МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. В кошельке лежит 1000 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет — 300, и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.

2. На плоскости дано несколько одинаковых параллельно расположенных квадратов, которые разбивают плоскость на несколько частей. Докажите, что в каждую из частей можно поставить положительное число таким образом, чтобы сумма чисел внутри любого из исходных квадратов была одна и та же.

3. На столе лежит 2018 камней. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. При своем ходе игрок должен взять со стола натуральное количество камней, не превосходящее 100, но при этом Петя четное, а Вася нечетное. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

4. *Уголком* назовём фигуру, которая получается вырезанием из квадрата $n\times n$ квадрата $(n-1)\times(n-1)$ при любом натуральном n (одна клеточка — тоже уголок). На какое наименьшее количество уголков можно разрезать квадрат 100×100?

5. Дима составил 14-значное число, в котором каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 используется ровно дважды. Серёжа составил 14-значное число, в котором каждая из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 используется ровно дважды. Может ли Серёжино число делиться на Димино?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трех чисел быть целым числом?

2. На плоскости дано несколько одинаковых параллельно расположенных квадратов, которые разбивают плоскость на несколько частей. Докажите, что в каждую из частей можно поставить положительное число таким образом, чтобы сумма чисел внутри любого из исходных квадратов была одна и та же.

3. Числа x, y и z удовлетворяют равенству $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Докажите, что одно из этих чисел равно единице.

4. Существует ли такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1000000}$, что при любых различных i и j, меньших 1000000, числа a_i+j и a_j+i взаимно просты?

5. В стране 1500 деревень, некоторые пары деревень соединены дорогами. Известно, что между любыми двумя деревнями существует единственный путь, проходящий по этим дорогам. Докажите, что 1000 деревень можно назвать городами так, чтобы из любого населенного пункта (как из деревни, так и из города) выходила хотя бы одна дорога в город.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трех чисел быть целым числом?

2. На столе лежит 2018 камней. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. При своем ходе игрок должен взять со стола натуральное количество камней, не превосходящее 100, но при этом Петя четное, а Вася нечетное. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., что при любых различных i и j числа a_i+j и a_j+i взаимно просты?

4. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении основания AC за точку C — точка E, причем $AD = DE$. Докажите, что площадь треугольника ABD равна площади треугольника BCE.

5. Некоторые из 2017 городов страны соединены прямыми двусторонними авиарейсами так, что из каждого города можно добраться до любого другого. Правительство хочет объявить k городов *стратегически значимыми* так, чтобы из любого города (включая стратегически значимые), совершив ровно один перелет, можно было попасть в стратегически значимый город. При каком наименьшем k это наверняка можно будет сделать?

Решения задач личной олимпиады 6 класса

Задача 1. *В кошельке лежит 1000 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет — 300, и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество.*

Ответ. 140. Решение. Пусть у нас x, y и z рублёвых, двухрублёвых и пятирублёвых монет соответственно. По условию $x+y+z = 300$, $x+2y+5z = 1000$. Допустим, $x = y$. Тогда $z = 300–2x$, откуда $x+2x = 1000–5(300–2x)$, то есть $7x = 500$, что невозможно, так как 500 не делится на 7. Допустим, $x = z$. Тогда $y = 300–2x$, откуда $x+5x = 1000–2(300–2x)$, то есть $2x = 400$, $x = 200 = z$. Но тогда монет больше 300, что противоречит условию задачи. Значит, $y = z$. Тогда $x = 300–2y$, откуда $300–2y = 1000–2y–5y$, то есть $5y = 700$ и $y = z = 140$, $x = 20$. Проверка показывает, что найденные значения x, y и z подходят.

Задача 2. *На плоскости дано несколько одинаковых параллельно расположенных квадратов, которые разбивают плоскость на несколько частей. Докажите, что в каждую из частей можно поставить положительное число таким образом, чтобы сумма чисел внутри любого из исходных квадратов была одна и та же.*

Решение. Достаточно в каждой ограниченной области написать её площадь, а в неограниченной области вне квадратов — любое положительное число.

Задача 3. *На столе лежит 2018 камней. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. При своем ходе игрок должен взять со стола натуральное количество камней, не превосходящее 100, но при этом Петя четное, а Вася нечетное. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Вася. Решение. Пусть Вася каждый раз после того, как Петя взял n камней, берет $101-n$ камней. Тогда после 19 пар ходов на столе останется 2018–1919 = 99 камней, и какое бы четное число камней не взял Петя, Вася возьмет все оставшиеся камни (которых нечетное число) и победит.

Задача 4. ***Уголком** назовём фигуру, которая получается вырезанием из квадрата $n\times n$ квадрата $(n-1)\times(n-1)$ при любом натуральном n (одна клеточка — тоже уголок). На какое наименьшее количество уголков можно разрезать квадрат 100×100?*

Ответ. На 100. Решение. *Пример* на 100 уголков легко строится (например, из последовательно вложенных уголков со сторонами 1, 2, …, 100). *Оценка*. Если уголков меньше 100, то есть горизонталь, на которой не лежит ни одной горизонтальной части уголка. Но тогда в ней лежит не более одной клетки каждого из уголков, и уголков должно быть не меньше 100 — противоречие.

Задача 5. *Дима составил 14-значное число, в котором каждая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 используется ровно дважды. Серёжа составил 14-значное число, в котором каждая из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 используется ровно дважды. Может ли Серёжино число делиться на Димино?*

Ответ. Не может. Решение. Сумма цифр Диминого числа — 56, Серёжиного — 70. Значит, остаток от деления на 9 Диминого числа равен 2, а Серёжиного — 7. Чтобы из числа с остатком 2 получить число с остатком 7, его надо умножить на число с остатком 8, то есть минимум на 8. Но уже 11200000000000×8 больше, чем 89000000000000, а Серёжино число меньше, чем 89000000000000.

Решения задач личной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трех чисел быть целым числом?*

Ответ. Не может. Решение. Если суммы $a+b$ и $a+c$ целые, то целым числом является и разность $(a+b)-(a+c) = b-c$, а с ней и число $(b-c)+(b+c) = 2b$. Так как число b — нецелое, то $b = (2k+1)/2$, где k — целое. Аналогично $a = (2m+1)/2$, $c = (2n+1)/2$, где m и n — целые. Но тогда abc равно дроби с нечётным числителем и знаменателем 8, которая, очевидно, не является целым числом.

Задача 2. *На плоскости дано несколько одинаковых параллельно расположенных квадратов, которые разбивают плоскость на несколько частей. Докажите, что в каждую из частей можно поставить положительное число таким образом, чтобы сумма чисел внутри любого из исходных квадратов была одна и та же.*

Решение. Достаточно в каждой ограниченной области написать её площадь, а в неограниченной области вне квадратов — любое положительное число.

Задача 3. *Числа x, y и z удовлетворяют равенству* $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. *Докажите, что одно из этих чисел равно единице.*

Решение. $(x-1)(y-1)(z-1) = (xyz-(xy+yz+xz))+(x+y+z-1)$. Вторая разность в скобках по условию равна 0. Первая — тоже, так как $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+xz}{xyz}=1$, откуда $xyz = xy+yz+xz$. Таким образом, $(x-1)(y-1)(z-1) = 0$, откуда и вытекает утверждение задачи.

Задача 4. *Существует ли такие натуральные числа a_1, a_2, …, $a_{1000000}$, что при любых различных i и j, меньших 1000000, числа a_i+j и a_j+i взаимно просты?*

Ответ. Нет. Решение. Пусть i и j нечётны. Тогда хотя бы одно из чисел a_i и a_j четно, иначе обе суммы a_i+j и a_j+i четны. Поэтому все числа a_i с нечетными номерами, кроме, может быть, одного, четны. Пусть i нечетно, a_i четно, j четно. Тогда a_i+j четно, и потому a_j+i должно быть нечетно, то есть a_j четно. Но тогда при любых четных i и j обе суммы a_i+j и a_j+i четны, и потому не взаимно просты.

Задача 5. *В стране 1500 деревень, некоторые пары деревень соединены дорогами. Известно, что между любыми двумя деревнями существует единственный путь, проходящий по этим дорогам. Докажите, что 1000 деревень можно назвать городами так, чтобы из любого населенного пункта (как из деревни, так и из города) выходила хотя бы одна дорога в город.*

Решение. Рассмотрим граф деревень и дорог. Это дерево. Докажем, что в таком дереве с $n \ge 3$ вершинами можно выделить несколько деревень и объявить некоторые из них городами так, что каждая выделенная вершина будет смежна с выделенным городом, доля городов среди выделенных будет не больше 2/3 и после удаления выделенных вершин граф останется связным.

Рассмотрим две вершины A и B, путь между которыми содержит наибольшее количество рёбер. Пусть X — последняя перед B вершина на пути из A в B. Очевидно, B соединена только с X. Если X соединена с какими-то висячими вершинами, кроме B, выделим X и все смежные с ней висячие вершины, а городами среди них объявим X и B. Очевидно, удаление этих вершин не нарушит связности графа, и города составляют среди них не более 2/3.

Пусть B — единственная висячая вершина, соединённая с X. Рассмотрим последнюю вершину Y на пути из A в X. Если все отличные от B вершины, путь из которых в A проходит через Y, смежны с Y, можно выделить эти вершины, Y, X и B, а городами среди них объявить X и Y.

Наконец, разберём случай, когда путь из A в Y можно продолжить несколькими путями YX_iB_i длины 2 (путями большей длины продолжить не удастся в силу максимальности выбранного выше пути из A в B). Пусть таких путей k. Тогда нужно выделить все вершины этих путей и все висячие вершины, смежные с Y, а городами объявить Y и все X_i. При этом из графа будет удалено не менее $2k+1$ вершин, из которых $k+1$ — города, а $\frac{k+1}{2k+1}\le\frac{2}{3}$.

Будем продолжать эту деятельность, пока от графа не останется огрызок, содержащий не более двух вершин. Если вершин не осталось вообще, то мы объявили городами не более $2\cdot1500/3 = 1000$ деревень, и процесс завершился. Если осталась одна вершина, то на предыдущем шаге нашего алгоритма она называлась A и была соединена с вершиной X или Y, которую объявили городом, значит, для нее условие выполнено, и городами было объявлено не более $[2\cdot1499/3] = 999$ вершин. Если же осталось две вершины, то, во-первых, они смежны, так как граф связности не теряет; во-вторых, одна из этих двух вершин была соединена с вершиной X или Y, объявленной городом на предыдущем шаге. Поэтому достаточно объявить городом лишь одну из этих двух вершин, чтобы условие выполнялось. Значит, в этом случае городами будет объявлено не более $[2\cdot 1498/3]+1 = 999$ вершин. Если городов в итоге получилось меньше 1000, дополним их до 1000 любыми деревнями.

Решения задач личной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трех чисел быть целым числом?*

Ответ. Не может. Решение. Пусть даны числа a, b, c, удовлетворяющие условию задачи. Если суммы $a+b$ и $a+c$ целые, то целым числом является и разность $(a+b)–(a+c) = b–c$, а с ней и число $(b–c)+(b+c) = 2b$. Так как число b — нецелое, то $b = (2k+1)/2$, где k — целое. Аналогично $a = (2m+1)/2$, $c = (2n+1)/2$, где m и n — целые. Но тогда abc равно дроби с нечётным числителем и знаменателем 8, которая, очевидно, не является целым числом.

Задача 2. *На столе лежит 2018 камней. Петя и Вася делают ходы по очереди, начинает Петя. При своем ходе игрок должен взять со стола натуральное количество камней, не превосходящее 100, но при этом Петя четное, а Вася нечетное. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Вася. Решение. Пусть Вася каждый раз после того, как Петя взял n камней, берет $101–n$ камней. Тогда после 19 пар ходов на столе останется 2018–1919 = 99 камней, и какое бы четное число камней не взял Петя, Вася возьмет все оставшиеся камни (которых нечетное число) и победит.

Задача 3. *Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., что при любых различных i и j числа a_i+j и a_j+i взаимно просты?*

Ответ. Нет. Решение. Пусть i и j нечётны. Тогда хотя бы одно из чисел a_i и a_j четно, иначе обе суммы a_i+j и a_j+i четны. Поэтому все члены последовательности с нечетными номерами, кроме, может быть, одного, четны. Пусть i нечетно, a_i четно, j четно. Тогда a_i+j четно, и потому a_j+i должно быть нечетно, то есть a_j четно. Но тогда при любых четных i и j обе суммы a_i+j и a_j+i четны, и потому не взаимно просты.

Задача 4. *На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении основания AC за точку C — точка E, причем AD = DE. Докажите, что площадь треугольника ABD равна площади треугольника BCE.*

Решение. Пусть $\angle DAC = \angle DEC = x$, а $\angle BAD = y$. Тогда $\angle BAC = \angle BCA = x+y$, откуда по теореме о внешнем угле треугольника $\angle CDE = y$. Опустим из точки E перпендикуляр EG на прямую BC, а из точки D — перпендикуляр DF на прямую AB. Прямоугольные треугольники EGD и DFA равны по гипотенузе ($AD = DE$) и острому углу ($\angle GDE = \angle BAD = y$), откуда $EG = DF$. Осталось заметить, что EG и DF — это высоты треугольников ABD и BCE, опущенные на равные стороны AB и BC этих треугольников, и потому площади этих треугольников равны.

Задача 5. *Некоторые из 2017 городов страны соединены прямыми двусторонними авиарейсами так, что из каждого города можно добраться до любого другого. Правительство хочет объявить k городов стратегически значимыми так, чтобы из любого города (включая стратегически значимые), совершив ровно один перелет, можно было попасть в стратегически значимый город. При каком наименьшем k это наверняка можно будет сделать?*

Ответ. При $k = 1344$. Решение. Введём граф городов и авиарейсов. Для начала приведём пример графа, в котором меньше чем 1344 стратегически значимыми вершинами не обойтись. Пусть в графе имеются вершины A, а также B_k, C_k и D_k, k=1, 2, …, 672; для каждого k проведём рёбра между вершиной A и B_k, B_k и C_k, C_k и D_k. Легко видеть, что этот граф связен. Поскольку вершина D_1 связана только с вершиной C_1, то вершина C_1 должна быть объявлена стратегически значимой. Кроме того, применяя условие задачи для вершины C_1 получаем, что либо вершина B_1, либо вершина D_1 должна быть объявлена стратегически значимой. Итак, из вершин B_1, C_1, D_1 хотя бы две вершины должны быть стратегически значимыми. Рассуждая аналогично для каждой тройки B_k, C_k, D_k, получаем требуемое.

Докажем теперь, что 1344 стратегически значимыми вершинами можно обойтись. Очевидно, достаточно разобрать случай, когда граф — дерево (в произвольном связном графе можно выделить дерево, содержащее все его вершины; если k стратегически значимых вершин будет достаточно для этого дерева, их будет достаточно и для исходного графа).

Докажем, что в графе с $n \geq 3$ вершинами можно указать несколько вершин и выделить из них несколько стратегически значимых так, что каждая выделенная вершина будет смежна с выделенной стратегически значимой, доля стратегически значимых среди выделенных будет не больше 2/3 и после удаления выделенных вершин граф останется связным.

Рассмотрим две вершины A и B, путь между которыми содержит наибольшее количество рёбер. Пусть X — последняя перед B вершина на пути из A в B. Очевидно, B соединена только с X. Если X соединена с какими-то висячими вершинами, кроме B, выделим X и все смежные с ней висячие вершины, а стратегически значимыми среди них объявим X и B. Очевидно, удаление этих вершин не нарушит связности графа, и стратегически значимые составляют среди них не более 2/3.

Пусть B — единственная висячая вершина, соединённая с X. Рассмотрим последнюю вершину Y на пути из A в X. Если все отличные от B вершины, путь из которых в A проходит через Y, смежны с Y, можно выделить эти вершины, Y, X и B, а стратегическими среди них объявить X и Y.

Наконец, разберём случай, когда путь из A в Y можно продолжить несколькими путями YX_iB_i длины 2 (путями большей длины продолжить не удастся в силу максимальности выбранного выше пути из A в B). Пусть таких путей k. Тогда нужно выделить все вершины этих путей и все висячие вершины, смежные с Y, а стратегически значимыми объявить Y и все X_i. При этом из графа будет удалено не менее $2k+1$ вершин, из которых $k+1$ стратегически значимых, а $\frac{k+1}{2k+1} \leq \frac{2}{3}$.

Будем продолжать эту деятельность, пока от графа не останется огрызок, содержащий не более двух вершин. Если вершин не осталось вообще, то мы объявили стратегически значимыми не более $[2 \cdot 2017/3] = 1344$ вершин, и процесс завершился. Если осталась одна вершина, то на предыдущем шаге нашего алгоритма она называлась A и была соединена с вершиной X или Y, которую объявили стратегически значимой, значит, для нее условие выполнено, и стратегически значимыми было объявлено не более $[2 \cdot 2016/3] = 1344$ вершин. Если же осталось две вершины, то, во-первых, они смежны, так как граф связности не теряет; во-вторых, одна из этих двух вершин была соединена с вершиной X или Y, объявленной стратегически значимой на предыдущем шаге. Поэтому достаточно объявить стратегически значимой лишь одну из этих двух вершин, чтобы условие выполнялось. Значит, и в этом случае стратегически значимыми будет объявлено не более $[2 \cdot 2015/3]+1 = 1344$ вершин.