# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 12. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

**2.** Хулиган Вася вырезал из каждого угла клетчатой доски 300×300 по квадрату 100×100, а потом раскрасил уцелевшие 50000 клеток в чёрный и белый цвета так, что никакой расположенный на доске квадрат 2×2 не раскрашен в шахматном порядке. Затем он посчитал число способов положить на доску доминошку 1×2 так, чтобы она накрыла клетки разного цвета. Какое наибольшее число могло у него получиться?

**3.** Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$. Известно, что углы $BAE$, $AEB$, $CDE$ равны 52°. Серединный перпендикуляр к отрезку $AD$ пересекает продолжение медианы треугольника $BCE$, проведенной из вершины $E$, в точке $F$. Найдите угол $AFD$.

**4.** Пусть $n$ — натуральное число. Множество натуральных чисел, не превосходящих $n$, таково, что наименьшее кратное любых двух различных его элементов не меньше $n+2$. Докажите, что сумма обратных величин элементов множества меньше 3/2.

**5.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$ под прямым углом. $M$, $N$, $P$ и $Q$ — точки пересечения сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ соответственно с перпендикулярами, опущенными из $O$ на противоположные им стороны. Докажите, что $MNPQ$ — прямоугольник.

**6.** Прямые вида $x = a$ и $y = b$ с целыми $a$ и $b$ разделяют плоскость на квадраты со стороной 1. Для каждого натурального $n$ определите, сколько путей длины ровно $2n+2$, идущих по этим прямым и не проходящих через одну точку более одного раза, ведут из точки (0, 0) в точку $(n, n)$.

**7.** Последовательность действительных чисел $a_1$, $a_2$, ... задана условиями $a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+1}{2}$ при $n \geq 1$. Докажите, что для каждого натурального $N$ выполнено неравенство $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+...+\dfrac{1}{1+a_N}<1.$

**8.** Дан выпуклый $n$-угольник $A_1A_2...A_n$. Каждую его вершину отразили относительно середины диагонали, соединяющей две соседние с ней вершины. Докажите, что из $n$ полученных точек хотя бы $n-3$ лежат внутри или на границе исходного $n$-угольника.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 12. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

**2.** Хулиган Вася раскрасил клетки доски $7\times7$ в чёрный и белый цвета так, что никакой расположенный на доске квадрат $2\times2$ не раскрашен в шахматном порядке. Затем он посчитал число способов положить на доску доминошку $1\times2$ так, чтобы она накрыла клетки разного цвета. Какое наибольшее число могло у него получиться?

**3.** Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$. Известно, что углы $BAE$, $AEB$, $CDE$ равны $52°$. Серединный перпендикуляр к отрезку $AD$ пересекает продолжение медианы треугольника $BCE$, проведенной из вершины $E$, в точке $F$. Найдите угол $AFD$.

**4.** Пусть $n$ — натуральное число. Множество натуральных чисел, не превосходящих $n$, таково, что наименьшее кратное любых двух различных его элементов не меньше $n+2$. Докажите, что сумма обратных величин элементов множества меньше 2.

**5.** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$ под прямым углом. $M$, $N$, $P$ и $Q$ — точки пересечения сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ соответственно с перпендикулярами, опущенными из $O$ на противоположные им стороны. Докажите, что $MNPQ$ — прямоугольник.

**6.** Авантюрист прибыл на Запретный остров, представляющий из себя квадрат $10\times10$. Высадился авантюрист в левую верхнюю клетку. Каждую ночь две незатопленные клетки острова, на которых нет авантюриста, уходят под воду. Каждый день авантюрист сдвигается на соседнюю по стороне или диагонали незатопленную клетку, и осушает все соседние по стороне затопленные клетки. Если же авантюрист не может сделать ход, он погибает. Может ли авантюрист действовать так, чтобы независимо от проявлений стихии продержаться на острове целый год? Изначально все клетки острова сухие.

**7.** Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ удовлетворяет условию $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных $n \le 97$. Кроме того, известно, что $a_1 = a_3 = 1$ и $a_{98} = a_{99}$. Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

**8.** Дан выпуклый $n$-угольник $A_1A_2...A_n$. Каждую его вершину отразили относительно середины диагонали, соединяющей две соседние с ней вершины. Докажите, что из $n$ полученных точек хотя бы $n-3$ лежат внутри или на границе исходного $n$-угольника.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

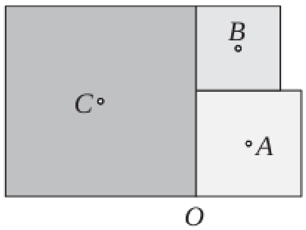
**1.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 12. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

**2.** Хулиган Вася раскрасил клетки доски 7×7 в чёрный и белый цвета так, что никакой расположенный на доске квадрат 2×2 не раскрашен в шахматном порядке. Затем он посчитал число способов положить на доску доминошку 1×2 так, чтобы она накрыла клетки разного цвета. Какое наибольшее число могло у него получиться?

**3.** Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$. Известно, что углы $BAE$, $AEB$, $CDE$ равны 52°. Серединный перпендикуляр к отрезку $AD$ пересекает продолжение медианы треугольника $BCE$, проведенной из вершины $E$, в точке $F$. Найдите угол $AFD$.

**4.** Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для каждого делителя $d > 1$ числа $n$ оба числа $d^2+d+1$ и $d^2-d+1$ — простые.

**5.** На картинке изображены три квадрата и их центры — точки $A$, $B$ и $C$. Точка $O$ — общая вершина двух квадратов. Докажите, что $OB$ перпендикулярно $AC$.




**6.** Авантюрист прибыл на Запретный остров, представляющий из себя квадрат 10×10. Высадился авантюрист в левую верхнюю клетку. Каждую ночь две незатопленные клетки острова, на которых нет авантюриста, уходят под воду. Каждый день авантюрист сдвигается на соседнюю по стороне или диагонали незатопленную клетку, и осушает все соседние по стороне затопленные клетки. Если же авантюрист не может сделать ход, он погибает. Может ли авантюрист действовать так, чтобы независимо от проявлений стихии продержаться на острове целый год? Изначально все клетки острова сухие.

**7.** Последовательность $a_1$, $a_2$, …, $a_{100}$ удовлетворяет условию $a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных $n \leq 97$. Кроме того, известно, что $a_1 = a_3 = 1$ и $a_{98} = a_{99}$. Найдите $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

**8.** Каждую вершину выпуклого четырехугольника $ABCD$ отразили относительно середины диагонали, соединяющей две соседние с ней вершины. Докажите, что из четырех полученных точек хотя бы одна лежит внутри или на границе исходного четырехугольника.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Жюри хочет узнать, какие задачи решила команда на бою, и может задавать какому-нибудь из игроков вопросы вида «Решила ли ваша команда задачу номер такую-то?». В бою 8 задач, в команде 6 человек. Причем 5 участников команды всегда отвечают честно, а один всегда лжет, но кто именно — неизвестно. Какое минимальное количество вопросов потребуется жюри, чтобы гарантированно узнать про каждую задачу, решила ли ее команда? (Ответ на вопрос может учитываться при выборе кому и какой следующий вопрос задавать.)

**2.** На диагонали $AC$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка $E$. Известно, что $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = 30°$, $AC \perp DE$ и $AE = 2CE$. Докажите, что $AD+AE > 2BD$.

**3.** Равносторонний треугольник со стороной 100 разбит параллельными сторонам прямыми трех направлений на много маленьких треугольничков со стороной 1. Некоторые 77 вершин получившейся треугольной решетки покрасили в синий цвет. Докажите, что найдутся две синие вершины, лежащие на прямой, параллельной одной из сторон большого треугольника.

**4.** В стране Захолустье $n > 10$ городов, между некоторыми городами проведены двусторонние дороги. У любого города $T$, кроме Столицы, есть соседний город, из которого исходит меньше дорог, чем из $T$. Каково наибольшее возможное количество дорог в Захолустье?

**5.** Хулиган Вася вырезал из каждого угла клетчатой доски $300\times300$ по квадрату $100\times100$, а потом раскрасил уцелевшие 50000 клеток в чёрный и белый цвета так, что никакой расположенный на доске квадрат $2\times2$ не раскрашен в шахматном порядке. Затем он посчитал число способов положить на доску доминошку $1\times2$ так, чтобы она накрыла клетки разного цвета. Какое наибольшее число могло у него получиться?

**6.** При каких натуральных $a$ и $b$ оба числа $a^2b+3$ и $b^2a+3$ являются точными кубами?

**7.** Найдите все натуральные числа $n \geq 3$ такие, что при любом натуральном $k$ существует $n$ целых чисел $a_1$, $a_2$, …, $a_n$, удовлетворяющих двум условиям: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$, $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \ldots + a_na_1 = -k$.

**8.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 14. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Жюри хочет узнать, какие задачи решила команда на бою, и может задавать какому-нибудь из игроков вопросы вида «Решила ли ваша команда задачу номер такую-то?». В бою 8 задач, в команде 6 человек. Причем 5 участников команды всегда отвечают честно, а один всегда лжет, но кто именно — неизвестно. Какое минимальное количество вопросов потребуется жюри, чтобы гарантированно узнать про каждую задачу, решила ли ее команда? (Ответ на вопрос может учитываться при выборе кому и какой следующий вопрос задавать.)

**2.** На диагонали $AC$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка $E$. Известно, что $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAC = 30°$, $AC \perp DE$ и $AE = 2CE$. Докажите, что $AD+AE > 2BD$.

**3.** Равносторонний треугольник со стороной 100 разбит параллельными сторонам прямыми трех направлений на много маленьких треугольничков со стороной 1. Некоторые 77 вершин получившейся треугольной решетки покрасили в синий цвет. Докажите, что найдутся две синие вершины, лежащие на прямой, параллельной одной из сторон большого треугольника.

**4.** В стране Захолустье $n > 10$ городов, между некоторыми городами проведены двусторонние дороги. У любого города $T$, кроме Столицы, есть соседний город, из которого исходит меньше дорог, чем из $T$. Каково наибольшее возможное количество дорог в Захолустье?

**5.** В одном вагоне поезда в Ижевск едут 11 семиклассников и 20 шестиклассников, а во втором — 19 семиклассников и 11 шестиклассников, других пассажиров нет. Каждую минуту (если это возможно) либо ровно трое шестиклассников перебегают в более переполненный вагон, либо ровно двое семиклассников перебегают в менее переполненный. Докажите, что в течение всей поездки беготня не прекратится.

**6.** Авантюрист прибыл на Запретный остров, представляющий из себя квадрат $10 \times 10$. Высадился авантюрист в левую верхнюю клетку. Каждую ночь две незатопленные клетки острова, на которых нет авантюриста, уходят под воду. Каждый день авантюрист сдвигается на соседнюю по стороне или диагонали незатопленную клетку, и осушает все соседние по стороне затопленные клетки. Если же авантюрист не может сделать ход, он погибает. Может ли авантюрист действовать так, чтобы независимо от проявлений стихии продержаться на острове целый год? Изначально все клетки острова сухие.

**7.** По кругу выписаны $n$ ($n > 3$) целых неотрицательных чисел. Оказалось, что среди них нельзя указать тройку подряд идущих чисел $x, y, z$ ($y$ стоит между $x$ и $z$), в которой обе суммы $x+y$ и $y+z$ не меньше 8. Какую наибольшую сумму могут давать выписанные числа?

**8.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 14. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Жюри хочет узнать, какие задачи решила команда на бою, и может задавать какому-нибудь из игроков вопросы вида «Решила ли ваша команда задачу номер такую-то?». В бою 8 задач, в команде 6 человек. Причем 5 участников команды всегда отвечают честно, а один всегда лжет, но кто именно — неизвестно. Какое минимальное количество вопросов потребуется жюри, чтобы гарантированно узнать про каждую задачу, решила ли ее команда? (Ответ на вопрос может учитываться при выборе кому и какой следующий вопрос задавать.)

**2.** Найдите все тройки целых чисел $a$, $b$ и $c$, для которых выполнены равенства $a^2 = bc+1$, $b^2 = ac+1$.

**3.** Равносторонний треугольник со стороной 100 разбит параллельными сторонам прямыми трех направлений на много маленьких треугольничков со стороной 1. Некоторые 77 вершин получившейся треугольной решетки покрасили в синий цвет. Докажите, что найдутся две синие вершины, лежащие на прямой, параллельной одной из сторон большого треугольника.

**4.** В стране 11 городов и несколько дорог, каждая соединяет какие-то два города. В столицу входит больше дорог, чем в любой другой город, а в Заморск — меньше, чем в любой другой город. Сколько максимум дорог может быть в стране?

**5.** В одном вагоне поезда в Ижевск едут 11 семиклассников и 20 шестиклассников, а во втором — 19 семиклассников и 11 шестиклассников, других пассажиров нет. Каждую минуту (если это возможно) либо ровно трое шестиклассников перебегают в более переполненный вагон, либо ровно двое семиклассников перебегают в менее переполненный. Докажите, что в течение всей поездки беготня не прекратится.

**6.** Все делители числа 101! выписаны на доску. Петя и Вася по очереди стирают с доски по одному делителю. Первым ходом Петя стирает число 101!. Если на предыдущем шаге было стерто число $x$, то на следующем шаге можно стирать либо число, являющееся делителем $x$, либо стирать число, делящееся на $x$. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре, как бы ни играл соперник?

**7.** По кругу выписаны 40 целых неотрицательных чисел. Оказалось, что среди них нельзя указать тройку подряд идущих чисел $x$, $y$, $z$ ($y$ стоит между $x$ и $z$), в которой обе суммы $x+y$ и $y+z$ не меньше 8. Какую наибольшую сумму могут давать выписанные числа?

**8.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 12. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** Жюри хочет узнать, какие задачи решила команда на бою, и может задавать какому-нибудь из игроков вопросы вида «Решила ли ваша команда задачу номер такую-то?». В бою 8 задач, в команде 6 человек. Причем 5 участников команды всегда отвечают честно, а один всегда лжет, но кто именно — неизвестно. Какое минимальное количество вопросов потребуется жюри, чтобы гарантированно узнать про каждую задачу, решила ли ее команда? (Ответ на вопрос может учитываться при выборе кому и какой следующий вопрос задавать.)

**2.** Найдите все тройки неотрицательных целых чисел $a$, $b$ и $c$, для которых выполнены равенства $a^2 = bc+1$, $b^2 = ac+1$.

**3.** Все делители числа 101! выписаны на доску. Петя и Вася по очереди стирают с доски по одному делителю. Первым ходом Петя стирает число 101!. Если на предыдущем шаге было стерто число $x$, то на следующем шаге можно стирать либо число, являющееся делителем $x$, либо стирать число, делящееся на $x$. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре, как бы ни играл соперник?

**4.** У любых двух незнакомых людей в компании есть ровно двое общих знакомых. В компании есть двое ребят: Саша и Женя. Они знакомы друг с другом, но не имеют общих знакомых. Докажите, что Саша и Женя имеют поровну знакомых в этой компании.

**5.** В одном вагоне поезда в Ижевск едут 10 шестиклассников и 22 семиклассника, а во втором — 20 шестиклассников и 9 семиклассников, других пассажиров нет. Каждую минуту либо ровно трое шестиклассников перебегают в более наполненный вагон, либо ровно двое семиклассников перебегают в менее наполненный. Беготня прекращается, если все описанные действия невозможны. Докажите, что в течение всей поездки беготня не прекратится.

**6.** В каждой клетке таблицы 5×5 написано одно из чисел от 1 до 5 так, что каждое из этих чисел ровно один раз написано в каждой строке и каждом столбце. Назовём число *удачно расположенным*, если и в его строке, и в его столбце все большие него числа расположены по одну сторону от него, а все меньшие — по другую. Может ли в таблице быть 5 удачно расположенных чисел?

**7.** По кругу выписаны 40 целых неотрицательных чисел. Оказалось, что среди них нельзя указать тройку подряд идущих чисел $x$, $y$, $z$ ($y$ стоит между $x$ и $z$), в которой обе суммы $x+y$ и $y+z$ не меньше 8. Какую наибольшую сумму могут давать выписанные числа?

**8.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 12. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Может ли сумма нескольких чисел, каждое из которых больше 0 и меньше 1, быть равна удвоенному произведению всех этих чисел?

**2.** В каждой клетке таблицы 5×5 написано одно из чисел от 1 до 5 так, что каждое из этих чисел ровно один раз написано в каждой строке и каждом столбце. Назовём число *удачно расположенным*, если и в его строке, и в его столбце все большие него числа расположены по одну сторону от него, а все меньшие — по другую. Может ли в таблице быть более четырех удачно расположенных чисел?

**3.** В ряд стоят четыре нечетных числа. Докажите, что, расставив между ними знаки сложения, вычитания, умножения и скобки, можно добиться того, что результат поделится на 12. (Одни и те же знаки разрешается использовать несколько раз или не использовать вовсе.)

**4.** В стране 11 городов и несколько дорог, каждая соединяет какие-то два города. В столицу входит больше дорог, чем в любой другой город, а в Заморск — меньше, чем в любой другой город. Сколько максимум дорог может быть в стране?

**5.** Жюри хочет узнать, какие задачи решила команда на бою, и может задавать какому-нибудь из игроков вопросы вида «Решила ли ваша команда задачу номер такую-то?». В бою 8 задач, в команде 6 человек. Причем 5 участников команды всегда отвечают честно, а один всегда лжет, но кто именно — неизвестно. Какое минимальное количество вопросов потребуется жюри, чтобы гарантированно узнать про каждую задачу, решила ли ее команда? (Ответ на вопрос может учитываться при выборе кому и какой следующий вопрос задавать.)

**6.** Авантюрист прибыл на Запретный остров, представляющий из себя квадрат 10×10. Высадился авантюрист в левую верхнюю клетку. Каждую ночь две незатопленные клетки острова, на которых нет авантюриста, уходят под воду. Каждый день авантюрист сдвигается на соседнюю по стороне или диагонали незатопленную клетку, и осушает все соседние по стороне затопленные клетки. Если же авантюрист не может сделать ход, он погибает. Может ли авантюрист действовать так, чтобы независимо от проявлений стихии продержаться на острове целый год? Изначально все клетки острова сухие.

**7.** В одном вагоне поезда в Ижевск едут 10 шестиклассников и 22 семиклассника, а во втором — 20 шестиклассников и 9 семиклассников, других пассажиров нет. Каждую минуту либо ровно трое шестиклассников перебегают в более наполненный вагон, либо ровно двое семиклассников перебегают в менее наполненный. Беготня прекращается, если все описанные действия невозможны. Докажите, что в течение всей поездки беготня не прекратится.

**8.** На доске написано не более 15 натуральных чисел. Каждое увеличили или уменьшили на 1. Может ли произведение всех исходных чисел отличаться от произведения всех новых чисел ровно в 2018 раз?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Существуют ли два числа, большие 0, но меньшие 1, сумма которых равна их удвоенному произведению?

**2.** В каждой клетке таблицы 5×5 написано одно из чисел от 1 до 5 так, что каждое из этих чисел ровно один раз написано в каждой строке и каждом столбце. Назовём число *удачно расположенным*, если и в его строке, и в его столбце все большие него числа расположены по одну сторону от него, а все меньшие — по другую. Может ли в таблице быть более четырех удачно расположенных чисел?

**3.** В ряд стоят четыре нечетных числа. Докажите, что, расставив между ними знаки сложения, вычитания, умножения и скобки, можно добиться того, что результат поделится на 12. (Одни и те же знаки разрешается использовать несколько раз или не использовать вовсе.)

**4.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 14. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

**5.** Жюри хочет узнать, какие задачи решила команда на бою, и может задавать какому-нибудь из игроков вопросы вида «Решила ли ваша команда задачу номер такую-то?». В бою 8 задач, в команде 6 человек. Причем 5 участников команды всегда отвечают честно, а один всегда лжет, но кто именно — неизвестно. Какое минимальное количество вопросов потребуется жюри, чтобы гарантированно узнать про каждую задачу, решила ли ее команда? (Ответ на вопрос может учитываться при выборе кому и какой следующий вопрос задавать.)

**6.** В стране 11 городов и 45 дорог, каждая соединяет какие-то два города. В столицу входит больше дорог, чем в любой другой город, а в Заморск — меньше, чем в любой другой город. Сколько дорог ведут в столицу?

**7.** В одном вагоне поезда в Ижевск едут 10 шестиклассников и 22 семиклассника, а во втором — 20 шестиклассников и 9 семиклассников, других пассажиров нет. Каждую минуту либо ровно трое шестиклассников перебегают в более наполненный вагон, либо ровно двое семиклассников перебегают в менее наполненный. Беготня прекращается, если все описанные действия невозможны. Докажите, что в течение всей поездки беготня не прекратится.

**8.** На доске написано не более 7 натуральных чисел. Каждое увеличили или уменьшили на 1. Может ли произведение всех исходных чисел отличаться от произведения всех новых чисел ровно в 52 раза?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Номера автобусных билетов — это 6-значные числа от 100000 до 999999. Если сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних, то номер считается счастливым. В счастливом номере, делящемся на 9, цифры заменили буквами (разные — разными, одинаковые — одинаковыми), причём чётные — гласными, а нечётные — согласными. Сколько разных номеров могли образовать слово ИЖЕВСК?

**2.** В каждой клетке таблицы 5×5 написано одно из чисел от 1 до 5 так, что каждое из этих чисел ровно один раз написано в каждой строке и каждом столбце. Назовём число *удачно расположенным*, если и в его строке, и в его столбце все большие него числа расположены по одну сторону от него, а все меньшие — по другую. Может ли в таблице быть более четырех удачно расположенных чисел?

**3.** В ряд стоят четыре нечетных числа. Докажите, что, расставив между ними знаки сложения, вычитания, умножения и скобки, можно добиться того, что результат поделится на 12. (Одни и те же знаки разрешается использовать несколько раз или не использовать вовсе.)

**4.** Все делители числа 37! выписаны на доску. Петя и Вася по очереди стирают с доски по одному делителю. Первым ходом Петя стирает число 37!. Если на предыдущем шаге было стерто число $x$, то на следующем шаге можно стирать либо число, являющееся делителем $x$, либо стирать число, делящееся на $x$. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

**5.** По кругу выписаны 99 целых неотрицательных чисел с общей суммой 463. Докажите, что среди них можно указать тройку подряд идущих чисел $x$, $y$, $z$ ($y$ стоит между $x$ и $z$), в которой обе суммы $x+y$ и $y+z$ не меньше 8.

**6.** В стране 11 городов и 45 дорог, каждая соединяет какие-то два города. В столицу входит больше дорог, чем в любой другой город, а в Заморск — меньше, чем в любой другой город. Сколько дорог ведут в столицу?

**7.** Петя выбрал несколько чисел из набора 1, 2, ..., 14. Оказалось, что он не может разбить их на несколько (более одной) групп с одинаковой суммой. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных Петей чисел?

**8.** Жюри хочет узнать, какие задачи решила команда на бою, и может задавать какому-нибудь из игроков вопросы вида «Решила ли ваша команда задачу номер такую-то?». В бою 8 задач, в команде 6 человек. Причем 5 участников команды всегда отвечают честно, а один всегда лжет, но кто именно — неизвестно. Какое минимальное количество вопросов потребуется жюри, чтобы гарантированно узнать про каждую задачу, решила ли ее команда? (Ответ на вопрос может учитываться при выборе кому и какой следующий вопрос задавать.)

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.11.2018

## ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** Номера автобусных билетов — это 6-значные числа от 100000 до 999999. Если сумма первых трёх цифр равна сумме трёх последних, то номер считается счастливым. В счастливом номере, делящемся на 9, цифры заменили буквами (разные — разными, одинаковые — одинаковыми), причём чётные — гласными, а нечётные — согласными. Сколько разных номеров могли образовать слово ИЖЕВСК?

**2.** В каждой клетке таблицы 5×5 написано одно из чисел от 1 до 5 так, что каждое из этих чисел ровно один раз написано в каждой строке и каждом столбце. Назовём число *удачно расположенным*, если и в его строке, и в его столбце все большие него числа расположены по одну сторону от него, а все меньшие — по другую. Может ли в таблице быть 5 удачно расположенных чисел?

**3.** Имеются два натуральных числа одной чётности. Докажите, что с помощью одного арифметического действия (сложения, вычитания, умножения или деления) из них можно получить число, делящееся на 4.

**4.** Докажите, что квадрат можно разрезать на любое, большее одного, количество пятиугольников.

**5.** На нефтеперегонном заводе работают 2 участка с одинаковым количеством установок по перегонке нефти. Поступило два состава с сырой нефтью, в одном в 2 раза больше нефти, чем в другом. Оба участка целый день перегоняли нефть из большого состава. На второй день один участок перешёл на нефть из второго состава, а другой участок к концу дня справился с первым. За третий день оставшаяся нефть из второго состава была переработана на одной установке. Сколько установок на заводе?

**6.** В стране 11 городов и 45 дорог, каждая соединяет какие-то два города. В столицу входит больше дорог, чем в любой другой город, а в Заморск — меньше, чем в любой другой город. Сколько дорог ведут в столицу?

**7.** В одном вагоне поезда в Ижевск едут 12 шестиклассников и 22 семиклассника, а во втором — 17 шестиклассников, 11 семиклассников и два пятиклассника, других пассажиров нет. Каждую минуту либо ровно трое шестиклассников перебегают в более наполненный вагон, либо ровно двое семиклассников перебегают в менее наполненный, либо оба пятиклассника перебегает в другой вагон, если пассажиров там и там поровну. Беготня прекращается, если все описанные действия невозможны. Докажите, что в течение всей поездки беготня не прекратится.

**8.** Исключите наименьшее возможное количество из следующих четырёх утверждений, чтобы оставшиеся стали верными для каких-то натуральных $a$ и $b$, и найдите все возможные пары таких $a$ и $b$:
(1) $a+5b$— простое число; (2) $a+1$ делится на $b$; (3) $a+b$ делится на 4; (4) $a = 3b+5$.