МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. 11 школьников написали тест. Учитель проверил работы и заметил, что для любых двух вопросов теста найдутся хотя бы 6 школьников, каждый из которых ответил правильно ровно на один из этих двух вопросов. Докажите, что в тесте было не более 12 вопросов.

2. На окружности отмечено 2020 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 99 отмеченных точек или через 100. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

3. В клетках таблицы 8×8 расставлены натуральные числа. Докажите, что у некоторых из этих чисел можно сменить знак таким образом, чтобы каждое из чисел отличалось по знаку от суммы чисел, стоящих в соседних с ним (по стороне или углу) клетках. (Ноль считается отличающимся по знаку от любого ненулевого числа).

4. На 20 карточках написаны числа 1, 2, 3, …, 20, каждое по одному разу. Назовем набор из нескольких карточек *квадратным*, если произведение чисел на них является точным квадратом. Сколько различных квадратных наборов карточек можно выбрать?

5. В стране 2222 города, некоторые из которых связаны дорогами. Каждый город соединен хотя бы с 4 другими городами. Из любого города в любой другой город можно проехать, возможно заезжая в другие города. Для каждой пары городов рассмотрим кратчайший маршрут. Какое наибольшее количество дорог оказаться в таком кратчайшем маршруте?

6. Решите систему уравнений $x^2 - yz = |y - z| + 1$, $y^2 - zx = |z - x| + 1$, $z^2 - xy = |x - y| + 1$.

7. Для положительных чисел a и b докажите неравенство
$$\frac{(a+b)^2(a^2+b^2)}{(a^2+ab+b^2)^2} \geqslant \frac{8}{9}.$$

8. Дан треугольник ABC такой, что $\angle BAC < \angle ACB$. На продолжении стороны BC за точку B отмечена такая точка D, что $AB = BD$. Точка E лежит на биссектрисе $\angle ABC$ так, что $\angle ACB = \angle BAE$. Отрезок BE пересекает отрезок AC в точке F. На отрезке AD отмечена такая точка G, что $EG \parallel BC$. Докажите, что $AG = BF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. 11 школьников написали тест. Учитель проверил работы и заметил, что для любых двух вопросов теста найдутся хотя бы 6 школьников, каждый из которых ответил правильно ровно на один из этих двух вопросов. Докажите, что в тесте было не более 12 вопросов.

2. На окружности отмечено 2020 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 99 отмеченных точек или через 100. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

3. Пронумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$. Найдите все натуральные n, для которых $p_1!+p_2!+\ldots+p_n! = a^b$ при некоторых натуральных a и b ($b > 1$). Напомним, что $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k$.

4. На 20 карточках написаны числа 1, 2, 3, …, 20, каждое по одному разу. Назовем набор из нескольких карточек *квадратным*, если произведение чисел на них является точным квадратом. Сколько различных квадратных наборов карточек можно выбрать?

5. В стране 614 городов, некоторые из которых связаны дорогами. Каждый город соединен хотя бы с 5 другими городами. Из любого города в любой другой город можно проехать, возможно заезжая в другие города. Могло ли так оказаться, что в этой стране есть два города, кратчайший маршрут между которыми проходит ровно по 305 дорогам?

6. Найдите все пары целых чисел x и y такие, что числа $\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{x^2+x}{y^2+y}$, $\dfrac{x^2+2}{y^2+2}$ также целые и какие-то два из этих трех чисел равны.

7. На соревновании по сумо было n участников, и все имели разный вес. Между ними прошло несколько схваток. После окончания соревнования оказалось, что каждый сумоист A хотя бы в одной схватке встречался с таким сумоистом, у которого за весь турнир не было схваток с сумоистами легче A. Найдите все значения n, при которых такое возможно.

8. Дан треугольник ABC такой, что $\angle BAC < \angle ACB$. На продолжении стороны BC за точку B отмечена такая точка D, что $AB = BD$. Точка E лежит на биссектрисе $\angle ABC$ так, что $\angle ACB = \angle BAE$. Отрезок BE пересекает отрезок AC в точке F. Через точку E проведена прямая, пересекающая отрезки AD и AB в точках G и H соответственно так, что $AH = HG$. Докажите, что $AG = BF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 16.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В стране 100 сенаторов, у каждого из которых ровно 4 помощника. Сенаторы и их помощники состоят в комитетах. Комитет может состоять либо из 5 сенаторов, либо из 4 сенаторов и 4 помощников, либо из 2 сенаторов и 12 помощников. Каждый сенатор состоит в пяти комитетах, а каждый помощник — в трёх. Сколько всего комитетов в стране? (Разумеется, один и тот же человек не может быть помощником сразу у двух сенаторов.)

2. На окружности отмечено 220 точек. Лягушонок прыгает с одной отмеченной точки на другую, двигаясь по часовой стрелке. За один прыжок он может перепрыгнуть через 9 отмеченных точек или через 10. Сможет ли лягушонок побывать во всех отмеченных точках ровно по одному разу и вернуться в ту точку, с которой стартовал?

3. Пронумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$. Найдите все натуральные n, для которых $p_1!+p_2!+\ldots+p_n! = a^b$ при некоторых натуральных a и b $(b > 1)$. Напомним, что $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$.

4. Из чисел 1, 2, …, 26 составили 13 обыкновенных дробей, используя каждое по одному разу. Какое наибольшее количество из этих дробей могло оказаться целыми?

5. В стране 614 городов, некоторые из которых связаны дорогами. Каждый город соединен хотя бы с 5 другими городами. Из любого города в любой другой город можно проехать, возможно заезжая в другие города. Могло ли так оказаться, что в этой стране есть два города, кратчайший маршрут между которыми проходит ровно по 305 дорогам?

6. Существуют ли различные целые числа x и y такие, что числа $\dfrac{x^2+x}{y^2+y}$, $\dfrac{x^2+2}{y^2+2}$ также целые и равны друг другу.

7. На соревновании по сумо было n участников, и все имели разный вес. Между ними прошло несколько схваток. После окончания соревнования оказалось, что каждый сумоист A хотя бы в одной схватке встречался с таким сумоистом, у которого за весь турнир не было схваток с сумоистами легче A. Найдите все значения n, при которых такое возможно.

8. Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC$. На продолжении стороны AB за точку B отмечена такая точка E, что $BD = BE$ и $AD \perp DE$. Докажите, что $\angle ACE = 90^\circ$.