичной дроби. Конечно или бесконечно множество няшных чисел?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существует ли натуральное число, большее 1, которое можно представить в виде n^{n^k} с натуральными n и k по крайней мере 2018 способами?

2. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых число $(ab)^2-4(a+b)$ является квадратом простого числа.

3. Рахбар и Зандре играют на клетчатой доске 2017×2017. В начале Рахбар объявляет некоторые клетки доски харамом: это значит, что на них ничего нельзя класть. После этого Рахбар и Зандре по очереди кладут на доску по одной монете, начинает Зандре. Запрещается класть монету на клетку, объявленную харамом, или находящуюся в строке или столбце, где уже лежит монета. Проигрывает не имеющий хода. Какое наименьшее количество клеток Рахбар может объявить харамом, чтобы при этом он имел возможность выиграть независимо от действий Зандре?

4. В стране 300 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 296 городов. При каком наибольшем k в стране обязательно можно выбрать k городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой?

5. У клетчатого квадрата 11×11 отметили центры всех клеток и 81 из них покрасили в красный цвет. Докажите, что есть такие три красные точки, что одна из них является серединой отрезка с концами в двух других.

6. Точка D — середина стороны BC остроугольного треугольника ABC. Точки E на стороне AC и F на стороне AB таковы, что $DE = DF$ и $\angle EDF = \angle BAC$. Докажите, что $DE \geq (AB+AC)/4$.

7. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую CM, а точка N — середина CP. Биссектриса угла DAN пересекает прямую DP в точке Q. Докажите, что четырёхугольник $BMQN$ — параллелограмм.

8. Рассмотрим число $3^a+3^b+3^c$ при натуральных a, b и c. Докажите, что если оно является квадратом натурального числа, то $a = b = c$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Набор натуральных чисел называется *хорошим*, если ни одно число из этого набора не делит сумму оставшихся чисел. Может ли в хорошем наборе чисел, меньших 1000, быть не меньше 500 чисел?

2. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых число $(ab)^2-4(a+b)$ является квадратом простого числа.

3. Рахбар и Зандре играют на клетчатой доске 2017×2017. В начале Рахбар объявляет некоторые клетки доски харамом: это значит, что на них ничего нельзя класть. После этого Рахбар и Зандре по очереди кладут на доску по одной монете, начинает Зандре. Запрещается класть монету на клетку, объявленную харамом, или находящуюся в строке или столбце, где уже лежит монета. Проигрывает не имеющий хода. Какое наименьшее количество клеток Рахбар может объявить харамом, чтобы при этом он имел возможность выиграть независимо от действий Зандре?

4. В стране 2018 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 2014 городов. Докажите, что можно выбрать 666 городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой.

5. У клетчатого квадрата 11×11 отметили центры всех клеток и 81 из них покрасили в красный цвет. Докажите, что есть такие три красные точки, что одна из них является серединой отрезка с концами в двух других.

6. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 120°. Точка M — середина стороны AB. Точка P симметрична точке M относительно стороны BC. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Прямые QM и AC пересекаются в точке R. Докажите, что $MR = AP$.

7. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую CM, а точка N — середина CP. Биссектриса угла DAN пересекает прямую DP в точке Q. Докажите, что четырёхугольник $BMQN$ — параллелограмм.

8. Рассмотрим число $3^a+3^b+3^c$ при натуральных a, b и c. Докажите, что если оно является квадратом натурального числа, то $a = b = c$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. У клетчатого квадрата 11×11 отметили центры всех клеток и 81 из них покрасили в красный цвет. Докажите, что есть такие три красные точки, что одна из них является серединой отрезка с концами в двух других.

2. Рассмотрим число $3^a+3^b+3^c$ при натуральных a, b и c. Докажите, что если оно является квадратом натурального числа, то $a = b = c$.

3. В стране 300 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 296 городов. При каком наибольшем k в стране обязательно можно выбрать k городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой?

4. Числа a, b и c удовлетворяют равенствам $(a+b)(b+c) = c–a–1$ и $(a+b)(a+c) = b–c–1$. Найдите все возможные значения величины $(a+c)(b+c)$.

5. Вася придумал 100 различных натуральных чисел и выписал на доску все 4950 попарных сумм этих чисел. Какое наибольшее количество степеней пятерки может быть среди выписанных Васей чисел?

6. У натурального числа n, имеющего не меньше пяти делителей, выписали все делители: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{k–1} < d_k = n$. Оказалось, что d_1+d_2 и $d_3+d_4+...+d_{k–1}$ также являются делителями числа n. Чему может быть равно n.

7. Числа x, y и z удовлетворяют неравенству $(x+y+z)xyz \geq 1$. Докажите, что $(x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3$.

8. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 120°. Точка M — середина стороны AB. Точка P симметрична точке M относительно стороны BC. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Прямые QM и AC пересекаются в точке R. Докажите, что $MR = AP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. У клетчатого квадрата 11×11 отметили центры всех клеток и 81 из них покрасили в красный цвет. Докажите, что есть такие три красные точки, что одна из них является серединой отрезка с концами в двух других.

2. Рассмотрим число $3^a+3^b+3^c$ при натуральных a, b и c. Докажите, что если оно является квадратом натурального числа, то $a = b = c$.

3. В стране 1000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 996 городов. Докажите, что можно так выбрать 300 городов, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой?

4. Числа a, b и c удовлетворяют равенствам $a(b–c) = a^2bc+1$ и $b(c–a) = ab^2c+1$. Найдите все возможные значения величины abc^2.

5. Вася придумал 100 различных натуральных чисел и выписал на доску все 4950 попарных сумм этих чисел. Какое наибольшее количество степеней пятерки может быть среди выписанных Васей чисел?

6. У натурального числа n, имеющего не меньше пяти делителей, выписали все делители: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{k–1} < d_k = n$. Оказалось, что d_1+d_2 и $d_3+d_4+...+d_{k–1}$ также являются делителями числа n. Чему может быть равно n.

7. Числа x, y и z удовлетворяют неравенству $(x+y+z)xyz \geq 1$. Докажите, что $(x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3$.

8. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 120°. Точка M — середина стороны AB. Точка P симметрична точке M относительно стороны BC. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Прямые QM и AC пересекаются в точке R. Докажите, что $MR = AP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Набор различных натуральных чисел называется *хорошим*, если ни одно число из этого набора не делит сумму оставшихся чисел. Может ли в хорошем наборе чисел, меньших 100, быть не меньше 50 чисел?

2. Докажите, что число 3^a+9^b+1 при натуральных a и b не может быть квадратом натурального числа.

3. От двух кусков сплавов с разным содержанием свинца массой 6 кг и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого сплава, после чего процентное содержание свинца в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы отрезанных кусков?

4. Петр Васильевич и Василиса Петровна женаты, и у них двое детей. Сегодня Петр Васильевич заметил, что два года назад его возраст отличался от произведения возрастов его детей на возраст жены. А Василиса Петровна заметила, что через два года это тоже будет верно. На сколько отличается возраст Петра Васильевича от произведения возрастов его детей сегодня? (Возраст они измеряли натуральным числом лет.)

5. Спекулянт купил билет на финал и билет на полуфинал ЧМ суммарно за 21000 рублей. Билет на финал он продал в полтора раза дороже, а на полуфинал – в 4/3 раза дороже. За сколько спекулянт купил билет на финал, если его прибыль составила 9000 рублей?

6. У натурального числа n есть хотя бы четыре делителя. Оказалось, что сумма двух самых маленьких из них — тоже делитель n. Докажите, что и сумма трех самых маленьких делителей n является делителем n.

7. На доске написано число 100. Вася за одну операцию может прибавить к числу любую его цифру. Докажите, что за несколько операций Вася сможет получить любое натуральное число, большее 100.

8. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 120°. Точка M — середина стороны AB. Точка P симметрична точке M относительно стороны BC. Отрезки AP и BC пересекаются в точке Q. Найдите угол BQP.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. У натурального числа n ровно 6 натуральных делителей. Оказалось, что сумма двух самых маленьких из них тоже делитель n, а сумма четырёх самых больших делителей равна $2n$. Чему может быть равно n?

2. Шестнадцать студентов сдавали экзамен из четырех вопросов, на каждый из которых надо было дать ответ «да» или «нет», причем все дали разные наборы ответов. Двенадцать из них оказались недобросовестными и списали друг с друга по циклу, причем каждый следующий неправильно переписал у предыдущего ответ ровно на один вопрос. Оставшиеся четверо оказались добросовестными: никакие две из их работ не отличаются ровно в одном вопросе. Возможно ли такое?

3. Вася придумал 100 различных натуральных чисел и выписал на доску все 4950 попарных сумм этих чисел. Какое наибольшее количество степеней тройки может быть среди выписанных Васей чисел?

4. Рассмотрим число $3^a+3^b+3^c$ при натуральных a, b и c. Докажите, что если оно является квадратом натурального числа, то $a = b = c$.

5. На доске написано число 100. Вася за одну операцию может прибавить к числу любую его цифру. Докажите, что за несколько операций Вася сможет получить любое натуральное число, большее 100.

6. В стране 300 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 296 городов. При каком наибольшем k в стране обязательно можно выбрать k городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой?

7. В квадрате 11×11 отмечено 82 клетки. Докажите, что найдётся прямоугольник 1×5, у которого обе крайние и центральная клетки отмечены.

8. Петр Васильевич и Василиса Петровна женаты, и у них двое детей. Сегодня Петр Васильевич заметил, что два года назад его возраст отличался от произведения возрастов его детей на возраст жены. А Василиса Петровна заметила, что через два года это тоже будет верно. На сколько отличается возраст Петра Васильевича от произведения возрастов его детей сегодня? (Возраст они измеряли натуральным числом лет.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. У натурального числа n ровно 6 натуральных делителей. Оказалось, что сумма двух самых маленьких из них тоже делитель n, а сумма четырёх самых больших делителей равна $2n$. Чему может быть равно n?

2. Шестнадцать студентов сдавали экзамен из четырех вопросов, на каждый из которых надо было дать ответ «да» или «нет», причем все дали разные наборы ответов. Двенадцать из них оказались недобросовестными и списали друг с друга по циклу, причем каждый следующий неправильно переписал у предыдущего ответ ровно на один вопрос. Оставшиеся четверо оказались добросовестными: никакие две из их работ не отличаются ровно в одном вопросе. Возможно ли такое?

3. Вася придумал 100 различных натуральных чисел и выписал на доску все 4950 попарных сумм этих чисел. Какое наибольшее количество степеней тройки может быть среди выписанных Васей чисел?

4. Докажите, что число 3^a+9^b+1 при натуральных a и b не может быть квадратом натурального числа.

5. На доске написано число 100. Вася за одну операцию может прибавить к числу любую его цифру. Докажите, что за несколько операций Вася сможет получить любое натуральное число, большее 100.

6. В стране 2018 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 2014 городов. Докажите, что можно выбрать 666 городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой.

7. В квадрате 11×11 отмечено 82 клетки. Докажите, что найдётся прямоугольник 1×5, у которого обе крайние и центральная клетки отмечены.

8. Петр Васильевич и Василиса Петровна женаты, и у них двое детей. Сегодня Петр Васильевич заметил, что два года назад его возраст отличался от произведения возрастов его детей на возраст жены. А Василиса Петровна заметила, что через два года это тоже будет верно. На сколько отличается возраст Петра Васильевича от произведения возрастов его детей сегодня? (Возраст они измеряли натуральным числом лет.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Сумма двух самых маленьких делителей натурального числа n является его делителем. Докажите, что и сумма трех самых маленьких делителей n является делителем n.

2. Восемь студентов сдавали экзамен из трех вопросов, на каждый из которых надо было дать ответ «да» или «нет», причем все дали разные наборы ответов. Шестеро из них оказались недобросовестными и списали друг с друга по циклу, причем каждый следующий неправильно переписал у предыдущего ответ ровно на один вопрос. Оставшиеся двое оказались добросовестными: их работы отличаются хотя бы в двух вопросах. Возможно ли такое?

3. Спекулянт купил билет на финал и билет на полуфинал ЧМ суммарно за 21000 рублей. Билет на финал он продал в полтора раза дороже, а на полуфинал – в 4/3 раза дороже. За сколько спекулянт купил билет на финал, если его прибыль составила 9000 рублей?

4. При каких натуральных n число 3^n-8 может быть квадратом натурального числа?

5. На доске написано число 100. Вася за одну операцию может прибавить к числу любую его цифру. Докажите, что за несколько операций Вася сможет получить любое натуральное число, большее 100.

6. В стране 2018 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 2014 городов. Докажите, что можно выбрать 666 городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой.

7. В квадрате 11×11 отмечено 78 клеток. Докажите, что найдётся клетчатый прямоугольник, одна из сторон которого равна 1, а другая нечетна, у которого обе крайние и центральная клетки отмечены.

8. Петр Васильевич и Василиса Петровна женаты, и у них двое детей. Сегодня Петр Васильевич заметил, что два года назад его возраст отличался от произведения возрастов его детей на возраст жены. А Василиса Петровна заметила, что через два года это тоже будет верно. На сколько отличается возраст Петра Васильевича от произведения возрастов его детей сегодня? (Возраст они измеряли натуральным числом лет.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2018

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Набор различных натуральных чисел называется *хорошим*, если ни одно число из этого набора не делит сумму оставшихся чисел. Может ли в хорошем наборе чисел, меньших 100, быть не меньше 50 чисел?

2. На доске написано число 1000. Вася за одну операцию может прибавить к числу любую его цифру. Докажите, что за несколько операций Вася сможет получить любое натуральное число от 1000 до 2018.

3. Вася выписал n идущих подряд натуральных чисел. Оказалось, что ровно половина из них — простые. Найдите все возможные n.

4. Спекулянт купил билет на финал и билет на полуфинал ЧМ суммарно за 21000 рублей. Билет на финал он продал в полтора раза дороже, а на полуфинал – в 4/3 раза дороже. За сколько спекулянт купил билет на финал, если его прибыль составила 9000 рублей?

5. 27 студентов сдавали экзамен из трёх вопросов, ответы на которые могли быть Да/Нет/Не знаю. Все дали разные наборы ответов. Каждый списал ответ у предыдущего по цепочке, причем каждый следующий неправильно переписал у предыдущего ответ ровно на один вопрос. Возможно ли, что у первого и последнего отличие оказалось тоже в ответе ровно на один вопрос?

6. В стране 2018 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Оказалось, что для любой четверки городов от любого города этой четверки можно добраться до любого другого города этой четверки, не проезжая через оставшиеся 2014 городов. Докажите, что можно выбрать 666 городов так, чтобы любые два выбранных города были соединены дорогой.

7. Петр Васильевич и Василиса Петровна женаты, и у них двое детей. Сегодня Петр Васильевич заметил, что два года назад его возраст был больше произведения возрастов его детей на возраст жены. А Василиса Петровна заметила, что через два года возраст мужа будет меньше произведения возрастов их детей на её возраст. На сколько отличается возраст Петра Васильевича от произведения возрастов его детей сегодня? (Возраст они измеряли натуральным числом лет.)

8. Какое наименьшее количество коней могут побить все клетки доски 7×7, включая клетки, на которых стоят кони? (Сам конь клетку, на которой стоит, не бьёт.)