МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. За круглым столом сидят $2n$ человек ($n \geq 2$), каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

2. Пусть $n > 1$ — нечётное натуральное число. Назовём последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *хорошей*, если выполнены следующие два условия: (1) среди $a_1, a_2, \ldots, a_n$ каждое число от 1 до n встречается ровно один раз; (2) $|a_1-1|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-n| = (n^2-1)/2$. Сколько существует хороших последовательностей?

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась точка E такая, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Докажите, что $AE+AD = BE$.

4. Дано простое $p > 3$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{(p-1)/2}$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, (p-1)/2$. При каких p последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{(p-1)/2}$ заведомо можно восстановить, если для каждых различных i и j, не превосходящих $(p-1)/2$, известен остаток от деления на p числа a_ia_j?

5. Будем говорить, что точка S на стороне многоугольника P *видна из точки* E, лежащей вне P, если отрезок SE не содержит точек, лежащих на сторонах P, кроме самой точки S. При каких натуральных n можно раскрасить стороны правильного $(2n+1)$-угольника в три цвета так, чтобы каждая сторона была раскрашена ровно в один цвет, в каждый цвет была покрашена хотя бы одна сторона и из каждой точки вне $(2n+1)$-угольника были видны точки не более двух цветов? Вершины многоугольника не раскрашиваются.

6. a, b, c — положительные числа. Найдите наименьшее значение выражения

$$\max\{2a, \frac{3}{b}\} + \max\{3b, \frac{3}{2c}\} + \max\{\frac{3c}{2}, \frac{2}{a}\}.$$

7. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F так, что треугольники ABE и CDF — правильные. Оказалось, что точка пересечения прямых AF и DE лежит на отрезке BC. Какие значения может принимать угол между этими прямыми?

8. Все натуральные делители составного числа n выписаны по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Оказалось, что $(d_2-d_1):(d_3-d_2):\ldots:(d_k-d_{k-1}) = 1:2:\ldots:(k-1)$. Найдите все такие n.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. За круглым столом сидят $2n$ человек ($n \geq 2$), каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

2. Пусть $n > 1$ — чётное натуральное число. Назовём последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ *хорошей*, если выполнены следующие два условия: (1) среди $a_1, a_2, ..., a_n$ каждое число от 1 до n встречается ровно один раз; (2) $|a_1-1|+|a_2-2|+...+|a_n-n| = n^2/2$. Сколько существует хороших последовательностей?

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась точка E такая, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Докажите, что $AE+AD = BE$.

4. Дано простое $p > 3$. Числа $a_1, a_2, ..., a_{(p-1)/2}$ — перестановка чисел $1, 2, ..., (p-1)/2$. При каких p последовательность $a_1, a_2, ..., a_{(p-1)/2}$ заведомо можно восстановить, если для каждых различных i и j, не превосходящих $(p-1)/2$, известен остаток от деления на p числа a_ia_j?

5. Будем говорить, что точка S на стороне многоугольника P *видна из точки* E, лежащей вне P, если отрезок SE не содержит точек, лежащих на сторонах P, кроме самой точки S. При каких натуральных n можно раскрасить стороны правильного $(2n+1)$-угольника в три цвета так, чтобы каждая сторона была раскрашена ровно в один цвет, в каждый цвет была покрашена хотя бы одна сторона, и из каждой точки вне $(2n+1)$–угольника были видны точки не более двух цветов? Вершины многоугольника не раскрашиваются.

6. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого численно равны объём, сумма площадей всех шести граней и сумма длин всех двенадцати рёбер?

7. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F так, что треугольники ABE и CDF — правильные. Оказалось, что точка пересечения прямых AF и DE лежит на отрезке BC. Какие значения может принимать угол между этими прямыми?

8. Все натуральные делители составного числа n выписаны по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Оказалось, что $(d_2-d_1):(d_3-d_2):...:(d_k-d_{k-1}) = 1:2:\ldots:(k-1)$. Найдите все такие n.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. За круглым столом сидят 1526 человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

2. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{a+b}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{7c+1}{c+1}$.

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. На стороне AB нашлась точка E такая, что $\angle BCE = \angle DCE = \angle AED$. Докажите, что $AE+AD = BE$.

4. Даны натуральные числа $c > b > a$. Докажите, что среди $2c$ последовательных чисел можно выбрать три различных числа x, y, z, произведение которых делится на abc.

5. Будем говорить, что точка S на стороне многоугольника P *видна из точки* E, лежащей вне P, если отрезок SE не содержит точек, лежащих на сторонах P, кроме самой точки S. При каких натуральных n можно раскрасить стороны правильного 101-угольника в три цвета так, чтобы каждая сторона была раскрашена ровно в один цвет, в каждый цвет была покрашена хотя бы одна сторона и из каждой точки вне 101-угольника были видны точки не более двух цветов? Вершины многоугольника не раскрашиваются.

6. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого численно равны объём, сумма площадей всех шести граней и сумма длин всех двенадцати рёбер?

7. Точка S на стороне PR треугольника PQR такова, что $PS = 2$, $SR = 1$, $\angle PRQ = 45°$. T — основание перпендикуляра из P на прямую QS. Оказалось, что $\angle PST = 60°$. Найдите величину угла QPR.

8. Натуральное число n назовём *гармоничным*, если у него есть два разных натуральных делителя, одинаково отстоящих от $n/3$. Сколько существует гармоничных чисел, не превосходящих 2018?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Даны положительные числа *a, b, c, d*, для которых выполнено равенство

$$\frac{1}{1+a+ab+abc}+\frac{1}{1+b+bc+bcd}+\frac{1}{1+c+cd+cda}+\frac{1}{1+d+da+dab}=1.$$

Докажите, что $abcd = 1$.

2. Пусть $n > 1$ — нечётное натуральное число. Чему равен максимум суммы $|a_1-1|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-n|$, где среди a_1, a_2, …, a_n каждое число от 1 до n встречается ровно один раз?

3. В ряд лежат 20 шариков: 10 красных и 10 синих в некотором порядке. За один ход можно поменять местами два соседних шарика или два шарика, лежащих через один. Докажите, что есть такое расположение шариков (тоже 10 красных и 10 синих в ряд в некотором порядке), которое невозможно получить из исходного быстрее, чем за 25 ходов.

4. Изначально клетки доски 101×101 заполнены черными и белыми фишками в шахматном порядке (черных больше, чем белых). Первым ходом Петя снимает с доски одну черную фишку и перемещает одну из соседних по стороне белых на освободившееся место. Затем Вася перемещает черную фишку на свободное место, затем Петя белую на свободное место и т.д. (больше фишки с доски не снимаются, перемещение происходит на соседнюю по стороне клетку). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Имеет ли возможность кто-то выиграть вне зависимости от действий соперника, и если да, то кто: Петя или Вася?

5. Делители составного натурального числа n (включая n и 1) выписаны по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < ... < n$. Оказалось, что числа d_2-d_1, d_3-d_2, ... пропорциональны числам 1, 2, ... (именно в таком порядке). Найдите все такие n.

6. Про три различных натуральных числа *a, b, c* с суммой, меньшей 150, известно, что $\frac{b-1}{a-1}$ и $\frac{b+1}{a+1}$ являются последовательными натуральными числами, а также $\frac{c-1}{b-1}$ и $\frac{c+1}{b+1}$ являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие тройки.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$ и $AB = AD = 1$. Найдите длину диагонали AC.

8. За круглым столом сидят $2n$ человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

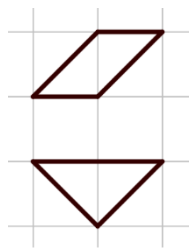
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные числа a и b, для которых оба числа $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ и $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ являются натуральными.

2. Пусть $n>1$ — нечётное натуральное число. Чему равен максимум суммы $|a_1-1|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-n|$, где среди a_1, a_2, …, a_n каждое число от 1 до n встречается ровно один раз?

3. В ряд лежат 20 шариков: 10 красных и 10 синих в некотором порядке. За один ход можно поменять местами два соседних шарика. Докажите, что есть такое расположение шариков (тоже 10 красных и 10 синих в ряд в некотором порядке), которое невозможно получить из исходного быстрее, чем за 50 ходов.

4. Изначально клетки доски 101×101 заполнены черными и белыми фишками в шахматном порядке (черных больше, чем белых). Первым ходом Петя снимает черную фишку с центральной клетки доски и перемещает одну из соседних по стороне белых на освободившееся место. Затем Вася перемещает черную фишку на свободное место, затем Петя белую на свободное место и т.д. (больше фишки с доски не снимаются, перемещение происходит на соседнюю по стороне клетку). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Имеет ли возможность кто-то выиграть вне зависимости от действий соперника, и если да, то кто: Петя или Вася?



5. Из двух треугольников, равных половинкам клетки, можно составить или параллелограмм, или треугольник, которые показаны на рисунке. При каких n и k прямоугольник $n\times k$ можно разрезать на такие фигуры? Фигурки можно использовать в любом количестве, поворачивать и переворачивать.

6. Про три различных натуральных числа a, b, c с суммой, меньшей 150, известно, что $\dfrac{b-1}{a-1}$ и $\dfrac{b+1}{a+1}$ являются последовательными натуральными числами, а также $\dfrac{c-1}{b-1}$ и $\dfrac{c+1}{b+1}$ являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие тройки.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD=100°$, $\angle BCD=130°$ и $AB=AD=1$. Найдите длину диагонали AC.

8. За круглым столом сидят $2n$ человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

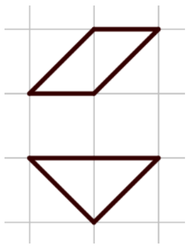
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные числа a и b, для которых оба числа $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ и $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ являются натуральными.

2. Пусть $n>1$ — нечётное натуральное число. Чему равен максимум суммы $|a_1-1|+|a_2-2|+\ldots+|a_n-n|$, где среди a_1, a_2, …, a_n каждое число от 1 до n встречается ровно один раз?

3. В ряд лежат 20 шариков: 10 красных и 10 синих в некотором порядке. За один ход можно поменять местами два соседних шарика. Докажите, что есть такое расположение шариков (тоже 10 красных и 10 синих в ряд в некотором порядке), которое невозможно получить из исходного быстрее, чем за 50 ходов.

4. Изначально клетки доски 11×11 заполнены черными и белыми фишками в шахматном порядке (черных больше, чем белых). Первым ходом Петя снимает черную фишку с центральной клетки доски и перемещает одну из соседних по стороне белых на освободившееся место. Затем Вася перемещает черную фишку на свободное место, затем Петя белую на свободное место и т.д. (больше фишки с доски не снимаются, перемещение происходит на соседнюю по стороне клетку). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Имеет ли возможность кто-то выиграть вне зависимости от действий соперника, и если да, то кто: Петя или Вася?



5. Из двух треугольников, равных половинкам клетки, можно составить или параллелограмм, или треугольник, которые показаны на рисунке. При каких n и k прямоугольник $n\times k$ можно разрезать на такие фигуры? Фигурки можно использовать в любом количестве, поворачивать и переворачивать.

6. Существует ли семиугольник (возможно, невыпуклый), который можно разбить внутренними диагоналями на 6 треугольников? Внутренней диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две его не соседние вершины, не выходящий за границы многоугольника. Диагонали могут пересекаться.

7. Даны натуральные числа $c>b>a$. Докажите, что среди $2c$ последовательных чисел можно выбрать три различных числа x, y, z, произведение которых делится на abc.

8. За круглым столом сидят 2018 человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Найдите хотя бы одно натуральное число n, для которого существует ровно 2017 натуральных чисел m таких, что выполнены неравенства: $2 \le n/m \le 5$.

2. Из шахматной доски (8×8) вырезана угловая клетка. Двое по очереди расставляют на оставшейся части доски не бьющие друг друга ладьи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть независимо от действий другого игрока?

3. В ряд лежат 13 шариков: сначала 6 красных, затем 1 зелёный, затем 6 синих. За один ход можно поменять местами два соседних шарика или два шарика, лежащих через один. Можно ли за 23 хода переместить все синие шарики на места красных, а красные — на места синих?

4. Фигура *казябра* представляет собой квадрат 3×3 без трех угловых клеток. Прямоугольник 50×100 разрезали на доминошки и казябры. Могло ли фигурок каждого вида оказаться поровну?

5. Код к сейфу состоит из двух цифр и может начинаться с нуля. Сейф сломан, поэтому откроется, если цифра в первой ячейке отличается от соответствующей цифры кода не более чем на два, а во второй ячейке цифра имеет ту же четность, что и соответствующая цифра кода. Какое наименьшее количество попыток необходимо, чтобы гарантированно открыть сейф?

6. *Палиндромом* называется число, которое слева направо и справа налево читается одинаково, например, 1991. Найдите все четырехзначные палиндромы, которые можно представить в виде суммы двух трехзначных палиндромов.

7. Даны натуральные числа $c > b > a$. Докажите, что среди $2c$ последовательных чисел можно выбрать три различных числа x, y, z, произведение которых делится на abc.

8. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Из доски 100×100 вырезан угловой квадрат 25×25. Двое по очереди расставляют на оставшейся части доски не бьющие друг друга ладьи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Все делители составного числа n (включая 1 и само n) выписали в порядке возрастания. Затем между каждыми двумя соседними делителями записали их разность, а сами делители стерли. В полученном ряду четные и нечетные числа чередуются (первое может быть как четным, так и нечетным). Найдите все составные числа n, для которых это возможно.

3. В ряд лежат 20 шариков: 10 красных и 10 синих в некотором порядке. За один ход можно поменять местами два соседних. Докажите, что есть такое расположение шариков (тоже 10 красных и 10 синих в ряд в некотором порядке), которое невозможно получить из исходного быстрее, чем за 50 ходов.

4. За круглым столом сидят 20 человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

5. Число N называется *хорошим*, если среди любых N подряд идущих натуральных чисел больше кратных 100, чем кратных 101. Верно ли, что если N — хорошее, то и $N+1$ — хорошее?

6. За одну операцию из пары натуральных чисел a, b можно получить пару $a–2b$, b, если $a > 2b$ или пару $2b–a$, b, если $b < a < 2b$. Докажите, что через несколько таких операций окажется, что одно число в паре вдвое больше другого или числа окажутся равны.

7. Код к сейфу — двузначное число (может начинаться с нуля). За одну попытку можно ввести двузначное число, и выяснить, откроется ли при этом сейф. Сейф сломан, поэтому откроется, если цифра в каком-нибудь из разрядов отличается от соответствующей цифры кода не более чем на два, а в другом разряде цифра имеет ту же четность, что и соответствующая цифра кода. Сколько попыток нужно, чтобы гарантированно открыть сейф?

8. Найдите хотя бы одно натуральное число n, для которого существует ровно 2018 натуральных чисел m таких, что выполнены неравенства: $2 \le n/m \le 5$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Из доски 10×10 вырезан угловой квадрат 2×2. Двое по очереди расставляют на оставшейся части доски не бьющие друг друга ладьи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Число назовём *самоподстраивающимся*, если какую бы к нему ненулевую цифру справа ни приписать, получившееся число будет делиться на эту цифру. Сколько всего четырёхзначных самоподстраивающихся чисел?

3. В ряд лежат 20 шариков: 10 красных и 10 синих в некотором порядке. За один ход можно поменять местами два соседних шарика. Докажите, что есть такое расположение шариков (тоже 10 красных и 10 синих в ряд в некотором порядке), которое невозможно получить из исходного быстрее, чем за 50 ходов.

4. За круглым столом сидят 20 человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

5. Число N называется хорошим, если среди любых N подряд идущих натуральных чисел кратных 100 больше, чем кратных 101. Верно ли, что если N — хорошее, то и $N+1$ — хорошее?

6. За одну операцию из пары натуральных чисел a, b можно получить пару $a-2b$, b, если $a > 2b$ или пару $2b-a$, b, если $b < a < 2b$. Докажите, что через несколько таких операций окажется, что одно число в паре вдвое больше другого или числа окажутся равны.

7. Код к сейфу состоит из двух цифр и может начинаться с нуля. Сейф сломан, поэтому откроется, если цифра в первой ячейке отличается от соответствующей цифры кода не более чем на два, а во второй ячейке цифра имеет ту же четность, что и соответствующая цифра кода. Сколько попыток необходимо и достаточно, чтобы гарантированно открыть сейф?

8. Найдите хотя бы одно натуральное число n, для которого существует ровно 2018 натуральных чисел m таких, что выполнены неравенства: $2 \le n/m \le 5$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Из шахматной доски вырезана угловая клетка. Двое по очереди расставляют на доске не бьющие друг друга ладьи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Петя задумал составное число n, а Вася — натуральное число m. Петя записал в тетрадку по возрастанию все делители n, кроме 1 и n. Вася записал в другую тетрадку по возрастанию все делители m, кроме 1 и m. Если к первому из записанных Петей делителей прибавить 1, ко второму — 3, к третьему — 5, и т.д., получится в точности набор всех делителей, записанных Васей. Какие числа могли задумать ребята? Перечислите все возможности.

3. В ряд лежат 11 шариков — сначала 5 красных, затем 1 зелёный, затем 5 синих. За один ход можно поменять местами два соседних шарика или два шарика, лежащих через один. За какое наименьшее число ходов можно переместить все синие шарики на места красных и все красные на места синих?

4. За круглым столом сидят 2018 человек, каждый из которых знаком с обоими своими соседями, но не знаком с тем, кто сидит точно напротив. Докажите, что всех этих людей можно так пересадить, чтобы каждый был знаком ровно с одним из двух своих соседей.

5. Число назовём *самоподстраивающимся*, если какую бы к нему ненулевую цифру справа ни приписать, получившееся число будет делиться на эту цифру. Сколько всего четырёхзначных самоподстраивающихся чисел?

6. Фигура *казябра* представляет собой квадрат 3×3 без трех угловых клеток. Прямоугольник 50×100 разрезали на доминошки и казябры. Могло ли фигурок каждого вида оказаться поровну?

7. Код к сейфу состоит из двух цифр и может начинаться с нуля. Сейф сломан, поэтому откроется, если цифра в первой ячейке отличается от соответствующей цифры кода не более чем на два, а во второй ячейке цифра имеет ту же четность, что и соответствующая цифра кода. Сколько попыток необходимо и достаточно, чтобы гарантированно открыть сейф?

8. *Палиндромом* называется число, которое слева направо и справа налево читается одинаково, например, 1991. Найдите все четырехзначные палиндромы, которые можно представить в виде суммы двух трехзначных палиндромов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Из шахматной доски вырезана угловая клетка. Двое по очереди расставляют на доске не бьющие друг друга ладьи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. На квадратном торте выбрали точку и провели от неё прямолинейные разрезы ко всем углам торта. Сколько весит самый большой из получившихся кусков, если остальные весят 200 г, 350 г и 400 г?

3. В ряд лежат 13 шариков: сначала 6 красных, затем 1 зелёный, затем 6 синих. За один ход можно поменять местами два соседних шарика или два шарика, лежащих через один. Можно ли за 23 хода переместить все синие шарики на места красных, а красные — на места синих?

4. В государстве несколько городов, некоторые из которых связаны дорогами. Всего в государстве 2018 дорог. Известно, что между любой парой городов можно проехать единственным путём, не проходящим ни по какой дороге больше одного раза. Докажите, что можно организовать 1009 бригад, каждая из которых будет обслуживать ровно две дороги, выходящие из одного города, таким образом, чтобы все дороги обслуживались

5. Число назовём *самоподстраивающимся*, если какую бы к нему ненулевую цифру справа ни приписать, получившееся число будет делиться на эту цифру. Сколько всего четырёхзначных самоподстраивающихся чисел?

6. Дана пара натуральных чисел. Большее число можно заменить на разность его и удвоенного меньшего, если оно больше удвоенного меньшего, и на разность удвоенного меньшего и его, если оно меньше удвоенного меньшего. Докажите, что через несколько таких операций окажется, что одно число в паре вдвое больше другого или числа окажутся равны.

7. Круг для игры в рулетку разбит на 36 секторов, каждый из которых, в свою очередь, разделён на две части — красную и чёрную. Ставку можно сделать, назвав до остановки шарика номер и цвет. Ставка выиграет, если шарик остановится на указанном номере или на указанном цвете, но при номере, отличающемся от указанного не более чем на 1 (считается, что первый сектор следует за тридцать шестым и их номера отличаются на 1). Какое наименьшее число ставок надо сделать, чтобы наверняка выиграть?

8. Найдите хотя бы одно натуральное число n, для которого существует ровно 2018 натуральных чисел m таких, что выполнены неравенства: $2 \le n/m \le 5$.