МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.11.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Ёжик и Медвежонок в 10 утра вышли из своих домов и пошли друг к другу в гости. По пути они встретились, но не заметили друг друга в тумане и пошли дальше. Спустя 6 минут после встречи Ёжик дошёл до дома Медвежонка, а через 18 минут после этого Медвежонок дошёл до домика Ёжика. Во сколько каждый из них обнаружил, что друга нет дома? (Скорость каждого из них постоянна, оба шли одной и той же прямой дорогой.)

2. Произведение десяти последовательных натуральных чисел заканчивается четырьмя нулями. Докажите, что произведение каких-то трёх из этих чисел тоже заканчивается четырьмя нулями.

3. Какое наименьшее количество прямоугольников из трёх клеток можно вырезать из прямоугольника 10×9 клеток таким образом, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата 2×2?

4. На столе лежит по 2019 монет каждого из достоинств 1, 2, 4, 8, …, 2^{100} тугриков. Рядом стоит касса с неограниченным числом монет каждого из этих достоинств. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно заменить любую монету на столе набором более мелких монет на ту же сумму, взятых из кассы. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

5. Непустое подмножество множества всех натуральных чисел, не превосходящих 2019, назовем *хорошим*, если сумма элементов этого подмножества делится на их количество. Определите, четно или нечетно количество хороших подмножеств

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.11.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Петя и Вася проводят матч, состоящий из нескольких партий. Победитель партии получает 4 очка, проигравший — одно очко, а если партия закончилась вничью, то оба получают по 2 очка. По окончании матча у ребят вместе оказалось 170 очков. Мог ли победитель набрать 90 очков?

2. Найдите все четверки простых чисел p, q, r и s, для которых $2p+3pq+4pqr+5pqrs = 2019$.

3. Набор состоит из двадцати гирь с весами от 11 до 30 грамм, по одной гире каждого веса. За одно взвешивание можно сравнить две гири (узнать, какая тяжелее), после чего вес каждой из них уменьшается на 1 грамм. Если вес гири становится равным нулю, то она исчезает. Можно ли организовать взвешивания так, чтобы в какой-то момент времени стало возможно указать гирю весом в 20 грамм?

4. Дано нечетное натуральное число n и клетчатый квадрат со стороной n клеточек. Некоторые стороны клеточек, составляющих квадрат, окрашены в красный цвет, причем каждая клеточка имеет по крайней мере две красные стороны. Какое наименьшее количество отрезков могло быть покрашено?

5. Докажите, что если m и $n < m$ — натуральные числа, то $(m, n)+(m+1, n+1)+(m+2, n+2) \leq 2m-2n+1$. (Как обычно, (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x и y.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.11.2019

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Про действительные числа x, y и z известно, что $2x^2+y^2+z^2 = 2x(y+z)$. Докажите, что тогда и $x^2+y^2+2z^2 = 2(x+y)z$.

2. В квадрате $ABCD$ на стороне CD выбрана точка P. Точка Q на стороне AD такова, что BQ — биссектриса угла PBA. Из точки P опущен перпендикуляр PH на прямую BQ. Докажите, что $BQ = 2PH$.

3. Два банкира играют в игру. Изначально на столе лежат по одной купюре каждого из существующих в стране достоинств, а именно 1, 2, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 и 5000 тугриков. За один ход один банкир разменивает любую купюру на любые меньшие на ту же сумму. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

4. Докажите, что если m и $n < m$ — натуральные числа, то $(m, n)+(m+1, n+1)+(m+2, n+2) \leq 2m-2n+1$. (Как обычно, (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x и y.)

5. В турнире принимает участие 250 команд, каждая играет с каждой один раз дома и один раз на выезде. Можно ли к каждому матчу приставить одного из 10 судей так, чтобы для каждой команды множества судей, которые будут судить у неё дома, и судей, которые будут судить у неё на выезде, не пересекались?

LIV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КАЗАНЬ, 05-11.11.2019

Решения задач олимпиады 6 класса

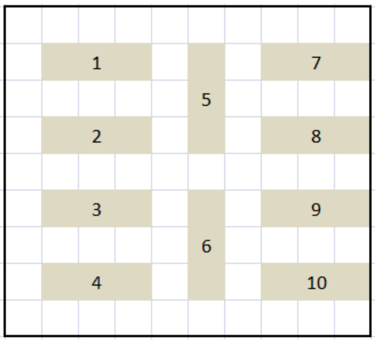
Задача 1. *Ёжик и Медвежонок в 10 утра вышли из своих домов и пошли друг к другу в гости. По пути они встретились, но не заметили друг друга в тумане и пошли дальше. Спустя 6 минут после встречи Ёжик дошёл до дома Медвежонка, а через 18 минут после этого Медвежонок дошёл до домика Ёжика. Во сколько каждый из них обнаружил, что друга нет дома? (Скорость каждого из них постоянна, оба шли одной и той же прямой дорогой.)*

Ответ. Ёжик — в 10.18, Медвежонок — в 10.36. Решение. Пусть скорость Медвежонка — x м/мин, скорость Ёжика — y м/мин, а время, которое они шли до встречи — t мин. Тогда $tx = 6y$ и $ty = 24x$. Поделив первое равенство на второе, получим $\frac{tx}{ty} = \frac{6y}{24x}$, откуда $4x^2 = y^2$ или $y = 2x$. Значит, $t = 12$. То есть Ёжик обнаружил, что друга нет дома, в 10:18, а Медвежонок — в 10:36.

Задача 2. *Произведение десяти последовательных натуральных чисел заканчивается четырьмя нулями. Докажите, что произведение каких-то трёх из этих чисел тоже заканчивается четырьмя нулями.*

Решение. Среди 10 последовательных натуральных чисел ровно два числа кратны 5, причем одно из них четно. Выберем эти два числа a и b. Так как все произведение S кратно 5^4, то произведение ab кратно 5^4 и кратно 2. Также среди 10 последовательных чисел обязательно есть число, кратное 8. Если это не a и не b, то выберем это число c. Тогда abc кратно $2^4 \cdot 5^4$, а значит, оканчивается четырьмя нулями. Если это одно из чисел a или b, то ab уже кратно $2^3 \cdot 5^4$, тогда выберем в качестве третьего числа любое четное из оставшихся и получим требуемое.

Задача 3. *Какое наименьшее количество прямоугольников из трёх клеток можно вырезать из прямоугольника 10×9 клеток таким образом, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата 2×2?*



Ответ. 10. Решение. *Оценка*. Прямоугольник 10×9 можно разбить на 20 непересекающихся квадратов 2×2 и полоску 1×9. Каждая триминошка (прямоугольник из трех клеток) портит не больше двух таких квадратов. Значит, триминошек должно быть хотя бы 10. *Пример* на рисунке справа.

Задача 4. *На столе лежит по 2019 монет каждого из достоинств 1, 2, 4, 8, …, 2^{100} тугриков. Рядом стоит касса с неограниченным числом монет каждого из этих достоинств. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно заменить любую монету на столе набором более мелких монет на ту же сумму, взятых из кассы. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

Ответ. Первый Решение. Приведем стратегию первого игрока. Пусть он первым ходом монету достоинством 2^{100} разменяет на 2 монеты достоинством 1 тугрик и по одной монете каждого из достоинств от 2 до 2^{99} тугриков. Теперь монет каждого из достоинств от 2 до 2^{99} четное число. Далее первый будет играть так, чтобы после любого его хода монет каждого из этих достоинств, больших чем 1 тугрик, становилось четное число. Докажем, что он всегда сможет сделать ход. Перед ходом второго условие на четность выполнялось. Второй своим ходом разменял монету достоинством 2^k, где $1 \le k \le 99$. Перед ходом второго монет достоинства 2^k было четное число, а значит, хотя бы две. Следовательно, после хода второго осталась еще хотя бы одна монета достоинством 2^k. Пусть первый разменяет ее точно тем же набором монет, что и второй. Очевидно, после такой пары ходов условие на четность сохранится.

Итак, первый всегда сможет сделать ход. Игра когда-нибудь закончится, так как количество монет после каждого хода увеличивается, но это количество не может быть больше, чем 2^{101} (иначе, сумма всех монет стала бы больше, чем 2^{101}, а она не меняется). Следовательно, когда-нибудь второй не сможет сделать ход и проиграет.

Задача 5. *Непустое подмножество множества всех натуральных чисел, не превосходящих 2019, назовем **хорошим**, если сумма элементов этого подмножества делится на их количество. Определите, четно или нечетно количество хороших подмножеств*

Ответ. Нечетно. Первое решение. Для каждого хорошего множества N обозначим через $s(N)$ среднее арифметическое чисел в N, то есть отношение суммы его элементов к их количеству. По условию, $s(N)$ — целое число, и легко видеть, что $1 \le s(N) \le 2019$. Заметим, что все одноэлементные множества — хорошие, и их нечетное число. Сопоставим каждому хорошему множеству из хотя бы двух элементов парное ему хорошее множество следующим образом. Если N содержит $s(N)$ в качестве элемента — выкинем его, а если не содержит — добавим. Докажем, что при таких преобразованиях среднее арифметическое элементов множества не изменяется, а значит множество остается хорошим. Действительно, пусть множество N

содержит число $s(N)$ в качестве элемента, и пусть в множестве N a чисел, тогда их сумма равна $a \cdot s(N)$. После выкидывания из множества N числа $s(N)$, чисел остается $a-1$ штук, а их сумма становится равна $a \cdot s(N) - s(N) = (a-1)s(N)$. Значит, среднее арифметическое полученного множества равно $(a-1)s(N)/(a-1) = s(N)$, что и требовалось доказать. Кроме того, одноэлементным парное множество быть не может, ведь иначе оно должно состоять из числа $s(N)$, которое мы только что удалили. Аналогично разбирается случай с добавлением $s(N)$ к множеству N, не содержащему его. Таким образом, все хорошие множества, кроме одноэлементных (которых 2019 штук), разбиваются на пары, а значит всего хороших множеств нечетное число.

Второе решение. Сопоставим каждому множеству N его «симметричное отражение» N' относительно числа 1010: если $N = \{a_1, ..., a_k\}$, то $N' = \{2020-a_1, 2020-a_2, ..., 2020-a_k\}$. Заметим, что если N — хорошее, то и N' хорошее, т.к. $(2020-a_1)+...+(2020-a_k) = 2020k-(a_1+...+a_k)$ — делится на k, если $a_1+... +a_k$ делится на k. Таким образом, все хорошие множества, кроме симметричных самим себе, разбились на пары. Осталось найти четность количества хороших множеств, симметричных самим себе. Заметим, что любое множество, симметричное самому себе, хорошее. Для этого разберем два случая, в зависимости от четности количества элементов: $b_1+...+b_l+(2020-b_1)+...+(2020-b_l) = 2020l$ делится на $2l$, и $b_1+...+b_l+1010+(2020-b_1)+...+(2020-b_l) = 1010(2l+1)$ делится на $2l+1$. Остается посчитать количество всех множеств, симметричных самим себе. Каждое такое множество однозначно задается тем, какие из чисел 1, 2, ..., 1010 в него входят. Для каждого из этих элементов есть два варианта: взять его или нет, значит всего вариантов — $2^{1010}-1$ (единица вычитается, поскольку мы не можем совсем ничего не взять), т.е. нечетное число. Так как все остальные хорошие множества разбились на пары — общее количество хороших множеств тоже нечетно.

Решения задач олимпиады 7 класса

Задача 1. *Петя и Вася проводят матч, состоящий из нескольких партий. Победитель партии получает 4 очка, проигравший — одно очко, а если партия закончилась вничью, то оба получают по 2 очка. По окончании матча у ребят вместе оказалось 170 очков. Мог ли победитель набрать 90 очков?*

Ответ. Не мог. Решение. Разность между количеством очков Пети и Васи после каждой результативной партии меняется на 3, а после ничейной — не меняется. Так как вначале она равна 0, то после любого числа партий должна делиться на 3. А если бы Петя набрал 90 очков, то Вася набрал бы 80, и разность не делилась бы на 3.

Задача 2. *Найдите все четверки простых чисел p, q, r и s, для которых 2p+3pq+4pqr+5pqrs = 2019.*

Ответ. $p = 3$, $q = 11$, $r = 2$, $s = 5$. Решение. $p(2+3q+4qr+5qrs) = 2019 = 3\cdot 673$, где число 673 — простое. Так как значение скобки больше 3, получается, что $p = 3$, а $3q+4qr+5qrs = q(3+4r+5rs) = 671 = 11\cdot 61$. Так как $3+4r+5rs > 11$, имеем $q = 11$, $3+4r+5rs = 61$, откуда $r(4+5s) = 58 = 2\cdot 29$, откуда аналогично предыдущему $r = 2$, а $4+5s = 29$, то есть $s = 5$.

Задача 3. *Набор состоит из двадцати гирь с весами от 11 до 30 грамм, по одной гире каждого веса. За одно взвешивание можно сравнить две гири (узнать, какая тяжелее), после чего вес каждой из них уменьшается на 1 грамм. Если вес гири становится равным нулю, то она исчезает. Можно ли организовать взвешивания так, чтобы в какой-то момент времени стало возможно указать гирю весом в 20 грамм?*

Ответ. Можно. Решение. Разобьем гири на 10 пар и сравним гири в каждой паре. Веса всех гирь уменьшились на 1, а гиря весом 29 г — среди 10 перевесивших при сравнениях. Добавим к 10 перевесившим ещё 6 из остальных, разобьем на 8 пар и сравним гири в каждой паре. Самая тяжелая из восьми перевесивших имеет вес 28 г. Проделав описанную процедуру еще трижды, получим сначала 4 гири, самая тяжелая из которых весит 27 г, потом две, самая тяжелая из которых весит 26 г, и, наконец, одну гирю, весящую 25 г. Взвесив ее пять раз с любыми из оставшихся гирь, получим гирю весом 20 г.

Задача 4. *Дано нечетное натуральное число n и клетчатый квадрат со стороной n клеточек. Некоторые стороны клеточек, составляющих квадрат, окрашены в красный цвет, причем каждая клеточка имеет по крайней мере две красные стороны. Какое наименьшее количество отрезков могло быть покрашено?*

Ответ. n^2+1. Решение. *Оценка*. Покрасим клетки в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. Тогда черных клеток на одну больше, чем белых, то есть $(n^2+1)/2$. Так как каждый красный отрезок является стороной ровно одной черной клетки, этих отрезков должно быть хотя бы n^2+1. *Пример*. Пусть $n = 2m+1$. Разобьем квадрат на «рамки» шириной в одну клетку: первая рамка — из клеток, примыкающих к сторонам квадрата, вторая — из оставшихся клеток, примыкающих к первой рамке и т.д. $(m+1)$-ой рамкой будет центральная клетка квадрата. В каждой рамке, кроме $(m+1)$-ой, покрасим все отрезки, соединяющие внутреннюю ее границу с внешней, а у центральной клетки покрасим любые две стороны. Тогда внутри m-ой рамки будет покрашено 8 отрезков, внутри $(m–1)$-ой — 16 отрезков, …, внутри первой — $4(n–1)$ отрезков. Нетрудно проверить, что у каждой клетки покрашено не меньше двух сторон, а всего красных сторон — $2+8\cdot(1+2+3+\ldots+(n–1)/2) = (n–1)(n+1)–2 = n^2+1$.

Задача 5. *Докажите, что если m и n < m — натуральные числа, то (m, n)+(m+1, n+1)+(m+2, n+2) ≤ 2m–2n+1. (Как обычно, (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x и y.)*

Решение. Наибольший общий делитель чисел x и y равен наибольшему общему делителю чисел x и $x–y$. Поэтому неравенство можно переписать в виде $(m, m-n)+(m+1, m-n)+(m+2, m-n) \le 2m-2n+1$. Все три слагаемых в левой части — делители $m–n$. Если все они не превосходят $(m–n)/2$, их сумма не больше $\frac{3}{2}(m-n) < 2(m-n)$. Иначе одно из этих чисел равно $m–n$. Но если одно из чисел m, $m+1$, $m+2$ делится на $m–n$, то ещё одно из них отличается на 1 и потому взаимно просто с $m–n$, а другое — не более чем на 2, и его наибольший общий делитель с $m–n$ не превосходит 2. Поэтому сумма в левой части не превосходит $m–n+3$, что не больше $2m–2n+1$ при $m–n > 1$. Если же $m–n = 1$, то обе части неравенства равны 3.

Решения задач олимпиады 8 класса

Задача 1. *Про действительные числа x, y и z известно, что* $2x^2+y^2+z^2 = 2x(y+z)$. *Докажите, что тогда и* $x^2+y^2+2z^2 = 2(x+y)z$.

Решение. $2x^2+y^2+z^2 = 2x(y+z) \Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(x^2-2xz+z^2) = (x-y)^2+(x-z)^2 = 0$, откуда $x = y = z$. Осталось заметить, что тогда $x^2+y^2+2z^2 = 2(x+y)z = 4x^2$.

Задача 2. *В квадрате ABCD на стороне CD выбрана точка P. Точка Q на стороне AD такова, что BQ — биссектриса угла PBA. Из точки P опущен перпендикуляр PH на прямую BQ. Докажите, что BQ = 2PH.*

Решение. Отложим на луче *PH* за точку *H* такую точку *R*, что *HR* = *HP*. Достаточно доказать, что *BQ* = *RP*. Точка *R* симметрична точке *P* относительно биссектрисы *BQ* угла *PBA*, поэтому *R* лежит на прямой *BA*. Опустим из точки *P* перпендикуляр *PK* на *AB*. Для решения задачи достаточно доказать равенство прямоугольных треугольников *PKR* и *BAQ*. Так как *PK* = *BA*, достаточно доказать, что $\angle KPR = \angle ABQ$. И в самом деле, если *KP* и *BQ* пересекаются в точке *Z*, то в прямоугольных треугольниках *HPZ* и *KBZ* углы *HZP* и *KZB* равны как вертикальные, следовательно, равны и вторые острые углы *HPZ* и *KBZ*, совпадающие с углами *KPR* и *ABQ* соответственно.

Задача 3. *Два банкира играют в игру. Изначально на столе лежат по одной купюре каждого из существующих в стране достоинств, а именно 1, 2, 5, 10, 50, 100, 500, 1000 и 5000 тугриков. За один ход один банкир разменивает любую купюру на любые меньшие на ту же сумму. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?*

Ответ. Первый. Решение. Первым ходом первый разменивает купюру в 5000 тугриков так, чтобы получилось по одной купюре в 2, 5, 10, 50, 100, 500 и 1000 тугриков, а остальную сумму набирает купюрами по 1 тугрику. После этого купюр каждого достоинства, большего 1, становится четное число, и первый банкир может каждый раз повторять ход соперника, восстанавливая четность. Поскольку у первого всегда будет ход, а число ходов, очевидно, конечно, второй в конце концов не сможет сделать ход.

Задача 4. *Докажите, что если m и n < m — натуральные числа, то* $(m, n)+(m+1, n+1)+(m+2, n+2) \le 2m-2n+1$. *(Как обычно, (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x и y.)*

Решение. Наибольший общий делитель чисел *x* и *y* равен наибольшему общему делителю чисел *x* и *x–y*. Поэтому неравенство можно переписать в виде $(m, m-n)+(m+1, m-n)+(m+2, m-n) \le 2m-2n+1$. Все три слагаемых в левой части — делители *m–n*. Если все они не превосходят (*m–n*)/2, их сумма не больше $\frac{3}{2}(m-n) < 2(m-n)$. Иначе одно из этих чисел равно *m–n*. Но если одно из чисел *m*, *m*+1, *m*+2 делится на *m–n*, то ещё одно из них отличается на 1 и потому взаимно просто с *m–n*, а другое — не более чем на 2, и его наибольший общий делитель с *m–n* не превосходит 2. Поэтому сумма в левой части не превосходит *m–n*+3, что не больше 2*m*–2*n*+1 при *m–n* > 1. Если же *m–n* = 1, то обе части неравенства равны 3.

Задача 5. *В турнире принимает участие 250 команд, каждая играет с каждой один раз дома и один раз на выезде. Можно ли к каждому матчу приставить одного из 10 судей так, чтобы для каждой команды множества судей, которые будут судить у неё дома, и судей, которые будут судить у неё на выезде, не пересекались?*

Ответ. Можно. Решение. Сопоставим каждой команде свою пятерку судей. Так как $C_{10}^5 = 252 > 250$, такое сопоставление возможно. В качестве судьи матча между командами *A* и *B*, где для *A* матч домашний, выберем любого судью, сопоставленного команде *A*, но не сопоставленного команде *B*. Тогда у каждой команды домашние матчи судят только пять судей, которые ей сопоставлены, а выездные матчи — только пять судей, которые ей не сопоставлены.