МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что уравнение $x+x^2 = y+y^2+y^3$ не имеет решений в натуральных числах.

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Доска $2n\times 2n$ покрашена в шахматном порядке. При каких n можно так поставить на неё $2n$ не бьющих друг друга ладей, чтобы n из них стояли на чёрных клетках, а n — на белых?

3. Ненулевые вещественные числа a, b и c таковы, что $a^2+a = b^2$, $b^2+b = c^2$, $c^2+c = a^2$. Докажите, что $(a–b)(b–c)(c–a) = 1$.

4. На диагоналях параллелограмма $ABCD$ как на основаниях построены равносторонние треугольники ACM и BDN. Докажите, что отрезок MN перпендикулярен одной из сторон параллелограмма.

5. Пусть n — натуральное число. Докажите, что

$$C_{2n+1}^{n} = 2^0 C_n^0 C_n^{[n/2]} + 2^1 C_n^1 C_{n-1}^{[(n-1)/2]} + \ldots + 2^k C_n^k C_{n-k}^{[(n-k)/2]} + \ldots + 2^n C_n^n C_0^0.$$

($C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число способов выбрать k предметов из n без учёта порядка; $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.)

6. Куб $n\times n\times n$ состоит из единичных кубиков. Рассмотрим всевозможные кубы, содержащиеся в этом кубе и составленные из единичных кубиков. Будем говорить, что один такой куб *содержится внутри* другого такого куба, если все его кубики принадлежат другому кубу и не лежат на его гранях. Какое наибольшее количество кубов со стороной больше 1 можно выбрать так, чтобы ни один из них не содержался внутри другого?

7. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $45° < \angle C < 60°$. Точка M — середина стороны BC. Перпендикуляр к AM, проведенный через C, пересекает катет AB в точке D. На стороне AC взяли точку E; K — точка пересечения прямых CD и BE. Докажите, что если $BK = 2AE$, то треугольник CEK — равнобедренный.

8. Про действительные числа a, b и c известно, что $|a|<1$, $|b|<1$, $|c|<1$, а также $|a+b| \le 1+c$, $|a–b| \le 1–c$. Докажите, что $\dfrac{(a+b)^2}{2(1+c)} + \dfrac{(a-b)^2}{2(1-c)} \leqslant a^2 + 2b^2 + 2c^2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что уравнение $x+x^2 = y+y^2+y^3$ не имеет решений в натуральных числах.

2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Доска $2n\times 2n$ покрашена в шахматном порядке. При каких n можно так поставить на неё $2n$ не бьющих друг друга ладей, чтобы n из них стояли на чёрных клетках, а n — на белых?

3. Ненулевые вещественные числа a, b и c таковы, что $a^2+a = b^2$, $b^2+b = c^2$, $c^2+c = a^2$. Докажите, что $(a–b)(b–c)(c–a) = 1$.

4. На диагоналях параллелограмма $ABCD$ как на основаниях построены равносторонние треугольники ACM и BDN. Докажите, что отрезок MN перпендикулярен одной из сторон параллелограмма.

5. Торговец купил 20 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может переливать лимонад из полной бочки в пустую. За какое наименьшее количество переливаний он заведомо сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?

6. Квадрат 100×100 состоит из единичных квадратиков. Рассмотрим всевозможные содержащиеся в нём квадраты, составленные из единичных квадратиков. Будем говорить, что один такой квадрат *содержится внутри* другого такого квадрата, если все его квадратики принадлежат другому квадрату и не примыкают к его сторонам. Какое наибольшее количество квадратов со стороной больше 1 можно выбрать таким образом, чтобы ни один из них не содержался внутри другого?

7. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $45° < \angle C < 60°$. Точка M — середина стороны BC. Перпендикуляр к AM, проведенный через C, пересекает катет AB в точке D. На стороне AC взяли точку E; K — точка пересечения прямых CD и BE. Докажите, что если треугольник CEK — равнобедренный, то $BK = 2AE$.

8. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019} < \frac{a}{2018+a^3} + \frac{b}{2018+b^3} + \frac{c}{2018+c^3} < \frac{1}{2018}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все пары натуральных чисел a, b, для которых $a\cdot[a, b] = 4(a, b)$. (Здесь $[a, b]$ и (a, b) обозначают соответственно, как и должно, наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель чисел a и b.)

2. В стране некоторые города соединены двусторонними авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в стране более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.

3. Ненулевые вещественные числа a, b и c таковы, что $a^2+a = b^2$, $b^2+b = c^2$, $c^2+c = a^2$. Докажите, что $(a–b)(b–c)(c–a) = 1$.

4. На диагоналях параллелограмма $ABCD$ как на основаниях построены равносторонние треугольники ACM и BDN. Докажите, что отрезок MN перпендикулярен одной из сторон параллелограмма.

5. Торговец купил 111 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец за не более, чем 166 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?

6. Квадрат 100×100 состоит из единичных квадратиков. Рассмотрим всевозможные содержащиеся в нём квадраты, составленные из единичных квадратиков. Будем говорить, что один такой квадрат *содержится внутри* другого такого квадрата, если все его квадратики принадлежат другому квадрату и не примыкают к его сторонам. Какое наибольшее количество квадратов со стороной больше 1 можно выбрать таким образом, чтобы ни один из них не содержался внутри другого?

7. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $45° < \angle C < 60°$. Точка M — середина стороны BC. Перпендикуляр к AM, проведенный через C, пересекает катет AB в точке D. На стороне AC взяли точку E; K — точка пересечения прямых CD и BE. Докажите, что если треугольник CEK — равнобедренный, то $BK = 2AE$.

8. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство $\dfrac{a}{2018+a^3}+\dfrac{b}{2018+b^3}+\dfrac{c}{2018+c^3}<\dfrac{1}{2018}$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число $n \geq 100$. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски $2\times n$ в синий и красный цвета (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Когда все клетки закрашены, первый подсчитывает количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, а второй подсчитывает количество пар соседних по стороне разноцветных клеток. Выигрывает тот из них, чьё число больше. В случае равенства фиксируется ничья. Может ли кто-нибудь из игроков обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника? Если да, то кто именно?

2. По кругу расставлены числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Каждое из чисел равно 2018, 2019 или 2020, причем соседние числа различны. Докажите, что

$$a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\ldots-a_{2n-2}a_{2n-1}+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_1 = 0.$$

3. С натуральным числом разрешается делать следующую операцию: выбрать в его десятичной записи две подряд идущие цифры a и b и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab. Если при этом в начале десятичной записи числа получаются нули, то все эти нули стирают. Например, из числа 251023 последовательно можно получить числа 25106, 106, 10 и пусто. Дано сто чисел без пятерок в десятичной записи. Докажите, что все эти сто чисел можно получить из одного и того же изначального числа с помощью таких операций.

4. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Общее количество дорог равно $2(k-1)^2$. Докажите, что либо в стране есть город, из которого выходит хотя бы k дорог, либо есть k дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

5. Найдите все натуральные числа m и n, для которых $|4m^2-n^{n+1}| \leq 3$.

6. Виноторговец купил сто бочек одинакового размера с винами ста разных сортов. На каждой бочке выгравировано название сорта. Он продегустировал все вина и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта вин указаны правильно, но некоторые вина налиты в другие бочки. У торговца есть пустая бочка такого же размера, на которой ничего не написано. За одну операцию он может перелить все вино из какой-либо бочки в пустую. За какое наименьшее количество операций виноторговец заведомо сможет добиться того, чтобы в каждой бочке было вино того сорта, который на ней выгравирован?

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019} < \frac{a}{2018+a^3} + \frac{b}{2018+b^3} + \frac{c}{2018+c^3} < \frac{1}{2018}.$$

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена такая точка E, что $\angle ABE = 60°$, а на луче BA отмечена такая точка F, что $BE = BF$. Отрезки EF и AD пересекаются в точке M. Биссектриса угла CBE пересекает сторону CD в точке N. Докажите, что треугольник BMN — равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски 2×2019 в синий и красный цвета (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Когда все клетки закрашены первый подсчитывает количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, а второй подсчитывает количество пар соседних по стороне разноцветных клеток. Выигрывает тот из них, чьё число больше. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

2. По кругу расставлены числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Каждое из чисел равно 1, 2 или 3, причем соседние числа различны. Докажите, что

$$a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\ldots-a_{2n-2}a_{2n-1}+a_{2n-1}a_{2n}-a_{2n}a_1=0.$$

3. С натуральным числом разрешается делать следующую операцию: выбрать в его десятичной записи две подряд идущие цифры a и b и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab. Если при этом в начале десятичной записи числа получаются нули, то все эти нули стирают. Например, из числа 251023 последовательно можно получить числа 25106, 106, 10 и пусто. Дано сто чисел без нулей и пятерок в десятичной записи. Докажите, что все эти сто чисел можно получить из одного и того же изначального числа с помощью таких операций.

4. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Общее количество дорог равно $2(k-1)^2$. Докажите, что либо в стране есть город, из которого выходит хотя бы k дорог, либо есть k дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

5. Найдите все натуральные числа m и n, для которых $|4m^2-n^{n+1}|\le 3$.

6. Виноторговец купил 50 бочек одинакового размера с винами 50 разных сортов. На каждой бочке выгравировано название сорта. Он продегустировал все вина и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта вин указаны правильно, но некоторые вина налиты в другие бочки. У торговца есть пустая бочка такого же размера, на которой ничего не написано. За одну операцию он может перелить все вино из какой-либо бочки в пустую. Всегда ли виноторговец сможет добиться того, чтобы в каждой бочке было вино того сорта, который на ней выгравирован, сделав не более 90 операций?

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019}<\frac{a}{2018+a^3}+\frac{b}{2018+b^3}+\frac{c}{2018+c^3}<\frac{1}{2018}.$$

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена такая точка E, что $\angle ABE = 60°$, а на луче BA отмечена такая точка F, что $BE = BF$. Отрезки EF и AD пересекаются в точке M. Докажите, что $\angle BME = 75°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски 2×2019 в синий и красный цвета (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Когда все клетки закрашены первый подсчитывает количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, а второй подсчитывает количество пар соседних по стороне разноцветных клеток. Выигрывает тот из них, чьё число больше. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

2. С тремя числами a, b, c на доске можно произвести операцию замены: стереть эти числа с доски, записав в любом порядке новые три числа $a+b$, $b+c$, $c+a$. Изначально на доске были числа 20, 1, 9, после чего сделали несколько операций замен. Могли ли на доске оказаться трехзначное число, пятизначное число и еще какое-то число?

3. С числом разрешается делать следующую операцию. Выбрать в его записи две подряд идущие цифры a и b, и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab. При этом если на первых слева или на последних справа местах в записи нового числа оказывается сколько-то цифр 0, то все они стираются. Например, из 251023 последовательно можно получить 25106, 106 и 1. Дано 100 чисел, не делящихся на 10. Докажите, что все эти 100 чисел можно получить из одного и того же изначального числа.

4. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Общее количество дорог равно $2(k-1)^2$. Докажите, что либо в стране есть город, из которого выходит хотя бы k дорог, либо есть k дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

5. Найдите все натуральные числа m и n, для которых $|4m^2-n^{n+1}| \le 3$.

6. Виноторговец купил 10 бочек одинакового размера с винами 10 разных сортов. На каждой бочке выгравировано название сорта. Он продегустировал все вина и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта вин указаны правильно, но некоторые вина налиты в другие бочки. У торговца есть пустая бочка такого же размера, на которой ничего не написано. За одну операцию он может перелить все вино из какой-либо бочки в пустую. Докажите, что виноторговец всегда сможет добиться того, чтобы в каждой бочке было вино того сорта, который на ней выгравирован, сделав не более 20 операций.

7. Сумма положительных чисел a, b и c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2019} < \frac{a}{2018+a^3} + \frac{b}{2018+b^3} + \frac{c}{2018+c^3} < \frac{1}{2018}.$$

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена такая точка E, что $\angle ABE = 60°$, а на луче BA отмечена такая точка F, что $BE = BF$. Отрезки EF и AD пересекаются в точке M. Докажите, что $\angle BME = 75°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В первой коробке лежат красные шары, а во второй — синие. Число красных шаров составляет 15/19 от числа синих шаров. Если удалить ровно 3/7 всех красных шаров и ровно 2/5 всех синих шаров, то в первой коробке останется менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров изначально лежит в каждой из коробок?

2. С натуральным числом разрешается проделывать следующую операцию: выбрать в его десятичной записи две подряд идущие цифры a и b, и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab. При этом если на первых слева местах в десятичной записи оказывается сколько-то нулей, то все они удаляются. Например, из 251023 последовательными операциями можно получить 25106, затем 106, 10, и, наконец, вовсе удалить число. Дано 100 чисел, состоящих из цифр 1, 3, 7, 9. Докажите, что существует число, из которого при помощи операций можно получить любое из этих 100 чисел.

3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.

4. Про натуральные числа a_1, a_2, ..., a_{100}, b известно, что $a_1!+a_2!+...+a_{100}! = b!$. Какое наибольшее значение может принимать число b? Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n$.

5. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 2×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Затем подсчитывают количество пар соседних по стороне одноцветных клеток и соседних по стороне разноцветных клеток. Первый игрок выигрывает, если одноцветных пар больше, чем разноцветных, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Назовем *интересными* 100-значные числа, в записи которых нет нулей, а каждая цифра встречается не более 20 раз. Докажите, что ровно треть из этих чисел делятся на 3.

7. Торговец купил 20 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может переливать лимонад из полной бочки в пустую. За какое наименьшее количество переливаний он заведомо сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?

8. По кругу расставлено 100 чисел, каждое из которых равно 2018, 2019 или 2020. При этом никакие два соседних числа не равны. Петя разбил эти числа на 50 пар соседних, числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Вася разбил их на 50 пар соседних другим способом, и тоже числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Докажите, что у Пети и Васи получились одинаковые результаты.

LIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2019

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В первой коробке лежат красные шары, а во второй — синие. Число красных шаров составляет 15/19 от числа синих шаров. Если удалить ровно 3/7 всех красных шаров и ровно 2/5 всех синих шаров, то в первой коробке останется менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров изначально лежит в каждой из коробок?

2. С числом разрешается делать следующую операцию. Выбрать в его записи две подряд идущие цифры a и b, и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab. При этом если на первых слева или на последних справа местах в записи нового числа оказывается сколько-то цифр 0, то все они стираются. Например, из 251023 последовательно можно получить 25106, 106 и 1. Дано 100 чисел, не делящихся на 10. Докажите, что все эти 100 чисел можно получить из одного и того же изначального числа.

3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.

4. Про натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b$ известно, что $a_1!+a_2!+\ldots+a_{100}! = b!$. Какое наибольшее значение может принимать число b? Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

5. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 2×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). Затем подсчитывают количество пар соседних по стороне одноцветных клеток, и соседних по стороне разноцветных клеток. Первый игрок выигрывает, если одноцветных пар больше, чем разноцветных, и проигрывает в противном случае. Кто выигрывает при правильной игре?

6. У некоторого натурального числа поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили к исходному числу. Какое наибольшее число могло получиться в сумме, если все цифры полученного числа различны?

7. Торговец купил 111 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец за не более, чем 166 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?

8. По кругу расставлено 100 чисел, каждое из которых равно 2018, 2019 или 2020. При этом никакие два соседних числа не равны. Петя разбил эти числа на 50 пар соседних, числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Вася разбил их на 50 пар соседних другим способом, и тоже числа в парах перемножил и полученные произведения сложил. Докажите, что у Пети и у Васи получились одинаковые результаты.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В первой коробке лежат красные шары, а во второй — синие. Число красных шаров составляет 15/19 от числа синих шаров. Если удалить ровно 3/7 всех красных шаров и ровно 2/5 всех синих шаров, то в первой коробке останется менее 1000 шаров, а во второй — более 1000 шаров. Сколько шаров изначально лежит в каждой из коробок?

2. С числом разрешается делать следующую операцию. Выбрать в его записи две подряд идущие цифры a и b, и заменить их на одну цифру — последнюю цифру произведения ab. При этом если на первых слева или на последних справа местах в записи нового числа оказывается сколько-то цифр 0, то все они стираются. Например, из 251023 последовательно можно получить 25106, 106 и 1. Дано 100 чисел, не делящихся на 10. Докажите, что все эти 100 чисел можно получить из одного и того же изначального числа.

3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.

4. Про натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b$ известно, что $a_1!+a_2!+\ldots+a_{100}! = b!$. Какое наибольшее значение может принимать число b? Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.

5. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 1×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). В конце подсчитываются количества пар соседних по стороне одноцветных клеток и соседних по стороне разноцветных клеток. Если одноцветных пар больше, выигрывает первый, если меньше, то второй, а если поровну, то объявляется ничья. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от действий соперника? Если да, то кто?

6. У некоторого натурального числа поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили полученное число к исходному. Какая наибольшая сумма могла получиться, если все её цифры различны?

7. Торговец купил 111 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец за не более, чем 166 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?

8. Фигура *хромая ладья* бьет клетки на расстоянии 2, 3 или 4 по горизонтали или вертикали, причём ладья может бить сквозь другие ладьи. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга хромых ладей можно поставить на доску 600×600?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Сколько среди восьмизначных чисел, все цифры которых различны, таких, которые делятся на 3?

2. Златан увидел на картинке футбольный мяч, сшитый из нескольких лоскутков — белых шестиугольников и красных пятиконечных звёзд. Каждая звезда граничит только с пятью шестиугольниками, а каждый шестиугольник — только с тремя звёздами. Сколько всего лоскутков ушло на изготовление мяча, если по картинке можно установить, что их не меньше 30, но меньше 40?

3. В государстве некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из каждого города выходит не более 10 авиалиний. Докажите, что если в государстве более 200 авиалиний, то найдутся 11 авиалиний, никакие две из которых не имеют общего города.

4. Два игрока по очереди закрашивают по одной клетке доски 1×2019 в синий и красный цвета, пока все клетки не будут закрашены (каждый игрок может использовать любой из двух цветов). В конце подсчитываются количества пар соседних по стороне одноцветных клеток и соседних по стороне разноцветных клеток. Если одноцветных пар больше, выигрывает первый, если меньше, то второй, а если поровну, то объявляется ничья. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от действий соперника? Если да, то кто?

5. Из четырёхзначного натурального числа получены другие четырёхзначные числа путём перестановки его цифр. Может ли одно из этих чисел равняться сумме каких-то двух других этих чисел?

6. Торговец купил 11 бочек с лимонадами разных сортов и одну пустую бочку. На каждой бочке с лимонадом выгравировано название сорта. Торговец продегустировал все лимонады и обнаружил, что гравировки перепутаны: сорта лимонадов указаны правильно, но сами эти лимонады могут быть налиты в другие бочки. Торговец может перелить лимонад из полной бочки в пустую. Всегда ли торговец не более, чем за 16 переливаний сможет добиться того, чтобы в каждой бочке был лимонад того сорта, который выгравирован на этой бочке?

7. У некоторого натурального числа поменяли местами первую и последнюю цифры и прибавили полученное число к исходному. Какая наибольшая сумма могла получиться, если все её цифры различны?

8. Фигура *хромая ладья* бьет клетки на расстоянии 2, 3 или 4 по горизонтали или вертикали, причём ладья может бить сквозь другие ладьи. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга хромых ладей можно поставить на доску 600×600?