LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 15.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Есть клетчатый многоугольник, длины всех сторон которого нечётны. Докажите, что его нельзя разрезать на доминошки. Граница многоугольника — одна замкнутая несамопересекающаяся ломаная, т.е. внутри многоугольника нет «дырок».

2. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz + |(x-y)(y-z)(z-x)|.$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Известно, что $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. Найдите величину угла BAD.

4. В четырехугольнике $ABCD$, в котором $\angle A + \angle B < 180^\circ$, точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно, L — точка пересечения диагоналей. Прямая, проходящая через точку A и параллельная BC, и прямая, проходящая через точку B и параллельная AD, пересекаются в точке K. Докажите, что прямые MN и KL или параллельны, или совпадают.

5. На соревновании по сумо было N участников, и все имели разный вес. Между ними прошло несколько схваток. После окончания соревнования оказалось, что каждый сумоист A хотя бы в одной схватке встречался с таким сумоистом, у которого за весь турнир не было схваток с сумоистами легче A. Найдите все значения N, при которых такое возможно.

6. Найдите все простые p и натуральные n, для которых $p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$.

7. Обозначим $a_n = 3n + \sqrt{n^2-1}$, $b_n = 2\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}\right)$. Докажите, что существуют такие целые A и B, для которых

$$\sqrt{a_1 - b_1} + \sqrt{a_2 - b_2} + \ldots + \sqrt{a_{49} - b_{49}} = A + B\sqrt{2}.$$

8. У нумизмата есть 100 монет, пронумерованных числами от 1 до 100. Из этих монет 50 — настоящие и 50 — фальшивые. Нумизмат обратился к эксперту, чтобы выяснить, какие из его монет настоящие. Нумизмат может отдавать на экспертизу три монеты, после чего эксперт выбирает две из них по своему усмотрению и сообщает нумизмату, сколько монет из этих двух настоящие. Нумизмат видит, какие две монеты выбрал эксперт, эксперт всегда отвечает честно. Может ли нумизмат за несколько таких экспертиз про каждую свою монету понять, настоящая она или фальшивая?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 15.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Есть клетчатый многоугольник, причём в любой строчке или столбце клеток многоугольника или нет, или они идут подряд. Известно, что длины всех сторон этого многоугольника нечётны. Докажите, что его нельзя разрезать на доминошки. Граница многоугольника — одна замкнутая несамопересекающаяся ломаная, т.е. внутри многоугольника нет «дырок».

2. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz + \left|(x-y)(y-z)(z-x)\right|.$$

3. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Известно, что $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$. Найдите величину угла BAD.

4. В четырехугольнике $ABCD$, в котором $\angle A + \angle B < 180^\circ$, выполнено $AD = BC$; точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно, L — точка пересечения диагоналей. Прямая, проходящая через точку A и параллельная BC, и прямая, проходящая через точку B и параллельная AD, пересекаются в точке K. Докажите, что прямые MN и KL или параллельны, или совпадают.

5. На соревновании по сумо было N участников, и все имели разный вес. Между ними прошло несколько схваток. После окончания соревнования оказалось, что каждый сумоист A хотя бы в одной схватке встречался с таким сумоистом, у которого за весь турнир не было схваток с сумоистами легче A. Найдите все значения N, при которых такое возможно.

6. Найдите все натуральные числа n, для которых число $(n-1)\cdot 2^n + 1$ — точный квадрат.

7. Обозначим $a_n = 3n + \sqrt{n^2-1}$, $b_n = 2\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}\right)$. Докажите, что существуют такие целые A и B, для которых

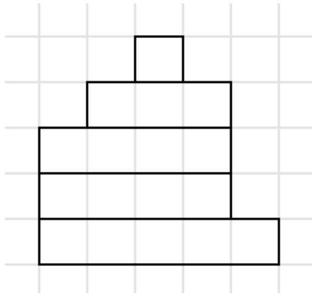
$$\sqrt{a_1 - b_1} + \sqrt{a_2 - b_2} + \ldots + \sqrt{a_{49} - b_{49}} = A + B\sqrt{2}.$$

8. У нумизмата есть 100 монет, пронумерованных числами от 1 до 100. Из этих монет 50 — настоящие и 50 — фальшивые. Нумизмат обратился к эксперту, чтобы выяснить, какие из его монет настоящие. Нумизмат может отдавать на экспертизу три монеты, после чего эксперт выбирает две из них по своему усмотрению и сообщает нумизмату, сколько монет из этих двух настоящие. Нумизмат видит, какие две монеты выбрал эксперт, эксперт всегда отвечает честно. Может ли нумизмат за несколько таких экспертиз про каждую свою монету понять, настоящая она или фальшивая?

LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 15.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Петя положил друг на друга несколько клетчатых полосок с высотой 1, каждая следующая лежит целиком на предыдущей (на рисунке приведён один из примеров). Получился клетчатый многоугольник, все стороны которого нечётны. Докажите, что его нельзя разрезать на доминошки (т.е. прямоугольники 1×2).



2. Рассмотрим треугольную таблицу заполненную числами по следующим двум правилам: 1) в первых двух строчках каждый элемент, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих; 2) каждый элемент во всех строчках, начиная с третьей, равен сумме двух чисел над ним.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 1 & 2 & 3\ldots \\
 & 0 & 1 & 1 & 2\ldots \\
 & & 2 & 3 & 5\ldots \\
 & & & 4 & 7\ldots
\end{array}$$

Пусть a, b, c, d — первые элементы четырёх последовательных строк (именно в таком порядке). Выразите d через a, b и c.

3. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Известно, что $\angle ADB = 45°$, $\angle ACB = 30°$. Найдите величину угла BAD.

4. В четырехугольнике $ABCD$, в котором $\angle A + \angle B < 180°$, выполнено $AD = BC$; точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно, L — точка пересечения диагоналей. Прямая, проходящая через точку A и параллельная BC, и прямая, проходящая через точку B и параллельная AD, пересекаются в точке K. Докажите, что прямые MN и KL или параллельны, или совпадают.

5. Пусть $n > 2$ — натуральное число. Имеется n множеств, в каждом из которых ровно два элемента, причём любые два из этих множеств пересекаются ровно по одному элементу. При каких n можно утверждать, что тогда все множества пересекаются?

6. Найдите все натуральные числа n, для которых число $(n-1) \cdot 2^n + 1$ — точный квадрат.

7. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2019}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{2018}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3}{2017}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{2019}{1}\right)^2}.$$

8. У нумизмата есть 100 монет, пронумерованных числами от 1 до 100. Из этих монет 50 — настоящие и 50 — фальшивые. Нумизмат обратился к эксперту, чтобы выяснить, какие из его монет настоящие. Нумизмат может отдавать на экспертизу три монеты, после чего эксперт выбирает две из них по своему усмотрению и сообщает нумизмату, сколько монет из этих двух настоящие. Нумизмат видит, какие две монеты выбрал эксперт, эксперт всегда отвечает честно. Может ли нумизмат за несколько таких экспертиз про каждую свою монету понять, настоящая она или фальшивая?