КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2020

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Десять жителей острова пронумерованы числами от 1 до 10. Каждому из них задали три вопроса: «Делится ли твой номер на 2?», «Делится ли твой номер на 4?», «Делится ли твой номер на 5?». Могло ли так случиться, что на первый вопрос было дано 3 ответа «Да», на второй — 6, на третий — 2?

2. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n. Докажите, что

$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \cdots - S(3^{100} - 1) + S(3^{100}) = \frac{3^{100}+1}{2}.$$

3. Петя разделил число 2020 на натуральное число N с остатком. Затем он разделил с остатком 2020 на получившийся остаток. Какой наибольший остаток он мог в результате получить?

4. На доске 20×20 отмечено T клеток (хотя бы одна отмечена). Оказалось, что для любой отмеченной клетки среди 38 клеток, находящихся с ней в одной строке или одном столбце, отмечено хотя бы 20. При каком наименьшем T такое возможно?

5. Натуральные числа a, b и c таковы, что число $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$ является степенью простого p. Найдите все такие p.

6. В лагерь приехало 50 школьников, некоторые из них знакомы. Могло ли так случиться, что для любых двух знакомых школьников найдётся ровно один из остальных, знакомый с обоими, а для любых двух незнакомых школьников найдутся ровно 10 из остальных, незнакомых с обоими?

7. В ряд стоят 10 гирь положительного веса. Веса любых двух стоящих рядом гирь отличаются ровно на 1. Все 10 гирь разложили на две группы, равные по весу. Какое наименьшее значение может принимать вес самой лёгкой гири?

8. Назовём тройку чисел вида $(n, 2n, 3n)$ *хорошей*. Какое наибольшее количество хороших троек может быть среди 120 различных натуральных чисел?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2020

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Пусть $S(n)$ — сумма цифр числа n. Докажите, что

$$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \cdots - S(3^{100} - 1) + S(3^{100}) = \frac{3^{100}+1}{2}.$$

2. Племянники Дональда Билли, Вилли и Дилли очень любят конфеты. Один или несколько из них повадились таскать конфеты у дяди. Все трое знают кто именно это делает. Каждый из племянников два последовательных дня недели все время лжет, а оставшиеся пять дней всегда говорит правду. Причем никакие двое братьев не лгут в один и тот же день недели. В воскресенье Билли сказал, что конфеты таскает Вилли. В понедельник Билли заявил, что он зря обвинил Вилли, а Дилли сказал, что Билли конфет не брал. Но во вторник Дилли сообщил, что конфеты таскает Билли. Кто стащил конфеты дяди Дональда?

3. Обозначим через k количество способов раскрасить каждую клетку квадрата 100×100 в один из 10 цветов так, чтобы в каждой полоске 1×10 (вертикальной или горизонтальной) все клетки были разноцветными. Обозначим через n количество способов раскрасить каждую клетку прямоугольника 60×150 в один из 10 цветов так, чтобы в каждой полоске 1×10 (вертикальной или горизонтальной) все клетки были разноцветными. Что больше: k или n?

4. Неотрицательные числа a и b удовлетворяют условию $a+b=2$. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{a^2+b^2+ab}{ab+1}$.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На сторонах BC и AC соответственно выбраны такие точки M и N, что $BM = BA$ и $CN = CM$. Докажите, что $AM+CM > BN$.

6. В лагерь приехали n школьников, некоторые из них знакомы. Оказалось, что у каждого ровно 20 знакомых, для любых двух знакомых школьников найдётся ровно один из остальных, знакомый с обоими, а для любых двух незнакомых школьников найдутся ровно шестеро из остальных, знакомых с обоими. Чему могло быть равно n?

7. Найдите все тройки натуральных чисел a, b и c, для которых число $(a+2b)(b+2c)(c+2a)$ является степенью простого.

8. В ряд стоят 30 гирь положительного веса. Веса любых двух стоящих рядом гирь отличаются ровно на 1. Эти гири разложили на две группы, равные по весу. Какое наименьшее значение мог принимать вес самой лёгкой из этих гирь?

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2020

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Крокодил заполнил таблицу 2020×2020 числами по такому правилу: все числа в самой верхней строке и самом левом столбце равны 1, а каждое из оставшихся чисел равно разности числа, стоящего над ним, и числа, стоящего слева от него (см. часть таблицы на картинке). Чему равна сумма чисел на диагонали, идущей из левой нижней клетки в правую верхнюю?

1	1	1	1
1	0	1	0
1	-1	2	-2
1	-2	4	-6

2. В сельской школе 11 классов, в 11-м классе учеников меньше, чем в первом. В каждом классе есть ровно один староста. Однажды все ученики пришли в школу в масках: ученики одного класса — в масках одного цвета, а ученики разных классов — разного цвета. Все они встали в круг лицом к центру. Далее раз в минуту каждый ученик надевает маску соседа справа. Докажите, что в какой-то момент найдутся два старосты в масках одинакового цвета.

3. Пусть x и y — положительные рациональные числа, $x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{c}{d}$ — их несократимые записи, a, b, c и d — натуральные числа; *медиантой* чисел x и y назовём число, равное $\dfrac{a+c}{b+d}$. Докажите, что для любых двух положительных рациональных чисел s и t найдется бесконечно много положительных рациональных чисел p таких, что s — медианта чисел t и p.

4. Пусть E и F — точки на сторонах AC и AB соответственно равностороннего треугольника ABC; $EF \parallel BC$. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника AEF, M — некоторая точка на отрезке BE. Докажите, что $\angle MGC = 60°$ тогда и только тогда, когда M — середина BE.

5. Дано натуральное число $k > 1$. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором на клетчатом белом поле размером $n \times n$ можно закрасить некоторые клетки чёрным цветом так, что в каждой строке и в каждом столбце окажется ровно k чёрных клеток, причём ни у каких двух закрашенных клеток не будет ни общей стороны, ни общей вершины.

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что натуральных n, для которых число $\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^n$ — целое, не может быть бесконечно много.

7. Пусть P — точка внутри треугольника ABC. Известно, что $\angle BAP = 10°$, $\angle ABP = 20°$, $\angle PCA = 30°$ и $\angle PAC = 40°$. Найдите величину угла PBC.

8. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого найдутся такие действительные числа $1 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le 4$, что $x_1+x_2+\ldots+x_n \geqslant \dfrac{7n}{3}$ и $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n} \geqslant \dfrac{2n}{3}$.