КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.11.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Малыш, Карлсон и Фрекен Бок ели торт. Малыш ест торт вдвое медленнее Фрекен Бок и втрое медленнее Карлсона. Каждый из них съел ровно треть торта. При этом они закончили есть одновременно. Какая часть торта была съедена к тому моменту, когда Карлсон начал есть?

2. У Феди есть 900 монеток общей ценой 1000 тугриков (каждая монета достоинством в натуральное число тугриков). Докажите, что Федя может выбрать 100 монеток общей ценой ровно 200 тугриков.

3. На острове 100 жителей, каждый из которых может быть рыцарем (которые всегда говорят правду), лжецом (которые всегда лгут) или хитрецом (которые говорят, что хотят). 50 островитян произнесли фразу: «На острове рыцарей больше, чем хитрецов», а 50 остальных фразу: «На острове лжецов больше, чем хитрецов». Докажите, что на острове не меньше 25 хитрецов.

4. Майкл Джордан кидает штрафные броски на деньги по следующим правилам. За каждое попадание он получает \$1, за каждый промах платит \$$k$, где k — фиксированное натуральное число. Сначала у него \$0, а по окончании игры у него оказалось \$$k$. Найдите k, если известно, что Джордан бросил более 2900 раз, но менее 3000 раз, и попал более 2000 раз, но менее 2300 раз.

5. В некоторых клетках доски 100×100 стоят домики. Домик хорошо освещен, если из него видно хотя бы две из трех сторон доски: левой, правой и верхней (вертикальную сторону видно из домика, если в его строке между ним и этой стороной нет других домиков; аналогично определяется видимость горизонтальной стороны). Какое наибольшее количество хорошо освещенных домиков можно расставить на доске?

6. В стране 2000 городов, некоторые (не меньше одной) пары городов соединены беспосадочными авиарейсами. Может ли оказаться, что из любых двух городов, соединенных авиарейсом, в сумме выходит ровно 2019 авиарейсов в остальные города (не считая авиарейса между этими двумя городами)?

7. На столе в ряд стоят 60 тарелок, пронумерованные слева направо числами от 1 до 60. В тарелках с номерами от 1 до 25 лежит по одному яблоку, а в тарелках с номерами от 26 до 60 — по одному персику. За один ход разрешается одновременно переместить яблоко с тарелки номер i на тарелку номер $i+1$ и персик с тарелки номер j на тарелку номер $j-1$, если разность $i-j$ четна. Разрешается, чтобы при этом в каких-то тарелках оказывалось несколько фруктов. Можно ли за несколько таких ходов добиться того, чтобы в тарелках с номерами от 1 до 35 лежало по одному персику, а в тарелках с номерами от 36 до 60 — по одному яблоку?

8. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.11.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Малыш, Карлсон и Фрёкен Бок ели торт. Карлсон ел в три раза быстрее Малыша, а Фрёкен Бок в два раза быстрее Малыша и ели они до тех пор, пока весь торт не закончился. В 17:00 к поеданию торта приступил Малыш, а в 18:00 — Карлсон. Когда начала есть торт Фрёкен Бок, если известно, что в итоге они все съели поровну?

2. На острове 100 жителей, каждый из которых может быть рыцарем (которые всегда говорят правду), лжецом (которые всегда лгут) или хитрецом (которые говорят, что хотят). 50 островитян произнесли фразу: «На острове рыцарей больше, чем хитрецов», а 50 остальных фразу: «На острове лжецов больше, чем хитрецов». Докажите, что на острове не меньше 25 хитрецов.

3. Майкл Джордан кидает штрафные броски на деньги по следующим правилам. За каждое попадание он получает \$1, за каждый промах платит \$$k$, где k — фиксированное натуральное число. Сначала у него \$0, а по окончании игры у него оказалось \$$k$. Найдите k, если известно, что Джордан попал более чем в 75% всех бросков, но менее чем в 80% всех бросков.

4. Числа a и b удовлетворяют соотношению $a+2b^2 \leq 3$. Докажите, что $a+4b \leq 5$.

5. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $AB = BC = AD$. Докажите, что биссектриса угла ADC, серединный перпендикуляр к отрезку CD и прямая AC пересекаются в одной точке.

6. Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101.

7. В связном графе 2020 вершин. Может ли оказаться, что сумма степеней любых двух вершин, соединенных ребром, равна 2019?

8. Все натуральные делители натурального числа n разбили на пары и нашли сумму чисел в каждой паре. Оказалось, что все суммы — простые числа. Докажите, что все они различны.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.11.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Будем называть число *палиндромом*, если в своей десятичной записи оно одинаково читается слева-направо и справа-налево. Найдите наименьшее натуральное n, которое нельзя представить в виде суммы двух палиндромов.

2. Пусть x и y — положительные действительные числа. Положим $a=1+\frac{x}{y}, b=1+\frac{y}{x}$. Вычислите a^3+b^3, если известно, что $a^2+b^2 = 15$.

3. На площадке можно сыграть или в волейбол, или в футбол, или в баскетбол. На площадку пришли 7 команд, и каждая команда сыграла с каждой ровно один матч. Известно, что нет трёх команд, которые друг с другом играли в один и тот же вид спорта. Тройку команд, которые между собой сыграли во все три вида спорта, назовём *разносторонней*. Какое наибольшее количество разносторонних троек команд могло быть?

4. На основании BC равнобедренного треугольника ABC с углом при вершине 100° отмечена точка D такая, что $AC = DC$, а на боковой стороне AB — точка F такая, что $DF \parallel AC$. Найдите величину угла DCF.

5. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно так, что $AC \parallel EF$. Во внешнюю сторону построены «ушки»: правильные треугольники BEX и BFY. Докажите, что треугольники ADX и CDY равновелики.

6. В класс с 2019 апатичными мальчиками, каждый из которых или играет на сотовом, или смотрит в окно, пришли 2019 девочек. Сначала первая приказывает одному мальчику сменить вид занятий, затем вторая приказывает двум мальчикам сменить вид занятий и так далее, наконец, 2019-ая девочка приказывает сменить вид занятий 2019 мальчикам. Докажите, что девочки могут действовать так, чтобы в конце все апатичные мальчики делали одно и то же.

7. Все натуральные делители натурального числа n разбили на пары и нашли сумму чисел в каждой паре. Оказалось, что все суммы — простые числа. Докажите, что все они различны.

8. Резиденту нужно будет передать в Центр сообщение — строчку длины 2019 из нулей и единиц. Для этого у него будет полоска бумаги $1\times n$, в каждую клеточку которой необходимо записать нуль или единицу. Резидент и Центр знают, что полоска будет бракованной: в каких-то пяти последовательных ее клетках заранее будут написаны нули и единицы. При каком наименьшем n Центр и Резидент могут заранее договориться о способе передачи сообщения? Резидент во время записи сообщения видит, какие пять клеток испорчены и что в них записано. По полоске можно понять, где у неё начало, а где — конец.

LIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КАЗАНЬ, 05-11.11.2019

Решения задач командной олимпиады 6 класса

Задача 1. *Малыш, Карлсон и Фрекен Бок ели торт. Малыш ест торт вдвое медленнее Фрекен Бок и втрое медленнее Карлсона. Каждый из них съел ровно треть торта. При этом они закончили есть одновременно. Какая часть торта была съедена к тому моменту, когда Карлсон начал есть?*

Ответ. 1/3. Решение. За время пока Карлсон съест 1/3 торта, Малыш съест 1/9 торта, а Фрекен Бок — 2/9 торта. Всего за это время будет съедено 1/3+1/9+2/9 = 2/3 торта. Значит, к моменту, когда Карлсон начал есть, была съедена 1/3 торта

Задача 2. *У Феди есть 900 монеток общей ценой 1000 тугриков (каждая монета достоинством в натуральное число тугриков). Докажите, что Федя может выбрать 100 монеток общей ценой ровно 200 тугриков.*

Решение. Среди 900 монет не более ста имеют достоинство больше 1 тугрика — иначе общая цена монет была бы не меньше 799+101·2 = 1001 тугрика. Значит, есть хотя бы 800 монет достоинством в 1 тугрик. Отбросим их. Останутся 100 монет общим стоимостью 200 тугриков.

Задача 3. *На острове 100 жителей, каждый из которых может быть рыцарем (которые всегда говорят правду), лжецом (которые всегда лгут) или хитрецом (которые говорят, что хотят). 50 островитян произнесли фразу: «На острове рыцарей больше, чем хитрецов», а 50 остальных фразу: «На острове лжецов больше, чем хитрецов». Докажите, что на острове не меньше 25 хитрецов.*

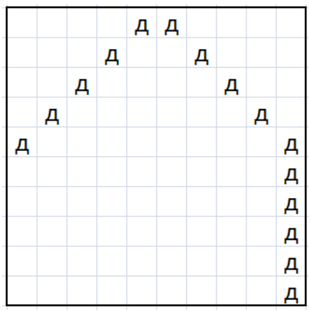
Решение. Если второе утверждение лживо, то его произнесли только хитрецы и лжецы, при этом лжецов не больше, чем хитрецов, поэтому хитрецов не менее 25. Если оба произнесённых утверждения правдивы, то на острове нет лжецов, а тогда второе утверждение не может быть правдивым. Наконец, если первое утверждение лживо, а второе — правдиво, то второе утверждение произнесли только рыцари и хитрецы, а из ложности первого следует, что хитрецов не меньше, чем рыцарей, т. е. не меньше 25.

Задача 4. *Майкл Джордан кидает штрафные броски на деньги по следующим правилам. За каждое попадание он получает \$1, за каждый промах платит \$k, где k — фиксированное натуральное число. Сначала у него \$0, а по окончании игры у него оказалось \$k. Найдите k, если известно, что Джордан бросил более 2900 раз, но менее 3000 раз, и попал более 2000 раз, но менее 2300 раз.*

Ответ. $k = 3$. Решение. Пусть Майкл попал a раз, а промазал b раз. Тогда он заработал $a–kb = k$ долларов, откуда $a = k(b+1)$. Так как по условию число a больше 2000, но меньше 2300, оно делится на $b+1$, которое больше 2900-2300+1=601, но меньше 3000-2000+1=1001. Поэтому $2299/601 > k > 2000/1000$, откуда $k=3$.

Задача 5. *В некоторых клетках доски 100×100 стоят домики. Домик хорошо освещен, если из него видно хотя бы две из трех сторон доски: левой, правой и верхней (вертикальную сторону видно из домика, если в его строке между ним и этой стороной нет других домиков; аналогично определяется видимость горизонтальной стороны). Какое наибольшее количество хорошо освещенных домиков можно расставить на доске?*

Ответ. 150. Первое решение. *Оценка*. Пусть из каждого дома выйдут два человека и пойдут в направлении тех сторон, которые видно из их домика. Тогда к каждому единичному отрезку на левой, верхней и правой границах квадрата придет не более одного человека, ведь если к отрезку пришли два человека, то дом того из них, который ближе к стороне, перегораживает второму эту сторону. Следовательно, людей всего не более 3·100, а тогда домов не более 3·100/2 = 150. *Пример*. Пронумеруем строки от 1 до 100 сверху вниз, а столбцы слева направо. Поставим дома на диагонали, идущей от 50-ой клетки 1-го столбца до 1-ой клетки 50-го столбца, на диагонали, идущей от 1-ой клетки 51-го столбца до 50-ой клетки последнего столбца, а также на клетках 51-100 последнего столбца (аналогичный пример для таблицы 10×10 — на рисунке). Тогда дома первой диагонали освещаются слева и сверху, второй — справа и сверху, последнего столбца — слева и справа.



Второе решение. *Оценка*. Очевидно, в одной строке не может стоять больше двух домиков. Назовём строку, где стоят ровно два домика, *тяжелой*. Пусть у нас t тяжелых строк. Очевидно, в столбцах, где стоят домики из тяжелой строки, других домиков быть не может, поэтому домики из тяжелых строк «запрещают» $2t$ столбцов. Значит, $2t \le 100$, откуда $t \le 50$. Так как в каждой из $100-t$ не тяжёлых строк стоит не более одного домика, всего домиков не больше, чем $2t+100-t = 100+t \le 150$. *Пример*. Делаем верхние 50 строк тяжелыми так: в первой сверху строке размещаем домики в 1 и 2 столбцах, во второй сверху — в 3 и 4 столбцах, …, в 50-ой сверху — в 99-ом и сотом столбцах. В остальных 50 строках размещаем по одному домику произвольным образом.

Задача 6. *В стране 2000 городов, некоторые (не меньше одной) пары городов соединены беспосадочными авиарейсами. Может ли оказаться, что из любых двух городов, соединенных авиарейсом, в сумме выходит ровно 2019 авиарейсов в остальные города (не считая авиарейса между этими двумя городами)?*

Ответ. Не может. Решение. Пусть города A и B соединены авиарейсом. Тогда найдется город C, соединенный авиарейсами с обоими этими городами — иначе из A и B вместе выходило бы в другие города не более 1998 авиарейсов. Пусть из городов A, B и C выходит a, b и c авиарейсов соответственно. Тогда каждое из чисел $a+b$, $b+c$, $a+c$ равно 2021 (рейс между городами прибавляется к 2019 и считается дважды). Но тогда $a-b = b-c = c-a = 0$, откуда $a = b = c = 1010{,}5$, что невозможно.

Задача 7. *На столе в ряд стоят 60 тарелок, пронумерованные слева направо числами от 1 до 60. В тарелках с номерами от 1 до 25 лежит по одному яблоку, а в тарелках с номерами от 26 до 60 — по одному персику. За один ход разрешается одновременно переместить яблоко с тарелки номер i на тарелку номер $i+1$ и персик с тарелки номер j на тарелку номер $j-1$, если разность $i-j$ четна. Разрешается, чтобы при этом в каких-то тарелках оказывалось несколько фруктов. Можно ли за несколько таких ходов добиться того, чтобы в тарелках с номерами от 1 до 35 лежало по одному персику, а в тарелках с номерами от 36 до 60 — по одному яблоку?*

Ответ. Нельзя. Решение. Правило перемещения фруктов означает, иными словами, что перемещать их можно только тогда, когда номера их клеток имеют одну четность. При описанном в условии перемещении яблока и персика оба они меняют четность номера клетки, на которой находятся. Поэтому разность количества персиков, находящихся на нечетных клетках, и количества яблок, находящихся на нечетных клетках, при этих операциях остается постоянной, то есть равной $17-13$, как в исходной позиции. А если бы удалось переставить фрукты так, как требуется условием, эта разность стала бы равна $18-12$.

Задача 8. *Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101.*

Ответ. 51. Решение. *Оценка*. Рассмотрим сумму всех чисел от k до m, где $1 \le k \le m \le 50$. Она равна $(k+m)(m-k+1)/2$. При этом оба сомножителя в числителе не делятся на 101, так как они меньше 101. Поскольку 101 — простое число, не делится на 101 и их произведение. Таким образом, $n \le 50$ не годится, то есть $n \ge 51$. *Пример*. Покажем, что 51 обладает указанным свойством. Заменим каждое число на его остаток от деления на 101. Если есть число, имеющее остаток 0, то можно выбрать одно это число. Если же остатка 0 нет, то мы получим 51 последовательное число от 1 до 100. В любом таком наборе чисел встретятся числа 50 и 51. Сумма чисел с данными остатками будет делиться на 101.

Решения задач командной олимпиады 7 класса

Задача 1. *Малыш, Карлсон и Фрёкен Бок ели торт. Карлсон ел в три раза быстрее Малыша, а Фрёкен Бок в два раза быстрее Малыша и ели они до тех пор, пока весь торт не закончился. В 17:00 к поеданию торта приступил Малыш, а в 18:00 — Карлсон. Когда начала есть торт Фрёкен Бок, если известно, что в итоге они все съели поровну?*

Ответ. В 17.45. Решение. С 18.00 Малыш съел втрое меньше Карлсона, то есть 1/9 торта. Значит, за час с 17.00 до 18.00 Малыш съел 2/9 часть торта. Значит, последнюю 1/9 торта он ел полчаса. Фрёкен Бок за эти полчаса съела вдвое больше Малыша, то есть 2/9 торта. Значит, до 18.00 она должна была тоже съесть 1/3–2/9 = 1/9 часть торта. Так как Фрёкен Бок ест вдвое быстрее Малыша, она съела 1/9 часть торта за 15 минут часа, откуда и получаем ответ.

Задача 2. *На острове 100 жителей, каждый из которых может быть рыцарем (которые всегда говорят правду), лжецом (которые всегда лгут) или хитрецом (которые говорят, что хотят). 50 островитян произнесли фразу: «На острове рыцарей больше, чем хитрецов», а 50 остальных фразу: «На острове лжецов больше, чем хитрецов». Докажите, что на острове не меньше 25 хитрецов.*

Решение. Если второе утверждение лживо, то его произнесли только хитрецы и лжецы, при этом лжецов не больше, чем хитрецов, поэтому хитрецов не менее 25. Если оба произнесённых утверждения правдивы, то на острове нет лжецов, а тогда второе утверждение не может быть правдивым. Наконец, если первое утверждение лживо, а второе — правдиво, то второе утверждение произнесли только рыцари и хитрецы, а из ложности первого следует, что хитрецов не меньше, чем рыцарей, т. е. не меньше 25.

Задача 3. *Майкл Джордан кидает штрафные броски на деньги по следующим правилам. За каждое попадание он получает \$1, за каждый промах платит \$k, где k — фиксированное натуральное число. Сначала у него \$0, а по окончании игры у него оказалось \$k. Найдите k, если известно, что Джордан попал в более чем 75% всех бросков, но менее чем в 80% всех бросков.*

Ответ. $k = 3$. Решение. Пусть Майкл попал a раз, а не попал b раз. По условию $a–kb = k$, откуда $a/(b+1) = k$ (*). Далее, из условия следует, что $3(a+b)/4 < a < 4(a+b)/5$, откуда $3 < a/b < 4$ (**). Так как $a/(b+1) = k$ — целое число, и $a/(b+1) < a/b$, имеем $k \le 3$. Из (**) следует, что $a > 3b$, откуда $a \ge 3b+1$. Если $k = 1$, то в силу (*) $a = b+1 < 3b+1$ — противоречие. Если $k = 2$, то $a = 2b+2 \le 3b+1$, откуда $b \le 1$, то есть $b = 1$, а $a = 4$, но эти значения не подходят, так как тогда Майкл забросил бы 80% бросков. А $k = 3$ подходит: достаточно взять, например, $a = 18$, $b = 5$.

Задача 4. *Числа a и b удовлетворяют соотношению* $a+2b^2 \le 3$. *Докажите, что* $a+4b \le 5$.

Решение. Перепишем неравенства из условия в виде $2b^2 \le 3–a$ и $4b \le 5–a = 2+(3–a)$. Как видим, достаточно доказать, что $4b \le 2+2b^2$. Но последнее неравенство после деления обеих частей на 2 и преобразования превращается в очевидное неравенство $(b–1)^2 \ge 0$.

Задача 5. *На стороне BC равнобедренного треугольника ABC выбрана такая точка D, что AB = BC = AD. Докажите, что биссектриса угла ADC, серединный перпендикуляр к отрезку CD и прямая AC пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть биссектриса угла ADC пересекается с отрезком AC в точке E. Положим $\angle ABC = 2\varphi$. Тогда $\angle BAC = \angle BCA = \angle DCE = 90°–\varphi$. С другой стороны, $\angle ADB = \angle ABD = 2\varphi$, откуда $\angle ADC = 180°–2\varphi$ и $\angle EDC = 90°–\varphi = \angle DCE$. Значит, треугольник CEB — равнобедренный, и его вершина E лежит на серединном перпендикуляре к основанию CD, что и требовалось доказать.

Задача 6. *Найдите наименьшее натуральное n, обладающее следующим свойством: из любых n последовательных чисел можно выбрать несколько (хотя бы одно) последовательных чисел, сумма которых делится на 101.*

Ответ. 51. Решение. *Оценка*. Рассмотрим сумму всех чисел от k до m, где $1 \le k \le m \le 50$. Она равна $(k+m)(m–k+1)/2$. При этом оба сомножителя в числителе не делятся на 101, так как они меньше 101. Поскольку 101 — простое число, не делится на 101 и их произведение. Таким образом, $n \le 50$ не годится, то есть $n \ge 51$. *Пример*. Покажем, что 51 обладает указанным свойством. Заменим каждое число на его остаток от деления на 101. Если есть число, имеющее остаток 0, то можно выбрать одно это число.

Если же остатка 0 нет, то мы получим 51 последовательное число от 1 до 100. В любом таком наборе чисел встретятся числа 50 и 51. Сумма чисел с данными остатками будет делиться на 101.

Задача 7. *В связном графе 2020 вершин. Может ли оказаться, что сумма степеней любых двух вершин, соединенных ребром, равна 2019?*

Ответ. Не может. Решение. Предположим, что такой граф существует. Граф является двудольным: покрасим в белый цвет все вершины нечетной степени (доля A, пусть $|A| = a$), а в черный цвет все вершины четной степени (доля B, пусть $|B| = b$), очевидно, рёбер внутри долей нет. Так как граф связен, все вершины доли A имеют одинаковую степень (пусть s_A) и все вершины доли B имеют одинаковую степень (пусть s_B): в самом деле, соединим две вершины одной четности путем, и если степень одной вершины равна x, то на пути из неё во вторую чередуются вершины степеней x и $2019–x$. Очевидно, $s_A \le b$ и $s_B \le a$. С другой стороны, $s_A+s_B = 2019$, а $a+b = 2020$. Поэтому, либо $s_A = b–1$ и $s_B = a$, либо $s_A = b$ и $s_B = a–1$. Случаи аналогичны, рассмотрим первый. Тогда из A в B выходит ровно $a(b–1)$ рёбер, а из B в A выходит ровно ba рёбер, но эти два числа должны быть равны, противоречие.

Задача 8. *Все натуральные делители натурального числа n разбили на пары и посчитали сумму чисел в каждой паре. Оказалось, что все суммы — простые числа. Докажите, что все они различны.*

Решение. Заметим, что число n не делится на p^2 ни при каком простом p. В самом деле, пусть $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — все его делители, не делящиеся на p. Тогда у n есть еще не менее $2k$ делителей, делящихся на p: $pd_1, \ldots, pd_k, p^2d_1, \ldots, p^2d_k$, и потому хотя бы в одной из пар оба делителя будут делиться на p — противоречие. Если же $n = p_1\ldots p_s$, где все сомножители — различные простые числа, то единственный способ разбиения делителей на пары, где все суммы в парах — простые числа, это разбиение на пары вида d, n/d. В самом деле, занумеруем по возрастанию все делители числа n: $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$. Делитель $d_{k–s}$ может быть в паре только с одним из делителей $d_1, \ldots, d_{s+1} = n/d_{k–s}$, так как каждый из больших делителей имеет с $d_{k–s}$ общий простой множитель. Значит, делитель $d_k = n$ может быть в паре только с делителем $d_1 = 1$, делитель $d_{k–1}$ — в паре только с делителем d_2 и т.д., что и требовалось. Осталось заметить, что все суммы вида $d+n/d$ различны, потому что, как легко проверить, при $d_1 < d_2 \le n/2$ выполнено неравенство $d_1+n/d_1 < d_2+n/d_2$.

Решения задач командной олимпиады 8 класса

Задача 1. *Будем называть число палиндромом, если в своей десятичной записи оно одинаково читается слева-направо и справа-налево. Найдите наименьшее натуральное n, которое нельзя представить в виде суммы двух палиндромов.*

Ответ. 21. Решение. Любое число, не превосходящее 18, представляется в виде суммы двух однозначных. Далее, 19 = 11+8 и 20 = 11+9. А число 21 нельзя представить в требуемом виде, так как все меньшие 21 палиндромы суть однозначные числа и 11. Двух однозначных не хватит, а 21–11 = 10 — не палиндром.

Задача 2. *Пусть x и ya — положительные действительные числа. Положим* $a = 1+\frac{x}{y}$, $b = 1+\frac{y}{x}$. *Вычислите* a^3+b^3, *если известно, что* $a^2+b^2 = 15$.

Ответ. 50. Решение. Положим $t = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. $15 = a^2+b^2 = 2t+t^2 \Leftrightarrow t^2+2t-15 = (t-3)(t+5) = 0$ откуда, так как t положительно, $t = 3$ и $a+b = ab = t+2 = 5$. Теперь легко находим $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = 5\cdot(15-5) = 50$.

Задача 3. *На площадке можно сыграть или в волейбол, или в футбол, или в баскетбол. На площадку пришли 7 команд, и каждая команда сыграла с каждой ровно один матч. Известно, что нет трёх команд, которые друг с другом играли в один и тот же вид спорта. Тройку команд, которые между собой сыграли во все три вида спорта, назовём* ***разносторонней***. *Какое наибольшее количество разносторонних троек команд могло быть?*

Ответ. 14. Решение. *Оценка*. Всего троек команд можно составить $7\cdot6\cdot5/2 = 35$. Назовем *плохой командой* не разносторонней тройки ту, которая с двумя другими играла в одну и ту же игру. Так как нет трех команд, которые друг с другом играли в один и тот же вид спорта, в каждой не разносторонней тройке одна плохая команда. С другой стороны, каждая команда является плохой самое меньшее в трех тройках. В самом деле, если она играла в один и тот же вид спорта хотя бы с тремя командами, то она образует не разносторонние тройки с каждыми двумя из них. Иначе она играла в каждый вид спорта с двумя командами, и три не разносторонние тройки тоже налицо. Таким образом, не разносторонних троек хотя бы $3\cdot7 = 21$, а разносторонних — не более 35–21 = 14. *Пример*. Расставим команды по кругу, и пусть в футбол, баскетбол и волейбол играют между собой те, между которыми по часовой стрелке нет других команд, одна другая команда и две другие команды соответственно. Нетрудно проверить, что тогда получится ровно 14 разносторонних троек.

Задача 4. *На основании BC равнобедренного треугольника ABC с углом при вершине 100° отмечена точка D такая, что AC = DC, а на боковой стороне AB — точка F такая, что DF || AC. Найдите величину угла DCF.*

Ответ. 10°. Решение. Поскольку $DF \parallel AC$ и $AB = AC$, $\angle FDB = \angle ACB = \angle ABD$. Значит, $FB = FD$. Отметим на отрезке CD точку G так, что $DG = DF$. Посчитаем углы: $\angle ACB = \angle ABC = (180°-\angle CAB)/2 = 40°$, $\angle CAD = \angle CDA = (180°-\angle ACD)/2 = 70°$, $\angle FDB = \angle ACB = 40°$, $\angle ADF = \angle CAD = 70°$. Заметим теперь, что в треугольниках GAD и FAD: $\angle ADF = \angle ADG = 70°$, $DF = DG$, AD — общая сторона. Значит, они равны, откуда $\angle GAD = \angle DAF = \angle CAB-\angle CAD = 30°$, $GA = AF = AB-FB = CD-GD = CG$. В треугольнике GAF $\angle GAF = 60°$, $GA = AF$, поэтому он равносторонний, откуда $GF = GA = AF = CG$. Осталось лишь заметить, что по свойству внешнего угла треугольника $40° = \angle FDB = 2\angle FGB = 4\angle FCD$, откуда $\angle FCD = 10°$.

Задача 5. *На сторонах AB и BC параллелограмма ABCD отмечены точки E и F соответственно так, что AC || EF. Во внешнюю сторону построены «ушки»: правильные треугольники BEX и BFY. Докажите, что треугольники ADX и CDY равновелики.*

Решение. Разберем случай, когда $\angle ABC < 120°$. Тогда точка X лежит внутри полосы, образованной прямыми BC и AD, и в таком случае $S_{XAD}+S_{XBC} = S_{ABCD}/2$ (*), потому что высоты этих треугольников из вершины X в сумме дают расстояние между прямыми BC и AD, а основания BC и AD, на которые они опущены, равны как противоположные стороны параллелограмма. Написанная выше формула следует из формул площадей XBC, XAD и $ABCD$. Аналогично, $S_{YCD}+S_{YAB} = S_{ABCD}/2$. Итого, достаточно доказать, что $S_{ABY} = S_{BCX}$. Заметим, что $\angle EBY = \angle ABC+60° = \angle FBX$. Кроме того, $BX = BE$ и $BY = BF$, поэтому треугольники BFX и BYE равны по первому признаку. Пусть площадь каждого из них равна S. Поскольку $AC \parallel EF$, треугольники ABC и EBF подобны. Пусть $k = BC/BF$. Тогда $S_{BCX} = S_{BFX} \cdot BC/BF = k \cdot S$. Аналогично $S_{ABY} = k \cdot S$. Случай, когда $\angle ABC > 120°$, разбирается аналогично с той разницей, что в левой части формулы (*) нужно плюс заменить на минус. В случае $\angle ABC = 120°$ точка X лежит на прямой BC, точка Y — на AB и $S_{ADX} = S_{ABCD}/2 = S_{CDY}$.

Задача 6. *В класс с 2019 апатичными мальчиками, каждый из которых или играет на сотовом, или смотрит в окно, пришли 2019 девочек. Сначала первая приказывает одному мальчику сменить вид занятий, затем вторая приказывает двум мальчикам сменить вид занятий и так далее, наконец, 2019-ая девочка приказывает сменить вид занятий 2019 мальчикам. Докажите, что девочки могут действовать так, чтобы в конце все апатичные мальчики делали одно и то же.*

Решение. Докажем индукцией по нечетным числам, что утверждение задачи верно для n мальчиков и n девочек при любом нечетном натуральном n. *База* для $n = 1$ очевидна. *Переход.* Пусть утверждение задачи верно для $n = 2k-1$. Докажем его для $n = 2k+1$.

Допустим сначала, что все мальчики до прихода девочек занимались одним и тем же. Тогда разобьем всех девочек, кроме $(2k+1)$-ой, на пары с суммой номеров $2k+1$, и пусть девочки из каждой пары в совокупности приказывают сменить занятие всем мальчикам. В этом случае $(2k+1)$-ой девочке достанется компания мальчиков, занятых одним делом, и ее приказ этого факта не изменит.

Теперь рассмотрим случай, когда до прихода девочек были мальчики A и B, занимавшиеся разными делами. Отбросим пока этих двоих. По предположению индукции первые $2k-1$ девочек смогут заставить оставшихся мальчиков заниматься одним делом. Не умаляя общности можно считать, что A занимается тем же делом. В этом случае $2k$-ая девочка прикажет сменить занятие всем, кроме B, и $(2k+1)$-ой девочке, как и в предыдущем случае, достанется компания мальчиков, занятых одним делом.

Задача 7. *Все натуральные делители натурального числа n разбили на пары и посчитали сумму чисел в каждой паре. Оказалось, что все суммы — простые числа. Докажите, что все они различны.*

Решение. Заметим, что число n не делится на p^2 ни при каком простом p. В самом деле, пусть $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — все его делители, не делящиеся на p. Тогда у n есть еще не менее $2k$ делителей, делящихся на p: $pd_1, \ldots, pd_k, p^2d_1, \ldots, p^2d_k$, и потому хотя бы в одной из пар оба делителя будут делиться на p — противоречие. Если же $n = p_1 \ldots p_s$, где все сомножители — различные простые числа, то единственный способ разбиения делителей на пары, где все суммы в парах — простые числа, это разбиение на пары вида d, n/d. В самом деле, занумеруем по возрастанию все делители числа n: $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$. Делитель d_{k-s} может быть в паре только с одним из делителей $d_1, \ldots, d_{s+1} = n/d_{k-s}$, так как каждый из больших делителей имеет с d_{k-s} общий простой множитель. Значит, делитель $d_k = n$ может быть в паре только с делителем $d_1 = 1$, делитель d_{k-1} — в паре только с делителем d_2 и т.д., что и требовалось. Осталось заметить, что все суммы вида $d+n/d$ различны, потому что, как легко проверить, при $d_1 < d_2 \le n/2$ выполнено неравенство $d_1+n/d_1 < d_2+n/d_2$.

Задача 8. *Резиденту нужно будет передать в Центр сообщение — строчку длины 2019 из нулей и единиц. Для этого у него будет полоска бумаги $1 \times n$, в каждую клеточку которой необходимо записать нуль или единицу. Резидент и Центр знают, что полоска будет бракованной: в каких-то пяти последовательных ее клетках заранее будут написаны нули и единицы. При каком наименьшем n Центр и Резидент могут заранее договориться о способе передачи сообщения? Резидент во время записи сообщения видит, какие пять клеток испорчены и что в них записано. По полоске можно понять, где у неё начало, а где — конец.*

Ответ. 2024. Решение. Для начала заметим, что меньшей полоской обойтись, очевидно, нельзя. В самом деле, Резиденту нужно передать одно из 2^{2019} возможных сообщений, поэтому как минимум столько различных полосок он должен мочь записать, т.е. незаполненных клеток должно быть, как минимум, 2019. Теперь приведём два способа — один более комбинаторный, другой более алгебраический — передачи сообщения в Центр, если $n = 2024$.

Первый способ. Резидент и Центр договариваются о таком способе расшифровки. Пусть в Центр пришла некоторая полоска. Пронумеруем все клеточки от 0 до 2023. Центр смотрит на клеточку с номером $k \le 4$: если в ней стоит 0, то он не делает ничего, если 1, то меняет на противоположные (ноль на один и один на ноль) все числа в клетках, дающих остаток k при делении на 5. После выполнения этих действий, в клетках с 5 по 2023 и будет сообщение Резидента. Поймём, что Резидент всегда сможет вписать нули и единицы в полоску, чтобы этот алгоритм выдал правильный результат. Заметим, что поскольку испорчены 5 последовательных клеток, то для каждого остатка k при делении на 5, испорчена ровно одна клеточка, дающая остаток k при делении на 5. Пусть теперь резидент напишет карандашом в клетки с 5 по 2023 своё сообщение. Далее для каждого остатка k при делении на 5, пусть он проделает следующую операцию. Случай, если испорчена клетка с номером k: если в ней 0, то Резидент не делает ничего, а если 1, то во всех клетках с номерами, дающими остаток k при делении на 5, Резидент меняет числа на противоположные. Случай, если испорчена клетка с номером, большим k. Если написанное Резидентом в ней карандашом число совпадает с написанным, то в клетку с номером k Резидент пишет 0, а если не совпадает -- то в клетку с номером k он пишет 1, а во всех клетках с номерами, дающими остаток k при делении на 5, меняет числа на противоположные.

Второй способ. Резидент и Центр договариваются о таком способе расшифровки. Пусть в Центр пришла некоторая полоска. Обозначим все числа в ней через a_1, a_2, ..., a_{2024}. Тогда сообщение Резидента будет a_1+a_6, a_2+a_7, ..., $a_{2019}+a_{2024}$ (естественно, сумма по модулю 2). Поймём, что Резидент всегда сможет вписать нули и единицы в полоску, чтобы этот алгоритм выдал правильный результат. Пусть ему необходимо зашифровать последовательность b_1, b_2, ..., b_{2019}, а значения a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+5} уже даны. Из равенств $b_k = a_k+a_{k+5}$, $b_{k-1} = a_{k-1}+a_{k+4}$, ..., $b_1 = a_1+a_6$ Резидент последовательно вычислит a_k, a_{k-1}, ..., a_1, а из равенств $b_{k+1} = a_{k+1}+a_{k+6}$, $b_{k+2} = a_{k+2}+a_{k+7}$, ..., $b_{2019} = a_{2019}+a_{2024}$ вычислит a_{k+6}, a_{k+7}, ..., a_{2024}.