МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Точка D является серединой основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка E на стороне AC такова, что $\angle CDE = 60°$, точка M — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AME = \angle BMD$.

2. Пусть $n \geq m \geq 1$ — натуральные числа, $x \geq y \geq 0$ — действительные числа такие, что $x^{n+1}+y^{n+1} \leq x^m-y^m$. Докажите, что $x^n+y^n \leq 1$.

3. Шестиугольник вписан в правильный шестиугольник (по вершине на стороне). Докажите, что его площадь не меньше половины площади правильного.

4. Для каждого из 100^3 упорядоченных наборов натуральных чисел (a, b, c), не превосходящих 100, Саша написал в тетрадке число

$$\frac{ab(3a+c)}{2^{a+b+c}(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Докажите, что сумма всех 100^3 выписанных Сашей чисел меньше 1/2.

5. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Лучи AB и DC пересекаются в точке Q, а лучи AD и BC — в точке R. На отрезке QR отмечены точки X и Y так, что $\angle BXD = \angle BYD = 90°$. Докажите, что точка пересечения диагоналей четырехугольника $BXYD$ лежит на биссектрисе угла XPY.

6. В связном графе на $n \geq 4$ вершинах любые две вершины, имеющие общего соседа, имеют хотя бы двух общих соседей. Какое наименьшее число рёбер может быть в этом графе?

7. На бельевой верёвке висит 2019 футболок, прикрепленных к ней $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ прищепками (все a_i — натуральные числа, не превосходящие 3, перечисленные в том порядке, в котором висят футболки; каждая прищепка прикрепляет ровно одну футболку). Вася хочет снять все футболки по порядку, за один раз снимая все прищепки, удерживающие одну или несколько футболок, так, чтобы всего снять 2, 3, или 4 прищепки. Сколько существует последовательностей $a_1, a_2, ..., a_{2019}$, для которых Васе это не удастся?

8. Число $M = 3^3+1$ — совершенное (то есть сумма всех натуральных делителей M равна $2M$). Докажите, что ни при каком чётном n число n^n+1 не является совершенным.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА. ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. Точка D является серединой основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка E на стороне AC такова, что $\angle CDE = 60°$, точка M — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AME = \angle BMD$.

2. Решите уравнение $(1+x+x^2)(1+x+x^2+...+x^{4038}) = (1+x+x^2+...+x^{2020})^2$.

3. Шестиугольник вписан в правильный шестиугольник (по вершине на стороне). Докажите, что его площадь не меньше половины площади правильного.

4. Для каждого из 100^3 упорядоченных наборов натуральных чисел (a, b, c), не превосходящих 100, Саша написал в тетрадке число

$$\frac{ab(3a+c)}{2^{a+b+c}(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Докажите, что сумма всех 100^3 выписанных Сашей чисел меньше 1/2.

5. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. На продолжении отрезка BC за точку B выбрана точка E так, что $\angle DME = 90°$. Лучи DE и NB пересекаются в точке F. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.

6. В связном графе на $n \geq 4$ вершинах любые две вершины, имеющие общего соседа, имеют хотя бы двух общих соседей. Какое наименьшее число рёбер может быть в этом графе?

7. На бельевой верёвке висит 2019 футболок, прикрепленных к ней $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ прищепками (все a_i — натуральные числа, не превосходящие 3, перечисленные в том порядке, в котором висят футболки; каждая прищепка прикрепляет ровно одну футболку). Вася хочет снять все футболки по порядку, за один раз снимая все прищепки, удерживающие одну или несколько футболок, так, чтобы всего снять 2, 3, или 4 прищепки. Сколько существует последовательностей $a_1, a_2, ..., a_{2019}$, для которых Васе это не удастся?

8. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b^3$ делится на $a^2+3ab+3b^2-1$. Докажите, что $a^2+3ab+3b^2-1$ делится на куб некоторого целого числа, большего 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Точка D является серединой основания BC равнобедренного треугольника ABC. Точка E на стороне AC такова, что $\angle CDE = 60°$, точка M — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AME = \angle BMD$.

2. Решите уравнение $(1+x+x^2)(1+x+x^2+...+x^{4038}) = (1+x+x^2+...+x^{2020})^2$.

3. Пусть $A_1B_1C_1D_1E_1$ — правильный пятиугольник, т.е. пятиугольник, у которого равны все углы и все стороны. Для каждого $2 \le n \le 11$ обозначим через $A_nB_nC_nD_nE_n$ пятиугольник, вершинами которого являются середины сторон пятиугольника $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}E_{n-1}$. Каждая из 55 вершин 11 пятиугольников покрашена в один из двух цветов: синий или красный. Докажите, что среди этих 55 вершин можно выбрать четыре вершины одного цвета, лежащие в вершинах равнобокой трапеции.

4. Говорят, что последовательность a, b, c является *арифметической прогрессией,* если $c-b = b-a$. Саша написал на доске последовательность x, y, z. Илья посчитал, на какое положительное число ему надо изменить (увеличить или уменьшить) y, чтобы полученная последовательность была арифметической прогрессией, а Анжелика — на какое положительное число надо для этого изменить z. Докажите, что число Анжелики в два раза больше числа Ильи.

5. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. На продолжении отрезка BC за точку B выбрана точка E так, что $\angle DME = 90°$. Лучи DE и NB пересекаются в точке F. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.

6. В связном графе на $n \ge 4$ вершинах любые две вершины, имеющие общего соседа, имеют хотя бы двух общих соседей. Какое наименьшее число рёбер может быть в этом графе?

7. На бельевой верёвке висит 2019 футболок, прикрепленных к ней $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ прищепками (все a_i — натуральные числа, не превосходящие 3, перечисленные в том порядке, в котором висят футболки; каждая прищепка прикрепляет ровно одну футболку). Вася хочет снять все футболки по порядку, за один раз снимая все прищепки, удерживающие одну или несколько футболок, так, чтобы всего снять 2, 3, или 4 прищепки. Сколько существует последовательностей $a_1, a_2, ..., a_{2019}$, для которых Васе это не удастся?

8. Натуральные числа a и b таковы, что $a+b^3$ делится на $a^2+3ab+3b^2-1$. Докажите, что $a^2+3ab+3b^2-1$ делится на куб некоторого целого числа, большего 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC таким образом, что P ближе к B, чем Q, и $2\angle PAQ = \angle BAC$. На прямых AB и AC отмечены точки X и Y соответственно так, что $\angle XPA = \angle APQ$ и $\angle YQA = \angle AQP$. Докажите, что $PQ = PX+QY$.

2. Решите уравнение $(1+x+x^2)(1+x+x^2+...+x^{4038}) = (1+x+x^2+...+x^{2020})^2$.

3. Пусть $A_1B_1C_1D_1E_1$ — правильный пятиугольник, т.е. пятиугольник, у которого равны все углы и все стороны. Для каждого $2 \le n \le 11$ обозначим через $A_nB_nC_nD_nE_n$ пятиугольник, вершинами которого являются середины сторон пятиугольника $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}E_{n-1}$. Каждая из 55 вершин 11 пятиугольников покрашена в один из двух цветов: синий или красный. Докажите, что среди этих 55 вершин можно выбрать четыре вершины одного цвета, лежащие в вершинах равнобокой трапеции.

4. Говорят, что последовательность a, b, c является *арифметической прогрессией,* если $c–b = b–a$. Саша написал на доске последовательность x, y, z. Илья посчитал, на какое положительное число ему надо изменить (увеличить или уменьшить) y, чтобы полученная последовательность была арифметической прогрессией, а Анжелика — на какое положительное число надо для этого изменить z. Докажите, что число Анжелики в два раза больше числа Ильи.

5. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. На продолжении отрезка BC за точку B выбрана точка E так, что $\angle DME = 90°$. Лучи DE и NB пересекаются в точке F. Докажите, что треугольник ADF — равнобедренный.

6. Дан клетчатый квадрат $2^n\times2^n$, из которого вырезана одна клетка. Петя хочет разрезать его на несколько прямоугольников, площадь каждого из которых является степенью двойки с целым неотрицательным показателем. Какого наименьшего количества прямоугольников ему гарантированно хватит, где бы ни находилась вырезанная клетка?

7. На бельевой верёвке висит 2019 футболок, прикрепленных к ней a_1, a_2, ..., a_{2019} прищепками (все a_i — натуральные числа, не превосходящие 3, перечисленные в том порядке, в котором висят футболки; каждая прищепка прикрепляет ровно одну футболку). Вася хочет снять все футболки по порядку, за один раз снимая все прищепки, удерживающие одну или несколько футболок, так, чтобы всего снять 2, 3, или 4 прищепки. Сколько существует последовательностей a_1, a_2, ..., a_{2019}, для которых Васе это не удастся?

8. Назовём раскраску всех натуральных делителей натурального числа n не более чем в 4 цвета *няшной,* если для любых двух его делителей $a > b$ таких, что a не делится на b, делители a, b и НОД(a, b) покрашены в три разных цвета. Какое наибольшее количество няшных раскрасок может быть у числа, не являющегося степенью простого?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. Дано натуральное число n. Число n^2+n+1 представили в виде произведения натуральных чисел a и b. Докажите, что $(a-b)^2 \geq 4n$.

2. В компании n человек. Известно, что для любых двух людей из этой компании найдется цепочка знакомых между ними (т. е. граф знакомств связен). При этом у любых двух, у которых есть общий знакомый, есть еще один общий знакомый. Какое наименьшее количество пар знакомых может быть в этой компании?

3. Дана пустая таблица 1000×1000. Петя и Вася играют в такую игру. Они по очереди, начиная с Пети, заполняют таблицу цифрами. За ход игрок выбирает один столбец и записывает в самую верхнюю его пустую клетку какую-нибудь ненулевую цифру на свой выбор. После заполнения таблицы в каждой строке и в каждом столбце будет по одному тысячезначному числу. Петя выигрывает, если хотя бы два из этих 2000 чисел являются простыми, в противном случае выигрывает Вася. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

4. Клетки бесконечной в обе стороны клетчатой полоски пронумерованы целыми числами (..., –2, –1, 0, 1, 2, ...). Фишка стартует в клетке 0. Каждым ходом она прыгает на любую другую клетку (оставаться на месте нельзя, но можно прыгать на клетку, которую фишка посещала ранее). Фишка останавливается, когда сумма длин всех ее прыжков равна 2019. Найдите все целые n, для которых у фишки есть четное число способов в результате оказаться в клетке с числом n.

5. Отец купил на рынке корзину слив. Он раздал эти сливы своим сыновьям следующим образом: первому сыну он дал две сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем второму сыну он дал 4 сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем третьему сыну он дал 6 слив и $1/n$ часть оставшихся, и т.д. Все оставшиеся в итоге сливы отец забрал себе. Оказалось, что всем сыновьям и отцу досталось одинаковое натуральное число слив. Найдите все натуральные числа n, при которых такое могло случиться, если известно, что у отца хотя бы два сына.

6. Для каждого натурального числа n нашли наибольший его делитель d такой, что $d < n/d$. Докажите, что существует хотя бы 2019 таких чисел n, для которых $n/d-d = 2019$.

7. Для любых чисел x, y и z докажите неравенство

$$(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2+\frac{3}{4} \geq x+y+z.$$

8. В остроугольном треугольнике ABC высота AH образует с биссектрисой BD угол в 60° и делит ее в отношении 2:1 считая от вершины. Найдите углы треугольника ABC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА. ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА, ВТОРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. Найдите все натуральные числа n и простые числа p, для которых число p^2+7^n — квадрат натурального числа.

2. Вдоль круговой трассы длиной 1500 м стоят 1500 спортсменов таким образом, что расстояние между любыми двумя соседними спортсменами равно 1 м. Сколькими способами можно разбить спортсменов на 750 пар так, чтобы расстояние вдоль трассы между любыми двумя людьми из одной пары равнялось 90 метрам? Все расстояния в этой задаче считаются вдоль трассы.

3. Дана пустая таблица 1000×1000. Петя и Вася играют в такую игру. Они по очереди, начиная с Пети, заполняют таблицу цифрами. За ход игрок выбирает один столбец и записывает в самую верхнюю его пустую клетку какую-нибудь ненулевую цифру на свой выбор. После заполнения таблицы в каждой строке и в каждом столбце будет по одному тысячезначному числу. Петя выигрывает, если хотя бы два из этих 2000 чисел являются простыми, в противном случае выигрывает Вася. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

4. На бельевой верёвке висит 2019 футболок, прикрепленных к ней $a_1, a_2, ..., a_{2019}$ прищепками (все a_i — натуральные числа, не превосходящие 3, перечисленные в том порядке, в котором висят футболки; каждая прищепка прикрепляет ровно одну футболку). Вася хочет снять все футболки по порядку, за один раз снимая все прищепки, удерживающие одну или несколько футболок. Вася за один ход может снять 2, 3, или 4 прищепки (после этого он складывает эти прищепки в карман). Найдите все последовательности $a_1, a_2, ..., a_{2019}$, для которых Васе это не удастся.

5. Отец купил на рынке корзину слив. Он раздал эти сливы своим сыновьям следующим образом: первому сыну он дал две сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем второму сыну он дал 4 сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем третьему сыну он дал 6 слив и $1/n$ часть оставшихся, и т.д. Все оставшиеся в итоге сливы отец забрал себе. Оказалось, что всем сыновьям и отцу досталось одинаковое натуральное число слив. Найдите все натуральные числа n, при которых такое могло случиться, если известно, что у отца хотя бы два сына.

6. Для каждого натурального числа n нашли наибольший его делитель d такой, что $d < n/d$. Докажите, что существует хотя бы 2019 таких чисел n, для которых $n/d-d = 2019$.

7. Для любых чисел x, y и z докажите неравенство $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2+\frac{3}{4}\geq x+y+z$.

8. В остроугольном треугольнике ABC высота AH образует с биссектрисой BD угол в 60° и делит ее в отношении 2:1 считая от вершины. Найдите углы треугольника ABC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-12 МЕСТА

1. Найдите все натуральные числа n и простые числа p, для которых число p^2+7^n — квадрат натурального числа.

2. Вдоль круговой трассы длиной 1500м стоят 1500 спортсменов таким образом, что расстояние между любыми двумя соседними спортсменами равно 1 м. Сколькими способами можно разбить спортсменов на 750 пар так, чтобы расстояние вдоль трассы между любыми двумя людьми из одной пары равнялось 90 метрам? Все расстояния в этой задаче считаются вдоль трассы.

3. Дана пустая таблица 1000×1000. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди начиная с Пети заполняют таблицу цифрами. За ход игрок выбирает один столбец и записывает в самую верхнюю его пустую клетку какую-нибудь ненулевую цифру на свой выбор. После заполнения таблицы в каждой строке и в каждом столбце будет по одному тысячезначному числу. Петя выигрывает, если хотя бы три из этих 2000 чисел являются простыми, в противном случае выигрывает Вася. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

4. На бельевой верёвке висит 2019 футболок, прикрепленных к ней $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ прищепками (все a_i — натуральные числа, не превосходящие 3, перечисленные в том порядке, в котором висят футболки; каждая прищепка прикрепляет ровно одну футболку). Вася хочет снять все футболки по порядку, за один раз снимая все прищепки, удерживающие одну или несколько футболок. Вася за один ход может снять 2, 3, или 4 прищепки (после этого он складывает эти прищепки в карман). Найдите все последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$, для которых Васе это не удастся.

5. Отец купил на рынке корзину слив. Он раздал эти сливы своим сыновьям следующим образом: первому сыну он дал две сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем второму сыну он дал 4 сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем третьему сыну он дал 6 слив и $1/n$ часть оставшихся, и т.д. Все оставшиеся в итоге сливы отец забрал себе. Оказалось, что всем сыновьям и отцу досталось одинаковое натуральное число слив. Найдите все натуральные числа n, при которых такое могло случиться, если известно, что у отца хотя бы два сына.

6. Сколько мальчиков в классе, если их средний рост на 6,2 см больше среднего роста девочек и на 2,6 см больше среднего по классу? (Известно, что в классе не может быть больше 50 учеников.)

7. Найдите все вещественные числа, удовлетворяющие равенствам $a+b = 8$ и $a^2+b^2+c^2 = 32$.

8. В остроугольном треугольнике ABC $\angle BAC = 80°$, а высоты AA' и BB' пересекаются в точке H. Если $\angle AHB = 126°$, то какая сторона наименьшая, а какая наибольшая в треугольнике ABC?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Клетки бесконечной в обе стороны клетчатой полоски пронумерованы целыми числами (..., –2, –1, 0, 1, 2, ...). Белка стартует в клетке 0. Каждым ходом она прыгает на любую другую клетку (оставаться на месте нельзя, но можно прыгать на клетку, которую Белка посещала ранее). Когда сумма длин всех прыжков Белки составит 2019 клеток, Белка остановится. Четно или нечетно число способов, при которых Белка в результате окажется в клетке с числом 1001.

2. В квадратной таблице 15×15 расставлено несколько фишек таким образом, что в любом прямоугольнике 2×3 (или 3×2) стоит хотя бы одна фишка, и в таблице есть хотя бы одно свободное поле. Верно ли, что обязательно можно так переместить одну из фишек на свободное поле, чтобы это свойство сохранилось?

3. Сережа некоторые натуральные числа считает *милыми*, а все остальные натуральные числа ему не нравятся. Дима может задавать Сереже вопросы вида «Какова сумма всех милых делителей числа n?», где n — натуральное число, которое Дима каждый раз выбирает сам. За какое наименьшее число вопросов Дима может гарантированно определить, является ли число 6^{100} милым или нет?

4. Отец купил на рынке корзину слив. Он раздал эти сливы своим сыновьям следующим образом: первому сыну он дал две сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем второму сыну он дал 4 сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем третьему сыну он дал 6 слив и $1/n$ часть оставшихся, и т.д. Все оставшиеся в итоге сливы отец забрал себе. Оказалось, что всем сыновьям и отцу досталось одинаковое натуральное число слив. Найдите все возможные значения n, при которых такое могло случиться, если известно, что у отца хотя бы два сына.

5. Дана пустая таблица 100×100. Петя и Вася играют в такую игру. Они по очереди начиная с Пети заполняют таблицу цифрами. За ход игрок выбирает один столбец и записывает в самую верхнюю его пустую клетку какую-нибудь цифру на свой выбор (но нельзя писать ноль в клетках верхней строки и левого столбца). После заполнения таблицы в каждой строке и в каждом столбце будет по одному 100-значному числу. Петя выигрывает, если хотя бы два из этих 200 чисел являются простыми, в противном случае выигрывает Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

6. В 2050 году чемпионат мира по футболу состоялся по новым правилам. Победившая в матче команда получала 5 очков, а проигравшая команда очков не получала. В случае нулевой ничьей обе команды получали по 1 очку, а если ничья результативная, то по 2 очка. В финале 5 лучших команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате было забито всего 6 голов. Могло ли оказаться так, что количества очков, набранных командами в финале, образовывали 5 последовательных натуральных чисел?

7. Для каждого натурального числа n нашли наибольший его делитель d такой, что $d < n/d$. Докажите, что существует хотя бы 2019 таких чисел n, для которых $n/d–d = 2019$.

8. Вдоль круговой трассы длиной 1500м стоят 1500 спортсменов таким образом, что расстояние между любыми двумя соседними спортсменами равно 1м. Сколькими способами можно разбить спортсменов на 750 пар так, чтобы расстояние вдоль трассы между любыми двумя людьми из одной пары равнялось 90 метрам? Все расстояния в этой задаче считаются вдоль трассы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

ГРУППА «СТАРТ». ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В городе 4 музея. От любого до любого можно добраться на такси за фиксированную цену (цена поездки в противоположных направлениях может отличаться). Выполняется условие: проехать от одного музея до другого напрямую дешевле, чем заезжая по дороге в другие музеи. Вася объехал все 4 музея, вернувшись в исходный, и заплатил за поездки суммарно x рублей. Докажите, что объехать их в обратном порядке ему будет стоить не больше $3x$ рублей.

2. В квадратной таблице 200×200 расставлено несколько фишек таким образом, что в любом квадрате 3×3 стоит хотя бы одна фишка, и в таблице есть хотя бы одно свободное поле. Верно ли, что обязательно можно так переместить одну из фишек на свободное поле, чтобы это свойство сохранилось?

3. Сережа некоторые натуральные числа считает *милыми*, а все остальные натуральные числа ему не нравятся. Дима может задавать Сереже вопросы вида «Какова сумма всех милых делителей числа n?», где n — натуральное число, которое Дима каждый раз выбирает сам. За какое наименьшее число вопросов Дима может гарантированно определить, является ли число 6^{100} милым или нет?

4. Отец купил на рынке корзину слив. Он раздал эти сливы трем своим сыновьям следующим образом: первому сыну он дал две сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем второму сыну он дал 4 сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем третьему сыну он дал 6 слив и $1/n$ часть оставшихся. Все оставшиеся в итоге сливы отец забрал себе. Оказалось, что всем сыновьям и отцу досталось одинаковое натуральное число слив. Найдите все возможные значения n, при которых такое могло случиться.

5. Дана пустая таблица 100×100. Петя и Вася играют в такую игру. Они по очереди, начиная с Пети, заполняют таблицу цифрами. За ход игрок выбирает один столбец и записывают в самую верхнюю его пустую клетку какую-нибудь цифру на свой выбор (но нельзя писать ноль в клетках верхней строки и левого столбца). После заполнения таблицы в каждой строке и в каждом столбце будет по одному 100-значному числу. Петя выигрывает, если хотя бы три из этих 200 чисел являются простыми, в противном случае выигрывает Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

6. В 2050 году чемпионат мира по футболу состоялся по новым правилам. Победившая в матче команда получала 5 очков, а проигравшая команда очков не получала. В случае нулевой ничьей обе команды получали по 1 очку, а если ничья результативная, то по 2 очка. В финале 5 лучших команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате было забито всего 6 голов. Могло ли оказаться так, что количества очков, набранных командами в финале, образовывали 5 последовательных натуральных чисел?

7. Для каждого натурального числа n нашли наибольший его делитель d такой, что $d < n/d$. Докажите, что существует хотя бы 2019 таких чисел n, для которых $n/d-d = 2019$.

8. Вдоль круговой трассы длиной 1500м стоят 1500 спортсменов таким образом, что расстояние между любыми двумя соседними спортсменами равно 1м. Сколькими способами можно разбить спортсменов на 750 пар так, чтобы расстояние вдоль трассы между любыми двумя людьми из одной пары равнялось 90 метрам? Все расстояния в этой задаче считаются вдоль трассы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В городе 3 музея. От любого до любого можно добраться на такси за фиксированную плату (цена поездки в противоположных направлениях может отличаться). Выполняется условие: проехать от одного музея до другого напрямую дешевле, чем заезжая по дороге в другой музей. Вася объехал все 3 музея, вернувшись в исходный, и заплатил за поездки суммарно x рублей. Докажите, что объехать их в обратном порядке ему будет стоить не больше $2x$ рублей.

2. В квадратной таблице 200×200 расставлено несколько фишек таким образом, что в любом квадрате 3×3 стоит хотя бы одна фишка, и в таблице есть хотя бы одно свободное поле. Верно ли, что обязательно можно так переместить одну из фишек на свободное поле, чтобы это свойство сохранилось?

3. Белоснежка купила яблоки, поровну на каждого из 7 гномов. Она собирается ждать гномов дома к ужину, и хочет дать всем пришедшим вовремя гномам как можно больше яблок, но обязательно поровну, а опоздавшим — отдаст остальные. Известно, что если опоздает один гном, то ему достанется 5 яблок, если два гнома, то им достанется по 2 яблока каждому, а если три гнома опоздает, то они получат по одному яблоку. Какое наименьшее число яблок могла купить Белоснежка?

4. В 2050 году чемпионат мира по футболу состоялся по новым правилам. Победившая в матче команда получала 5 очков, а проигравшая команда очков не получала. В случае нулевой ничьей обе команды получали по 1 очку, а если ничья результативная, то по 2 очка. В финале 5 лучших команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате было забито всего 6 голов. Могло ли оказаться так, что количества очков, набранных командами в финале, образовывали 5 последовательных натуральных чисел?

5. Сколько мальчиков в классе, если их средний рост на 6,2 см больше среднего роста девочек и на 2,6 см больше среднего по классу? (Известно, что в классе не может быть больше 50 учеников.)

6. Дана пустая таблица 100×100. Петя и Вася играют в следующую игру. Они по очереди, начиная с Пети, заполняют таблицу цифрами. За ход игрок записывает в любую пустую клетку какую-нибудь ненулевую цифру на свой выбор. После заполнения таблицы в каждой строке и в каждом столбце будет по одному 100-значному числу. Петя выигрывает, если из этих 200 чисел больше 50 чисел являются простыми, в противном случае выигрывает Вася. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Для каждого натурального числа n нашли наибольший его делитель d такой, что $d < n/d$. Докажите, что существует хотя бы 2019 таких чисел n, для которых $n/d-d = 2019$.

8. Вдоль круговой трассы длиной 400м стоят 40 спортсменов таким образом, что расстояние между любыми двумя соседними спортсменами равно 10м. Сколькими способами можно разбить спортсменов на 20 пар так, чтобы расстояние вдоль трассы между любыми двумя людьми из одной пары равнялось 100 метрам? Все расстояния в этой задаче считаются вдоль трассы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.11.2019

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В городе 3 музея. От любого до любого можно добраться на такси за фиксированную плату (цена поездки в противоположных направлениях может отличаться). Выполняется условие: проехать от одного музея до другого напрямую дешевле, чем заезжая по дороге в другой музей. Вася объехал все 3 музея, вернувшись в исходный, и заплатил за поездки суммарно x рублей. Докажите, что объехать их в обратном порядке ему будет стоить не больше $2x$ рублей.

2. На рисунке снизу изображён план минного поля. Из 36 его квадратов некоторые заминированы, остальные свободны от мин. Все числа на рисунке вписаны в свободные от мин квадраты и показывают, сколько у этих квадратов заминированных соседей (соседними считаются квадраты, примыкающие друг к другу по вертикали, горизонтали или диагонали). Сколько всего может быть заминированных полей? Найдите все возможные значения.

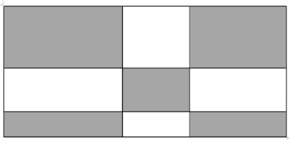
		1	2		2
	1	1	3		
	2	1	3		
					1
		1			

3. В 2050 году чемпионат мира по футболу состоялся по новым правилам. Победившая в матче команда получала 5 очков, а проигравшая команда очков не получала. В случае нулевой ничьей обе команды получали по 1 очку, а если ничья результативная, то по 2 очка. В финале 5 лучших команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате было забито всего 6 голов. Могло ли оказаться так, что количества очков, набранных командами в финале, образовывали 5 последовательных натуральных чисел?

4. Отец купил на рынке корзину слив. Он раздал эти сливы двум своим сыновьям следующим образом: первому сыну он дал две сливы и $1/n$ часть оставшихся, затем второму сыну он дал 4 сливы и $1/n$ часть оставшихся. Все оставшиеся в итоге сливы отец забрал себе. Оказалось, что всем сыновьям и отцу досталось одинаковое натуральное число слив. Найдите все возможные значения n, при которых такое могло случиться.

5. Сколько мальчиков в классе, если их средний рост на 6,2 см больше среднего роста девочек и на 2,6 см больше среднего по классу? (Известно, что в классе не может быть больше 50 учеников.)

6. Прямоугольник периметра 20 разделён на 9 прямоугольников, которые раскрашены в шахматном порядке (см. рис.) Сумма периметров чёрных прямоугольников оказалась равна 34. Найдите сумму периметров белых прямоугольников.



7. В одной из клеток клетчатого поля 4×10 находится Васин корабль. Петя за один ход может обстрелять любые три клетки, после чего Вася, если корабль не подбит, перемещает корабль в соседнюю по стороне клетку (быть может, только что обстрелянную). Может ли Петя гарантированно подбить корабль?

8. Вдоль круговой велодорожки длиной 1200 м стоят 12 столбов таким образом, что расстояние между любыми двумя соседними столбами равно 100 м. Сколькими способами можно разбить столбы на 6 пар так, чтобы расстояние между любыми двумя столбами из одной пары равнялось 300 метрам? Все расстояния в этой задаче считаются вдоль велодорожки.