LIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2019

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Петя прошел 500 м по железнодорожному тоннелю длиной 1200 м. Внезапно он услышал позади себя гудок поезда, который приближается к тоннелю со скоростью 60 км/ч. Если Петя побежит со своей постоянной скоростью v, то в какую бы сторону он ни побежал, из тоннеля он выбежит ровно в тот момент, когда поезд поравняется с Петей. Чему равна скорость v, с которой бегает Петя?

2. Тройка точек называется *хорошей*, если одна из них лежит точно посередине отрезка, соединяющего две оставшиеся. Как отметить несколько узлов на клетчатой плоскости, чтобы каждый из них входил в одно и то же число хороших троек, большее 1?

3. В классе 30 учеников, сидящих по двое за 15 партами. Они написали контрольную работу, за которую каждый получил оценку 2, 3, 4 или 5. Некоторые из учеников всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. После контрольной каждый ученик произнёс два утверждения: «Я получил оценку выше, чем в среднем по классу.» и «Мой сосед по парте получил тройку.» Может ли в этом классе быть ровно 13 лжецов?

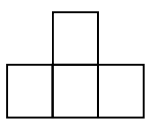
4. Петя написал на доске 9-значное число. Он проделывает с ним следующие операции. За одну операцию он вычёркивает последние 4 цифры написанного числа, оставшееся число возводит в квадрат и пишет вместо предыдущего. После 20 операций на доске было 9-значное число. Какое?

5. На доске написаны числа от 1 до n ($n \geq 4$). Изначально все числа покрашены в белый цвет. За одну операцию можно выбрать любые четыре такие числа $a < b < c < d$ из написанных, что $b–a = c–b = d–c$, и перекрасить их (белые числа в черный цвет, а черные числа — в белый). При каких n можно несколькими такими операциями добиться того, что все числа на доске станут черными?

6. В стране 20 городов. Любые два города соединены прямой авиалинией. Для каждой авиалинии установлена цена перелёта по ней, которая составляет 10, 20 или 30 тугриков, причём для каждой из этих цен есть авиалиния ровно с такой ценой. Известно, что если вылететь из любого города и после трех перелетов вернуться в него, то придется потратить не меньше 60 тугриков. Докажите, что сумма цен на всех авиалиниях не меньше 3970 тугриков.

7. Дима выписал на доску 2 000 000 последовательных натуральных чисел, а затем стер все числа, у которых есть делитель, больший миллиона и не превосходящий двух миллионов. Какое наименьшее количество чисел могло остаться на доске?

8. Квадрат 2000×2000 разрезан на Т-тетраминошки (см. рисунок справа; изображённую на нем фигурку можно поворачивать). Докажите, что есть 6 прямых, идущих по линиям сетки и рассекающих одно и то же число фигурок.



КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Петя прошел 500 м по железнодорожному тоннелю длиной 1200 м. Внезапно он услышал позади себя гудок поезда, который приближается к тоннелю со скоростью 60 км/ч. Если Петя побежит со своей постоянной скоростью v, то в какую бы сторону он ни побежал, из тоннеля он выбежит ровно в тот момент, когда поезд поравняется с Петей. Чему равна скорость v, с которой бегает Петя?

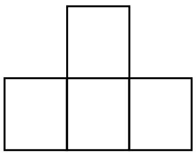
2. В каждой клетке самого левого столбца доски 2019×2019 стоит конь. За один шаг можно выбрать двух коней и переставить их на две свободные клетки по правилам шахматной игры. Можно ли переставить всех коней на второй слева столбец доски?

3. Даны три равных отрезка AB, BC и AD, причем точка D лежит на отрезке BC. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку DC, биссектриса угла ADC и прямая AC пересекаются в одной точке.

4. Существуют ли натуральные числа n и k, для которых $\dfrac{n}{3^k - n}$ — квадрат натурального числа?

5. Числа a и b удовлетворяют неравенствам $|3a–2b| \le 1$ и $|2a–3b| \le 1$. Какое наибольшее значение может принимать $|a|$?

6. Квадрат 2000×2000 разрезан на Т-тетраминошки (см. рисунок справа; изображённую на нем фигурку можно поворачивать). Докажите, что есть 6 прямых, идущих по линиям сетки и рассекающих одно и то же число фигурок.



7. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 = abc(a^3+b^3+c^3)$. Докажите, что произведение каких-то двух из этих чисел является квадратом некоторого натурального числа.

8. На каждом ребре полного графа с 2000 вершинами написано число 1, 2 или 3 так, что сумма чисел на рёбрах каждого треугольника не меньше 5. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел на рёбрах?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Докажите, что наименьшее общее кратное $[a, b]$ и наибольший общий делитель (a, b) любых двух натуральных чисел a и b удовлетворяют неравенству $a(a, b)+b[a, b] \geq 2ab$.

2. На стороне AB треугольника ABC расположены точки D и E так, что $AD = DE = EB$. Точки A и B оказались серединами отрезков CF и CG. Прямая CD пересекает прямую FB в точке I, а прямая CE пересекает прямую AG в точке J. Докажите, что точка пересечения прямых AI и BJ лежит на прямой FG.

3. Столбцы доски 2019×2019 пронумерованы слева направо числами 1, 2, …, 2019. В каждой клетке первого столбца стоит по коню. Каждым ходом какие-то два коня одновременно ходят на две свободные клетки. Для каких k, $1 \leq k \leq 2019$, можно заполнить конями k-й столбец доски?

4. Существуют ли натуральные числа n и k, для которых $\dfrac{n}{11^k - n}$ — квадрат натурального числа?

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P, не лежащая на его диагоналях. Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что $S(APC)+S(BPD) > S(KPM)+S(LPN)$.

6. Сколько существует перестановок $a_1, a_2, ..., a_{2018}$ чисел 1, 2, ..., 2018 таких, что $a_k > k$ ровно для одного k?

7. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся такое натуральное число k, что выполняется равенство $[n(1+\sqrt{2})]=[k\sqrt{2}]$. Напомним, что через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.

8. На каждом ребре полного графа с 2019 вершинами написано число 1, 2 или 3 так, что сумма чисел на рёбрах каждого треугольника не меньше 5. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел на рёбрах?

LIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2019

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Петя прошел 500 м по железнодорожному тоннелю длиной 1200 м. Внезапно он услышал позади себя гудок поезда, который приближается к тоннелю со скоростью 60 км/ч. Если Петя побежит со своей постоянной скоростью v, то в какую бы сторону он ни побежал, из тоннеля он выбежит ровно в тот момент, когда поезд поравняется с Петей. Чему равна скорость v, с которой бегает Петя?*

Ответ. 10 км/ч. Решение. Пусть поезд находится от въезда в тоннель на расстоянии s км. По условию $0{,}5/v = s/60$ и $0{,}7/v = (s+1{,}2)/60$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем $0{,}2/v = 1{,}2/60$, откуда $v = 60 \cdot 0{,}2/1{,}2 = 10$ (км/ч).

Задача 2. *Тройка точек называется* ***хорошей****, если одна из них лежит точно посередине отрезка, соединяющего две оставшиеся. Как отметить несколько узлов на клетчатой плоскости, чтобы каждый из них входил в одно и то же число хороших троек, большее 1?*

Решение. Отметим все 12 вершин клеток, лежащих на сторонах клетчатого квадрата размером 3×3. Легко проверить, что каждая из отмеченных точек входит ровно в две хорошие тройки.

Задача 3. *В классе 30 учеников, сидящих по двое за 15 партами. Они написали контрольную работу, за которую каждый получил оценку 2, 3, 4 или 5. Некоторые из учеников всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. После контрольной каждый ученик произнёс два утверждения: «Я получил оценку выше, чем в среднем по классу.» и «Мой сосед по парте получил тройку.» Может ли в этом классе быть ровно 13 лжецов?*

Ответ. Не могло. Решение. Пусть могло. Назовём учеников, говорящих правду, *рыцарями*. Так как число 13 нечётно, найдется парта А, за которой сидят рыцарь и лжец. У этого лжеца тройка — так сказал рыцарь. С другой стороны, рыцарей в классе больше чем лжецов, поэтому найдется парта Б, за которой сидят два рыцаря. Тогда у обоих тройки. Получается, что средняя оценка по классу, судя по словам рыцарей за партой Б, меньше 3, а судя по словам лжеца за партой А — не меньше 3. Противоречие.

Задача 4. *Петя написал на доске 9-значное число. Он проделывает с ним следующие операции. За одну операцию он вычёркивает последние 4 цифры написанного числа, оставшееся число возводит в квадрат и пишет вместо предыдущего. После 20 операций на доске было 9-значное число. Какое?*

Ответ. 100000000. Решение. Рассмотрим число, которое образовано первыми 5 цифрами числа на доске. Если изначально оно равно 10000, то все числа на доске, начиная со второго, будут равны 100000000. Если же оно равно $10000+k$ при натуральном k, то после возведения в квадрат оно будут не меньше $10000(10000+k)+10000k=10000(10000+2k)$, а тогда после вычёркивания последних 4 цифр число станет не меньше $10000+2k$. Следовательно, после каждой операции число k будет увеличиваться хотя бы вдвое и после 20 операций будет не меньше $2^{20} = 1024^2 > 1000000$. Значит, исходное число после 20 операций будет больше $10000 \cdot 1000000 = 10000000000$, то есть по крайней мере 11-значным.

Задача 5. *На доске написаны числа от 1 до n (n ≥ 4). Изначально все числа покрашены в белый цвет. За одну операцию можно выбрать любые четыре такие числа a < b < c < d из написанных, что b–a = c–b = d–c, и перекрасить их (белые числа в черный цвет, а черные числа — в белый). При каких n можно несколькими такими операциями добиться того, что все числа на доске станут черными?*

Ответ. При всех n, делящихся на 4. Решение. Если $n = 4k$, то перекрасим числа от 1 до 4, от 5 до 8, …, от $4k$–3 до $4k$. Покажем, что при других n сделать все числа чёрными не удастся. Заметим, что после любого перекрашивания чётность количества белых чисел не меняется. Поэтому при нечётном n перекрасить все числа не удастся, так как количество белых чисел всегда будет нечетным. Пусть n чётно, но не делится на 4, то есть $n = 4k+2$. Тогда на доске $2k+1$ нечётных чисел. Легко проверить что среди перекрашиваемых чисел всегда чётное количество нечётных. Значит, количество белых нечётных чисел после любого числа перекрашиваний будет нечетным. В обоих рассмотренных случаях получается, что на доске всегда будет хотя бы одно белое число.

Задача 6. *В стране 20 городов. Любые два города соединены прямой авиалинией. Для каждой авиалинии установлена цена перелёта по ней, которая составляет 10, 20 или 30 тугриков, причём для каждой из этих цен есть авиалиния ровно с такой ценой. Известно, что если вылететь из любого города и после трех* *перелетов вернуться в него, то придется потратить не меньше 60 тугриков. Докажите, что сумма цен на всех авиалиниях не меньше 3970 тугриков.*

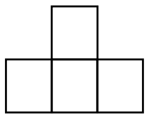
<u>Решение</u>. Пусть рейс AB стоит 10 тугриков. Тогда для любого третьего города C суммарная стоимость рейсов AC и BC не меньше 50. Таких городов C — 18, и потому суммарная стоимость всех треугольников, содержащих сторону AB, не меньше $50{\cdot}18+10 = 910$ тугриков.

Уберём города A и B вместе со всеми исходящими из них рейсами. Если между оставшимися 18 городами нет рейса цены 10, суммарная стоимость всех рейсов не меньше $910+20{\cdot}18{\cdot}17/2 = 3970$, что и требовалось доказать. В противном случае пусть CD — рейс цены 10. Тогда для любого третьего города E среди рейсов CE и DE есть хотя бы один рейс цены 30 — иначе найдется треугольник цены не более 50. Таким образом, между 18 оставшимися городами есть хотя бы 16 рейсов цены 30. С другой стороны, из одного города не может выходить больше одного рейса цены 10, иначе возникнет треугольник цены не более 50. Поэтому рейсов цены 10 между оставшимися городами не более 9, и суммарная стоимость рейсов между 18 оставшимися городами не меньше, чем $910+20{\cdot}18{\cdot}17/2–9(20–10)+16(30–20) > 3970$, что тоже нас устраивает.

Задача 7. *Дима выписал на доску 2 000 000 последовательных натуральных чисел, а затем стер все числа, у которых есть делитель, больший миллиона и не превосходящий двух миллионов. Какое наименьшее количество чисел могло остаться на доске?*

<u>Ответ</u>. 500 000. <u>Решение</u>. *Оценка*. Рассмотрим все выписанные нечетные числа. Очевидно, они не имеют четных делителей. Предположим, что два выписанных нечетных числа a и b ($a > b$) имеют один и тот же нечетный делитель $d > 1000000$. Тогда $a–b$ делится на d, но $a–b$ четно, поэтому $(a–b)/2$ делится на d. Но это невозможно, так как $0 < (a–b)/2 < d$. Таким образом, не более 500000 выписанных нечетных чисел могут иметь делитель, больший миллиона, но меньший двух миллионов (ровно по одному числу на каждое нечетное число из этого промежутка). Следовательно, хотя бы 500000 чисел останутся невычеркнутыми. *Пример*. Выпишем числа от 1000001 до 3000000. Тогда все нечетные числа, большие двух миллионов, останутся невычеркнутыми, так как если нечетное число имеет делитель d и не равно d, то оно не меньше, чем $3d$, то есть при $d > 1000000$ оно должно быть больше 3000000.

Задача 8. *Квадрат 2000×2000 разрезан на Т-тетраминошки (см. рисунок справа; изображённую на нем фигурку можно поворачивать). Докажите, что есть 6 прямых, идущих по линиям сетки и рассекающих одно и то же число фигурок.*



<u>Решение</u>. *Лемма 1*. Каждая прямая, идущая по линиям сетки, рассекает четное число Т-тетраминошек. *Доказательство*. Легко проверить, что если прямая, идущая по линиям сетки, рассекает тетраминошку, то одна из получившихся частей состоит из одной клетки, а другая — из трёх. Пусть какая-то прямая, идущая по линиям сетки, рассекает нечетное число тетраминошек. Тогда с одной стороны от неё от нее остается нечетное количество частей рассеченных тетраминошек, каждая из которых состоит из нечетного числа клеток, и какое-то количество целых тетраминошек, состоящих из четного числа клеток, т. е. в совокупности — нечетное число клеток. Но на самом деле их там четное число — прямоугольник, одна из сторон которого равна 2000. Противоречие, лемма доказана.

Лемма 2. Каждая прямая, идущая по линиям сетки, рассекает не более 1332 Т-тетраминошек. *Доказательство*. Назовём сторону клетки *рассекающей*, если она рассекает какую-то тетраминошку. Легко проверить, что на прямой, идущей по линиям сетки, рядом с каждой рассекающей стороной находится нерассекающая. При этом одна нерассекающая сторона граничит не более чем с двумя рассекающими. Поэтому если на прямой, идущей по линиям сетки, k нерассекающих сторон, то на ней не более $2k$ рассекающих, откуда $3k \geq 2000$, $k \geq 2000/3 = 666+2/3$, то есть $k \geq 667$. Значит, количество рассекающих сторон не превосходит $2000–667 = 1333$, а в силу чётности их числа не превосходит 1332. Лемма доказана.

Завершение решения. Четных неотрицательных чисел, не превосходящих 1332, ровно 667. Прямых, идущих по линиям сетки внутри квадрата 2000×2000, ровно 3998. Допустим, нет шести прямых, рассекающих одно и то же число Т-тетраминошек. Тогда всего прямых не более $667{\cdot}5$, что меньше, чем 3998. Противоречие.

LIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2019

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Петя прошел 500 м по железнодорожному тоннелю длиной 1200 м. Внезапно он услышал позади себя гудок поезда, который приближается к тоннелю со скоростью 60 км/ч. Если Петя побежит со своей постоянной скоростью v, то в какую бы сторону он ни побежал, из тоннеля он выбежит ровно в тот момент, когда поезд поравняется с Петей. Чему равна скорость v, с которой бегает Петя?*

Ответ. 10 км/ч. Решение. Пусть поезд находится от въезда в тоннель на расстоянии s км, а Петя бегает со скоростью v км/ч. По условию $0{,}5/v = s/60$ и $0{,}7/v = (s+1{,}2)/60$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем $0{,}2/v = 1{,}2/60$, откуда $v = 60\cdot 0{,}2/1{,}2 = 10$ (км/ч).

Задача 2. *В каждой клетке самого левого столбца доски 2019×2019 стоит конь. За один шаг можно выбрать двух коней и переставить их на две свободные клетки по правилам шахматной игры. Можно ли переставить всех коней на второй слева столбец доски?*

Ответ. Нельзя. Решение. Раскрасим клетки доски в белый и чёрный цвета в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были чёрными. Тогда в первом слева столбце будет нечётное число чёрных клеток, а во втором слева — чётное. После хода коня цвет его клетки меняется. Поэтому если два коня сходили одновременно, чётность количества чёрных клеток, на которых стоят кони, не меняется. Значит, заполнить конями по описанным в условии правилам второй слева столбец с чётным номером не удастся.

Задача 3. *Даны три равных отрезка AB, BC и AD, причем точка D лежит на отрезке BC. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку DC, биссектриса угла ADC и прямая AC пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть биссектриса угла ADC пересекает прямую AC в точке E. Положим $\angle ABC = 2\alpha$. Так как $AD = AB$, $\angle ADB = \angle ABC = 2\alpha$, откуда $\angle ADC = 180°-2\alpha$ и $\angle CDE = 90°-\alpha$. С другой стороны, $AC = AB$, откуда $\angle ACB = (180°-\angle ABC)/2 = 90°-\alpha = \angle CDE$. Таким образом, $EC = ED$, и высота треугольника CED, опущенная из вершины E, является медианой, а значит, и серединным перпендикуляром к отрезку DC.

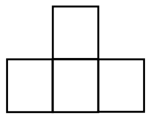
Задача 4. *Существуют ли натуральные числа n и k, для которых* $\dfrac{n}{3^k-n}$ *— квадрат натурального числа?*

Ответ. Нет. Решение. Пусть $\dfrac{n}{3^k-n} = m^2$. Тогда $n(m^2+1) = 3^k\cdot m^2$. Так как числа m^2 и m^2+1 взаимно просты, число m^2+1 должно быть делителем числа 3^k, то есть $m^2+1 = 3^s$. Но это невозможно, так как числа вида m^2+1 дают при делении на 3 остатки 1 и 2. Случай $s = 0$ также невозможен, так как тогда $m = 0$.

Задача 5. *Числа a и b удовлетворяют неравенствам* $|3a-2b| \le 1$ *и* $|2a-3b| \le 1$*. Какое наибольшее значение может принимать* $|a|$*?*

Ответ. 1. Решение. *Пример*. $a = b = 1$. *Оценка*. Если $a < 0$, умножим a и b на -1, и условие задачи не изменится. Поэтому можно считать, что $a \ge 0$. Допустим, $a > 1$. Тогда из первого неравенства $3 < 3a \le 2b+1$, откуда $b > 1$. С другой стороны, из второго неравенства $2a \ge 3b-1$. Поэтому $a = 3a-2a \le (2b+1)-(3b-1) = 2-b < 1$. Противоречие.

Задача 6. *Квадрат 2000×2000 разрезан на Т-тетраминошки (см. рисунок справа; изображённую на нем фигурку можно поворачивать). Докажите, что есть 6 прямых, идущих по линиям сетки и рассекающих одно и то же число фигурок.*



Решение. *Лемма 1*. Каждая прямая, идущая по линиям сетки, рассекает четное число Т-тетраминошек. *Доказательство*. Легко проверить, что если прямая, идущая по линиям сетки, рассекает тетраминошку, то одна из получившихся частей состоит из одной клетки, а другая — из трёх. Пусть какая-то прямая, идущая по линиям сетки, рассекает нечетное число тетраминошек. Тогда с одной стороны от неё от нее остается нечетное количество частей рассеченных тетраминошек, каждая из которых состоит из нечетного числа клеток, и какое-то количество целых тетраминошек, состоящих из четного числа клеток, т. е. в совокупности — нечетное число клеток. Но на самом деле их там четное число — прямоугольник, одна из сторон которого равна 2000. Противоречие, лемма доказана.

Лемма 2. Каждая прямая, идущая по линиям сетки, рассекает не более 1332 Т-тетраминошек. *Доказательство*. Назовём сторону клетки *рассекающей*, если она рассекает какую-то тетраминошку. Легко проверить, что на прямой, идущей по линиям сетки, рядом с каждой рассекающей стороной находится нерассекающая. При этом одна нерассекающая сторона граничит не более чем с двумя рассекающими. Поэтому если на прямой, идущей по линиям сетки, k нерассекающих сторон, то на ней не более $2k$ рассекающих, откуда $3k \geq 2000$, $k \geq 2000/3 = 666+2/3$, то есть $k \geq 667$. Значит, количество рассекающих сторон не превосходит 2000–667 = 1333, а в силу чётности их числа не превосходит 1332. Лемма доказана.

Завершение решения. Четных неотрицательных чисел, не превосходящих 1332, ровно 667. Прямых, идущих по линиям сетки внутри квадрата 2000×2000, ровно 3998. Допустим, нет шести прямых, рассекающих одно и то же число Т-тетраминошек. Тогда всего прямых не более $667 \cdot 5$, что меньше, чем 3998. Противоречие.

Задача 7. *Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 = abc(a^3+b^3+c^3)$. Докажите, что произведение каких-то двух из этих чисел является квадратом некоторого натурального числа.*

Решение. $0 = a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-abc(a^3+b^3+c^3) = (ab-c^2)(bc-a^2)(ca-b^2)$. Поэтому либо $ab=c^2$, либо $bc=a^2$, либо $ca=b^2$.

Задача 8. *На каждом ребре полного графа с 2000 вершинами написано число 1, 2 или 3 так, что сумма чисел на рёбрах каждого треугольника не меньше 5. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел на рёбрах?*

Ответ. 3997000. Решение. *Пример*. Выберем 1000 рёбер без общих вершин, на них напишем единицы, на остальных рёбрах — двойки. Сумма написанных чисел будет равна как раз $2 \cdot (2000 \cdot 1999/2) - 1000 = 3997000$. *Оценка*. Назовём вершину *плохой*, если из неё выходит больше одного ребра, помеченного единицей. Если в графе нет плохих вершин, то всё в порядке: ребер с единицами не больше 1000, и сумма написанных не ребрах чисел не меньше $2 \cdot (2000 \cdot 1999/2) - 1000 = 3997000$. Пусть плохая вершина A есть. Возьмём ребро AB, на котором написана единица и рассмотрим все треугольники вида ABC. Если на одной из сторон AC или BC такого треугольника написана единица, то на другой должна быть тройка. Во всех таких случаях заменим эти единицу и тройку на две двойки. Сумма написанных на ребрах чисел при этом не изменится, сумма чисел на сторонах любого треугольника останется не меньше 5, а число плохих вершин уменьшится. Повторяя описанную процедуру, мы можем уничтожить все плохие вершины, а для графа без плохих вершин всё уже было доказано.

LIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2019

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Докажите, что наименьшее общее кратное [a, b] и наибольший общий делитель (a, b) любых двух натуральных чисел a и b удовлетворяют неравенству $a(a, b)+b[a, b] \geq 2ab$.*

Первое решение. Положим $(a, b) = d$. Тогда $a = de$, $b = df$, $a(a, b)+b[a, b] = d^2e+d^2f^2e = d^2e(1+f^2) \geq 2d^2ef = 2ab$.
Второе решение. Наименьшее общее кратное $[a, b]$ чисел a и b делится на a и, следовательно, либо равно a, либо не меньше $2a$. Во втором случае уже $b[a, b] \geq 2ab$, а в первом a делится на b, откуда $(a, b) = b$ и $a(a, b)+b[a, b] = 2ab$.

Задача 2. *На стороне AB треугольника ABC расположены точки D и E так, что AD = DE = EB. Точки A и B оказались серединами отрезков CF и CG. Прямая CD пересекает прямую FB в точке I, а прямая CE пересекает прямую AG в точке J. Докажите, что точка пересечения прямых AI и BJ лежит на прямой FG.*

Решение. Точка E делит медиану AB треугольника CAG в отношении 2:1, считая от вершины A. Значит, E — точка пересечения медиан треугольника CAG, и потому CJ — медиана этого треугольника, то есть $AJ = GJ$. Аналогично $FI = BI$. Значит, прямая IJ содержит среднюю линию трапеции $FABG$.

Пусть прямая CI пересекает FG в точке K. Так как AB — средняя линия треугольника FCG, $CD = DK$. Так как прямая IJ содержит среднюю линию трапеции $FABG$, $DI = IK$. Значит, $CI = 3CD/2$. Аналогично $CJ = 3CE/2$. Таким образом, треугольник CIJ подобен треугольнику CDE с коэффициентом 3/2, откуда $IJ = 3DE/2 = AB/2$. Получается, что IJ — средняя линия треугольника ABH, где H — точка пересечения прямых AI и BJ. Следовательно, точка H удалена от средней линии трапеции $FABG$ на такое же расстояние, на какое эта средняя линия удалена от оснований AB и FG, и потому лежит на прямой FG.

Задача 3. *Столбцы доски 2019×2019 пронумерованы слева направо числами 1, 2, …, 2019. В каждой клетке первого столбца стоит по коню. Каждым ходом какие-то два коня одновременно ходят на две свободные клетки. Для каких k, $1 \leq k \leq 2019$, можно заполнить конями k-й столбец доски?*

Ответ. Для всех четных k, и только для них. Решение. Раскрасим клетки доски в белый и чёрный цвета в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были чёрными. Тогда во всех столбцах с нечётными номерами будет нечётное число чёрных клеток, а во всех столбцах с чётными номерами — чётное. После хода коня цвет его клетки меняется. Поэтому если два коня сходили одновременно, чётность количества чёрных клеток, на которых стоят кони, не меняется. Значит, заполнить конями по описанным в условии правилам столбец с чётным номером мы не сможем.

Чтобы показать, что можно заполнить конями любой нечётный столбец, достаточно показать, что можно заполнить ими третий столбец, не используя клеток, лежащих правее него: тогда мы сможем затем аналогичными действиями заполнить пятый столбец и т.д. Одновременно сходим конём, стоящим в нижней клетке первого столбца, во вторую снизу клетку третьего, а конём, стоящим во второй снизу клетке первого столбца, — в нижнюю клетку третьего. Далее аналогично переместим в третий столбец коней с третьей и четвертой, …, 2017-ой и 2018-ой клеток. Конем же K с верхней клетки сначала сходим на третью сверху клетку второго столбца в паре с ходом любого из остальных коней L на любое место доступное место в первой строке, а следующей парой ходов ставим коня K на верхнюю клетку третьей строки, а коня L возвращаем на место. Третий столбец заполнен.

Задача 4. *Существуют ли натуральные числа n и k, для которых* $\frac{n}{11^k - n}$ *— квадрат натурального числа?*

Ответ. Нет. Решение. Пусть $\frac{n}{11^k - n} = m^2$. Тогда $n(m^2+1) = 11^k \cdot m^2$. Так как числа m^2 и m^2+1 взаимно просты, число m^2+1 должно быть делителем числа 11^k, то есть $m^2+1 = 11^s$. Но это невозможно, так как числа вида m^2+1 дают при делении на 11 только ненулевые остатки. Случай $s = 0$ также невозможен, так как тогда $m = 0$.

Задача 5. *Внутри параллелограмма ABCD отмечена точка P, не лежащая на его диагоналях. Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что S(APC)+S(BPD) > S(KPM)+S(LPN).*

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Не умаляя общности будем считать, что точка P лежит в параллелограмме $OLCM$. Пусть прямая, проходящая через точку P параллельно

BC, пересекает отрезок LN в точке Q. Эта точка лежит внутри треугольника BPD, поэтому $S(BQD) < S(BPD)$. С другой стороны, $S(KQM) = S(KPM)$, так как у этих треугольников общее основание KM и равные высоты. По аналогичным причинам $S(BQO) = S(KQO)$ и $S(DQO) = S(MQO)$. Складывая два последних равенства, получаем $S(KQM) = S(BQD)$, откуда $S(KQM) < S(BPD)$. Аналогично $S(LPN) < S(APC)$. Осталось сложить два последних неравенства.

Задача 6. *Сколько существует перестановок $a_1, a_2, ..., a_{2018}$ чисел 1, 2, ..., 2018 таких, что $a_k > k$ ровно для одного k?*

Ответ. 2^{2018}–2019. Решение. Докажем по индукции, что при любом натуральном n существует ровно $a_n = 2^n–(n+1)$ указанных в условии (назовём их *хорошими*) перестановок чисел $1, \ldots, n$. База очевидна: $a_1 = 2^1–(1+1) = 0$. Докажем переход. Пусть уже доказано, что $a_{n–1} = 2^{n–1}–n$. Заметим, что хороших перестановок чисел $1, \ldots, n$ ($n > 1$), оставляющих на месте число 1, столько же, сколько хороших перестановок чисел $2, \ldots, n$, то есть $a_{n–1}$. Следовательно, достаточно доказать, что количество хороших перестановок чисел $1, \ldots, n$ ($n > 1$), *не* оставляющих на месте число 1, равно $2^n–(n+1)–a_{n–1} = 2^{n–1}–1$.

Рассмотрим хорошие перестановки, переводящие единицу в число $k > 1$. Все остальные числа по условию должны переходить в себя или меньшие. Так число 2 может перейти в себя или в 1. После этого для числа 3 тоже будет два варианта: перейти в себя или встать на единственное меньшее свободное место. Продолжая это рассуждение, находим, что для чисел от 2 до k–1 существует $2^{k–2}$ вариантов перестановки. Далее, у числа k есть единственная возможность — встать на меньшее пустое место, а у чисел, больших k, единственная возможность — остаться на месте.

Из сказанного следует, что хороших перестановок чисел $1, \ldots, n$, при которых 1 не остается на месте, действительно существует $1+\ldots+2^{n–2} = 2^{n–1}–1$, что и завершает доказательство.

Задача 7. *Докажите, что для любого натурального числа n найдётся такое натуральное число k, что выполняется равенство $[n(1+\sqrt{2})]=[k\sqrt{2}]$. Напомним, что через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.*

Решение. Положим $m = [n(1+\sqrt{2})] \Leftrightarrow m < n(1+\sqrt{2}) < m+1 \Leftrightarrow m(\sqrt{2}-1) < n < (m+1)(\sqrt{2}-1)$. Из левой части последнего двойного неравенства следует, что $m\sqrt{2} < n+m$, а из правой — что $n+m+1 < (m+1)\sqrt{2}$. Деля оба полученных неравенства на 2, получаем, что между числами $\frac{m}{\sqrt{2}}$ и $\frac{m+1}{\sqrt{2}}$ находятся два последовательных полуцелых числа $(n+m)/2$ и $(n+m+1)/2$. Одно из них является целым. Обозначим его через k. Тогда $m < k\sqrt{2} < m+1$, откуда $[k\sqrt{2}]=m = [n(1+\sqrt{2})]$, что и требовалось.

Задача 8. *На каждом ребре полного графа с 2019 вершинами написано число 1, 2 или 3 так, что сумма чисел на рёбрах каждого треугольника не меньше 5. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел на рёбрах?*

Ответ. 2019·2018–1009 = 4073333. Решение. *Пример*. Выберем 1009 рёбер без общих вершин, на них напишем 1, на остальных рёбрах — 2. Сумма написанных чисел будет как раз 2·(2019·2018/2)–1009 = 4073333. *Оценка*. Назовём вершину *плохой*, если из неё выходит больше одного ребра, помеченного единицей. Если в графе нет плохих вершин, то всё в порядке: ребер с единицами не больше 1009, и сумма написанных не ребрах чисел не меньше 2·(2019·2018/2)–1009. Пусть плохая вершина A есть. Возьмём ребро AB, на котором написана единица, и рассмотрим все треугольники вида ABC. Если на одной из сторон AC или BC такого треугольника написана единица, то на другой должна быть тройка. Во всех таких случаях заменим эти единицу и тройку на две двойки. Сумма написанных на ребрах чисел при этом не изменится, сумма чисел на сторонах любого треугольника останется не меньше 5, а число плохих вершин уменьшится. Повторяя описанную процедуру, мы можем уничтожить все плохие вершины, а для графа без плохих вершин всё уже было доказано.