МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На книжной полке стоят 2020 томов энциклопедии, пронумерованные числами от 1 до 2020. Библиотекарь смотрит на две самые левые книги и если левее стоит книга с бóльшим номером, меняет их местами. Затем он проделывает то же самое с книгами, стоящими на втором и третьем слева местах, третьем и четвертом и т.д. Библиотекарь 6 раз прошел прошел от левого края полки до правого, действуя таким образом. Определите, сколько существует изначальных расстановок томов, для которых после 6 таких проходов тома окажутся упорядочены в порядке возрастания номеров.

2. Натуральные числа a, b, c, d, m удовлетворяют условию

$$\text{НОД}(am+b, cm+d) = 2020.$$

Какие натуральные значения может принимать выражение $ad-bc$?

3. Дано простое число $p>2$. Докажите, что среди любых $p+1$ целых чисел можно выбрать $p-1$ число a_1, a_2, $\ldots$, a_{p-1} так, чтобы $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+(p-1)a_{p-1}$ делилось на p.

4. Найдите все натуральные m и n, для которых $(n^2+1)(m^2+1)+45 = 2(2n+1)(3m+1)$.

5. В куче N камней. Аня и Боря по очереди убирают камни из кучи, начинает Аня. За один ход можно убрать либо чётное число камней, большее нуля, но не более половины кучи, либо нечётное число камней, но не менее половины кучи. Побеждает тот, кто уберет последний камень. При каком наименьшем $N \geqslant 100\,000$ Боря может выиграть независимо от действий Ани?

6. Назовем раскраску клеток доски 8×8 в черный и белый цвета *хорошей*, если в ней четное число черных клеток. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и в обеих меняет цвет. Для каждой хорошей раскраски Сережа посчитал, за какое наименьшее число ходов можно из этой раскраски получить раскраску, в которой все клетки черные. Чему равно самое большое из найденных Сережей чисел?

7. Пусть x и y — произвольные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^4+y^4-2x^2y-2xy^2+2x^2+2y^2-2x-2y$?

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Наружу треугольника ABE построены квадраты $ENMA$ и $EBQP$. Докажите, что $ND=PC$ и $ND\perp PC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На книжной полке стоят $n \geqslant 3$ томов энциклопедии, пронумерованные числами от 1 до n. Библиотекарь смотрит на две самые левые книги и если левее стоит книга с бóльшим номером, меняет их местами. Затем он проделывает то же самое с книгами, стоящими на втором и третьем слева местах, третьем и четвертом и т.д. Действуя таким образом, библиотекарь прошел от левого края полки до правого. Определите, сколько существует изначальных расстановок томов, для которых после этого тома окажутся упорядочены в порядке возрастания номеров.

2. Натуральные числа a, b, c, d, m удовлетворяют условию

$$\text{НОД}(am + b, cm + d) = 2020.$$

Какие натуральные значения может принимать выражение $ad - bc$?

3. Найдите все такие натуральные числа n, что все числа от 1 до $2n$ можно разбить на пары таким образом, что если числа в парах сложить, то произведение полученных n сумм будет квадратом натурального числа.

4. Найдите все натуральные m и n, для которых $(n^2 + 1)(m^2 + 1) + 45 = 2(2n + 1)(3m + 1)$.

5. В куче N камней. Аня и Боря по очереди убирают камни из кучи, начинает Аня. За один ход можно убрать либо чётное число камней, большее нуля, но не более половины кучи, либо нечётное число камней, но не менее половины кучи. Побеждает тот, кто уберет последний камень. При каком наименьшем $N \geqslant 100\,000$ Боря может выиграть независимо от действий Ани?

6. Назовем раскраску клеток доски 8×8 в черный и белый цвета *хорошей*, если в ней четное число черных клеток. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и в обеих меняет цвет. Для каждой хорошей раскраски Сережа посчитал, за какое наименьшее число ходов можно из этой раскраски получить раскраску, в которой все клетки черные. Чему равно самое большое из найденных Сережей чисел?

7. Пусть x и y — произвольные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^4 + y^4 - 2x^2y - 2xy^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y$?

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Наружу треугольника ABE построены квадраты $ENMA$ и $EBQP$. Докажите, что $ND = PC$ и $ND \perp PC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Можно ли заполнить все клетки доски 55×55 числами $2, 3, -5$, чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была равна 0, а двоек и троек было поровну?

2. Натуральные числа a, b, c, d, m удовлетворяют условию

$$\text{НОД}(am + b, cm + d) = 100.$$

Докажите, что $ad - bc$ делится на 100.

3. Найдите все такие натуральные числа n, что все числа от 1 до $2n$ можно разбить на пары таким образом, что если числа в парах сложить, то произведение полученных n сумм будет квадратом натурального числа.

4. Виталий вел дневник наблюдений за погодой. Оказалось, что в последний день наблюдений количество дождливых дней составляло $n\%$ прошедших с начала наблюдений, хотя на день раньше дождливых дней было $(n-1)\%$ от наблюдаемых дней к тому моменту (n — натуральное число). Какое наименьшее количество дней вел дневник Виталий?

5. В куче N камней. Аня и Боря по очереди убирают камни из кучи, начинает Аня. За один ход можно убрать либо чётное число камней, большее нуля, но не более половины кучи, либо нечётное число камней, но не менее половины кучи. Побеждает тот, кто уберет последний камень. При каком наименьшем $N \geqslant 100\,000$ Боря может выиграть независимо от действий Ани?

6. На белой доске 8×8 чётное число клеток покрашены в черный цвет. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и в обеих меняет цвет. Верно ли, что менее чем за 40 ходов он сможет покрасить в чёрный цвет всю доску?

7. Пусть a и b — положительные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $ab + (a + \frac{2}{b})(b + \frac{1}{a})$?

8. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Наружу треугольника ABE построены квадраты $ENMA$ и $EBQP$. Докажите, что $ND = PC$ и $ND \perp PC$.