МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C. Биссектриса угла C пересекает медиану AM в точке D. Докажите, что $\angle MDC \le 45°$.

2. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и угол A тупой. Перпендикуляр к AC, восставленный в точке C, пересекает AB в точке D. Докажите, что $\dfrac{1}{AB}-\dfrac{1}{BD}=\dfrac{2}{BC}$.

3. Треугольник ABC, в котором угол B в два раза больше угла C, назовём *хорошим*. Докажите, что плоскость можно без наложений покрыть хорошими треугольниками, никакие два из которых не подобны.

4. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и длины всех сторон — целые числа. Докажите, что эти длины сторон имеют вид $a = k(m^2-n^2)$, $b = kmn$, $c = kn^2$, где k — натуральное число, а m и n — взаимно простые натуральные числа, удовлетворяющие условию $2n > m > n > 1$.

5. Пятиэлементные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ множества $\{1, 2, \ldots, 23\}$ таковы, что пересечение любых двух из них содержит не более трёх элементов. Докажите, что $k \le 2018$.

6. Докажите, что уравнение $\sqrt[3]{3-x^3-y^3}=\sqrt{2-x^2-y^2}$ не имеет решений в действительных числах.

7. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ ($m < n$). Среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ хотя бы $n-m+1$ взаимно просты с b_1. Докажите, что уравнение $x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+\ldots+x_n^{a_n}=y_1^{b_1}+y_2^{b_2}+\ldots+y_m^{b_m}$ имеет решение в натуральных числах.

8. Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур играют в следующую игру. На банковском счёте у Хиштаки Саританура один килограмм зелени. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно, дробное), не превосходящее текущей суммы на счету у Хиштаки Саританура. После этого Алюль или Булюль поют песню. Если песню поет Алюль, то Хиштаки Саританур получает на свой счёт количество зелени, равное его ставке. Если же песню поет Булюль, то со счёта Хиштаки Саританура списывается количество зелени, равное ставке. По условию игры Алюль и Булюль должны вместе спеть 35 песен, причем Алюль должен спеть больше песен, чем Булюль. Какую наибольшее количество зелени может гарантированно получить Хиштаки Саританур?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Треугольник ABC, в котором угол B в два раза больше угла C, назовём *хорошим*. Докажите, что плоскость можно без наложений покрыть хорошими треугольниками, никакие два из которых не равны.

2. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и угол A тупой. Перпендикуляр к AC, восставленный в точке C, пересекает AB в точке D. Докажите, что $\frac{1}{AB} - \frac{1}{BD} = \frac{2}{BC}$.

3. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C. Точка D — основание высоты, опущенной из A на BC, а точка E — середина BC. Докажите, что $AB = 2DE$.

4. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C и длины всех сторон — целые числа. Докажите, что эти длины сторон имеют вид $a = k(m^2 – n^2)$, $b = kmn$, $c = kn^2$, где k — натуральное число, а m и n — взаимно простые натуральные числа, удовлетворяющие условию $2n > m > n > 1$.

5. Пятиэлементные подмножества A_1, A_2, …, A_k множества $\{1, 2, …, 23\}$ таковы, что пересечение любых двух из них содержит не более трёх элементов. Докажите, что $k \le 2018$.

6. В селении живут 100 человек в возрасте 1, 2, …, 100 лет. Два человека могут образовать *счастливую пару*, если возраст каждого из них хотя бы на 7 лет больше половины возраста другого. Какое наибольшее количество (непересекающихся) счастливых пар можно составить из жителей селения?

7. Докажите, что уравнение $x^2+y^4+z^6+t^8+u^{10} = a^3+b^6+c^9$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

8. Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур играют в следующую игру. На банковском счёте у Хиштаки Саританура один килограмм зелени. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно, дробное), не превосходящее текущей суммы на счету у Хиштаки Саританура. После этого Алюль или Булюль поют песню. Если песню поет Алюль, то Хиштаки Саританур получает на свой счёт количество зелени, равное его ставке. Если же песню поет Булюль, то со счёта Хиштаки Саританура списывается количество зелени, равное ставке. По условию игры Алюль и Булюль должны вместе спеть 25 песен, причем Алюль должен спеть больше песен, чем Булюль. Сможет ли Хиштаки Саританур гарантированно удвоить свой запас зелени независимо от действий Алюля и Булюля?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Треугольник ABC, в котором угол B в два раза больше угла C, назовём *хорошим*. Докажите, что плоскость можно без наложений покрыть хорошими треугольниками, никакие два из которых не равны.

2. Треугольник ABC, в котором угол B в два раза больше угла C, назовём *хорошим*. Докажите, что треугольник со сторонами 4, 5 и 6 — хороший.

3. В треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C. Точка D — основание высоты, опущенной из A на BC, а точка E — середина BC. Докажите, что $AB = 2DE$.

4. Решите в целых числах уравнение $(x+y^2)(y+x^2) = (x+y)^2$.

5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?

6. В селении живут 100 человек в возрасте 1, 2, …, 100 лет. Два человека могут образовать *счастливую пару*, если возраст каждого из них хотя бы на 7 лет больше половины возраста другого. Какое наибольшее количество (непересекающихся) счастливых пар можно составить из жителей селения?

7. Докажите, что уравнение $x^2+y^4+z^6+t^8 = a^3+b^6$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

8. Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур играют в следующую игру. На банковском счёте у Хиштаки Саританура один килограмм зелени. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно, дробное), не превосходящее текущей суммы на счету у Хиштаки Саританура. После этого Алюль или Булюль поют песню. Если песню поет Алюль, то Хиштаки Саританур получает на свой счёт количество зелени, равное его ставке. Если же песню поет Булюль, то со счёта Хиштаки Саританура списывается количество зелени, равное ставке. По условию игры Алюль и Булюль должны вместе спеть три песни, причем Алюль должен спеть больше песен, чем Булюль. Сможет ли Хиштаки Саританур гарантированно удвоить свой запас зелени независимо от действий Алюля и Булюля?

LIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2019

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На 2019 карточках написаны различные натуральные числа. Найдите наибольшее возможное количество таких пар карточек, что полусумма чисел на этих карточках также написана на одной из карточек.

2. Натуральные числа a_1, a_2, …, a_n таковы, что $a_1a_2\ldots a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n) = 100n$. При каком наибольшем n такое возможно?

3. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. На банковском счету у Буратино один золотой. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это неотрицательное число (возможно дробное), не превосходящее текущей суммы на счету у Буратино. После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас перечисляет на счет Буратино сумму, равную ставке. Если же песню поет Карабас, то Буратино переводит на счет Карабаса сумму, равную ставке. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть 35 песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?

4. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение $3a^2-b^2 = 2018^n$ имеет решение в натуральных числах a и b.

5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?

6. Натуральные делители натурального числа n упорядочили по возрастанию. Нашлись два соседних делителя a и b таких, что $a^2+b^2 = 2n+1$. Докажите, что число $4n+1$ является квадратом натурального числа.

7. В группе КотоФото 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что число друзей Ани меньше, чем число друзей любого другого участника группы, а число друзей у Бори больше, чем число друзей любого другого участника группы. При этом сумма количеств их друзей равна k (если кто-то дружит с Аней и с Борей, то он считается дважды). По правилам группы фотографиями могут обмениваться только друзья. Вера и Гена состоят в этой группе. При каком наименьшем k заведомо верно, что Вера и Гена могут обменяться друг с другом фотографиями котиков, возможно, через других участников группы?

8. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Найдите угол BAM, если известно, что $\angle B = 30°$ и $\angle C = 105°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На 2019 карточках написаны различные натуральные числа. Найдите наибольшее возможное количество таких пар карточек, что полусумма чисел на этих карточках также написана на одной из карточек.

2. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что $|x_i| \le 1$ и $|x_1|+|x_2|+...+|x_n| = 19+|x_1+x_2+...+x_n|$. При каком наименьшем n такое может быть? (Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — не обязательно целые.)

3. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. У Буратино есть 1000 золотых. Каждым ходом он выкладывает на стол несколько золотых (возможно ноль). После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас достает из сундука столько же золотых, сколько выложил Буратино и все этиденьги забирает Буратино. Если же песню поет Карабас, то Буратино отдает все выложенные деньги ему. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть пять песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?

4. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение $3a^2-b^2 = 2018^n$ имеет решение в натуральных числах a и b.

5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?

6. Натуральные делители натурального числа n упорядочили по возрастанию. Нашлись два соседних делителя a и b таких, что $a^2+b^2 = 2n+1$. Докажите, что число $4n+1$ является квадратом натурального числа.

7. В группе КотоФото 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что число друзей Ани меньше, чем число друзей любого другого участника группы, а число друзей у Бори больше, чем число друзей любого другого участника группы. При этом сумма количеств их друзей равна k (если кто-то дружит с Аней и с Борей, то он считается дважды). По правилам группы фотографиями могут обмениваться только друзья. Вера и Гена состоят в этой группе. При каком наименьшем k заведомо верно, что Вера и Гена могут обменяться друг с другом фотографиями котиков, возможно, через других участников группы?

8. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Найдите угол BAM, если известно, что $\angle B = 30°$ и $\angle C = 105°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. По кругу расставлено 32 лампочки. Изначально они выключены. За ход можно переключить 5 подряд идущих лампочек. За какое наименьшее число ходов можно сделать все лампочки включенными?

2. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что $|x_i| \le 1$ и $|x_1|+|x_2|+...+|x_n| = 19+|x_1+x_2+...+x_n|$. При каком наименьшем n такое может быть? (Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — не обязательно целые.)

3. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. У Буратино есть 1000 золотых. Каждым ходом он выкладывает на стол несколько золотых (возможно ноль).После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас достает из сундука столько же золотых, сколько выложил Буратино и все эти деньги забирает Буратино. Если же песню поет Карабас, то Буратино отдает все выложенные деньги ему. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть три песни, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?

4. Найдите все натуральные числа n, при которых уравнение $3a^2-b^2 = 122^n$ имеет решение в натуральных числах a и b.

5. Зрительный зал в театре представляет собой квадрат 29×29 (29 рядов по 29 кресел). К началу спектакля в зале были заняты все места. Во время антракта все зрители вышли из зала. После антракта они вернулись в зал. Вася вернулся в зал последним и обнаружил, что его место занято и каждый из остальных зрителей пересел на соседнее кресло (слева, справа, спереди или сзади). Каким могло быть место Васи в зрительном зале?

6. На 12 карточках написаны числа $2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{12}$. Петя выбирает несколько карточек и складывает написанные на них числа. На какое наибольшее количество двоек может оканчиваться полученное им число?

7. В группе КотоФото 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что число друзей Ани меньше, чем число друзей любого другого участника группы, а число друзей у Бори больше, чем число друзей любого другого участника группы. При этом сумма количеств их друзей равна k (если кто-то дружит с Аней и с Борей, то он считается дважды). По правилам группы фотографиями могут обмениваться только друзья. Вера и Гена состоят в этой группе. При каком наименьшем k заведомо верно, что Вера и Гена могут обменяться друг с другом фотографиями котиков, возможно, через других участников группы?

8. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и AD равны. Найдите угол BDA, если известно, что $\angle ABC = 40°$, а отрезки AC и AD перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. В начале на счету у Буратино 1000 золотых. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это целое неотрицательное число золотых, не превосходящее текущей суммы на счету у Буратино. После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас перечисляет на счет Буратино сумму, равную ставке. Если же песню поет Карабас, то Буратино переводит на счет Карабаса сумму, равную ставке. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть 5 песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?

2. На доске написано 2019 различных натуральных чисел. Петя сосчитал количество пар написанных чисел, полусумма которых тоже написана на доске (пары, получающиеся перестановкой чисел, считаются одинаковыми). Какое наибольшее количество таких пар мог насчитать Петя?

3. Делители d и e натурального числа n таковы, что $d > e$ и любое число, большее e, но меньшее d, не является делителем n. Оказалось, что $d^2+e^2 = 2n+1$. Докажите, что число $4n+1$ является квадратом натурального числа.

4. Можно ли отметить на окружности 100 синих точек, а внутри окружности 97 красных точек, не лежащих на отрезках с синими концами, так, чтобы внутри любого пятиугольника с вершинами в синих точках лежало ровно 3 красных точки?

5. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1a_2\ldots a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n) = 50n$. Может ли n быть больше 2019?

6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств друзей Ани и Бори равна k. При каком наибольшем k могло случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.

7. Среди всех натуральных чисел от 1 до 10^{100} рассмотрим только те, у которых сумма всех цифр больше произведения всех цифр. Каких среди этих чисел больше: четных или нечетных?

8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Карабас Барабас, Дуремар и Буратино играют в следующую игру. В начале на счету у Буратино 1000 золотых. Каждым ходом он записывает на бумажку свою ставку. Ставка — это целое неотрицательное число золотых, не превосходящее текущей суммы на счету у Буратино. После этого Карабас или Дуремар поют песню. Если песню поет Дуремар, то Карабас Барабас перечисляет на счет Буратино сумму, равную ставке. Если же песню поет Карабас, то Буратино переводит на счет Карабаса сумму, равную ставке. По условию игры Карабас и Дуремар должны вместе спеть 5 песен, причем Дуремар должен спеть больше песен, чем Карабас. Сможет ли Буратино удвоить свой капитал вне зависимости от игры соперников?

2. На доске написано 2019 различных натуральных чисел. Петя сосчитал количество пар написанных чисел, полусумма которых тоже написана на доске (пары, получающиеся перестановкой чисел, считаются одинаковыми). Какое наибольшее количество таких пар мог насчитать Петя?

3. Ане и Боре задали решить пример на перемножение двух натуральных чисел. Но в учебнике последняя цифра одного из чисел плохо пропечаталась и ее сложно было разобрать. Аня подумала, что там должна быть цифра 8, и получила ответ, отличающийся от правильного на 1016. Боря подумал, что там должна быть цифра 3, и получил ответ, отличающийся от правильного на 381. Какая цифра на самом деле плохо пропечаталась?

4. Можно ли отметить на окружности 100 синих точек, а внутри окружности 97 красных точек, не лежащих на отрезках с синими концами, так, чтобы внутри любого пятиугольника с вершинами в синих точках лежало ровно 3 красных точки?

5. В ряд стоят числа 3, 6, 4, 20, 9, 12, 2, 8. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, наибольший общий делитель которых равен их количеству, и переставить их между собой так, чтобы ни одно из них не осталось на прежнем месте (например, можно переставить числа 3, 6, 12 и получить 12, 3, 4, 20, 9, 6, 2, 8). Можно ли при помощи таких операций переставить числа в обратном порядке?

6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств друзей Ани и Бори равна k. При каком наибольшем k могло случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.

7. Среди всех натуральных чисел от 1 до 10^{100} рассмотрим только те, у которых сумма всех цифр больше произведения всех цифр. Каких среди этих чисел больше: четных или нечетных?

8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Имеются 5 камней. Какие бы два из них ни выбрать, они вместе весят либо 75, либо 84, либо 93 фунта (все эти значения встречаются). Сколько весит каждый камень?

2. На доске написано 2019 различных натуральных чисел. Петя сосчитал количество пар написанных чисел, полусумма которых тоже написана на доске (пары, получающиеся перестановкой чисел, считаются одинаковыми). Какое наибольшее количество таких пар мог насчитать Петя?

3. Ане и Боре задали решить пример на перемножение двух натуральных чисел. Но в учебнике последняя цифра одного из чисел плохо пропечаталась и ее сложно было разобрать. Аня подумала, что там должна быть цифра 8, и получила ответ, отличающийся от правильного на 1016. Боря подумал, что там должна быть цифра 3, и получил ответ, отличающийся от правильного на 381. Какая цифра на самом деле плохо пропечаталась?

4. Можно ли отметить на окружности 90 синих точек, а внутри окружности 87 красных точек, не лежащих на отрезках с синими концами, так, чтобы внутри любого пятиугольника с вершинами в синих точках лежало ровно 3 красных точки?

5. В ряд стоят числа $3, 6, 4, 20, 9, 12, 2, 8$. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, наибольший общий делитель которых равен их количеству, и переставить их между собой так, чтобы ни одно из них не осталось на прежнем месте (например, можно переставить числа $3, 6, 12$ и получить $12, 3, 4, 20, 9, 6, 2, 8$). Можно ли при помощи таких операций переставить числа в обратном порядке?

6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств друзей Ани и Бори равна k. При каком наибольшем k могло случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.

7. Среди всех натуральных чисел от 1 до 10^{100} рассмотрим только те, у которых сумма всех цифр больше произведения всех цифр. Каких среди этих чисел больше: четных или нечетных?

8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Имеются 5 камней. Какие бы два из них ни выбрать, они вместе весят либо 75, либо 84, либо 93 фунта (все эти значения встречаются). Сколько весит каждый камень?

2. Пятеро мальчиков провели турнир по настольному теннису, играя пара против пары. При этом каждая пара, какую только можно составить из них, против каждой из остальных возможных пар сыграла ровно один матч. Сколько всего матчей было сыграно?

3. Ане и Боре задали решить пример на перемножение двух натуральных чисел. Но в учебнике последняя цифра одного из чисел плохо пропечаталась и ее сложно было разобрать. Аня подумала, что там должна быть цифра 8, и получила ответ, отличающийся от правильного на 1016. Боря подумал, что там должна быть цифра 3, и получил ответ, отличающийся от правильного на 381. Как цифра на самом деле плохо пропечаталась?

4. Таблица 3×3 заполнена числами так, как показано на рисунке. За одну операцию можно взять любые n чисел, НОД которых равен n, и переставить их между собой так, чтобы ни одно из них не осталось на прежнем месте. Можно ли при помощи таких операций получить расстановку, симметричную исходной относительно главной диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний?

1	3	4
6	8	9
10	12	20

5. На окружности отмечено 90 синих точек. Внутри окружности отмечено 86 красных точек, ни одна из которых не лежит на отрезке с синими концами. Докажите, что можно выбрать 5 синих точек таким образом, чтобы внутри пятиугольника с вершинами в этих точках было не более двух красных точек.

6. В социальной сети 2019 участников, некоторые из которых дружат. Оказалось, что у Ани строго меньше друзей, чем у любого из остальных, а у Бори — строго больше друзей, чем у любого из остальных. При этом сумма количеств их друзей равна 2000. Может ли случиться так, что Вера и Гена из той же сети не могут передать друг другу привет (возможно, через других участников сети)? Привет можно передавать только друзьям.

7. По кругу стоят 50 хамелеонов трёх цветов: серого, бурого и малинового (хотя бы два цвета присутствуют). Каждую минуту они все одновременно перекрашиваются по следующему правилу: если хамелеон стоял между хамелеонами одного цвета он становится того же цвета, а если между разными, то перекрашивается в третий цвет. Докажите, что каждую минуту хотя бы один хамелеон будет менять свой цвет.

8. Во всех кроме одной клетках квадрата 29×29 стоит по фишке. Все фишки смогли одновременно переместиться в соседнюю по стороне клетку так, что в каждой клетке вновь оказалось не более одной фишки, а свободное изначально место оказалось занято. Сколько есть вариантов расположения клетки, на которой изначально не было фишки?