МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Рациональные числа x и y и нечётное натуральное n удовлетворяют условию $x^n–2x = y^n–2y$. Докажите, что $x = y$.

2. Дано простое p и p натуральных чисел $a_1, ..., a_p$. Докажите, что при некотором целом k числа $a_1+k, a_2+2k, ..., a_p+pk$ дают не менее $p/2$ различных остатков при делении на p.

3. В связном графе (без петель и кратных ребер) степень каждой вершины больше или равна 4. Докажите, что найдётся ребро, которое лежит хотя бы в трёх различных простых циклах.

4. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Отрезки BE и CD пересекаются в точке F. Известно, что $AD = CD$ и $CE = CF$. Точка M — середина отрезка EF, точка N — середина BM, а точка K — середина CF. Докажите, что $\angle ANK = 90°$.

5. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка X. Точки Y и Z на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $\angle BXY = \angle ZXC$. Прямая, проходящая через точку B параллельно YZ, пересекает отрезок XZ в точке T. Докажите, что точка T лежит на биссектрисе угла BAC.

6. Для множества из n точек на прямой назовём его разбиение на два подмножества $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ и $\{B_1, B_2, ..., B_{n–k}\}$ *хорошим*, если на прямой найдётся такая точка M, что $MA_1+MA_2+\ldots+MA_k = MB_1+MB_2+\ldots+MB_{n–k}$. Докажите, что на прямой можно отметить 2019 различных точек так, чтобы среди всех 2^{2018} разбиений этих точек на два подмножества хотя бы 2^{2017} были хорошими.

7. Пусть $a > 1$ — действительное число. Докажите, что если числа $[a^{1001}]$, $[a^{1002}]$, …, $[a^{4000}]$ являются квадратами натуральных чисел, то и $[a]$ является квадратом натурального числа. Как обычно, через $[x]$ обозначена целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

8. Джон и Вито играют в игру, оба зная следующие правила: «По кругу сидят 300 человек, из которых 100 мафиози и 200 мирных жителей. Джон ходит первым. Джон не знает про сидящих, кто есть кто, а Вито — знает всё про всех. Каждым своим ходом Джон убирает из круга любое множество людей, в том числе и пустое. Каждым своим ходом Вито убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Игра заканчивается, когда в кругу остаются или только мафиози, или только мирные жители. Джон выигрывает, если в конце останется хотя бы один мирный житель.» Есть ли у Джона гарантированная выигрышная стратегия?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Рациональные числа x и y и нечётное натуральное n удовлетворяют условию $x^n–2x = y^n–2y$. Докажите, что $x = y$.

2. Дано простое число 101 и 101 натуральное число $a_1, ..., a_{101}$. Докажите, что при некотором целом k числа a_1+k, a_2+2k, ..., $a_{101}+101k$ дают не менее 50 различных остатков при делении на p.

3. В связном графе (без петель и кратных ребер) степень каждой вершины больше или равна 4. Докажите, что найдётся ребро, которое лежит хотя бы в трёх различных простых циклах.

4. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Отрезки BE и CD пересекаются в точке F. Известно, что $AD = CD$ и $CE = CF$. Точка M — середина отрезка EF, точка N — середина BM, а точка K — середина CF. Докажите, что $\angle ANK = 90°$.

5. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка X. Точки Y и Z на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $\angle BXY = \angle ZXC$. Прямая, проходящая через точку B параллельно YZ, пересекает отрезок XZ в точке T. Докажите, что точка T лежит на биссектрисе угла BAC.

6. На прямой отмечены 2019 различных точек. Докажите, что их можно разбить на две группы так, чтобы на прямой нашлась такая точка M, что сумма расстояний от точки M до точек первой группы, равнялось сумме расстояний от точки M до точек второй группы.

7. Ненулевые вещественные числа x, y, z таковы, что $xy+yz+zx = 0$, $x^2+2yz \neq 0$, $y^2+2zx \neq 0$, $z^2+2xy \neq 0$. Чему может быть равно $\dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2zx}+\dfrac{1}{z^2+2xy}$?

8. Джон и Вито играют в игру, оба зная следующие правила: «По кругу сидят 300 человек, из которых 100 мафиози и 200 мирных жителей. Джон ходит первым. Джон не знает про сидящих, кто есть кто, а Вито — знает всё про всех. Каждым своим ходом Джон убирает из круга любое множество людей, в том числе и пустое. Каждым своим ходом Вито убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Игра заканчивается, когда в кругу остаются или только мафиози, или только мирные жители. Джон выигрывает, если в конце останется хотя бы один мирный житель.» Есть ли у Джона гарантированная выигрышная стратегия?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Произведения ab, bc, cd, da натуральных чисел a, b, c, d в некотором порядке равны 64, 88, 120 и 165. Чему может равняться $a+b+c+d$?

2. Дано простое число 101 и 101 натуральное число $a_1, \ldots, a_{101}$. Докажите, что при некотором целом k числа a_1+k, a_2+2k, ..., $a_{101}+101k$ дают не менее 50 различных остатков при делении на 101.

3. В связном графе (без петель и кратных ребер) степень каждой вершины больше или равна 4. Докажите, что найдётся ребро, которое лежит хотя бы в трёх различных простых циклах.

4. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Отрезки BE и CD пересекаются в точке F. Известно, что $AD = CD$ и $CE = CF$. Точка M — середина отрезка EF, точка N — середина BM, а точка K — середина CF. Докажите, что $\angle ANK = 90°$.

5. На основании BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка X. Точки Y и Z на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $\angle BXY = \angle ZXC$. Прямая, проходящая через точку B параллельно YZ, пересекает отрезок XZ в точке T. Докажите, что точка T лежит на биссектрисе угла BAC.

6. На прямой отмечены 2019 различных точек. Докажите, что их можно разбить на две группы так, чтобы на прямой нашлась точка M с таким свойством: сумма расстояний от точки M до точек первой группы равна сумме расстояний от точки M до точек второй группы.

7. Ненулевые вещественные числа x, y, z таковы, что $xy+yz+zx = 0$, $x^2+2yz \neq 0$, $y^2+2zx \neq 0$, $z^2+2xy \neq 0$. Чему может быть равно $\dfrac{1}{x^2+2yz}+\dfrac{1}{y^2+2zx}+\dfrac{1}{z^2+2xy}$?

8. Дано натуральное число n. Сколько существует слов, составленных из 2019 букв К, 2019 букв О и n букв Т, в которых нет нескольких (более одной) последовательных букв, которые образуют слово-палиндром? Напомним, что палиндром — это слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево, например, КОТОК.

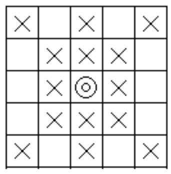
LIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КАЗАНЬ, 05-11.11.2019

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дон Корлеоне и Комиссар играют в следующую игру. Они делают ходы по очереди. Сначала Дон рассаживает по кругу 300 человек: 100 мафиози и 200 мирных жителей. Комиссар не знает про сидящих, кто есть кто, а Дон знает всё про всех. Каждым своим ходом Комиссар убирает из круга любой набор людей (может и никого не убирать). Каждым своим ходом Дон убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Комиссар выигрывает, если в некоторый момент в кругу остался хотя бы один мирный житель и не осталось ни одного мафиози. Может ли он победить вне зависимости от действий Дона?

2. Дана доска $(2n+1)\times(2n+1)$, в углу которой находится фишка. За один ход можно переместить фишку на одну или две клетки по вертикали или диагонали, или на одну клетку по горизонтали (на рисунке крестиком помечены поля, куда может ходить фишка). Какое наименьшее количество ходов нужно, чтобы фишка посетила все клетки доски? (Мы считаем, что поле, в котором находится фишка в начале, и поле, в которое она попадает в конце, она посетила; если фишка делает ход на две клетки, то она посещает и поле между ними.)



3. Дано простое p и натуральные числа $a_1, \ldots, a_p$. Докажите, что при некотором целом k числа $a_1+k, a_2+2k, \ldots, a_p+pk$ дают не менее $p/2$ разных остатков при делении на p.

4. Найдите все такие рациональные числа x и y, что $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=2018$.

5. На доске написаны два числа: $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{3}$. Каждую минуту Дима может выбрать два числа x и y, записанные на доске, и дописать на доску их среднее арифметическое $\frac{x+y}{2}$ или их среднее гармоническое $\frac{2xy}{x+y}$. Сможет ли Дима с помощью таких действий в какой-то момент записать на доску число 1?

6. В графе степень каждой вершины не менее 4. Докажите, что в этом графе есть ребро, через которое проходит хотя бы три несамопересекающихся циклических маршрута.

7. Для положительных a, b, c известно, что $a+b+c=1$. Докажите, что $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+c)(b+c)}\geq 8$.

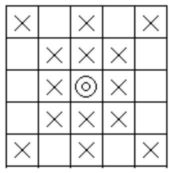
8. В треугольнике ABC, где углы A и B — острые, серединный перпендикуляр к AB пересекает прямые AC и BC соответственно в точках A_1 и B_1. Треугольники ABC и A_1B_1C равны (не обязательно соответственно). Найдите углы треугольника ABC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дон Корлеоне и Комиссар играют в следующую игру. Они делают ходы по очереди. Сначала Дон рассаживает по кругу 100 человек: 33 мафиози и 67 мирных жителей. Комиссар не знает про сидящих, кто есть кто, а Дон знает всё про всех. Каждым своим ходом Комиссар убирает из круга любой набор людей (может и никого не убирать). Каждым своим ходом Дон убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Комиссар выигрывает, если в некоторый момент в кругу остался хотя бы один мирный житель и не осталось ни одного мафиози. Может ли он победить вне зависимости от действий Дона?

2. Дана доска $(2n+1)\times(2n+1)$, в углу которой находится фишка. За один ход можно переместить фишку на одну или две клетки по вертикали или диагонали, или на одну клетку по горизонтали (на рисунке крестиком помечены поля, куда может ходить фишка). Какое наименьшее количество ходов нужно, чтобы фишка посетила все клетки доски? (Мы считаем, что поле, в котором находится фишка в начале, и поле, в которое она попадает в конце, она посетила; если фишка делает ход на две клетки, то она посещает и поле между ними.)



3. Одну из цифр в записи правильной конечной десятичной дроби стёрли, в результате чего дробь уменьшилась на 0,2019. Чему равнялась дробь?

4. Найдите все такие рациональные числа x и y, что $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=2018$.

5. На доске написана дробь $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа и $a+b = 4096$. Каждую минуту Дима может выбрать две дроби x и y, записанные на доске, и дописать на доску их среднее арифметическое $\frac{x+y}{2}$, а может выбрать одну записанную на доске дробь z, и дописать на доску дробь $\frac{1}{z}$. Докажите, что с помощью таких действий Дима сможет записать на доску число 1.

6. В графе степень каждой вершины не менее 4. Докажите, что в этом графе есть ребро, через которое проходит хотя бы три несамопересекающихся циклических маршрута.

7. Для положительных a, b, c известно, что $a+b+c=1$. Докажите, что $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+c)(b+c)}\geq 8$.

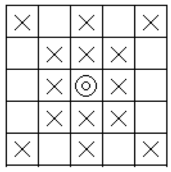
8. В треугольнике ABC, где углы A и B — острые, серединный перпендикуляр к AB пересекает прямые AC и BC соответственно в точках A_1 и B_1. Треугольники ABC и A_1B_1C равны (не обязательно соответственно). Найдите углы треугольника ABC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дон Корлеоне и Комиссар играют в следующую игру. Они делают ходы по очереди. Сначала Дон рассаживает по кругу 100 человек: 33 мафиози и 67 мирных жителей. Комиссар не знает про сидящих, кто есть кто, а Дон знает всё про всех. Каждым своим ходом Комиссар убирает из круга любой набор людей (может и никого не убирать). Каждым своим ходом Дон убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Комиссар выигрывает, если в некоторый момент в кругу остался хотя бы один мирный житель и не осталось ни одного мафиози. Может ли он победить вне зависимости от действий Дона?

2. Дана доска $(2n+1)\times(2n+1)$, в углу которой находится фишка. За один ход можно переместить фишку на одну или две клетки по вертикали или диагонали, или на одну клетку по горизонтали (на рисунке крестиком помечены поля, куда может ходить фишка). Какое наименьшее количество ходов нужно, чтобы фишка посетила все клетки доски? (Мы считаем, что поле, в котором находится фишка в начале, и поле, в которое она попадает в конце, она посетила; если фишка делает ход на две клетки, то она посещает и поле между ними.)



3. Одну из цифр в записи правильной конечной десятичной дроби стёрли, в результате чего дробь уменьшилась на 0,2019. Чему равнялась дробь?

4. Найдите все такие целые числа x и y, что $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=2018201820182018$.

5. На доске написана дробь $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа и $a+b = 4096$. Каждую минуту Дима может выбрать две дроби x и y, записанные на доске, и дописать на доску их среднее арифметическое $\frac{x+y}{2}$, а может выбрать одну записанную на доске дробь z, и дописать на доску дробь $\frac{1}{z}$. Докажите, что с помощью таких действий Дима сможет записать на доску число 1.

6. В группе из $k \geq 4$ школьников некоторые знакомы, а некоторые — нет. Оказалось, что любых четверых из них можно посадить за круглый стол так, что кто-то будет сидеть рядом с двумя знакомыми, а кто-то — рядом с двумя незнакомыми. Сколько всего школьников в группе?

7. Назовем *фрагментом* натурального числа n любое натуральное число, которое может быть получено из n вычеркиванием нескольких его первых цифр и нескольких его последних цифр. Например, фрагментами 2019 будут числа 2, 1, 9, 20, 19 и 201. Найдите наименьшее натуральное число k, сумма которого с каким-то его фрагментом дает 2019.

8. В треугольнике ABC, где углы A и B — острые, серединный перпендикуляр к AB пересекает прямые AC и BC соответственно в точках A_1 и B_1. Треугольники ABC и A_1B_1C равны (не обязательно соответственно). Найдите углы треугольника ABC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске написано натуральное число, не содержащее нулей в записи. Петя сначала вычеркнул первую цифру, потом у получившегося числа снова первую цифру и т. д. пока не осталось однозначное число, а затем сложил все получившиеся в процессе числа (включая исходное). Вася сначала вычеркнул последнюю цифру, потом у получившегося числа снова последнюю цифру и т. д. пока не осталось однозначное число, а затем сложил все получившиеся в процессе числа. У Пети и Васи получились одинаковые результаты. Верно ли, что исходное число обязательно состояло из одинаковых цифр.

2. Джон и Вито играют в игру, оба зная следующие правила: «По кругу сидят 100 человек, из которых 33 мафиози и 67 мирных жителей. Джон ходит первым. Джон не знает про сидящих, кто есть кто, а Вито — знает всё про всех. Каждым своим ходом Джон убирает из круга любое множество людей, в том числе и пустое. Каждым своим ходом Вито убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Игра заканчивается, когда в кругу остаются или только мафиози, или только мирные жители. Джон выигрывает, если в конце останется хотя бы один мирный житель.» Может ли Джон победить вне зависимости от действий Вито?

3. На доске написаны три дроби: 1/2, 5/4 и 4/5. Каждую минуту Дима может выбрать два числа x и y, записанные на доске, и дописать на доску в виде несократимой дроби их среднее арифметическое $(x+y)/2$ или их среднее гармоническое $2xy/(x+y)$. Например, он может написать дробь $(2\cdot 1/2\cdot 4/5)/(1/2+4/5) = 8/13$. Докажите, что Дима никогда не запишет на доску число 1.

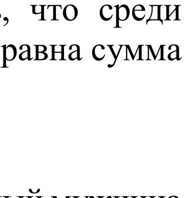
4. В ряд выложено 2019 шаров синего и красного цвета. На каждом шаре написали сумму количеств красных шаров левее него и синих шаров правее него. Оказалось, что среди написанных на шарах чисел ровно 11 чисел встречаются нечётное число раз. Чему равна сумма этих 11 чисел?

5. Найдите все четвёрки натуральных чисел (a, b, c, n) такие, что $a!+b!+c! = 2^n$.

6. На вечеринку пришли несколько супружеских пар и пять одиноких мужчин. Каждый мужчина пожал руку каждой женщине. После этого пришел еще один гость и пожал руку всем своим знакомым мужчинам и женщинам. Докажите, что, зная суммарное количество сделанных рукопожатий, можно однозначно определить, сколько знакомых у пришедшего последним гостя.

7. 300 теннисистов имеют различные рейтинги. Они разбиты на три команды по 100 теннисистов в каждой. Команды сыграли по одному разу друг с другом. При встрече двух команд игрок с самым высоким рейтингом в первой команде играет с игроком с самым высоким рейтингом во второй команде, второй по рейтингу со вторым и т.д. При этом теннисист с большим рейтингом всегда побеждает. При каком наибольшем k может оказаться, что в первой команде хотя бы k теннисистов обыграли соперников из второй, во второй хотя бы k теннисистов обыграли соперников из третьей и в третьей хотя бы k теннисистов обыграли соперников из первой?

8. Дана доска 99×99, в углу которой находится фишка. За один ход можно переместить фишку на одну или две клетки по вертикали или диагонали, или на одну клетку по горизонтали (на рисунке крестиком помечены поля, куда может ходить фишка). Какое наименьшее количество ходов нужно, чтобы обойти фишкой все клетки доски? (Мы считаем, что поле, в котором находится фишка в начале, и поле, в которое она попадает в конце, она посетила; если фишка делает ход на две клетки, то она посещает и поле между ними.)



LIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КАЗАНЬ, 05-11.11.2019

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написано натуральное число, не содержащее нулей в записи. Петя сначала вычеркнул первую цифру, потом у получившегося числа снова первую цифру и т. д. пока не осталось однозначное число, а затем сложил все получившиеся в процессе числа (включая исходное). Вася сначала вычеркнул последнюю цифру, потом у получившегося числа снова последнюю цифру и т. д. пока не осталось однозначное число, а затем сложил все получившиеся в процессе числа. У Пети и Васи получились одинаковые результаты. Верно ли, что исходное число обязательно состояло из одинаковых цифр.

2. Джон и Вито играют в игру, оба зная следующие правила: «По кругу сидят 100 человек, из которых 33 мафиози и 67 мирных жителей. Джон ходит первым. Джон не знает про сидящих, кто есть кто, а Вито — знает всё про всех. Каждым своим ходом Джон убирает из круга любое множество людей, в том числе и пустое. Каждым своим ходом Вито убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Игра заканчивается, когда в кругу остаются или только мафиози, или только мирные жители. Джон выигрывает, если в конце останется хотя бы один мирный житель.» Может ли Джон победить вне зависимости от действий Вито?

3. На доске написаны две дроби: 5/4 и 4/5. Каждую минуту Дима может выбрать два числа x и y, записанные на доске, и дописать на доску в виде несократимой дроби их среднее арифметическое $(x+y)/2$. Докажите, что Дима никогда не запишет на доску число 1.

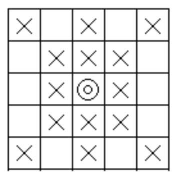
4. В ряд выложено 300 шаров: 100 синего цвета и 200 красного. На каждом шаре написали сумму количеств красных шаров левее него и синих шаров правее него. Какое наибольшее количество различных чисел могло получиться?

5. Найдите все четвёрки натуральных чисел (a, b, c, n) такие, что $a!+b!+c! = 2^n$.

6. На вечеринку пришли несколько супружеских пар и пять одиноких мужчин. Каждый мужчина пожал руку каждой женщине. После этого пришел еще один гость и пожал руку всем своим знакомым мужчинам и женщинам. Докажите, что, зная суммарное количество сделанных рукопожатий, можно однозначно определить, сколько знакомых у пришедшего последним гостя.

7. 300 теннисистов имеют различные рейтинги. Они разбиты на три команды по 100 теннисистов в каждой. Команды сыграли по одному разу друг с другом. При встрече двух команд игрок с самым высоким рейтингом в первой команде играет с игроком с самым высоким рейтингом во второй команде, второй по рейтингу со вторым и т.д. При этом теннисист с большим рейтингом всегда побеждает. При каком наибольшем k может оказаться, что в первой команде хотя бы k теннисистов обыграли соперников из второй, во второй хотя бы k теннисистов обыграли соперников из третьей и в третьей хотя бы k теннисистов обыграли соперников из первой?

8. Дана доска 99×99, в углу которой находится фишка. За один ход можно переместить фишку на одну или две клетки по вертикали или диагонали, или на одну клетку по горизонтали (на рисунке крестиком помечены поля, куда может ходить фишка). Какое наименьшее количество ходов нужно, чтобы обойти фишкой все клетки доски? (Мы считаем, что поле, в котором находится фишка в начале, и поле, в которое она попадает в конце, она посетила; если фишка делает ход на две клетки, то она посещает и поле между ними.)



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все четвёрки натуральных чисел (a, b, c, n) такие, что $a!+b!+c! = 2^n$.

2. Джон и Вито играют в игру, оба зная следующие правила: «По кругу сидят 100 человек, из которых 33 мафиози и 67 мирных жителей. Джон ходит первым. Джон не знает про сидящих, кто есть кто, а Вито — знает всё про всех. Каждым своим ходом Джон убирает из круга любое множество людей, в том числе и пустое. Каждым своим ходом Вито убирает из круга одного мирного жителя, который сидит рядом с мафиози. После каждого хода круг смыкается, без изменения порядка сидящих людей, так что снова получается круг. Игра заканчивается, когда в кругу остаются или только мафиози, или только мирные жители. Джон выигрывает, если в конце останется хотя бы один мирный житель.» Может ли Джон победить вне зависимости от действий Вито?

3. В турнире матбоев каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. За победу присуждали 2 очка, за ничью 1 очко, за проигрыш 0 очков. Две команды в конце турнира дисквалифицировали за неспортивное поведение, аннулировав результаты всех боёв с их участием. Оказалось, что до дисквалификации все оставшиеся команды набрали по разному числу очков, а после — снова по разному числу очков. При этом порядок оставшихся команд поменялся на обратный, то есть первая из них стала последней, вторая — предпоследней и т.д. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире?

4. В ряд выложено 300 шаров: 100 синего цвета и 200 красного. На каждом шаре написали сумму количеств красных шаров левее него и синих шаров правее него. Какое наибольшее количество различных чисел могло получиться?

5. Найдите наименьшее натуральное число, среди делителей которого есть четыре, ни один из которых не делится на наибольший общий делитель трёх других.

6. В группе из $k \geq 4$ школьников некоторые знакомы, а некоторые — нет. Оказалось, что любых четверых из них можно посадить за круглый стол так, что кто-то будет сидеть рядом с двумя знакомыми, а кто-то — рядом с двумя незнакомыми. Сколько всего школьников в группе?

7. Назовем *фрагментом* натурального числа n любое натуральное число, которое может быть получено из n вычеркиванием нескольких его первых цифр и нескольких его последних цифр. Например, фрагментами 2019 будут числа 2, 1, 9, 20, 19 и 201. Найдите наименьшее натуральное число k, сумма которого с каким-то его фрагментом дает 2019.

8. Можно ли покрыть доску 1001×1001 прямоугольниками 1×3, расположенными вертикально, квадратиками 2×2 и Z-тетрамино (фигура из четырех клеток в форме буквы Z), так чтобы все фигурки присутствовали?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На доске написано пятизначное число, все цифры которого различны и не равны нулю. Петя сначала вычеркнул первую цифру, потом у получившегося числа снова первую цифру и т. д., пока не осталось однозначное число, а затем сложил все получившиеся в процессе числа. Вася сначала вычеркнул последнюю цифру, потом у получившегося числа снова последнюю цифру и т. д., пока не осталось однозначное число, а затем сложил все получившиеся в процессе числа. Могли ли у Пети и Васи получиться одинаковые результаты?

2. Имеется две кучки спичек: в первой — 32, во второй — 33. Играют двое, ходят поочерёдно. За один ход игрок должен уменьшить число спичек в одной из кучек так, чтобы число оставшихся не было делителем числа спичек в другой кучке и не делилось на него. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

3. Одну из цифр в записи правильной конечной десятичной дроби стёрли, в результате чего дробь уменьшилась на 0,2019. Чему равнялась дробь?

4. При каком наибольшем n в таблицу из трёх строк и n столбцов можно вписать числа 0, 1 или 2 (в каждую клетку одно число) таким образом, чтобы суммы чисел во всех столбцах были различны, а во всех строках одинаковы?

5. Найдите наименьшее натуральное число, среди делителей которого есть четыре, ни один из которых не делится на наибольший общий делитель трёх других.

6. В группе из $k \geq 4$ школьников некоторые знакомы, а некоторые — нет. Оказалось, что любых четверых из них можно посадить за круглый стол так, что кто-то будет сидеть рядом с двумя знакомыми, а кто-то — рядом с двумя незнакомыми. Сколько всего школьников в группе?

7. 9 теннисистов имеют различные рейтинги. Они разбиты на три команды по 3 теннисиста в каждой. Команды сыграли по одному разу друг с другом. При встрече двух команд каждый игрок одной команды играл с каждым игроком другой команды. При этом теннисист с большим рейтингом всегда побеждал. Считается, что команда обыграла другую команду, если она одержала во встречах с ней больше побед, чем потерпела поражений. Могло ли случиться, что первая команда обыграла вторую, вторая — третью, а третья — первую?

8. Прямоугольник размером 70×90 разделён на 4 части, как показано на рисунке. Оказалось, что все части, кроме одной — квадраты. Найдите размеры всех частей.