МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Костя, Слава и Юра гуляют по парку. Пока Слава делает 3 шага, Юра делает 4, а пока Юра делает 3 шага, Костя делает 5 шагов. Сколько шагов сделал Юра, если все втроем сделали в общей сложности 2460 шагов?

2. Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток так, чтобы в любом горизонтальном прямоугольнике 3×19 оказалось хотя бы 6 отмеченных, а в любом вертикальном прямоугольнике 19×3 — не более 5 отмеченных?

3. В турнире по настольному теннису участвовали 128 человек. В каждом туре участники разбивались на пары и играли, после чего проигравшие выбывали из турнира (ничьих не бывает). После турнира, когда определился единоличный победитель, каждый из участников заявил, что в течение турнира обыграл не более одного правши. Причем все правши сказали правду, а все левши соврали. Сколько правшей могло участвовать в турнире?

4. У Васи и Пети есть по n монет. Каждая монета имеет достоинство 1 копейка, 50 копеек или 1 рубль. Оказалось, что у мальчиков поровну денег, но наборы монет не совпадают. При каком наименьшем n такое возможно?

5. На 2000 карточек написаны числа. Карточки произвольным образом разбивают на пары и вычисляют 1000 сумм чисел в этих парах. Известно, что как ни разбивай карточки на пары, среди этих 1000 сумм всегда какие-то две совпадают. Какое наибольшее количество различных чисел может быть на этих карточках?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. На доске написано натуральное число n. За один ход можно заменить число на удвоенное, а можно заменить число на удвоенное, увеличенное на единицу. Сколько существует чисел n, меньших 2019, начиная с каждого из которых можно за несколько ходов выписать на доску число 2019?

2. Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток так, чтобы в любом горизонтальном прямоугольнике 3×19 оказалось хотя бы 6 отмеченных, а в любом вертикальном прямоугольнике 19×3 — не более 5 отмеченных?

3. Найдите все такие пары натуральных чисел m и n, что $9^m–7^m = 2^n$.

4. Положительные числа x, y и z удовлетворяют соотношению $x+y+z = 1$. Докажите, что $2xy+2yz+4zx < 1$.

5. На 2000 карточек написаны числа. Карточки произвольным образом разбивают на пары и вычисляют 1000 сумм чисел в этих парах. Известно, что как ни разбивай карточки на пары, среди этих 1000 сумм всегда какие-то две совпадают. Какое наибольшее количество различных чисел может быть на этих карточках?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Ненулевые целые числа a, b и c таковы, что $\frac{a}{b+c^2}=\frac{a+c^2}{b}$. Докажите, что $a+b+c \le 0$.

2. В региональном турнире по волейболу участвуют 16 команд. Каждые две команды играют между собой два раза. На всероссийский турнир проходят команды, занявшие первые 8 мест. Команды упорядочиваются по числу побед; в случае равенства числа побед у нескольких команд эти команды упорядочиваются по жребию. Ничьих в волейболе не бывает. Какое наименьшее количество побед гарантирует команде проход на всероссийский турнир?

3. Сколько существует троек натуральных чисел a, b, c, удовлетворяющих уравнению $a+ab+abc+ac+c = 1526$?

4. Можно ли расставить в квадрате 2019×2019 целые числа, не все из которых нули, так, чтобы в любом квадрате 2×2 и в любом квадрате 3×3 сумма чисел была равна 0?

5. M — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. Точки D и E на сторонах AC и BC соответственно таковы, что $\angle DME = 60°$. Докажите, что $AD+BE = DE+AB/2$.

Решения задач олимпиады 6 класса

Задача 1. *Костя, Слава и Юра гуляют по парку. Пока Слава делает 3 шага, Юра делает 4, а пока Юра делает 3 шага, Костя делает 5 шагов. Сколько шагов сделал Юра, если все втроем сделали в общей сложности 2460 шагов?*

Ответ. 720. Решение. Пока Слава делает $3 \cdot 3 = 9$ шагов, Юра делает $4 \cdot 3 = 12$ шагов, а Костя — $5 \cdot 4 = 20$ шагов. Вместе они за это время делают $9+12+20 = 41$ шаг. Деля 2460 на 41, получаем 60. Поэтому Юра сделал 60 раз по 12 шагов, то есть 720 шагов.

Задача 2. *Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток так, чтобы в любом горизонтальном прямоугольнике 3×19 оказалось хотя бы 6 отмеченных, а в любом вертикальном прямоугольнике 19×3 — не более 5 отмеченных?*

Ответ. Нельзя. Решение. Рассмотрим прямоугольник K_1 шириной 19 и высотой 18, у которого левая нижняя вершина совпадает с левой нижней вершиной квадрата. Он разбивается на шесть горизонтальных прямоугольников 3×19, поэтому в нем не меньше 36 отмеченных клеток. С другой стороны, прямоугольник K_2 шириной 18 и высотой 19, у которого левая нижняя вершина совпадает с левой нижней вершиной квадрата, разбивается на шесть вертикальных прямоугольников 19×3, поэтому в нем не больше 30 отмеченных клеток. Из клеток прямоугольника K_1 в K_2 не входят только клетки крайнего правого столбца. Значит, в этом столбце должно быть отмечено не меньше 6 клеток, лежащих в K_1. Но все эти клетки можно накрыть одним вертикальным прямоугольником 19×3. Противоречие.

Задача 3. *В турнире по настольному теннису участвовали 128 человек. В каждом туре участники разбивались на пары и играли, после чего проигравшие выбывали из турнира (ничьих не бывает). После турнира, когда определился единоличный победитель, каждый из участников заявил, что в течение турнира обыграл не более одного правши. Причем все правши сказали правду, а все левши соврали. Сколько правшей могло участвовать в турнире?*

Ответ. 96. Решение. Так как все левши соврали, каждый из них должен быть обыграть хотя бы двух правшей. Значит, каждый левша выиграл хотя бы две партии, то есть все левши вышли в третий круг. Так как в третьем круге играют 32 человека, левшей не более 32, а правшей, стало быть, не менее 96. Значит, в первом круге были хотя бы 32 партии, где правши играли между собой, и во втором круге играло не меньше 32 правшей. При этом там не было партий между правшами, иначе нашелся бы правша, выигравший у хотя бы у двух правшей (в первом и втором кругах). Поэтому в каждой из партий второго круга играли правша и левша, то есть левшей — не менее 32. Значит, левшей ровно 32, а правшей — 96.

Задача 4. *У Васи и Пети есть по n монет. Каждая монета имеет достоинство 1 копейка, 50 копеек или 1 рубль. Оказалось, что у мальчиков поровну денег, но наборы монет не совпадают. При каком наименьшем n такое возможно?*

Ответ. 99. Решение. *Пример*. У Васи 99 монет по 50 копеек, у Пети 50 монет по 1 копейке и 49 монет по рублю. *Оценка*. Если у Васи и Пети есть монеты одного достоинства, то можно выкинуть их из обоих наборов, от этого все условия сохранятся, а количество монет уменьшится. Значит, у Васи и Пети нет монет одинакового достоинства. Тогда у одного из мальчиков есть монеты только одного достоинства. Очевидно, это могут быть только монеты по 50 копеек, так как в противном случае второй мальчик имеет столько же монет и все они достоинства строго больше или строго меньше, что невозможно при равенстве сумм денег. Не умаляя общности можно считать, что у Васи b монет по 50 копеек, а у Пети a монет по одной копейке и c монет по одному рублю. Имеем два уравнения $b = a+c$ и $50b = a+100c$. Вычитая из второго первое, получим $49b = 99c$. Так как числа 49 и 99 взаимно просты, b делится на 99. То есть у Васи $b \geq 99$ монет.

Задача 5. *На 2000 карточек написаны числа. Карточки произвольным образом разбивают на пары и вычисляют 1000 сумм чисел в этих парах. Известно, что как ни разбивай карточки на пары, среди этих 1000 сумм всегда какие-то две совпадают. Какое наибольшее количество различных чисел может быть на этих карточках?*

Ответ. 999. Решение. *Пример*. На 1002 карточках число 1, на остальных по одному разу числа 2, 3, …, 999. Очевидно, что при любом разбиении этих карточек на пары будут две пары с суммой 2. *Оценка*. Предположим, найдётся 1000 карточек с различными числами. Тогда возьмём карточку с самым большим из этих чисел в пару с самым большим из чисел на остальных 1000 карточек, второе по величине со вторым из оставшихся и т. д., самое маленькое с самым маленьким из оставшихся. Тогда суммы чисел на этих парах карточек будут строго убывать и, следовательно, будут различны.

Решения задач олимпиады 7 класса

Задача 1. *На доске написано натуральное число n. За один ход можно заменить число на удвоенное, а можно заменить число на удвоенное, увеличенное на единицу. Сколько существует чисел n, меньших 2019, начиная с каждого из которых можно за несколько ходов выписать на доску число 2019?*

Ответ. 10. Решение. Число 2019 можно получить только как 1009·2+1, 1009 — как 504·2+1, 504 — как 252·2, 252 — как 126·2, 126 — как 63·2, 63 — как 31·2, 31 — как 15·2+1, 15 — как 7·2+1, 7 — как 3·2+1, 3 — как 1·2+1. Таким образом, число 2019 можно получить только из 11 чисел: 1009, 504, 252, 126, 63, 31, 15, 7, 3, 1.

Задача 2. *Можно ли в квадрате 20×20 отметить несколько клеток так, чтобы в любом горизонтальном прямоугольнике 3×19 оказалось хотя бы 6 отмеченных, а в любом вертикальном прямоугольнике 19×3 — не более 5 отмеченных?*

Ответ. Нельзя. Решение. Рассмотрим прямоугольник K_1 шириной 19 и высотой 18, у которого левая нижняя вершина совпадает с левой нижней вершиной квадрата. Он разбивается на шесть горизонтальных прямоугольников 3×19, поэтому в нем не меньше 36 отмеченных клеток. С другой стороны, прямоугольник K_2 шириной 18 и высотой 19, у которого левая нижняя вершина совпадает с левой нижней вершиной квадрата, разбивается на шесть вертикальных прямоугольников 19×3, поэтому в нем не больше 30 отмеченных клеток. Из клеток прямоугольника K_1 в K_2 не входят только клетки крайнего правого столбца. Значит, в этом столбце должно быть отмечено не меньше 6 клеток, лежащих в K_1. Но все эти клетки можно накрыть одним вертикальным прямоугольником 19×3. Противоречие.

Задача 3. *Найдите все такие пары натуральных чисел m и n, что $9^m-7^m = 2^n$.*

Ответ. $m = n = 1$; $m = 2$, $n = 5$. Решение. Проверка ответа труда не представляет. Допустим, что $m > 2$, и покажем, что тогда решений нет. Заметим, что m должно быть четным — иначе 9^m-7^m даёт при делении на 4 остаток 2, и при этом больше 2. Пусть $m = 2k$. Тогда $9^m-7^m = (9^k-7^k)(9^k+7^k)$, откуда $9^k-7^k = 2^s$ и $9^k+7^k = 2^t$. Очевидно, $t > s > 0$. Складывая эти равенства, получаем $2\cdot 9^k = 2^s(1+2^{t-s}) \Leftrightarrow 9^k = 2^{s-1}(1+2^{t-s})$, откуда $s = 1$. Получается, что $9^k-7^k = 2$. Но при $k > 1$ $9^k-7^k > 2$.

Задача 4. *Положительные числа x, y и z удовлетворяют соотношению $x+y+z = 1$. Докажите, что $2xy+2yz+4zx < 1$.*

Решение. $2xy+2yz+4zx = 2xy+2xz+2yz+2xz = 2x(y+z)+2z(y+x) = 2x(1-x)+2z(1-z) \le$
$\le 2(x+(1-x))^2/4+2(z+(1-z))^2/4 = 1$.

Задача 5. *На 2000 карточек написаны числа. Карточки произвольным образом разбивают на пары и вычисляют 1000 сумм чисел в этих парах. Известно, что как ни разбивай карточки на пары, среди этих 1000 сумм всегда какие-то две совпадают. Какое наибольшее количество различных чисел может быть на этих карточках?*

Ответ. 999. Решение. *Пример*. На 1002 карточках число 1, на остальных по одному разу числа 2, 3, …, 999. Очевидно, что при любом разбиении этих карточек на пары будут две пары с суммой 2. *Оценка*. Предположим, найдётся 1000 карточек с различными числами. Тогда возьмём карточку с самым большим из этих чисел в пару с самым большим из чисел на остальных 1000 карточек, второе по величине со вторым из оставшихся и т. д., самое маленькое с самым маленьким из оставшихся. Тогда суммы чисел на этих парах карточек будут строго убывать и, следовательно, будут различны.

LIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17-23.02.2019

Решения задач олимпиады 8 класса

Задача 1. *Ненулевые целые числа a, b и c таковы, что* $\frac{a}{b+c^2}=\frac{a+c^2}{b}$. *Докажите, что* $a+b+c \le 0$.

Решение. По условию $ab = (a+c^2)(b+c^2) = ab+c^2(a+b+c^2) \Leftrightarrow c^2(a+b+c^2) = 0 \Leftrightarrow a+b+c^2 = 0$. Так как при целых c выполнено неравенство $c^2 \ge c$, имеем $a+b+c \le a+b+c^2 = 0$, что и требовалось доказать.

Задача 2. *В региональном турнире по волейболу участвуют 16 команд. Каждые две команды играют между собой два раза. На всероссийский турнир проходят команды, занявшие первые 8 мест. Команды упорядочиваются по числу побед; в случае равенства числа побед у нескольких команд эти команды упорядочиваются по жребию. Ничьих в волейболе не бывает. Какое наименьшее количество побед гарантирует команде проход на всероссийский турнир?*

Ответ. 23. Решение. Общее число встреч на турнире равно $16\cdot 15 = 240$. Допустим, 23 побед может не хватить для попадания в восьмёрку сильнейших. Это значит, что есть 9 команд, каждая из которых одержала не меньше 23 побед. Вместе эти команды одержали не меньше $23\cdot 9 = 207$ побед. Значит, остальные 7 команд в совокупности одержали не больше 33 побед. Но они не могли вместе одержать меньше побед, чем сыграли между собой матчей, а они их сыграли $7\cdot 6 = 42$. Противоречие.

Покажем теперь, что 22 очков может не хватить. Выберем 9 команд и предположим, что каждая из них выиграла оба матча у каждой их остальных семи, а в двух играх между собой любые две команды из девятки одержали по одной победе. Тогда у всех 9 команд по $14+8 = 22$ победы, и одной из них не повезёт при жеребьёвке.

Задача 3. *Сколько существует троек натуральных чисел a, b, c, удовлетворяющих уравнению* $a+ab+abc+ac+c = 1526$?

Ответ. 6. Решение. Прибавим к обеим частям уравнения по единице. Тогда левая часть разложится на два множителя, и мы получим уравнение $(ab+a+1)(c+1) = 1527 = 3\cdot 509$, где число 509 — простое. Так как оба множителя в правой части больше 1, один из них должен равняться 3, а другой — 509. Если $ab+a+1 = 3$, то $a = b = 1$, $c = 508$. Если $c+1 = 3$, то $c = 2$, а $ab+a+1 = 509 \Leftrightarrow ab+a = a(b+1) = 508 = 2^2\cdot 127$, где число 127 — простое. Число $b+1$ при натуральном b не может равняться 1, но может равняться любому другому делителю числа 508, каковых у него, кроме 1, ещё пять: 2, 4, 127, 204, 508. a при этом будет равняться частному от деления 508 на $b+1$. Таким образом, у нашего уравнения $1+5 = 6$ решений.

Задача 4. *Можно ли расставить в квадрате* 2019×2019 *целые числа, не все из которых нули, так, чтобы в любом квадрате* 2×2 *и в любом квадрате* 3×3 *сумма чисел была равна 0?*

Ответ. Можно. Решение. Заполним первую строку чередующимися единицами и минус единицами. Во второй строке под каждым числом первой строки напишем противоположное ему. Третью строку заполним нулями. Четвертую строку заполним как первую, пятую — как вторую и т.д. Нетрудно проверить, что условие задачи будет выполнено.

Задача 5. *M — середина стороны AB равностороннего треугольника ABC. Точки D и E на сторонах AC и BC соответственно таковы, что* $\angle DME = 60°$. *Докажите, что* $AD+BE = DE+AB/2$.

Решение. Пусть N и K — середины сторон BC и AC соответственно. Если $D = K$ и $E = N$, то равенство выполнено, так как $AK = BN = KN = AB/2$. Пусть D лежит на отрезке KC. Тогда E лежит на отрезке BN, так что наше предположение не умаляет общности. Отложим на луче NK от точки N отрезок $NE' = NE$, а на продолжении отрезка NK за точку K — отрезок $KD' = KD$. Поскольку $\angle ENM = \angle E'NM$, треугольники MNE и MNE' равны по двум сторонам и углу между ними. Аналогично равны треугольники MKD и MKD'. Следовательно, $MD' = MD$ и $ME' = ME$. Так как кроме того $\angle EMD = \angle NMK = \angle E'MD'$ (так как $\angle NME' = \angle NME = \angle KMD' = \angle KMD$), равны углы DME и $D'ME'$. Значит, треугольники DME и $D'ME'$ равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $DE = D'E'$. Но $D'E' = MN+KD'-NE' = AK+KD-NE = AD-NE = AD+BN-NE-BN = AD+BE-AB/2$. Таким образом, $DE = AD+BE-AB/2 \Leftrightarrow DE+AB/2 = AD+BE$.