МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла B. Внутри треугольника нашлась такая точка D, что $AD = AC$ и $DB = DC$. Докажите, что $\angle BAC = 3\angle BAD$.

2. Аня и Боря играют в игру. В начале Аня должна выбрать число x, а затем Боря (зная, какое число выбрала Аня) должен выбрать число y. Аня хочет, чтобы выражение $(2x-y)^2-2y^2-3y$ было как можно меньше, а Боря — как можно больше. Какие числа напишут Аня и Боря, если оба будут играть оптимально?

3. После неудачного выступления в 2017 году у сборной Фаталии на международной олимпиаде сменился руководитель. В первую очередь он решил отказаться от измерения творческого потенциала и установил новый способ отбора 6 членов команды из 13 кандидатов. Кандидаты пишут 6 отборочных олимпиад, на каждой из которых все набирают разное количество баллов. Далее руководитель команды выбирает порядок, в котором он будет учитывать результаты отборочных олимпиад, и для каждой олимпиады включает в сборную участника, выступившего на этой олимпиаде лучше остальных кандидатов, ещё не вошедших в сборную. Могут ли результаты кандидатов быть таковы, что каждый из них может стать членом команды?

4. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что число $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$ является степенью числа 1692 с целым неотрицательным показателем.

5. Последовательность $\{a_n\}$ определена условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ и $a_n = a_{n-1}^2 + (a_0 a_1 \ldots a_{n-2})^2$ при $n \geq 2$. Простое число p — делитель числа a_k. Докажите, что $p > 4(k-1)$.

6. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = BD$. Точка Q — середина отрезка CP. Докажите, что $\angle BQD = 90°$.

7. Некоторые города Аркадии соединены дорогами (между каждыми двумя городами не более одной дороги). Из каждого города выходят хотя бы две дороги. Докажите, что в Аркадии есть такой город, что, выехав из него по любой дороге, можно потом вернуться в него, не проезжая ни по какой дороге более одного раза.

8. Все клетки доски $(2n+1)\times(2n+1)$ раскрашены в красный и синий цвета: клетки нижней горизонтали в синий, а остальные — в красный. Разрешается выбрать любую клетку и изменить цвет этой клетки, а также цвета всех клеток, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце. Какое наименьшее количество синих клеток может оказаться в таблице в результате нескольких таких операций?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Четыре брата делят дачный участок в форме параллелограмма $ABCD$. Они отметили на участке точки E и F и заказали строителям построить заборы, идущие по (непересекающимся) отрезкам AE, BE, CF, DF и EF, которые разделили бы параллелограмм на четыре участка одинаковой площади. Эти строительные работы, однако, требовали обязательной экспертизы. Эксперты из Заборостроительного института разрешили строить заборы только по отрезкам AF, BF, CE, DE и EF, которые, к счастью, тоже оказались непересекающимися. Докажите, что параллелограмм все равно разбился на четыре участка одинаковой площади.

2. Аня и Боря играют в игру. В начале Аня должна выбрать число x, а затем Боря (зная, какое число выбрала Аня) должен выбрать число y. Аня хочет, чтобы выражение $(2x-y)^2-2y^2-3y$ было как можно меньше, а Боря — как можно больше. Какие числа напишут Аня и Боря, если оба будут играть оптимально?

3. После неудачного выступления в 2017 году у сборной Фаталии на международной олимпиаде сменился руководитель. В первую очередь он решил отказаться от измерения творческого потенциала и установил новый способ отбора 6 членов команды из 13 кандидатов. Кандидаты пишут 6 отборочных олимпиад, на каждой из которых все набирают разное количество баллов. Далее руководитель команды выбирает порядок, в котором он будет учитывать результаты отборочных олимпиад, и для каждой олимпиады включает в сборную участника, выступившего на этой олимпиаде лучше остальных кандидатов, ещё не вошедших в сборную. Могут ли результаты кандидатов быть таковы, что каждый из них может стать членом команды?

4. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что число $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$ является степенью числа 1692 с целым неотрицательным показателем.

5. Существует ли натуральное число n, которое можно представить как в виде $n = a^2-b$, так и в виде $n = b^2-c$, где a, b и c — три различных натуральных делителя числа n?

6. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = BD$. Точка Q — середина отрезка CP. Докажите, что $\angle BQD = 90°$.

7. Некоторые города Аркадии соединены дорогами (между каждыми двумя городами не более одной дороги). Из каждого города выходят хотя бы две дороги. Докажите, что в Аркадии есть такой город, что, выехав из него по любой дороге, можно потом вернуться в него, не проезжая ни по какой дороге более одного раза.

8. Все клетки доски $(2n+1)\times(2n+1)$ раскрашены в красный и синий цвета: клетки нижней горизонтали в синий, а остальные — в красный. Разрешается выбрать любую клетку и изменить цвет этой клетки, а также цвета всех клеток, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце. Какое наименьшее количество синих клеток может оказаться в таблице в результате нескольких таких операций?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Четыре брата делят дачный участок в форме параллелограмма *ABCD*. Они отметили на участке точки *E* и *F* и заказали строителям построить заборы, идущие по (непересекающимся) отрезкам *AE*, *BE*, *CF*, *DF* и *EF*, которые разделили бы параллелограмм на четыре участка одинаковой площади. Эти строительные работы, однако, требовали обязательной экспертизы. Эксперты из Заборостроительного института разрешили строить заборы только по отрезкам *AF*, *BF*, *CE*, *DE* и *EF*, которые, к счастью, тоже оказались непересекающимися. Докажите, что параллелограмм все равно разбился на четыре участка одинаковой площади.

2. Аня и Боря играют в игру. В начале Аня должна выбрать число x, а затем Боря (зная, какое число выбрала Аня) должен выбрать число y. Аня хочет, чтобы выражение $(2x-y)^2-2y^2$ было как можно меньше, а Боря — как можно больше. Какие числа напишут Аня и Боря, если оба будут играть оптимально?

3. После неудачного выступления в 2017 году у сборной Фаталии на международной олимпиаде сменился руководитель. В первую очередь он решил отказаться от измерения творческого потенциала и установил новый способ отбора 6 членов команды из 13 кандидатов. Кандидаты пишут 6 отборочных олимпиад, на каждой из которых все набирают разное количество баллов. Далее руководитель команды выбирает порядок, в котором он будет учитывать результаты отборочных олимпиад, и для каждой олимпиады включает в сборную участника, выступившего на этой олимпиаде лучше остальных кандидатов, ещё не вошедших в сборную. Могут ли результаты кандидатов быть таковы, что каждый из них может стать членом команды?

4. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c) такие, что число $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$ является степенью числа 1692 с целым неотрицательным показателем.

5. Натуральные числа a и b удовлетворяют условиям $(a, b) = 10$ и $(a, b+2) = 12$. Найдите сумму $(a, 2b)+(a, 3b)$. (Через (x, y) обозначается наибольший общий делитель чисел x и y.)

6. На диагонали *BD* параллелограмма *ABCD* отмечена точка *P* так, что $AP = BD$. Точка *Q* — середина отрезка *CP*. Докажите, что $\angle BQD = 90°$.

7. На доске написаны числа от 1 до 64. Двое по очереди зачёркивают по одному числу с доски. Тот, после чьего хода найдутся два зачеркнутых числа, в сумме дающие степень двойки, проиграл. Кто выигрывает при правильной игре обоих?

8. Все клетки доски 10×11 (10 строк, 11 столбцов) раскрашены в красный и синий цвета: клетки нижней горизонтали в синий, а остальные — в красный. Разрешается выбрать любую клетку и изменить цвет этой клетки, а также цвета всех клеток, находящихся с ней в одной строке или в одном столбце. Можно ли такими операциями сделать все клетки красными?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. На окружности отмечены вершины правильного 2000-угольника и центр окружности. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой отмеченной точки в любую другую. Для каждого натурального $n \geq 3$ определите, кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник.

2. Существует ли натуральное число n, которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a, b и c — три различных натуральных делителя числа n?

3. Найдите все простые числа p, для которых существуют такие натуральные n и m, что $\dfrac{p^2+1}{p+1} = \dfrac{m^2}{n^2}$.

4. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Петя утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Петя быть прав?

5. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

6. Каждая клетка таблицы 2019×2019 покрашена в красный или синий цвет. За один ход можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 4037 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, такими операциями можно добиться того, что красных клеток станет не больше 2018.

7. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$x^2z(4x-3y)+y^2x(4y-3z)+z^2y(4z-3x) > 0.$$

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH, медиана BM, и биссектриса CD. Отрезки BM и CD пересекаются в точке K. Оказалось, что $KB = KC$. Докажите, что $KM = KH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-10 МЕСТА

1. На окружности отмечены вершины правильного 2000-угольника и центр окружности. Двое по очереди соединяют их отрезками. За ход можно выбрать вершину и соединить её либо с соседней вершиной, либо с центром окружности. Побеждает тот, после чьего хода можно добраться по отрезкам из любой отмеченной точки в любую другую. Кто победит при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник.

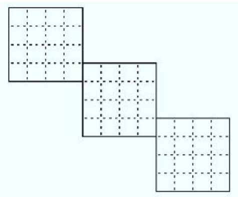
2. Существует ли натуральное число n, которое можно представить как в виде $n = a^2 - b$, так и в виде $n = b^2 - c$, где a, b и c — три различных натуральных делителя числа n?

3. Найдите все простые числа p, для которых существуют такие натуральные n и m, что $\frac{p^2+1}{p+1} = \frac{m^2}{n^2}$.

4. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Петя утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Петя быть прав?

5. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

6. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру, изображённую на рисунке (соседние квадраты соприкасаются по отрезку длины 1 — стороне клетки). Найдите все $n > 1$, при которых фигуру можно замостить плитками 1×3 и 3×1.



7. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство $$\min\{(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2\} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота AH, медиана BM, и биссектриса CD. Отрезки BM и CD пересекаются в точке K. Оказалось, что $KB = KC$. Докажите, что $KM = KH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА: ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 11 МЕСТО; ВТОРАЯ ЛИГА

1. По кругу стоят n ваз. Имеются также много алых и белых роз. Требуется поставить в каждую вазу по две розы так, чтобы количество белых роз в любых двух соседних вазах было нечётным. При каких n это возможно?

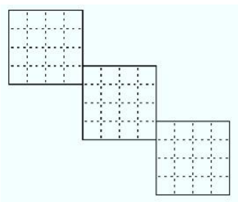
2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, которые можно представить в виде $n = a^2 - b$ и в виде $n = c^2 - d$, где a, b, c и d — натуральные делители числа n и $a \neq c$.

3. Десятичная запись числа A состоит из m единиц, а десятичная запись числа B состоит из n единиц. Найдите все пары m и n, для которых произведение AB является палиндромом (т. е. читается одинаково слева направо и справа налево).

4. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2000 гирь различных весов. Петя утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Петя быть прав?

5. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

6. На клетчатой плоскости расположены три квадрата $n \times n$, образующие фигуру, изображённую на рисунке (соседние квадраты соприкасаются по отрезку длины 1 — стороне клетки). Найдите все $n > 1$, при которых фигуру можно замостить плитками 1×3 и 3×1.



7. Для неотрицательных чисел x, y и z докажите неравенство

$$\min\{(x-y)^2,(y-z)^2,(z-x)^2\} \le \frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$$

8. В треугольнике ABC угол A равен $40°$, угол B равен $20°$, а $AB - BC = 2$. Найдите длину биссектрисы угла C.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Сережа утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Сережа быть прав?

2. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ можно расставить по кругу n различных натуральных чисел так, чтобы сумма любых двух соседних была квадратом натурального числа.

3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

4. Известно, что число 5^{2019} имеет 1412 цифр и начинается с цифры 1 (т.е. его самая левая цифра равна 1). Сколько существует таких натуральных чисел n, не превосходящих 2019, для которых число 5^n начинается с цифры 1?

5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не могут иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. Некоторые 8 клеток нижней строки таблицы 9×9 покрашены в синий цвет, а все остальные клетки таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать количество синих клеток меньше 8.

7. Существует ли натуральное число n, которое можно представить как в виде $n = a^2-b$, так и в виде $n = b^2-c$, где a, b и c — три различных натуральных делителя числа n?

8. Петя выбрал 980 натуральных чисел (не обязательно различных), среди которых есть все числа от 1 до 44. Могло ли так случиться, что в каком бы порядке Петя их ни записал, первое число, сумма первого и второго числа, сумма первого, второго и третьего числа и т.д. до суммы всех 980 чисел дают разные остатки при делении на 1000?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Сережа утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Сережа быть прав?

2. Петя, Вася и Гена одновременно вышли из школы и отправились в кинотеатр, который находится в 17 километрах от школы. У них есть один велосипед на троих, а на пути от школы до кинотеатра есть две велосипедные стоянки. Они решили, что Петя проедет на велосипеде до первой стоянки, оставит велосипед там, а дальше пойдет пешком. Вася пойдет пешком до первой стоянки, проедет на велосипеде до второй стоянки, а дальше пойдет пешком. Гена пойдет пешком до второй стоянки, а оттуда доедет на велосипеде до кинотеатра. Петя ходит со скоростью 5 км/ч, Вася — 4 км/ч, Гена — 6 км/ч, а ездят на велосипеде они все со скоростью 20 км/ч. Все три мальчика прибыли к кинотеатру одновременно. Найдите, какое расстояние проехал на велосипеде каждый из мальчиков.

3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся три различных натуральных делителя, отличных от него самого, сумма которых равна 100100.

5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не могут иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. Некоторые 8 клеток нижней строки таблицы 9×9 покрашены в синий цвет, а все остальные клетки таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать количество синих клеток меньше 8.

7. Существует ли натуральное число n, которое можно представить как в виде $n = a^2-b$, так и в виде $n = b^2-c$, где a, b и c — три различных натуральных делителя числа n?

8. Петя выбрал 980 натуральных чисел (не обязательно различных), среди которых есть все числа от 1 до 44. Могло ли так случиться, что в каком бы порядке Петя их ни записал, первое число, сумма первого и второго числа, сумма первого, второго и третьего числа и т.д. до суммы всех 980 чисел дают разные остатки при делении на 1000?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА; ВТОРАЯ ЛИГА

1. Тройку гирь назовем *уравновешенной*, если одна из этих гирь весит столько же, сколько две другие вместе. Имеется набор из 2019 гирь различных весов. Сережа утверждает, что для любых двух гирь этого набора он может подобрать третью гирю из того же набора так, чтобы они образовывали уравновешенную тройку. Может ли Сережа быть прав?

2. Можно ли расставить по кругу 15 попарно взаимно простых натуральных чисел таким образом, чтобы для любых двух стоящих рядом чисел их утроенная сумма была квадратом натурального числа?

3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся три различных натуральных делителя, отличных от него самого, сумма которых равна 100100.

5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не должны иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. Угловая клетка таблицы 9×9 покрашена в синий цвет, а остальные 80 клеток таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать всю доску синей.

7. Продавец Вася хочет продать бананы по цене 40 рублей за килограмм, а яблоки по 50 рублей за килограмм. Однако его шеф приказал продавать бананы за 50 рублей, а яблоки — за 40 рублей (тоже за килограмм). Оказалось, что после продажи всех фруктов выручка составила на 100 рублей больше, чем если бы всё продавалось по старым ценам. На сколько килограммов бананов было продано больше, чем яблок?

8. Петя выбрал 980 натуральных чисел (не обязательно различных), среди которых есть все числа от 1 до 44. Могло ли так случиться, что в каком бы порядке Петя их ни записал, первое число, сумма первого и второго числа, сумма первого, второго и третьего числа и т.д. до суммы всех 980 чисел дают разные остатки при делении на 1000?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Даны 5 гирек. Докажите, что можно выбрать какие-то две гирьки так, чтобы оставшиеся три гирьки нельзя было разбить на две группы с равными массами.

2. Существуют ли три различных натуральных числа, все три попарных суммы которых — точные квадраты?

3. Несколько теннисистов играют на вылет: тот, кто проиграл, не принимает участия в дальнейших партиях. Тот, кто выбил хотя бы двоих, получает звание мегаигрока. Докажите, что в любой момент турнира обычных игроков среди вылетевших больше, чем мегаигроков.

4. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть три различных натуральных делителя, отличных от него самого, сумма которых равна 100100.

5. По кругу расставлено 100 точек: 50 красных и 50 синих, причём красные и синие точки чередуются. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Каждый из игроков своим ходом может соединить отрезком две разноцветные точки, причём никакие два проведённых отрезка не должны иметь общих точек (даже концов). Панда каждым ходом проводит один отрезок, а Вомбат — ровно два отрезка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

6. Угловая клетка таблицы 9×9 покрашена в синий цвет, а остальные 80 клеток таблицы — в красный. За одну операцию можно выбрать строку и столбец и поменять цвета всех 17 клеток в них на противоположные (красный на синий и наоборот). Докажите, что такими операциями нельзя сделать всю доску синей.

7. Продавец Вася хочет продать бананы по цене 40 рублей за килограмм, а яблоки по 50 рублей за килограмм. Однако его шеф приказал продавать бананы за 50 рублей, а яблоки — за 40 рублей (тоже за килограмм). Оказалось, что после продажи всех фруктов выручка составила на 100 рублей больше, чем если бы всё продавалось по старым ценам. На сколько килограммов бананов было продано больше, чем яблок?

8. Клетки квадрата 3×3 покрашены в 9 разных цветов. Разрешается сколько угодно раз переставлять строки со строками и столбцы со столбцами. Сколько разных раскрасок квадрата можно получить таким образом? Раскраски, получающиеся друг из друга поворотами и переворотами, считаются различными.