МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На окружности расставлено n точек. Найдите все такие $n > 100$, для которых при любой раскраске этих точек в 12 цветов найдутся 11 последовательных точек, среди которых есть одноцветные.

2. В некоторой школе работают 10 кружков. Известно, что для любых двух учеников найдется кружок, в который ходит ровно один из них. И для любых трех учеников найдется кружок, в который ходит нечетное число из них. Какое наибольшее количество учеников может быть в этой школе? (Могут быть ученики, не посещающие ни одного кружка).

3. Числовая операция $\odot$ для любых двух положительных чисел a и b выполняется по такой формуле:

$$a \odot b = \frac{a+b}{ab+9}.$$

Чему равно значение выражения $((\ldots((100 \odot 99) \odot 98)\ldots) \odot 2) \odot 1)$?

4. Каждая клетка доски $4 \times n$ покрашена в черный или белый цвет. Каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной. Докажите, что черных клеток хотя бы n.

5. Дано 100-значное число. Его цифры разбили на 50 пар и в каждой паре цифры поменяли местами. Могло ли полученное число оказаться ровно вдвое больше исходного?

6. Обозначим через (a, b) наибольший общий делитель a и b. Про натуральные числа a, b, c, d известно, что $(a, d^3) = b, \quad (b, d^2) = c, \quad (a, c) = d$. Докажите, что $b = c$.

7. На киносеанс пришло 99 зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно трёх общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы. Докажите, что у Пети и Васи есть или общий знакомый, или общий незнакомый.

8. В вершинах куба расставлены ненулевые (не обязательно целые) числа. Для каждой вершины нашли сумму чисел в соседних с ней вершинах и разделили эту сумму на число в самой этой вершине. Для каждой вершины получили в частном одно и то же число k. Чему могло быть равно k?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020

ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На окружности расставлено 55 точек. Можно ли их покрасить в 9 цветов таким образом, чтобы любые 8 последовательных точек были покрашены в разные цвета?

2. В некоторой школе работают 8 кружков. Известно, что для любых трех учеников найдется кружок, который посещает ровно один или ровно двое из этих учеников. Каково наибольшее возможное количество учеников в этой школе? (Могут быть ученики, не посещающие ни одного кружка).

3. Числовая операция $\odot$ для любых двух положительных чисел a и b выполняется по такой формуле:

$$a \odot b = \frac{ab+9}{a+b}.$$

Чему равно значение выражения $((\ldots(100 \odot 99) \odot 98)\ldots) \odot 2) \odot 1)$?

4. Каждая клетка доски $4 \times n$ покрашена в черный или белый цвет. Каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной. Докажите, что черных клеток хотя бы n.

5. Дано 100-значное число. Его цифры разбили на 50 пар и в каждой паре цифры поменяли местами. Могло ли полученное число оказаться ровно вдвое больше исходного?

6. Обозначим через (a, b) наибольший общий делитель a и b. Про натуральные числа a, b, c, d известно, что $(a, d^3) = b,\quad (b, d^2) = c,\quad (a, c) = d$. Докажите, что $b = c$.

7. На киносеанс пришло 99 зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно трех общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы. Докажите, что у Пети и Васи есть или общий знакомый, или общий незнакомый.

8. В вершинах куба расставлены положительные числа (не обязательно целые). Число в каждой вершине разделили на сумму чисел в соседних с ней вершинах и для каждой вершины получили в частном одно и то же число k. Чему могло быть равно k?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На окружности расставлено 55 точек. Можно ли их покрасить в 9 цветов таким образом, чтобы любые 8 последовательных точек были покрашены в разные цвета?

2. На киносеанс пришло несколько зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно двух общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы, и у них нет ни общих знакомых, ни общих незнакомых. Докажите, что у Пети и Васи одно и то же число знакомых среди зрителей.

3. Каждая клетка доски $5\times n$ покрашена в черный или белый цвет. Каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной. Докажите, что черных клеток хотя бы n.

4. В некоторой школе работают 8 кружков. Известно, что для любых трех учеников найдется кружок, который посещает ровно один или ровно двое из этих учеников. Каково наибольшее возможное количество учеников в этой школе? (Могут быть ученики, не посещающие ни одного кружка).

5. На доске по кругу выписаны 299 нулей и одна единица. Каждую минуту Петя может сделать одну из двух операций:
1) выбирает два числа и одновременно увеличивает или уменьшает оба на 1,
2) одновременно вычитает из каждого числа в круге сумму двух чисел, соседних с ним.
Может ли через некоторое время оказаться так, что какие-то два соседних числа равны 1, а все остальные равны 0?

6. Числовая операция $\odot$ для любых двух положительных чисел a и b выполняется по такой формуле:

$$a \odot b = \frac{ab+4}{a+b}.$$

Чему равно значение выражения $((\ldots(50 \odot 49) \odot 48)\ldots) \odot 2) \odot 1)$?

7. Обозначим через (a,b) наибольший общий делитель a и b. Про натуральные числа a,b,c известно, что $(a,c^{10})=b, \quad (b,c^{11})=c$. Докажите, что $b=c$.

8. В вершинах куба расставлены положительные числа (не обязательно целые). Число в каждой вершине разделили на сумму чисел в соседних с ней вершинах и для каждой вершины получили в частном одно и то же число k. Чему могло быть равно k?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Вдоль окружности выписано несколько (больше трёх) гласных и согласных букв. Серёжа обошел окружность по часовой стрелке и подсчитал, сколько раз встречаются фрагменты из трёх рядом стоящих букв, в которых за гласной буквой идут две согласные, а Алина тоже обошла окружность по часовой стрелке и подсчитала количество фрагментов, в которых за двумя согласными следует гласная. Докажите, что у них получились одинаковые результаты.

2. На киносеанс пришло несколько зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно двух общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы, и у них нет ни общих знакомых, ни общих незнакомых. Докажите, что у Пети и Васи одно и то же число знакомых среди зрителей.

3. В ряд выписано 10 единиц. Как расставить между ними знаки умножения, деления, сложения или вычитания, а также скобки, чтобы получилось число 2020? Например, число 1227 можно получить так: $111 \cdot 11 + (11 + 1) : (1 + 1)$.

4. Каждая клетка доски $5 \times n$ покрашена в черный или белый цвет. Каждая белая клетка граничит по стороне хотя бы с одной черной. Докажите, что черных клеток хотя бы n.

5. *Пузатостью* прямоугольника назовём отношение его бóльшей стороны к меньшей (пузатость квадрата равна 1). Докажите, что можно разрезать квадрат площади 100 на четыре прямоугольника площади 10, 20, 30 и 40 так, чтоб пузатость каждого была меньше 2.

6. Для каких натуральных чисел $K \leq 9$ найдутся два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на K?

7. Про натуральные числа a, b, c известно, что

$$\text{НОД}(a, c^{10}) = b,$$

$$\text{НОД}(b, c^{11}) = c.$$

Докажите, что $b = c$.

8. Найдите 2020-е по счету натуральное число, которое нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.