МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные числа $n > 1$, для которых найдётся простое число p такое, что $p^n–(p–1)^n$ равно натуральной степени тройки.

2. Петя положил на стол n монет, некоторые из которых фальшивые, а остальные — настоящие, причём настоящих монет больше, чем фальшивых. За один ход Вася может указать Пете на две монетки, Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после (n–1)-го хода остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

3. На плоскости даны 2019 точек общего положения, т.е. никакие три не лежат на одной прямой. Какое наименьшее количество прямых потребуется провести, чтобы гарантированно отделить все точки друг от друга? (Две точки *отделены друг от друга*, если есть хотя бы одна прямая, относительно которой они лежат по разные стороны.)

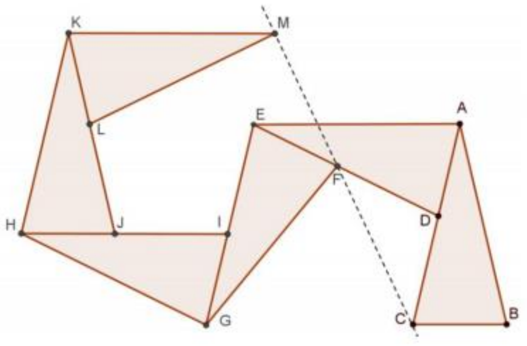
4. На множестве натуральных чисел определена операция @, сопоставляющая каждой паре натуральных чисел a и b число $a@b$ (при этом не обязательно $a@b = b@a$). Известно, что $(a+b)@c = (a@c)+(b@c)$ и $a@(b+c) = (a@b)@c$ для любых натуральных чисел a, b и c, а также 5@5 = 160. Чему может быть равно 7@7?

5. Для каждого натурального n положим $a_n = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$, $b_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$. При каком n разность $a_n–b_n$ наибольшая?

6. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания BC, равного боковым сторонам AB и CD. Докажите, что сумма длин оснований трапеции меньше периметра треугольника ADM хотя бы в полтора раза.

7. В классе учатся мальчики и девочки (есть и те, и другие). Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Докажите, что чётности количеств социализированных групп мальчиков и социализированных групп девочек равны.

8. Шесть равных равнобедренных треугольников расположены так, как показано на картинке. Докажите, что отмеченные точки (C, M и F) лежат на одной прямой.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел n и m, для которых $n!m!$ является квадратом. Как всегда, для натурального числа k через $k!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до k.

2. Петя положил на стол n монет, некоторые из которых фальшивые, а остальные — настоящие, причём настоящих монет больше, чем фальшивых. За один ход Вася может указать Пете на две монетки, Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после (n–1)-го хода остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

3. На плоскости даны 2019 точек общего положения, т.е. никакие три не лежат на одной прямой. Какое наименьшее количество прямых потребуется провести, чтобы гарантированно отделить все точки друг от друга? (Две точки *отделены друг от друга*, если есть хотя бы одна прямая, относительно которой они лежат по разные стороны.)

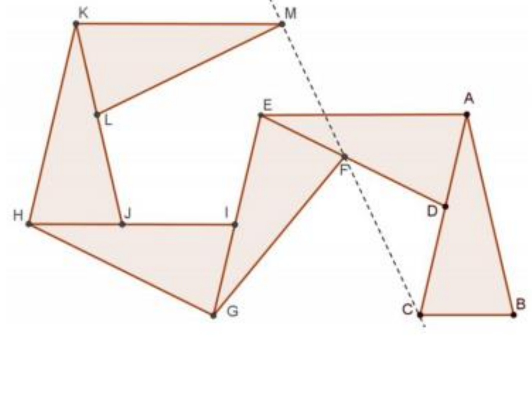
4. Вася придумал новую операцию @ на множестве натуральных чисел, сопоставляющую каждой паре натуральных чисел a и b число $a@b$ (при этом не обязательно $a@b = b@a$). Известно, что $(a+b)@c = (a@c)+(b@c)$ и $a@(b+c) = (a@b)@c$ для любых натуральных чисел a, b и c, а также $1@1 = 3$. Чему может быть равно $5@7$?

5. Для каждого натурального n положим $a_n = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)$, $b_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$. При каком n разность $a_n–b_n$ наименьшая?

6. В трапеции $ABCD$ точка M — середина основания BC, равного боковым сторонам AB и CD. Докажите, что сумма длин оснований трапеции меньше периметра треугольника ADM хотя бы в полтора раза.

7. В лагерь приехало поровну мальчиков и девочек. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся не менее трёх социализированных групп девочек.

8. Шесть равных равнобедренных треугольников расположены так, как показано на картинке. Докажите, что отмеченные точки (C, M и F) лежат на одной прямой.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел n и m, для которых $n!m!$ является квадратом. Как всегда, для натурального числа k через $k!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до k.

2. Петя положил на стол n монет, некоторые из которых фальшивые, а остальные — настоящие, причём настоящих монет больше, чем фальшивых. За один ход Вася может указать Пете на две монетки, Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после $(n–1)$-го хода остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

3. На прямой отмечено 80 различных точек: 60 красных и 20 синих. Оказалось, что на любом отрезке с синими концами лежат хотя бы две красные точки. Докажите, что среди отрезков с красными концами не менее половины таких, на которых лежат хотя бы по две синие точки.

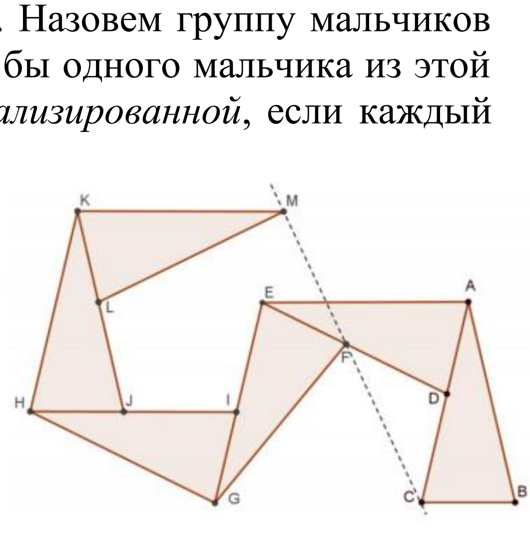
4. Вася придумал новую операцию @ на множестве натуральных чисел, сопоставляющую каждой паре натуральных чисел a и b число $a@b$ (при этом не обязательно $a@b = b@a$). Известно, что $(a+b)@c = (a@c)+(b@c)$ и $a@(b+c) = (a@b)@c$ для любых натуральных чисел a, b и c, а также $1@1 = 3$. Чему может быть равно $5@7$?

5. В 0-й год в Вишкиле жили один кролик и одна белка. Если в году с номером k в Вишкиле жили m белок и n кроликов, то в году с номером $k+1$ в Вишкиле будут жить $2m+2019$ белок и $4n–2$ кролика. В каком году популяция кроликов Вишкиля впервые превысит популяцию белок?

6. В квадрате $ABCD$ выбрана такая точка K, что треугольник KCD равносторонний. На луче AK отметили такую точку L, что $AL = AC$. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

7. В лагерь приехало поровну мальчиков и девочек. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся не менее трёх социализированных групп девочек.

8. Шесть равных равнобедренных треугольников расположены так, как показано на картинке. Докажите, что отмеченные точки (C, M и F) лежат на одной прямой.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Петя положил на стол n монет, некоторые из которых фальшивые, а остальные — настоящие, причём настоящих монет больше, чем фальшивых. За один ход Вася может указать Пете на две монеты, Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после (n–1)-го хода остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

2. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, для которых $x^2+xy+yz = y^2+yz+zx = z^2+zx+xy = 2017+2018^{2018}$.

3. Назовем число *мегапростым*, если оно простое и каждая его цифра — простое число. Докажите, что 2020-значных мегапростых чисел меньше, чем $\frac{4^{2020}}{3}$.

4. В лагерь приехало поровну мальчиков и девочек. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся не менее трёх социализированных групп девочек.

5. Докажите, что для любого натурального числа n все натуральные числа от 1 до n можно расставить в таком порядке a_1, a_2, ..., a_n, что все числа a_1+1, a_2+2, ..., a_n+n будут натуральными степенями двойки.

6. На прямой отмечено 80 различных точек: 60 красных и 20 синих. Оказалось, что на любом отрезке с синими концами лежат хотя бы две красные точки. Докажите, что среди отрезков с красными концами не менее, чем 2/3 таких, на которых лежат хотя бы по две синие точки.

7. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $x^3–y^3 \geq 4x$. Докажите, что $x^2 > 2y$.

8. В квадрате $ABCD$ выбрана такая точка K, что треугольник KCD равносторонний. На луче AK отметили такую точку L, что $AL = AC$. Докажите, что прямые BL и BD перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Петя положил на стол n монет, некоторые из которых фальшивые, а остальные — настоящие, причём настоящих монет больше, чем фальшивых. За один ход Вася может указать Пете на две монеты, Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после (n–1)-го хода остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

2. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, для которых $x^2+xy+yz = y^2+yz+zx = z^2+zx+xy = 2017+2018^{2018}$.

3. Назовем число *мегапростым*, если оно простое и каждая его цифра — простое число. Докажите, что 2020-значных мегапростых чисел меньше, чем $22\cdot 4^{2017}$.

4. В лагерь приехало поровну мальчиков и девочек. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся не менее двух социализированных групп девочек.

5. Докажите, что для любого натурального числа n все натуральные числа от 1 до n можно расставить в таком порядке a_1, a_2, ..., a_n, что все числа a_1+1, a_2+2, ..., a_n+n будут натуральными степенями двойки.

6. На прямой отмечено 80 различных точек: 60 красных и 20 синих. Оказалось, что на любом отрезке с синими концами лежат хотя бы две красные точки. Докажите, что среди отрезков с красными концами не менее половины таких, на которых лежат хотя бы по две синие точки.

7. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $x^3–y^3 \geq 4x$. Докажите, что $x^2 > 2y$.

8. В квадрате $ABCD$ выбрана такая точка K, что треугольник KCD равносторонний. На луче AK отметили такую точку L, что $AL = AC$. Докажите, что прямые BL и BD перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Петя положил на стол 50 монет, из которых 6 фальшивых, а остальные — настоящие. За один ход Вася может указать Пете на две монеты, а Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после 49 ходов остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

2. Найдите все пары натуральных чисел n и k, для которых выполнено равенство $n\cdot(1!+2!+3!+\ldots+n!) = k!$. Как обычно, $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m. Например, $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4$.

3. Назовем число *мегапростым*, если оно простое и каждая его цифра — простое число. Докажите, что 2020-значных мегапростых чисел меньше, чем $6\cdot4^{2018}$.

4. В лагерь приехало поровну мальчиков и девочек. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся хотя бы одна социализированная группа девочек.

5. Пусть n — степень двойки. Докажите, что все натуральные числа от 1 до n можно расставить в таком порядке $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что все числа $a_1+1, a_2+2, \ldots, a_n+n$ будут натуральными степенями двойки.

6. На прямой отмечено 40 красных и 21 синяя точка (все эти точки разные). Оказалось, что на любом отрезке с синими концами лежат хотя бы две красные точки. Докажите, что среди отрезков с красными концами не менее половины таких, на которых лежат хотя бы по две синие точки.

7. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $x^3-y^3 \geq 4x$. Докажите, что $x^2 > 2y$.

8. В квадрате $ABCD$ выбрана такая точка K, что треугольник KCD равносторонний. На луче AK отметили такую точку L, что $AL = AC$. Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят черные и белые фишки (по одной фишке в клетке). Сначала Петя снял все черные фишки из столбцов, где есть белые фишки, а затем Вася снял все белые фишки из строк, где еще остались черные фишки. Докажите, что фишек какого-то из цветов на доске не осталось.

2. Найдите все натуральные числа n, для которых выполнено равенство $n\cdot(1!+2!+3!+\ldots+n!) = (n+1)!$. Как обычно, $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m. Например, $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4$.

3. Назовем число *мегапростым*, если оно простое и каждая его цифра — простое число. Докажите, что стозначных мегапростых чисел меньше, чем $2\cdot4^{99}$.

4. В двух болотах было одно и то же соотношение численности жаб и гадюк. N жаб из первого болота переползло во второе, а оттуда — N гадюк в первое. Найдите N, если теперь в первом болоте только гадюки, числом 720, а во втором — только жабы, числом 560.

5. Докажите, что все натуральные числа от 1 до 1536 можно расставить в таком порядке a_1, a_2, ..., a_{1536}, что все числа a_1+1, a_2+2, ..., $a_{1536}+1536$ будут натуральными степенями двойки.

6. На прямой отмечено 50 красных и 50 синих точек (все эти точки разные). Оказалось, что на любом отрезке с синими концами лежат хотя бы одна красная точка. Докажите, что найдется тысяча отрезков с красными концами, на каждом из которых лежит хотя бы одна синяя точка.

7. Найдите все такие N, что среди чисел 1, 2, 3, ..., N ровно 40% — простые.

8. Прямоугольный торт двумя прямолинейными разрезами, параллельными сторонам, разделили на 4 куска. Общая масса самого большого и самого маленького кусков оказалась равна общей массе двух остальных кусков. Докажите, что один из разрезов прошёл через центр торта.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Найдите все пары натуральных чисел n и k, для которых выполнено равенство $n\cdot(1!+2!+3!+\ldots+n!) = k!$. Как обычно, $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m. Например, $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4$.

2. Докажите, что для любого натурального числа n все натуральные числа от 1 до n можно расставить в таком порядке $a_1, a_2, ..., a_n$, что все числа a_1+1, a_2+2, ..., a_n+n будут натуральными степенями двойки.

3. На доску выписаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Петя и Вася играют в игру. Сначала Петя стирает k чисел с доски по своему выбору. Вася побеждает, если ему удастся из оставшихся на доске чисел выбрать k различных чисел, дающих в сумме 100. При каком наибольшем k Вася может обеспечить себе победу независимо от действий Пети?

4. Дана доска 100×100. Каждую минуту Алина ставит фишку на любую пустую клетку доски. При этом, если в столбце, в который она ставит фишку, после ее хода стоит i фишек, а в строчке — j фишек, она записывает в блокнот число $i\cdot j$. Докажите, что когда все клетки будут заполнены фишками, произведение всех записанных в блокноте чисел будет делиться на 31^{600}.

5. Дано четырёхзначное число $\overline{abcd}$. Оказалось, что какие бы три цифры ни вставить между $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, полученное семизначное число не будет делиться на $\overline{abcd}$. Чему могло быть равно c?

6. В лагерь приехало поровну мальчиков и девочек. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся не менее трёх социализированных групп девочек.

7. На прямой отмечено 80 различных точек: 60 красных и 20 синих. Оказалось, что на любом отрезке с синими концами лежат хотя бы две красные точки. Докажите, что хотя бы на половине всех отрезков с красными концами лежит не менее двух синих точек.

8. Петя положил на стол n монет, некоторые из которых фальшивые, а остальные — настоящие, причём настоящих монет больше, чем фальшивых. За один ход Вася может указать Пете на две монеты, Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после $(n–1)$-го хода остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите все пары натуральных чисел n и k, для которых выполнено равенство $n\cdot(1!+2!+3!+\ldots+n!) = k!$. Как обычно, $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m. Например, $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4$.

2. Докажите, что для любого натурального числа n все натуральные числа от 1 до n можно расставить в таком порядке $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что все числа $a_1+1, a_2+2, \ldots, a_n+n$ будут натуральными степенями двойки.

3. На доску выписаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Петя и Вася играют в игру. Сначала Петя стирает k чисел с доски по своему выбору. Вася побеждает, если ему удастся из оставшихся на доске чисел выбрать k различных чисел, дающих в сумме 100. При каком наибольшем k Вася может обеспечить себе победу независимо от действий Пети?

4. Дана доска 100×100. Каждую минуту Алина ставит фишку на любую пустую клетку доски. При этом, если в столбце, в который она ставит фишку, после ее хода стоит i фишек, а в строчке — j фишек, она записывает в блокнот число $i\cdot j$. Докажите, что когда все клетки будут заполнены фишками, произведение всех записанных в блокноте чисел будет делиться на 31^{600}.

5. Найдите какое-нибудь четырёхзначное число $\overline{abcd}$ такое, что какие бы три цифры ни вставить между $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$, полученное семизначное число не будет делиться на $\overline{abcd}$.

6. В лагерь приехало поровну мальчиков и девочек. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся не менее двух социализированных групп девочек.

7. На прямой отмечено 500 различных точек: 300 красных и 200 синих. Оказалось, что на любом отрезке с синими концами лежит хотя бы одна красная точка, и что никакие три красные точки не стоят подряд. Сколько может быть отрезков с красными концами, на которых лежит хотя бы одна синяя точка?

8. Петя положил на стол n монет, некоторые из которых фальшивые, а остальные — настоящие, причём настоящих монет больше, чем фальшивых. За один ход Вася может указать Пете на две монеты, Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после $(n–1)$-го хода остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные числа n, для которых выполнено равенство $n\cdot(1!+2!+3!+\ldots+n!) = (n+1)!$. Как обычно, $m!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m. Например, $4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4$.

2. Докажите, что для любого натурального n натуральные числа от 1 до $2n$ можно разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре равнялась целой степени двойки, уменьшенной на 1.

3. Назовем число *мегапростым*, если оно простое и каждая его цифра — простое число. Докажите, что стозначных мегапростых чисел меньше, чем $2\cdot4^{99}$.

4. Дана доска 100×100. Каждую минуту Алина ставит фишку на любую пустую клетку доски. При этом, если в столбце, в который она ставит фишку, после ее хода стоит i фишек, а в строчке — j фишек, она записывает в блокнот число $i\cdot j$. Докажите, что когда все клетки будут заполнены фишками, произведение всех записанных в блокноте чисел будет делиться на 97^{200}.

5. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят черные и белые фишки (по одной фишке в клетке). Сначала Петя снял все черные фишки из столбцов, где есть белые фишки, а затем Вася снял все белые фишки из строк, где еще остались черные фишки. Докажите, что фишек какого-то из цветов на доске не осталось.

6. В лагерь заехали мальчики и девочки. Назовем группу мальчиков *социализированной*, если каждая девочка знает хотя бы одного мальчика из этой группы. Аналогично, назовём группу девочек *социализированной*, если каждый мальчик знает хотя бы одну девочку из этой группы. Оказалось, что существует ровно 2019 социализированных групп мальчиков. Докажите, что найдётся хотя бы одна социализированная группа девочек.

7. Каждый из 100 домов, расположенных в ряд, должен быть выкрашен в белый или желтый цвет таким образом, чтобы никакие три подряд стоящих дома не были окрашены в один цвет. Сколько есть способов раскрасить дома так, чтобы среди них было ровно 67 желтых?

8. Петя положил на стол 50 монет, из которых 6 фальшивых, а остальные — настоящие. За один ход Вася может указать Пете на две монеты, а Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после 49 ходов остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Прямоугольный торт двумя прямолинейными разрезами, параллельными сторонам, разделили на 4 куска. Общая масса самого большого и самого маленького кусков оказалась равна общей массе двух остальных кусков. Докажите, что один из разрезов прошёл через центр торта.

2. Найдите все такие N, что среди чисел 1, 2, 3, …, N ровно половина — простые.

3. Какое наименьшее число коней можно поставить на доску 6×6 так, чтобы все свободные клетки оказались под боем?

4. Докажите, что для любого натурального n натуральные числа от 1 до $2n$ можно разбить на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре равнялась целой степени двойки, уменьшенной на 1.

5. В двух болотах было одно и то же соотношение численности жаб и гадюк. N жаб из первого болота переползло во второе, а оттуда — N гадюк в первое. Найдите N, если теперь в первом болоте только гадюки числом 720, а во втором — только жабы числом 560.

6. В кошельке лежит 100 рублей одно-, двух- и пятирублёвыми монетами. Известно, что общее число монет — 34, и что монет каких-то двух достоинств равное количество. Каким могло быть это количество (укажите все возможности)?

7. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят черные и белые фишки (по одной фишке в клетке). Сначала Петя снял все черные фишки из столбцов, где есть белые фишки, а затем Вася снял все белые фишки из строк, где еще остались черные фишки. Докажите, что фишек какого-то из цветов на доске не осталось.

8. Петя положил на стол 50 монет, из которых 6 фальшивых, а остальные — настоящие. За один ход Вася может указать Пете на две монеты, а Петя скажет, одного ли они типа, после чего Вася должен одну из этих двух монет убрать со стола. Если после 49 ходов остаётся настоящая монета, то победил Вася, иначе победил Петя. Может ли Вася действовать так, чтобы гарантированно победить?