МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть $m > 1$ и $n > 1$ — натуральные числа. Прямоугольник $a\times b$ можно разрезать на несколько прямоугольников, каждый из которых является или горизонтальным прямоугольником $1\times m$, или вертикальным прямоугольником $n\times 1$. Докажите, что тогда прямоугольник $a\times b$ можно разрезать или только на прямоугольники $1\times m$, или только на прямоугольники $n\times 1$.

2. Для каждого натурального n обозначим $a(n)$ число переносов, которые происходят при сложении (столбиком в десятичной записи) чисел 2017 и $2017n$. Докажите, что

$$a(1)+a(2)+\ldots+a(10^{2017}-1)=10\cdot\frac{10^{2017}-1}{9}.$$

3. Докажите, что среди чисел 1, 2, …, 1500 можно указать 16 чисел так, чтобы нельзя было из них выбрать несколько (возможно одно), сумма которых была бы квадратом натурального числа.

4. Дано 672 вещественных числа $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$ с общей суммой 2018. Оказалось, что для любого натурального k от 1 до 672 среди них найдутся какие-то k чисел с целой суммой. Какое наименьшее значение может принимать самое большое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$?

5. В авторитетном журнале помещена следующая задача: «На стороне AC треугольника ABC отмечена точка T такая, что $TA = BC$, а на стороне AB — точка P такая, что треугольники CBP и PAT равны. Наконец, точка Q на стороне BC такова, что прямая TQ не параллельна AB и треугольник BPQ подобен треугольнику TCQ. Докажите, что $PT = QT$.» Верно ли это утверждение? Соответственные вершины равных или подобных треугольников не обязательно указаны в одинаковом порядке.

6. Точки E и F лежат на сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ соответственно. Перпендикуляр, опущенный из E на прямую FB, пересекает прямую BC в точке P, а перпендикуляр, опущенный из F на прямую EB, пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

7. В последовательности результатов подбрасывания монетки можно встретить орлов, следующих сразу за решкой, решки, следующие сразу за решкой, и т.п. Будем обозначать эти ситуации через РО, РР и т.п. соответственно. Например, в последовательности РРООРРРОРО из 10 подбрасываний три РР, одна ОО, три РО, два ОР. А сколько существует различных последовательностей результатов 15 подбрасываний, в которых ровно две РР, три РО, четыре ОР и пять ОО?

8. Круг разделен на 200 равных секторов, в каждом лежит по банану. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход Панда может съесть любые два банана, расположенные в противоположных секторах. Вомбат может съесть два банана, расположенные в соседних секторах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Прямоугольник $a\times b$ можно разрезать на несколько прямоугольников, каждый из которых является или горизонтальным прямоугольником 1×5, или вертикальным прямоугольником 7×1. Докажите, что тогда прямоугольник $a\times b$ можно разрезать или только на прямоугольники 1×5, или только на прямоугольники 7×1.

2. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей $\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2018}{b+2018}$ равна 2018. Найдите произведение этих дробей.

3. Докажите, что среди чисел 1, 2, …, 10000 можно указать 20 чисел так, чтобы нельзя было из них выбрать несколько (возможно одно), сумма которых была бы степенью (большей 1) натурального числа.

4. Дано 32 вещественных числа $a_1, a_2, \ldots, a_{32}$ с общей суммой 2017. Оказалось, что для любого натурального k от 1 до 32 среди них найдутся какие-то k чисел с целой суммой. Какое наименьшее значение может принимать самое большое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{32}$?

5. В авторитетном журнале помещена следующая задача: «На стороне AC треугольника ABC отмечена точка T такая, что $TA = BC$, а на стороне AB — точка P такая, что треугольники CBP и PAT равны. Наконец, точка Q на стороне BC такова, что прямая TQ не параллельна AB и треугольник BPQ подобен треугольнику TCQ. Докажите, что $PT = QT$.» Верно ли это утверждение? Соответственные вершины равных или подобных треугольников не обязательно указаны в одинаковом порядке.

6. Точки E и F лежат на сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ соответственно. Перпендикуляр, опущенный из E на прямую FB, пересекает прямую BC в точке P, а перпендикуляр, опущенный из F на прямую EB, пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

7. В последовательности результатов подбрасывания монетки можно встретить орлов, следующих сразу за решкой, решки, следующие сразу за решкой, и т.п. Будем обозначать эти ситуации через РО, РР и т.п. соответственно. Например, в последовательности РРООРРРОРО из 10 подбрасываний три РР, одна ОО, три РО, два ОР. А сколько существует различных последовательностей результатов 15 подбрасываний, в которых ровно две РР, три ОО, четыре ОР и пять РО?

8. Круг разделен на 200 равных секторов, в каждом лежит по банану. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход Панда может съесть любые два банана, расположенные в противоположных секторах. Вомбат может съесть два банана, расположенных в соседних секторах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Прямоугольник $a\times b$ можно разрезать на несколько прямоугольников, каждый из которых является или горизонтальным прямоугольником 1×5, или вертикальным прямоугольником 7×1. Докажите, что тогда прямоугольник $a\times b$ можно разрезать или только на прямоугольники 1×5, или только на прямоугольники 7×1.

2. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей $\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2018}{b+2018}$ равна 2018. Найдите произведение этих дробей.

3. В Департаменте случайных чисел сгенерировали натуральное число, оканчивающееся на 33. Докажите, что это число имеет простой делитель, больший 7.

4. Дано 672 вещественных числа $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$ с общей суммой 2018. Оказалось, что для любого натурального k от 1 до 672 среди них найдутся какие-то k чисел с целой суммой. Какое наименьшее количество целых может быть среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$?

5. На перпендикуляре к стороне BC равностороннего треугольника ABC, проведённом через вершину B, взята точка M, а на перпендикуляре к BC, проведённом через C — точка N так, что $BM = CN = BC$ и точки M, N и A лежат по одну сторону от прямой BC. Прямые MC и AB пересекаются в точке P. Докажите, что прямые NP и AC перпендикулярны.

6. Точки E и F лежат на сторонах CD и AD прямоугольника $ABCD$ соответственно. Перпендикуляр, опущенный из E на прямую FB, пересекает прямую BC в точке P, а перпендикуляр, опущенный из F на прямую EB, пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что точки P, D и Q лежат на одной прямой.

7. В последовательности результатов подбрасывания монетки можно встретить орлов, следующих сразу за решкой, решки, следующие сразу за решкой, и т.п. Будем обозначать эти ситуации через РО, РР и т.п. соответственно. Например, в последовательности РРООРРРОРО из 10 подбрасываний три РР, одна ОО, три РО, два ОР. А сколько существует различных последовательностей результатов 15 подбрасываний, в которых ровно две РР, три ОО, четыре ОР и пять РО?

8. Дана полоска из $n \geq 7$ клеток. В трёх левых клетках стоят белые фишки, в трёх правых клетках стоят чёрные фишки. Белый и Черный ходят своими фишками по очереди (начинает Белый). Каждым ходом игрок сдвигает одну из своих фишек в соседнюю клетку (которая не занята другой его же фишкой). Если в клетке оказываются две фишки разного цвета, обе фишки удаляются из полоски. Когда все фишки удалены, игра заканчивается и выигрывает тот, кто сделал последний ход. Кто выиграет при правильной игре? Ответ может зависеть от n.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Илья отметил несколько полей на шахматной доске. Докажите, что Сережа может покрасить остальные поля в 4 цвета таким образом, чтобы у каждой отмеченной Ильёй клетки среди соседей по стороне не было одноцветных.

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC, где $\angle ACB = 25°$, отмечены точки D и E соответственно такие, что $BE = ED$. Внутри треугольника отмечена точка F так, что $AB = FC$, $AF = DC$, $\angle BEF = \angle FED$ и $\angle BCF = 5°$. Найдите угол BAF.

3. В Департаменте случайных чисел сгенерировали натуральное число, оканчивающееся на 98765. Докажите, что это число имеет простой делитель, больший 7.

4. Барон Мюнхгаузен рассказывает, что однажды побывал в удивительной стране. В этой стране между любыми двумя городами проходит не более одной дороги, ехать по которой можно в обе стороны. В каждом городе начинается ровно два циклических маршрута, каждый из которых проходит по остальным городам не более чем по одному разу и заканчивается в том же городе (путешествия по одному маршруту в разных направлениях считаются одинаковыми). Можно ли верить словам барона?

5. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей $\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2018}{b+2018}$ равна 2018. Найдите произведение этих дробей.

6. Дано 672 вещественных числа $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$ с общей суммой 2017. Оказалось, что для любого натурального k от 1 до 672 среди них найдутся какие-то k чисел с целой суммой. Какое наименьшее значение может принимать самое большое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$?

7. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

8. Круг разделен на 200 равных секторов, в каждом лежит по банану. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход Панда может съесть любые два банана, расположенные в противоположных секторах. Вомбат может съесть два банана, расположенных в соседних секторах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Илья отметил несколько полей на шахматной доске. Докажите, что Сережа может покрасить остальные поля в 4 цвета таким образом, чтобы у каждой отмеченной Ильёй клетки среди соседей по стороне не было одноцветных.

2. На сторонах AC и BC треугольника ABC, где $\angle ACB = 25°$, отмечены точки D и E соответственно такие, что $BE = ED$. Внутри треугольника отмечена точка F так, что $AB = FC$, $AF = DC$, $\angle BEF = \angle FED$ и $\angle BCF = 5°$. Найдите угол BAF.

3. В Департаменте случайных чисел сгенерировали натуральное число, оканчивающееся на 33. Докажите, что это число имеет простой делитель, больший 7.

4. Барон Мюнхгаузен рассказывает, что однажды побывал в удивительной стране. В этой стране между любыми двумя городами проходит не более одной дороги, ехать по которой можно в обе стороны. В каждом городе начинается ровно два циклических маршрута, каждый из которых проходит по остальным городам не более чем по одному разу и заканчивается в том же городе (путешествия по одному маршруту в разных направлениях считаются одинаковыми). Можно ли верить словам барона?

5. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей $\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2018}{b+2018}$ равна 2018. Найдите произведение этих дробей.

6. Дано 672 вещественных числа $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$ с общей суммой 2018. Оказалось, что для любого натурального k от 1 до 672 среди них найдутся какие-то k чисел с целой суммой. Какое наименьшее количество целых чисел может быть среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{672}$?

7. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

8. Круг разделен на 70 равных секторов, в каждом лежит по банану. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход Панда может съесть любые два банана, расположенные в противоположных секторах. Вомбат может съесть два банана, расположенных в соседних секторах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Можно ли покрасить клетки шахматной доски 8×8 в 4 цвета таким образом, чтобы у каждой клетки среди ее соседей по стороне не было одноцветных?

2. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

3. В Департаменте случайных чисел сгенерировали натуральное число, оканчивающееся на 133. Докажите, что это число имеет простой делитель, больший 5.

4. В стране несколько городов, некоторые пары из которых соединены двусторонними авиалиниями. Турист рассматривает несколько маршрутов из города A в город $Б$, возможно с пересадками в других городах, причем любой из этих маршрутов по каждому городу проходит не более одного раза. Оказалось, что каждая авиалиния в стране используется в нечётном количестве рассматриваемых маршрутов. Докажите, что из каждого города (за исключением, возможно, A и $Б$) выходит чётное число авиалиний.

5. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей $\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2018}{b+2018}$ равна 2018. Найдите произведение этих дробей.

6. Дано 672 вещественных числа a_1, a_2, …, a_{672} с общей суммой 2018. Оказалось, что для любого натурального k от 1 до 672 среди них найдутся какие-то k чисел с целой суммой. Какое наименьшее количество целых чисел может быть среди чисел a_1, a_2, …, a_{672}?

7. Стая обезьян разместилась по кругу. У каждой обезьяны есть какое-то количество бананов, ананасов и кокосов. Известно, что если две обезьяны, которые не сидят рядом, сложат свои бананы в одну кучку, ананасы — в другую, а кокосы — в третью, то они не смогут поделить поровну между собой хотя бы одну из этих кучек. Какое наибольшее количество обезьян может быть в этой стае?

8. Круг разделен на 70 равных секторов, в каждом лежит по банану. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход Панда может съесть любые два банана, расположенные в противоположных секторах. Вомбат может съесть два банана, расположенных в соседних секторах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Можно ли покрасить клетки шахматной доски 8×8 в 4 цвета таким образом, чтобы у каждой клетки среди ее соседей по стороне не было одноцветных?

2. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 6 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

3. Может ли степень числа 13 оканчиваться на 123?

4. В ряд лежат 10 монет: 5 орлом вверх и 5 решкой вверх. Можно одновременно перевернуть три монеты, лежащие рядом. Верно ли, что такими действиями можно добиться, чтобы монеты шли (слева направо) так: орел, решка, орел, решка, орел, решка, орел, решка, орел, решка, независимо от того, как монеты располагались сначала?

5. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Раз в минуту вычисляется сумма некоторых двух чисел, написанных на доске, на доску записывается наименьший простой делитель этой суммы, а два старых числа стираются. Через 99 действий на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

6. Каким наименьшим количеством цветов можно покрасить все нечетные натуральные числа от 1 до 999 так, чтобы никакие два одноцветных числа не имели общего простого делителя?

7. Стая обезьян разместилась по кругу. У каждой обезьяны есть какое-то количество бананов и ананасов. Известно, что если две обезьяны, которые не сидят рядом, сложат свои бананы в одну кучку, а ананасы – в другую, то они не смогут поделить поровну между собой хотя бы одну из этих кучек. Какое наибольшее количество обезьян может быть в этой стае?

8. Круг разделен на $2n$ равных секторов, в каждом лежит по банану. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход каждый зверь может съесть либо два банана, расположенные в противоположных секторах, либо два банана, расположенных в соседних секторах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каждого n определите, кто из зверей может выиграть независимо от действий другого игрока.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Илья отметил несколько клеток на шахматной доске. Докажите, что Сережа может покрасить остальные клетки в 4 цвета таким образом, чтобы у каждой отмеченной Ильёй клетки среди соседей по стороне не было одноцветных.

2. По кругу лежат $n \geq 3$ одинаковых монет: одна вверх орлом, остальные вверх решкой. За один ход можно перевернуть три монеты подряд, если средняя лежит орлом вверх. При каких n можно за несколько ходов добиться того, чтобы все монеты одновременно оказались решкой вверх?

3. Сколько минимум нужно цветов, чтобы покрасить все натуральные числа от 1 до 1000 так, что для любых двух одноцветных чисел $A > B$ ни одно из чисел A+1, A не делилось ни на одно из чисел B+1, B?

4. Генератор случайных чисел СЛБ-1 сгенерировал натуральное число, оканчивающееся на 65. Докажите, что это число имеет простой делитель, больший 7.

5. В поселке всего две школы: №1 и №2. В них поровну учителей, и каждый учитель в поселке работает ровно в одной из них. Средняя зарплата учителей в поселке равна 15000 рублей. Если учитель Иван Петрович перейдет из школы №1 в школу №2, сохранив прежнюю зарплату, то средняя зарплата в обеих школах увеличится на 100 рублей. Чему равна зарплата Ивана Петровича? (Средняя зарплата N человек — это сумма их зарплат, деленная на N.)

6. Натуральные числа от 1 до n выписали в каком-то порядке, образовав многозначное число. Для любых двух цифр a и b, стоящих в соседних разрядах этого числа, хотя бы одно из чисел $\overline{ab}, \overline{ba}$ является простым или равно 1. Найдите наибольшее n, для которого это возможно. (Считается, что двузначное число может начинаться с нуля, при этом оно равно своей второй цифре.)

7. В стране несколько городов, некоторые пары из которых соединены двусторонними авиалиниями. Турист рассматривает несколько маршрутов из города *А* в город *Б*, возможно с пересадками в других городах, причем любой из этих маршрутов по каждому городу проходит не более одного раза. Оказалось, что каждая авиалиния в стране используется в нечётном количестве рассматриваемых маршрутов. Докажите, что из каждого города (за исключением, возможно, *А* и *Б*) выходит чётное число авиалиний.

8. Круг разделен на 200 равных секторов, в каждом лежит по банану. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. За один ход Панда может съесть любые два банана, расположенные в противоположных секторах. Вомбат может съесть два банана, расположенных в соседних секторах. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Илья отметил несколько клеток на шахматной доске. Докажите, что Сережа может покрасить остальные клетки в 4 цвета таким образом, чтобы у каждой отмеченной Ильёй клетки среди соседей по стороне не было одноцветных.

2. По кругу лежат 2018 одинаковых монет: одна вверх орлом, остальные вверх решкой. За один ход можно перевернуть три монеты подряд, если средняя лежит орлом вверх. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все монеты одновременно оказались решкой вверх?

3. По кругу стоят n двузначных чисел. Оказалось, что у любых двух **не**соседних чисел или сумма цифр в первом разряде равна 11, или сумма цифр во втором разряде равна 11. При каком наибольшем n такое возможно?

4. В Департаменте случайных чисел сгенерировали натуральное число, оканчивающееся на 33. Докажите, что это число имеет простой делитель, больший 7.

5. В поселке всего две школы: №1 и №2. В них поровну учителей, и каждый учитель в поселке работает ровно в одной из них. Средняя зарплата учителей в поселке равна 15000 рублей. Если учитель Иван Петрович перейдет из школы №1 в школу №2, сохранив прежнюю зарплату, то средняя зарплата в обеих школах увеличится на 100 рублей. Чему равна зарплата Ивана Петровича? (Средняя зарплата N человек — это сумма их зарплат, деленная на N.)

6. Натуральные числа от 1 до n выписали в каком-то порядке, образовав многозначное число. Для любых двух цифр a и b, стоящих в соседних разрядах этого числа, хотя бы одно из чисел $\overline{ab}, \overline{ba}$ является простым или равно 1. Найдите наибольшее n, для которого это возможно. (Считается, что двузначное число может начинаться с нуля, при этом оно равно своей второй цифре.)

7. В стране несколько городов, некоторые пары из которых соединены двусторонними авиалиниями. Турист рассматривает несколько маршрутов из города $А$ в город $Б$, возможно с пересадками в других городах, причем любой из этих маршрутов по каждому городу проходит не более одного раза. Оказалось, что каждая авиалиния в стране используется в нечётном количестве рассматриваемых маршрутов. Докажите, что из каждого города (за исключением, возможно, $А$ и $Б$) выходит чётное число авиалиний.

8. Сначала на доске записано число 2018. Двое ходят по очереди. За ход можно либо уменьшить число на сумму его цифр, либо увеличить его на наименьшую из его ненулевых цифр. Выигрывает тот, кто получит число, меньшее 666. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Илья отметил несколько клеток на шахматной доске. Докажите, что Сережа может покрасить остальные клетки в 4 цвета таким образом, чтобы у каждой отмеченной Ильёй клетки среди соседей по стороне не было одноцветных.

2. По кругу лежат 2018 одинаковых монет: одна вверх орлом, остальные вверх решкой. За один ход можно перевернуть три монеты подряд, если средняя лежит орлом вверх. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все монеты одновременно оказались решкой вверх?

3. Каким наименьшим количеством цветов можно покрасить все нечетные числа от 1 до 999 так, чтобы никакие два одноцветных числа не имели общего делителя, большего 1?

4. В олимпиаде было 24 задачи, 18 в первом туре и 6 во втором. Каждую задачу первого тура члены жюри проверяли по двое, а каждую задачу второго тура проверяли по трое. В итоге оказалось, что каждый член жюри проверил ровно по 6 задач. Сколько всего членов в жюри этой олимпиады?

5. В поселке всего две школы: №1 и №2. В каждой школе 3 учителя, и каждый учитель в поселке работает ровно в одной из этих школ. Если учитель Иван Петрович перейдет из школы №1 в школу №2, сохранив прежнюю зарплату в 5000 рублей, то средняя зарплата в обеих школах увеличится на 1000 рублей. Чему равна средняя зарплата всех учителей в посёлке? (Средняя зарплата N человек — это сумма их зарплат, деленная на N.)

6. Натуральные числа от 1 до n выписали в каком-то порядке, образовав многозначное число. Для любых двух цифр a и b, стоящих в соседних разрядах этого числа, хотя бы одно из чисел $\overline{ab}, \overline{ba}$ является простым или равно 1. Найдите наибольшее n, для которого это возможно. (Считается, что двузначное число может начинаться с нуля, при этом оно равно своей второй цифре.)

7. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. *Туристическим маршрутом* называется последовательность дорог, по которым можно проехать, не посещая никакой город дважды, а в конце – приехать в начальный город. Известно, что в стране есть туристические маршруты, состоящие из 3, 4, 5, 6, 7 и 8 дорог. Какое наименьшее число дорог может быть в этой стране?

8. Сначала на доске записано число 2018. Двое ходят по очереди. За ход можно либо уменьшить число на сумму его цифр, либо увеличить его на любую из его ненулевых цифр. Выигрывает тот, кто получит число, меньшее 666. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 04.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Можно ли из квадрата 5×5 вырезать одну клетку так, чтобы оставшиеся 24 клетки шахматный конь смог обойти по одному разу, а последним ходом вернуться на исходную позицию?

2. В ряд лежат 10 монет: 5 орлом вверх и 5 решкой вверх. Можно одновременно перевернуть три монеты, лежащие рядом. Верно ли, что такими действиями можно добиться, чтобы монеты шли (слева направо) так: орел, решка, орел, решка, орел, решка, орел, решка, орел, решка, независимо от того, как монеты располагались сначала?

3. Каким наименьшим количеством цветов можно покрасить все натуральные числа от 1 до 1000 так, чтобы никакие два нечётных одноцветных числа не имели общего простого делителя?

4. Разрежьте какой-нибудь треугольник на 5 одинаковых треугольников и квадрат.

5. *Уровнем жизни* в стране называется суммарная зарплата всех жителей этой страны, делённая на количество жителей этой страны. Может ли оказаться так, что при переезде человека из страны *А* в страну *Б* (с сохранением своей зарплаты) уровень жизни в каждой из стран увеличился?

6. Натуральные числа от 1 до n выписали в каком-то порядке, образовав многозначное число. Для любых двух цифр a и b, стоящих в соседних разрядах этого числа, хотя бы одно из чисел $\overline{ab}, \overline{ba}$ является простым или равно 1. Найдите наибольшее n, для которого это возможно. (Считается, что двузначное число может начинаться с нуля, при этом оно равно своей второй цифре.)

7. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. *Туристическим маршрутом* называется последовательность дорог, по которым можно проехать, не посещая никакой город дважды, а в конце – приехать в начальный город. Известно, что в стране есть туристические маршруты, состоящие из 3, 4, 5, 6, 7 и 8 дорог. Какое наименьшее число дорог может быть в этой стране?

8. Сначала на доске записано число 2018. Двое ходят по очереди. За ход можно либо уменьшить число на сумму его цифр, либо увеличить его на любую из его ненулевых цифр. Выигрывает тот, кто получит число, меньшее 666. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от игры соперника?