МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a и b ($a > b$) таковы, что $(a-b, ab+1) = 1$ и $(a+b, ab-1) = 1$. Докажите, что число $(a-b)^2+(ab+1)^2$ не является точным квадратом.

2. В треугольнике ABC проведена медиана AD. На стороне AC отмечена точка E, а на продолжении отрезка AD за точку D — точка F так, что $\angle ABE = 30°$ и $\angle BFE = 90°$. Докажите, что $S_{BECF} \le 2S_{ABE}$.

3. Пусть a и b — натуральные числа. Последовательность (a_n) задана условиями: $a_1 = a$, $a_2 = b$, и при каждом $n \ge 2$ число a_{n+1} равно количеству членов, равных a_n, среди первых n членов последовательности. При каких a и b последовательность (a_n+a_{n+1}) не убывает, начиная с некоторого места?

4. Пусть $n > 2$ — натуральное число. Назовём множество S натуральных чисел *всеобъемлющим*, если для любого натурального $r < n$ в S можно указать несколько элементов, сумма которых даёт остаток r при делении на n. Докажите, что из любого всеобъемлющего множества можно выбрать всеобъемлющее подмножество, содержащее не более $n-1$ элемента.

5. В треугольнике ABC сторона AB вдвое больше стороны BC. Его медианы BN и CK пересекаются в точке M. Продолжение медианы треугольника KMN, проведенной из вершины N, пересекает отрезок BK в точке D. Докажите, что углы ADN и CBN равны.

6. Все вершины дерева с $2n$ вершинами первоначально покрашены в красный цвет. Разрешается выбрать любые две вершины одного цвета, соединённые ребром, и перекрасить их в другой цвет: из красного — в синий, а из синего — в красный. Докажите, что все вершины дерева можно перекрасить в синий в том и только в том случае, когда все они разбиваются на две группы по n вершин в каждой так, чтобы концы каждого ребра принадлежали разным группам.

7. Даны два различных положительных числа a и b. Докажите, что на числовой прямой найдутся два числа на расстоянии $1/\max\{a, b\}$ такие, что любое x, находящееся между этими числами, удовлетворяет уравнению $[ax+b] = [bx+a]$. ($[t]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее t.)

8. Серёжа покупает конфеты для Тани и Маши. В магазине продаются коробки с любым натуральным количеством конфет. Когда Серёжа принесёт конфеты, Таня и Маша назовут ему два числа a и b, сумма которых не больше 2018, и ожидают, что он даст Тане ровно a конфет, а Маше ровно b конфет, не открывая коробок. Какое наименьшее количество коробок необходимо купить Серёже, чтобы быть готовым ко всему?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА: ПЕРВАЯ ЛИГА; ВТОРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1-2 МЕСТА

1. Натуральные числа a и b ($a > b$) таковы, что $(a–b,ab+1) = 1$ и $(a+b,ab–1) = 1$. Докажите, что число $(a–b)^2+(ab+1)^2$ не является точным квадратом.

2. Все звенья ломаной $ABCDEF$ равны, а точки C, B, E, A и F лежат на одной прямой именно в таком порядке. Докажите, что периметр треугольника CDE меньше периметра треугольника ADF.

3. Пусть a и b — натуральные числа. Последовательность (a_n) задана условиями: $a_1 = a$, $a_2 = b$, и при каждом $n \geq 2$ число a_{n+1} равно количеству членов, равных a_n, среди первых n членов последовательности. При каких a и b последовательность (a_n+a_{n+1}) не убывает, начиная с некоторого места?

4. Обозначим через $A(n)$ количество способов представить n в виде суммы нескольких различных нечетных чисел (способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; например, 9 представляется ровно 2 способами: 9 и 1+3+5). Докажите, что при $n > 1000$ выполнено неравенство $A(n) < A(n+1)$.

5. В треугольнике ABC сторона AB вдвое больше стороны BC. Его медианы BN и CK пересекаются в точке M. Продолжение медианы треугольника KMN, проведенной из вершины N, пересекает отрезок BK в точке D. Докажите, что углы ADN и CBN равны.

6. Пусть n — натуральное число. В королевстве $10n+1$ городов. Король хочет соединить некоторые пары городов дорогами так, чтобы для любого города X и для любого $1 \leq d \leq 10$ ровно n городов были на расстоянии d от города X. (Расстояние между городами — это наименьшее количество дорог в пути, соединяющем эти два города.) При каких n королю удастся воплотить свой план в жизнь?

7. Даны два различных положительных числа a и b. Докажите, что на числовой прямой найдутся два числа на расстоянии $1/\max\{a, b\}$ такие, что любое x, находящееся между этими числами, удовлетворяет уравнению $[ax+b] = [bx+a]$. ($[t]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее t.)

8. Серёжа покупает конфеты для Тани и Маши. В магазине продаются коробки с любым натуральным количеством конфет. Когда Серёжа принесёт конфеты, Таня и Маша назовут ему два числа a и b, сумма которых не больше 2018, и ожидают, что он даст Тане ровно a конфет, а Маше ровно b конфет, не открывая коробок. Какое наименьшее количество коробок необходимо купить Серёже, чтобы быть готовым ко всему?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА

1. Найдите все составные натуральные числа n такие, что каждый натуральный делитель d числа n, отличный от 1 и от самого n, удовлетворяет условию $n-20 \le d \le n-12$.

2. В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке P и образует с ним угол 60°. Точка M — середина стороны BC, а Q — точка пересечения CP со стороной AB. Докажите, что если $\angle PCA = 45°$, то $PM = AQ/3$.

3. Сто коробок занумерованы числами от 1 до 100. В коробках лежат шары. Известно, что количества шаров в любых двух коробках с последовательными номерами отличаются на 1. В коробках с номерами 1, 4, 7, 10, …, 100 суммарно содержится 289 шаров. Какое наибольшее количество шаров может лежать во всех 100 коробках?

4. Обозначим через $A(n)$ количество способов представить n в виде суммы нескольких различных нечетных чисел (способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; например, 9 представляется ровно 2 способами: 9 и 1+3+5). Докажите, что при $n > 1000$ выполнено неравенство $A(n) < A(n+1)$.

5. В треугольнике ABC сторона AB вдвое больше стороны BC. Его медианы BN и CK пересекаются в точке M. Продолжение медианы треугольника KMN, проведенной из вершины N, пересекает отрезок BK в точке D. Докажите, что углы ADN и CBN равны.

6. Пусть n — натуральное число. В королевстве $2n+1$ город. Король хочет соединить некоторые пары городов дорогами так, чтобы для любого города X было ровно n городов на расстоянии 1 от города X и ровно n городов на расстоянии 2 от города X. (Расстояние между городами — это наименьшее количество дорог в пути, соединяющем эти два города.) При каких n королю удастся воплотить свой план в жизнь?

7. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существуют n последовательных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, что $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n}$.

8. Серёжа покупает конфеты для Тани и Маши. В магазине продаются коробки с любым натуральным количеством конфет. Когда Серёжа принесёт конфеты, Таня и Маша назовут ему два числа a и b, сумма которых не больше 2018, и ожидают, что он даст Тане ровно a конфет, а Маше ровно b конфет, не открывая коробок. Докажите, что Серёжа может заготовить 21 коробку так, чтобы быть готовым ко всему.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. На доску выписано $m > 3$ положительных вещественных чисел, не обязательно различных. Известно, что любое число меньше суммы всех остальных. При каких m выписанные числа всегда можно разбить на три непустых группы так, чтобы сумма в каждой группе была меньше, чем сумма чисел в двух других?

2. В углу доски 7×101 (7 строк, 101 столбец) стоит *хромая ладья*, которая умеет ходить только на соседнюю по стороне клетку. Она хочет обойти часть клеток по одному разу и вернуться на то же поле. За каждый горизонтальный ход ладья получает 1 рубль, за каждый вертикальный ход отдает 1 рубль (можно в долг). Какой наибольший заработок может обеспечить себе ладья?

3. Простые числа p и q удовлетворяют равенству $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$ при некотором натуральном n. Найдите, чему может равняться разность $q-p$.

4. Все вершины дерева с $2n$ вершинами первоначально покрашены в красный цвет. Разрешается выбрать любые две вершины одного цвета, соединённые ребром, и перекрасить их в другой цвет: из красного — в синий, а из синего — в красный. Докажите, что все вершины дерева можно перекрасить в синий в том и только в том случае, когда все они разбиваются на две группы по n вершин в каждой так, чтобы концы каждого ребра принадлежали разным группам.

5. Обозначим через $A(n)$ количество способов представить n в виде суммы нескольких различных нечетных чисел (способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, одинаковы; например, 9 представляется ровно 2 способами: 9 и 1+3+5). Найдите все $n > 10$, при которых выполнено $A(n) = A(n+1)$.

6. На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно такие, что $BF = FC$, $EF \perp BC$ и $\angle ABE = \angle DEC$. Известно, что $\angle BAD < 2\angle ADC$. Докажите, что $AB+AE > ED$.

7. Серёжа покупает конфеты для Тани и Маши. В магазине продаются коробки с любым натуральным количеством конфет. Когда Серёжа принесёт конфеты, Таня и Маша назовут ему два числа a и b, сумма которых не больше 40, и ожидают, что он даст Тане ровно a конфет, а Маше ровно b конфет, не открывая коробок. Какое наименьшее количество коробок необходимо купить Серёже, чтобы быть готовым ко всему?

8. Натуральное число n таково, что число $2n-1$ является простым. Докажите, что среди любых n различных чисел натуральных $a_1, ..., a_n$ найдутся два различных числа a_i и a_j с условием $(a_i+a_j)/\text{НОД}(a_i, a_j) \geq 2n-1$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. На доску выписано $m > 3$ положительных вещественных чисел, не обязательно различных. Известно, что любое число меньше суммы всех остальных. При каких m выписанные числа всегда можно разбить на три непустых группы так, чтобы сумма в каждой группе была меньше, чем сумма чисел в двух других?

2. В углу доски 5×11 (5 строк, 11 столбцов) стоит *хромая ладья*, которая умеет ходить только на соседнюю по стороне клетку. Она хочет обойти часть клеток по одному разу и вернуться на то же поле. За каждый горизонтальный ход ладья получает 1 рубль, за каждый вертикальный ход отдает 1 рубль (можно в долг). Какой наибольший заработок может обеспечить себе ладья?

3. Простые числа p и q удовлетворяют равенству $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$ при некотором натуральном n. Найдите, чему может равняться разность $q–p$.

4. В клубе состоят $n > 1$ джентльменов разного роста. Каждый знаком хотя бы с одним из остальных членов клуба. Они хотят разойтись по нескольким комнатам так, чтобы у каждого джентльмена самый низкий из его знакомых оказался в другой комнате. Какого наименьшего числа комнат им наверняка хватит?

5. Обозначим через $A(n)$ количество способов представить n в виде суммы нескольких различных нечетных чисел (способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, одинаковы; например, 9 представляется ровно 2 способами: 9 и 1+3+5). Докажите, что при $n > 1000$ выполнено неравенство $A(n) < A(n+1)$.

6. На сторонах AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно такие, что $BF = FC$, $EF \perp BC$ и $\angle ABE = \angle DEC$. Известно, что $\angle BAD < 2\angle ADC$. Докажите, что $AB+AE > ED$.

7. На n карточках выписаны натуральные числа от 1 до n, каждое по одному разу. Сначала Петя забирает себе одну карточку. После этого Вася забирает себе две карточки с последовательными натуральными числами. Затем Петя забирает себе три карточки с тремя последовательными числами. При каком наименьшем n после этого Вася сможет действовать так, чтоб своим вторым ходом суметь забрать себе четыре карточки с четырьмя последовательными числами вне зависимости от действий Пети?

8. Натуральное число n таково, что число $2n–1$ является простым. Докажите, что среди любых n различных чисел натуральных $a_1, ..., a_n$ найдутся два различных числа a_i и a_j с условием $(a_i+a_j)/НОД\ (a_i, a_j) \geq 2n–1$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА: ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА; ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА; ТРЕТЬЯ ЛИГА, ФИНАЛ

1. Существует ли 20-угольник, все вершины которого лежат на двух прямых?

2. В углу доски 5×11 (5 строк, 11 столбцов) стоит *хромая ладья*, которая умеет ходить только на соседнюю по стороне клетку. Она хочет обойти часть клеток по одному разу и вернуться на то же поле. За каждый горизонтальный ход ладья получает 1 рубль, за каждый вертикальный ход отдает 1 рубль (можно в долг). Какой наибольший заработок может обеспечить себе ладья?

3. Простые числа p и q удовлетворяют равенству $\frac{p}{p+1}+\frac{q+1}{q}=\frac{2n}{n+2}$ при некотором натуральном n. Найдите, чему может равняться разность $q–p$.

4. В клубе состоят $n > 1$ джентльменов разного роста. Каждый знаком хотя бы с одним из остальных членов клуба. Они хотят разойтись по нескольким комнатам так, чтобы у каждого джентльмена самый низкий из его знакомых оказался в другой комнате. Какого наименьшего числа комнат им наверняка хватит?

5. Обозначим через $A(n)$ количество способов представить n в виде суммы нескольких различных нечетных чисел (способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, одинаковы; например, 9 представляется ровно 2 способами: 9 и 1+3+5). Докажите, что при любом n выполнено неравенство $A(n) \le A(n+1)$.

6. Ряд из 10 юношей выстроился напротив ряда из 10 девушек. Каждому из юношей нравится ровно одна девушка, и каждой девушке нравится ровно один юноша. Сначала все юноши одновременно пошли по прямой к нравящимся им девушкам, чтобы подарить цветочек, и вернулись на свои места по тому же пути, а затем все девушки одновременно пошли по прямой к нравящимся им юношам, чтобы подарить им бантик. В результате кто-то мог получить несколько подарков, а кто-то мог не получить ничего. Оказалось, что ни у каких двух юношей пути не пересеклись, и ни у каких двух девушек пути не пересеклись. Докажите, что какие-то юноша и девушка взаимно нравятся друг другу.

7. На n карточках выписаны натуральные числа от 1 до n, каждое по одному разу. Сначала Петя забирает себе одну карточку. После этого Вася забирает себе две карточки с последовательными натуральными числами. Затем Петя забирает себе три карточки с тремя последовательными числами. При каком наименьшем n после этого Вася сможет действовать так, чтоб своим вторым ходом суметь забрать себе четыре карточки с четырьмя последовательными числами вне зависимости от действий Пети?

8. Существуют ли такие трехзначные числа n и k, для которых НОД(n, k) = НОД(n+1, k+1) = НОД(n+2, k+2) = ... = НОД(n+2018, k+2018)?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВТОРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО; ТРЕТЬЯ ЛИГА, НЕ ФИНАЛЬНЫЕ БОИ

1. Существует ли 20-угольник, все вершины которого лежат на двух прямых?

2. В углу доски 8×8 стоит *хромая ладья*, которая умеет ходить только на соседнюю по стороне клетку. Она хочет обойти часть клеток по одному разу и вернуться на то же поле. За каждый горизонтальный ход ладья получает 1 рубль, за каждый вертикальный ход отдает 1 рубль (можно в долг). Какой наибольший заработок может обеспечить себе ладья?

3. По кругу через равные промежутки стоят 100 Панд, 100 Вомбатов и 100 Коал именно в таком порядке. Найдите наименьшее n со следующим свойством: как бы ни взять по n зверей каждого вида, среди них найдутся три зверя разных видов, которые будут стоять в вершинах равностороннего треугольника (то есть между этими тремя зверями стоит по 99 других зверей).

4. В клубе состоят $n > 1$ джентльменов разного роста. Каждый знаком хотя бы с одним из остальных членов клуба. Они хотят разойтись по нескольким комнатам так, чтобы у каждого джентльмена самый низкий из его знакомых оказался в другой комнате. Какого наименьшего числа комнат им наверняка хватит?

5. Обозначим через $A(n)$ количество способов представить n в виде суммы нескольких различных нечетных чисел (способы, отличающиеся лишь порядком слагаемых, одинаковы; например, 9 представляется ровно 2 способами: 9 и 1+3+5). Докажите, что при любом n выполнено неравенство $A(n) \le A(n+1)$.

6. Ряд из 10 юношей выстроился напротив ряда из 10 девушек. Каждому из юношей нравится ровно одна девушка, и каждой девушке нравится ровно один юноша. Сначала все юноши одновременно пошли по прямой к нравящимся им девушкам, чтобы подарить цветочек, и вернулись на свои места по тому же пути, а затем все девушки одновременно пошли по прямой к нравящимся им юношам, чтобы подарить им бантик. В результате кто-то мог получить несколько подарков, а кто-то мог не получить ничего. Оказалось, что ни у каких двух юношей пути не пересеклись, и ни у каких двух девушек пути не пересеклись. Докажите, что какие-то юноша и девушка взаимно нравятся друг другу.

7. За круглым столом сидят 50 гномов и 50 эльфов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый за столом произносит фразу: «Оба моих соседа — лжецы!». Затем каждый рыцарь произносит: «Оба моих соседа — эльфы!» Сколько лжецов может быть за столом?

8. Найдите все пары трехзначных чисел n и k, для которых НОД(n, k) = НОД(n+1, k+1) = НОД(n+2, k+2) = ... = НОД(n+2018, k+2018)?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. Панда и Вомбат играют в игру. У них есть 2018 бананов. Сначала вомбат распределяет бананы по трем кучам, в каждую хотя бы по одному банану. Затем они делают ходы по очереди, начинает Панда. За один ход можно взять из одной кучи 1, 2 или 3 банана. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Пусть n — натуральное число. В королевстве $10n+1$ городов. Король хочет соединить некоторые пары городов дорогами так, чтобы для любого города X и для любого $1 \le d \le 10$ ровно n городов были на расстоянии d от города X. (Расстояние между городами — это наименьшее количество дорог в пути, соединяющем эти два города.) При каких n королю удастся воплотить свой план в жизнь?

3. Про натуральные числа a и b известно, что $7a = 3b+8$. Кроме того, $39a+1$ делится на $5b+4$. Найдите a и b.

4. За круглым столом сидят 50 гномов и 50 эльфов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый за столом произносит фразу: «Оба моих соседа — лжецы!». Затем каждый рыцарь произносит: «Оба моих соседа — эльфы!» Сколько лжецов может быть за столом?

5. Какое максимальное количество сторон девятиугольника может лежать на трех прямых?

6. Дано 17 гирь, причём каждая гиря весит меньше, чем остальные 16 в сумме. Докажите, что эти гири можно разбить на 3 группы так, что суммарный вес гирь любой группы меньше суммарного веса всех оставшихся гирь.

7. Какое наименьшее количество клеток можно вырезать из квадрата 30×30 так, чтобы не осталось ни одного квадрата 2×2 и ни одной горизонтальной полоски 1×4?

8. Калькулятор умеет выполнять всего две операции: заменить число x на $x^6+x^4+x^3$ или поделить число на 3, 5 или 7, если оно поделится без остатка. Можно ли при помощи этого калькулятора получить из числа 1 число 101?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

ГРУППА «СТАРТ»: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА; ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 МЕСТА

1. Панда и Вомбат играют в игру. У них есть 2018 бананов. Сначала вомбат распределяет бананы по трем кучам, в каждую хотя бы по одному банану. Затем они делают ходы по очереди, начинает Панда. За один ход можно взять из одной кучи 1, 2 или 3 банана. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Пусть n — натуральное число. В королевстве $2n+1$ город. Король хочет соединить некоторые пары городов дорогами так, чтобы для любого города X было ровно n городов на расстоянии 1 от города X и ровно n городов на расстоянии 2 от города X. (Расстояние между городами — это наименьшее количество дорог в пути, соединяющем эти два города.) При каких n королю удастся воплотить свой план в жизнь?

3. Про натуральные числа a и b известно, что $7a = 3b+8$. Кроме того, $39a+1$ делится на $5b+4$. Может ли a^2+b^2 делиться на 4?

4. За круглым столом сидят 50 гномов и 50 эльфов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый за столом произносит фразу: «Оба моих соседа — лжецы!». Затем каждый рыцарь произносит: «Оба моих соседа — эльфы!» Сколько лжецов может быть за столом?

5. Могут ли все вершины 12-угольника лежать на трёх прямых?

6. Дано 7 гирь, причём каждая гиря весит меньше, чем остальные 6 в сумме. Докажите, что эти гири можно разбить на 3 группы так, что суммарный вес гирь любой группы меньше суммарного веса всех оставшихся гирь.

7. Какое наименьшее количество клеток можно вырезать из квадрата 30×30 так, чтобы не осталось ни одного квадрата 2×2 и ни одной горизонтальной полоски 1×4?

8. Калькулятор умеет выполнять всего две операции: заменить число x на $x^6+x^4+x^3$ или поделить число на 3, 5 или 7, если оно поделится без остатка. Можно ли при помощи этого калькулятора получить из числа 1 число 101?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

ГРУППА «СТАРТ»: ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО; ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА

1. Фокусник положил на стол 18 карт — по 9 карт пиковой и бубновой масти. Из них: две двойки, две тройки, …, две десятки. Зритель отбирает из них любые 11 карт. Докажите, что фокусник всегда сможет найти среди выбранных три карты, среди которых есть две с идущими подряд номиналами, и две карты одного номинала.

2. Про натуральные числа a и b известно, что $7a = 3b+8$. Кроме того, $39a+1$ делится на $5b+4$. Может ли a^2+b^2 делиться на 4?

3. В протоколе матбоя в центральный столбец по каждому раунду ставится номер разыгрываемой задачи и стрелочка. Всего 4 вида стрелочек на такие 4 ситуации: вызов команды слева, вызов команды справа, проверка корректности от команды слева, проверка корректности от команды справа. Известно, что на бою между двумя командами в финале Уральского турнира каждая из восьми задач была рассказана на 12 баллов. Сколько есть вариантов заполнения центрального столбца (то есть по каждому раунду это должна быть пара: стрелочка и номер задачи) в протоколе этого боя?.

4. За круглым столом сидят 50 гномов и 50 эльфов, каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый за столом произносит фразу: «Оба моих соседа — лжецы!». Затем каждый рыцарь произносит: «Оба моих соседа — эльфы!» Сколько лжецов может быть за столом?

5. Существует ли 20-угольник, все вершины которого лежат на двух прямых?

6. Дано 5 гирь, причём каждая гиря весит меньше, чем остальные 4 в сумме. Докажите, что эти гири можно разбить на 3 группы так, что суммарный вес гирь любой группы меньше суммарного веса всех оставшихся гирь.

7. Какое наименьшее количество клеток можно вырезать из квадрата 30×30 так, чтобы не осталось ни одного квадрата 2×2 и ни одной горизонтальной полоски 1×4?

8. На доску выписаны по кругу цифры от 0 до 9 в каком-то порядке. Двое играют в такую игру: за один ход можно любые две соседние цифры поменять местами. Запрещено получать комбинацию, которая уже встречалась. (Комбинации, отличающиеся только поворотом, считаются разными). Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.11.2018

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Фокусник положил на стол 18 карт — по 9 карт пиковой и бубновой масти. Из них: две двойки, две тройки, …, две десятки. Зритель отбирает из них любые 11 карт. Докажите, что фокусник всегда сможет найти среди выбранных три карты, среди которых есть две с идущими подряд номиналами, и две карты одного номинала.

2. На заборе в ряд были выписаны несколько римских цифр I и X. Забор покрасили, и от цифр остались только верхние и нижние точки – по одной сверху и снизу от цифры I и по две сверху и снизу от цифры X. Всего сверху и снизу оказалось по 10 точек. Сколько различных исходных надписей могло быть?

3. Могут ли все вершины 12-угольника лежать на трёх прямых?

4. На классной доске записано несколько трёхзначных чисел. Все они составные, однако, любые два взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

5. Ижевск в 2 раза ближе к Северному полюсу, чем к Южному. Зурбаган в 3 раза ближе к экватору, чем к Южному полюсу. Во сколько раз Ижевск ближе к Северному полюсу, чем Зурбаган?

6. Сначала дано число 1234. Двое по очереди переставляют рядом стоящие цифры в имеющемся числе. Запрещено получать число, которое уже встречалось. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, независимо от игры соперника?

7. Какое наименьшее количество клеток можно вырезать из квадрата 30×30 так, чтобы не осталось ни одного квадрата 2×2 и ни одной горизонтальной полоски 1×4?

8. За первые два периода хоккейного матча зрители съели 2018 порций попкорна, а за последние 2 периода — 8102 порции. В перерывах зрители отдыхали от еды. В матче было три периода. Сколько всего попкорна было съедено? Укажите все возможности.