МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Андрей, Борис и Николай участвовали в соревновании по бегу. Все трое стартовали одновременно, и каждый бежал с постоянной скоростью. Когда финишировал Николай, Андрею оставалось еще 15 метров до финиша, а Борису — 35 метров. Когда финишировал Андрей, Борис был в 22 метрах от финиша. Найдите длину дистанции.

2. У Ежика есть 18 одинаковых на вид монет, среди которых 17 настоящих, которые весят поровну, и одна фальшивая, которая легче остальных. Все они вместе весят 214 г. Как-то раз Ежик потерял две монеты, и теперь все оставшиеся в сумме весят 190 г. Сколько весит фальшивая монета?

3. Сережа выбрал несколько натуральных чисел от 1 до 100. Оказалось, что сумма никаких двух из них не делится на 101, а сумма никаких трех из них не делится на 100. Какое наибольшее количество чисел мог выбрать Сережа?

4. Квадрат 8×8 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3 или 3×2. Докажите, что такими операциями нельзя всю доску сделать одноцветной.

5. Натуральное число оканчивается на 20180. Пусть A — сумма всех его делителей, оканчивающихся на 1, B — на 2, C — на 3, D — на 5. Докажите, что: **a)** (*3 балла*) $A+C \neq D$. **b)** (*4 балла*) $A+B+C \neq D$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

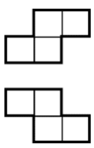
1. Карлсон поставил в ряд 10 синих, 10 красных и одну зеленую тарелку в каком-то порядке. На этих тарелках в сумме лежит 200 конфеток, причем на каждой тарелке лежит хотя бы одна конфетка. Известно, что правее одной из синих тарелок лежит 72 конфетки, левее одной из красных — 129 конфеток, а на зеленой — меньше, чем на любой другой. Сколько конфеток может лежать на зеленой тарелке? Найдите все ответы и докажите, что других нет.

2. Числа a и b (не обязательно целые) удовлетворяют двум условиям: $a+\frac{1}{b}=7$, $b+\frac{1}{a}=5$. Найдите все значения, которые может принимать выражение $ab+\frac{1}{ab}$.

3. На плоскости отмечено 60 точек. Известно, что 39 из них лежат на одной прямой, а остальные 21 на этой прямой не лежат. Докажите, что эти 60 точек можно разбить на 20 троек так, чтобы точки из одной тройки не лежали на одной прямой.

4. Натуральное число оканчивается на 10. Пусть A — сумма всех его делителей, оканчивающихся на 1, B — на 2, C — на 3, D — на 5. Докажите, что $A+2B+3C \leq D$.

5. Квадрат 11×11 разрезали на Z-тетрамино и единичные квадратики. Какое наименьшее число единичных квадратиков может быть в таком разрезании? Z-тетрамино можно поворачивать и переворачивать, пример двух расположений Z-тетрамино показан на рисунке.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 03.11.2018

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Числа a и b удовлетворяют условию $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{1}{ab}$?

2. На кольцевой дороге длиной 7 км расположены 7 кафе. Расстояние между соседними кафе — 1 км. Кирилл проинспектировал все кафе, начиная с кафе «Старт», двигаясь против часовой стрелки, так, что длины всех шести его переездов были различны. Оказалось, что самое большое расстояние, которое ему пришлось проехать от одного кафе до следующего, равно s. Какое наименьшее значение может иметь s?

3. Отрезки AB, BC и AD имеют одинаковую длину, и точка D лежит на отрезке BC. Докажите, что серединный перпендикуляр к DC, биссектриса угла ADC и прямая AC проходят через одну точку.

4. Квадрат 8×8 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3 или 3×2. Докажите, что такими операциями нельзя всю доску сделать одноцветной.

5. Докажите, что для каждого чётного целого a можно подобрать бесконечно много целых b таким образом, чтобы среди чисел вида u^2+au+b при целых u оказалось ровно одно простое. (Напомним, что все простые числа натуральны.)

Примечание. Задача 5 сформулирована здесь так, как ее надо было дать. К сожалению, по недосмотру жюри участникам олимпиады она была выдана в формулировке, где числа a и b были названы не целыми, а натуральными. В таком виде её не сумели решить ни участники, ни, как выяснилось позже, члены жюри.

Решения задач олимпиады 6 класса

Задача 1. *Андрей, Борис и Николай участвовали в соревновании по бегу. Все трое стартовали одновременно, и каждый бежал с постоянной скоростью. Когда финишировал Николай, Андрею оставалось еще 15 метров до финиша, а Борису — 35 метров. Когда финишировал Андрей, Борис был в 22 метрах от финиша. Найдите длину дистанции.*

Ответ. 165 м. Решение. Пока Андрей бежал последние 15 метров дистанции, Борис пробежал 35–22 = 13 метров. Значит, Андрей каждые 15 метров дистанции обгоняет Бориса на 2 метра. Так как перед последними 15 метрами Андрей обгонял Бориса на 20 метров, он к этому моменту пробежал (20:2)·15 = 150 метров, и длина дистанции равна 150+15 = 165 метров.

Задача 2. *У Ежика есть 18 одинаковых на вид монет, среди которых 17 настоящих, которые весят поровну, и одна фальшивая, которая легче остальных. Все они вместе весят 214 г. Как-то раз Ежик потерял две монеты, и теперь все оставшиеся в сумме весят 190 г. Сколько весит фальшивая монета?*

Ответ. 10 г. Решение. Заметим, что общий вес монет после потери уменьшился на 24 г. Допустим, Ёжик потерял настоящую и фальшивую монеты. Тогда настоящая монета весит больше 12 г. Но в таком случае 16 оставшихся монет должны весить больше 12·16 = 192 г, а они весят 190 г — противоречие. Значит, потеряны были две настоящих монеты. Тогда настоящая монета весит ровно 12 г, а фальшивая — 214–17·12 = 10 г.

Задача 3. *Сережа выбрал несколько натуральных чисел от 1 до 100. Оказалось, что сумма никаких двух из них не делится на 101, а сумма никаких трех из них не делится на 100. Какое наибольшее количество чисел мог выбрать Сережа?*

Ответ. 50. Решение. Если Сережа выберет все нечетные числа от 1 до 99, их будет ровно 50, и сумма любых трех из них не будет делиться на 100, так как будет нечетной, а сумма любых двух не будет делиться на 101, так как она четна и меньше 202. Далее, разобьем числа от 1 до 100 на 50 пар, дающих в сумме 101: 1+100, 2+99, …, 50+51. Если Сережа выберет больше 50 чисел, то в какой-то из пар он выберет оба числа, и они дадут в сумме 101. Поэтому больше 50 чисел Сережа выбрать не мог.

Задача 4. *Квадрат 8×8 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3 или 3×2. Докажите, что такими операциями нельзя всю доску сделать одноцветной.*

Решение. Разобьем квадрат на 15 параллельных диагоналей (длинами 1, 2, …, 7, 8, 7, …, 1) и отметим среди них все клетки каждой третьей, начиная с первой (длинами 1, 4, 7, 6, 3). Заметим, что в шахматной раскраске цвета отмеченных диагоналей чередуются, то есть диагонали нечетной длины покрашены в один цвет (допустим, белый), а четной — в другой. Значит, отмеченных белых клеток 1+7+3 —нечетное число.

Заметим теперь, что каждая перекраска меняет цвета ровно двух отмеченных клеток. Поэтому количество белых отмеченных клеток при каждой перекраске либо не меняется, если перекрашиваются четная и белая клетки, либо изменяется на 2, если перекрашиваются две одноцветные клетки. Поэтому количество белых отмеченных клеток всегда будет оставаться нечетным, и не сможет стать равным 0. То, что количество черных клеток также не может оказаться равным 0, доказываем аналогично, рассматривая другой набор из 15 параллельных диагоналей, где диагонали длины 1 (то есть угловые клетки) покрашены в черный цвет.

Задача 5. *Натуральное число оканчивается на 20180. Пусть A — сумма всех его делителей, оканчивающихся на 1, B — на 2, C — на 3, D — на 5. Докажите, что:* ***а)*** *(3 балла) $A+C \neq D$.* ***b)*** *(4 балла) $A+B+C \neq D$.*

Решение. Число n, оканчивающееся на 20180, делится на 5, а числа, оканчивающиеся на 1, 3, 7 и 9, не делятся на 5. Поэтому если делитель числа n, оканчивающийся на нечетную цифру, не равную 5, умножить на 5, то получится делитель числа n, оканчивающийся на 5. Таким образом, $D \geq 5E > E \geq A+C$ (здесь предпоследнее неравенство — строгое, так как у числа n есть делитель 1, оканчивающийся на 1, так что $E \neq 0$), где E — сумма делителей числа n, оканчивающихся на нечетные цифры, не равные 5. Этим решена задача а). Далее, число n делится на 4, но не делится на 8. Поэтому всякий делитель числа n, оканчивающийся на 2, получается либо из делителя, оканчивающегося на 1, умножением на 2, либо из делителя, оканчивающегося на 3, умножением на 4. Поэтому $B \leq 2A+4C$, откуда $A+B+C \leq 3A+5C < 5E \leq D$ (здесь предпоследнее неравенство — строгое ввиду наличия делителя 1), что завершает решение задачи б).

LII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ИЖЕВСК, 02-08.11.2018

Решения задач олимпиады 7 класса

Задача 1. *Карлсон поставил в ряд 10 синих, 10 красных и одну зеленую тарелку в каком-то порядке. На этих тарелках в сумме лежит 200 конфеток, причем на каждой тарелке лежит хотя бы одна конфетка. Известно, что правее одной из синих тарелок лежит 72 конфетки, левее одной из красных — 129 конфеток, а на зеленой — меньше, чем на любой другой. Сколько конфеток может лежать на зеленой тарелке? Найдите все ответы и докажите, что других нет.*

Ответ. Одна. Решение. Так как 129+72 > 200, синяя тарелка, правее которой лежит 72 конфетки, стоит левее красной, левее которой 129 конфеток, и между ними есть хотя бы одна тарелка. Конфетки на тарелках, стоящих между упомянутыми красной и синей, в сумме 129+72 = 201 учтены дважды, а остальные конфетки — по одному разу. Значит, на всех этих тарелках в сумме — одна конфетка. Так как пустых тарелок нет, там ровно одна тарелка, и на ней — одна конфетка. Эта тарелка — зеленая, иначе зеленая тарелка была бы пуста.

Задача 2. *Числа a и b (не обязательно целые) удовлетворяют двум условиям:* $a+\dfrac{1}{b}=7$, $b+\dfrac{1}{a}=5$. *Найдите все значения, которые может принимать выражение* $ab+\dfrac{1}{ab}$.

Ответ. 33. Решение. Перемножив два исходных равенства, после раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем $ab+2+\dfrac{1}{ab}=35$, что и дает нам ответ.

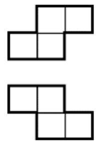
Задача 3. *На плоскости отмечено 60 точек. Известно, что 39 из них лежат на одной прямой, а остальные 21 на этой прямой не лежат. Докажите, что эти 60 точек можно разбить на 20 троек так, чтобы точки из одной тройки не лежали на одной прямой.*

Решение. Пусть l — прямая, на которой лежат 39 точек. Возьмем любые две точки A и B, не лежащие на прямой l, и добавим к ним точку с прямой l, не лежащую на прямой AB. Остальные 38 точек, лежащие на прямой l, разобьем на пары и добавим в каждую пару по точке, не лежащей на прямой l. Получим искомые 20 троек.

Задача 4. *Натуральное число оканчивается на 10. Пусть A — сумма всех его делителей, оканчивающихся на 1, B — на 2, C — на 3, D — на 5. Докажите, что* $A+2B+3C \le D$.

Решение. Число n, оканчивающееся на 10, делится на 5, а числа, оканчивающиеся на 1, 3, 7 и 9, не делятся на 5. Поэтому если делитель числа n, оканчивающийся на нечетную цифру, не равную 5, умножить на 5, то получится делитель числа n, оканчивающийся на 5. Таким образом, $D \ge 5E$, где E — сумма делителей числа n, оканчивающихся на нечетные цифры, не равные 5. Далее, число n делится на 2, но не делится на 4. Поэтому всякий делитель числа n, оканчивающийся на 2, получается из делителя, оканчивающегося на 1, умножением на 2. Значит, $B = 2A$, откуда $A+2B+3C \le 5A+3C \le 5A+5C \le 5E \le D$, что и требовалось доказать.

Задача 5. *Квадрат 11×11 разрезали на Z-тетрамино и единичные квадратики. Какое наименьшее число единичных квадратиков может быть в таком разрезании? Z-тетрамино можно поворачивать и переворачивать, пример двух расположений Z-тетрамино показан на рисунке.*



Ответ. 21. Решение. Пронумеруем по порядку в квадрате 11×11 горизонтали снизу вверх, вертикали слева направо, и отметим все клетки, у которых и горизонталь, и вертикаль имеют четные номера. Всего отмеченных клеток получится 25, и в каждом Z-тетрамино лежит ровно одна отмеченная клетка. Значит, мы можем разместить в квадрате не более 25 непересекающихся Z-тетрамино. Их суммарная площадь — 100, поэтому у нас не меньше 21 единичного квадратика. Пример на 21 квадратик: мостим 11 единичными квадратиками всю нижнюю горизонталь, оставшуюся часть квадрата 11×11 разбиваем на 5 полосок 11×2 и каждую мостим пятью Z-тетрамино, получающихся друг из друга сдвигами вдоль длинной стороны, и двумя единичными квадратиками.

Решения задач олимпиады 8 класса

Задача 1. *Числа a и b удовлетворяют условию* $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=1$. *Какие значения может принимать выражение* $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{1}{ab}$ *?*

Ответ. 1. Решение. Умножив обе части равенства $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}=1$ на $(a+1)(b+1)$ и приведя подобные члены, получаем $ab = a^2+b^2-1$. Значит, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{1}{ab}=\frac{a^2+b^2-1}{ab}=\frac{ab}{ab}=1$.

Задача 2. *На кольцевой дороге длиной 7 км расположены 7 кафе. Расстояние между соседними кафе — 1 км. Кирилл проинспектировал все кафе, начиная с кафе «Старт», двигаясь против часовой стрелки, так, что длины всех шести его переездов были различны. Оказалось, что самое большое расстояние, которое ему пришлось проехать от одного кафе до следующего, равно s. Какое наименьшее значение может иметь s?*

Ответ. 8. Решение. Так как 1+2+3+4+5+6 = 21, если $s = 6$, то Вася последним ходом окажется в кафе «Старт», где уже был. $s = 7$ тоже не годится, потому что ходом длины 7 Вася вернется в то кафе, которое только что покинул. А для $s = 8$ есть пример (указаны длины последовательных ходов): 1, 2, 3, 5, 8, 4.

Задача 3. *Отрезки AB, BC и AD имеют одинаковую длину, и точка D лежит на отрезке BC. Докажите, что серединный перпендикуляр к DC, биссектриса угла ADC и прямая AC проходят через одну точку.*

Решение. Пусть E — точка пересечения прямой AC и биссектрисы угла ADC. Утверждение задачи равносильно равенству $EC = ED$ или равенству $\angle EDC = \angle ECD$. Так как $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Так как $AB = AD$, $\angle ABD = \angle ADB = \beta$. Из треугольника ABC $2\alpha+\beta = 180°$, откуда $\alpha = 90°-\beta/2$. Далее имеем $\angle EDC = \angle ADC/2 = (180°-\angle ADB)/2 = 90°-\beta/2 = \alpha = \angle ECD$, что и требовалось доказать.

Задача 4. *Квадрат 8×8 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3 или 3×2. Докажите, что такими операциями нельзя всю доску сделать одноцветной.*

Решение. Разобьем квадрат на 15 параллельных диагоналей (длинами 1, 2, …, 7, 8, 7, …, 1) и отметим среди них все клетки каждой третьей, начиная с первой (длинами 1, 4, 7, 6, 3). Заметим, что в шахматной раскраске цвета отмеченных диагоналей чередуются, то есть диагонали нечетной длины покрашены в один цвет (допустим, белый), а четной — в другой. Значит, отмеченных белых клеток 1+7+3 —нечетное число.

Заметим теперь, что каждая перекраска меняет цвета ровно двух отмеченных клеток. Поэтому количество белых отмеченных клеток при каждой перекраске либо не меняется, если перекрашиваются четная и белая клетки, либо изменяется на 2, если перекрашиваются две одноцветные клетки. Поэтому количество белых отмеченных клеток всегда будет оставаться нечетным, и не сможет стать равным 0. То, что количество черных клеток также не может оказаться равным 0, доказываем аналогично, рассматривая другой набор из 15 параллельных диагоналей, где диагонали длины 1 (то есть угловые клетки) покрашены в черный цвет.

Задача 5. *Докажите, что для каждого чётного целого a можно подобрать бесконечно много целых b таким образом, чтобы среди чисел вида* u^2+au+b *при целых u оказалось ровно одно простое. (Напомним, что все простые числа натуральны.)*

Решение. Пусть $a = 2c$. Тогда $u^2+au+b = (u+c)^2+b-c^2$. Так как u и b пробегают все целые числа, $u+c$ и $b-c^2$ при фиксированном c также пробегают все целые числа. Полагая $u+c = v$ и $b-c^2 = d$, получаем такую эквивалентную задачу: доказать, что существует бесконечно много таких целых d, что среди чисел вида v^2+d при всевозможных целых v есть ровно одно простое. Покажем, что подойдут все $d = -w^2$, где $2w-1$ — нечетное простое число, а $2w+1$ — составное число (достаточно взять простое число $2w-1$, дающее при делении на 3 остаток 1 — таких, как известно, бесконечно много). В самом деле, $v^2-w^2 = (v+w)(v-w)$ при $v\pm w \neq \pm1$ будет либо нулем, либо произведением двух целых чисел, по модулю больших 1. При $v-w = 1$ $v^2-w^2 = v+w = 2w+1$ — составное. При $v-w = -1$ $v^2-w^2 = -(v+w) = 2w-1$ — простое. При $v+w = 1$ $v^2-w^2 = v-w = 1-2w$ — отрицательное. При $v+w = -1$ $v^2-w^2 = -v+w = 2w+1$ — составное. Все доказано. Замечание. Есть основания считать, что если потребовать, чтобы a и b были натуральными, как это было сделано в условии, выданном участникам олимпиады, утверждение задачи станет неверным. Но доказывать это мы не умеем.