МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В вершинах куба расставлены ненулевые числа. Оказалось, что число в любой вершине ровно в k раз меньше суммы трёх чисел в вершинах, соседних с ней. Найдите все возможные значения k.

2. На окружности расставлено n точек. Найдите все такие $n > 100$, для которых эти точки нельзя покрасить не более чем в 12 цветов так, чтобы любые 11 последовательных точек были покрашены в разные цвета.

3. По кругу через равные промежутки сидят 50 человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом, среди них есть как лжецы, так и рыцари. Каждый из них произнес следующую фразу: “Среди трех человек, сидящих напротив меня, есть как рыцари, так и лжецы”. (Под тремя людьми, сидящими напротив, понимаются человек, сидящий в диаметрально противоположной, по отношению к говорящему, точке, и два его соседа.) Сколько лжецов могло среди них быть? (Нужно указать все возможные варианты и доказать, что других нет.)

4. Найдите все натуральные числа m, n и простые числа p, удовлетворяющие уравнению $m^n n^p = p^m$.

5. В некоторой школе работают 10 кружков для учеников этой школы, каждый ученик ходит хотя бы в один из них. Известно, что для любых двух школьников найдется кружок, который посещает ровно один из этих школьников. Для любых пяти школьников найдется кружок, в который ходит нечетное число из них. Какое наибольшее количество учеников может быть в этой школе?

6. Числовая операция $\odot$ для любых двух положительных чисел a и b выполняется по такой формуле:

$$a \odot b = \frac{ab+9}{a+b}.$$

Чему равно значение выражения $((\ldots(100 \odot 99) \odot 98) \ldots) \odot 2) \odot 1)$?

7. Известно, что $(a+1)(b-1) = 1$. Докажите, что $(a^2+1)(b^2+1) \geqslant \frac{9}{2}$.

8. В треугольнике ABC углы B и C равны 19° и 38° соответственно. На стороне BC отмечены такие точки D и E, что $\angle ADB = \angle EAB = 90^\circ$. Докажите, что $BD + CE = 3CD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В вершинах куба расставлены ненулевые числа. Оказалось, что число в любой вершине ровно в k раз меньше суммы трёх чисел в вершинах, соседних с ней. Найдите все возможные значения k.

2. На окружности расставлено n точек. Найдите все такие $n > 100$, для которых эти точки нельзя покрасить не более чем в 12 цветов так, чтобы любые 11 последовательных точек были покрашены в разные цвета.

3. По кругу через равные промежутки сидят 60 человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом, среди них есть как лжецы, так и рыцари. Каждый из них произнес следующую фразу: “Среди трех человек, сидящих напротив меня, есть как рыцари, так и лжецы”. (Под тремя людьми, сидящими напротив, понимаются человек, сидящий в диаметрально противоположной, по отношению к говорящему, точке, и два его соседа.) Докажите, что лжецов не более 19.

4. На киносеанс пришло 99 зрителей, среди них Петя и Вася. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно трёх общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы. Докажите, что у них или есть общий знакомый, или общий незнакомый среди зрителей.

5. В некоторой школе работают 10 кружков для учеников этой школы, каждый ученик ходит хотя бы в один из них. Известно, что для любых двух школьников найдется кружок, который посещает ровно один из этих школьников. Для любых трех школьников найдется кружок, в который ходит нечетное число из них. Какое наибольшее количество учеников может быть в этой школе?

6. Числовая операция $\odot$ для любых двух положительных чисел a и b выполняется по такой формуле:

$$a \odot b = \frac{ab+9}{a+b}.$$

Чему равно значение выражения $((\ldots(100 \odot 99) \odot 98)\ldots) \odot 2) \odot 1)$?

7. Для $x \neq 0$ докажите неравенство $x^2 + \frac{1}{x^2} - x + \frac{1}{x} \geq \frac{7}{4}$.

8. В треугольнике ABC углы B и C равны 19° и 38° соответственно. На стороне BC отмечены такие точки D и E, что $\angle ADB = \angle EAB = 90^\circ$. Докажите, что $BD + CE = 3CD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Сколько есть наборов из 5 двузначных чисел, делящихся на три, в которых каждая цифра встречается ровно по одному разу?

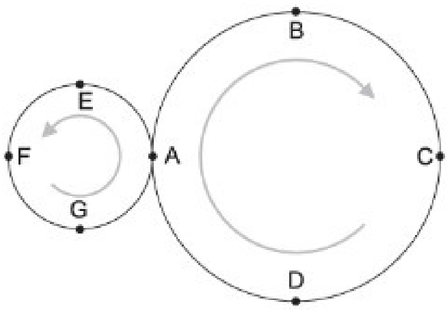
2. На доске по кругу выписаны 299 нулей и одна единица. Каждую минуту Петя либо выбирает два числа, между которыми находятся два других, и одновременно увеличивает или уменьшает оба на 1, либо вычитает из каждого числа сумму двух соседних с ним. Может ли через некоторое время оказаться так, что какие-то два соседних числа равны 1, а все остальные равны 0?

3. По кругу через равные промежутки сидят 60 человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом, среди них есть как лжецы, так и рыцари. Каждый из них произнес следующую фразу: “Среди трех человек, сидящих напротив меня, есть как рыцари, так и лжецы”. (Под тремя людьми, сидящими напротив, понимаются человек, сидящий в диаметрально противоположной, по отношению к говорящему, точке, и два его соседа.) Докажите, что лжецов не более 20.

4. На киносеанс пришло 99 зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно двух общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы. Докажите, что у них или есть общий знакомый, или общий незнакомый среди зрителей.

5. Дано 100-значное число. Его цифры разбили на 50 пар и в каждой паре цифры поменяли местами. Могло ли полученное число оказаться ровно вдвое больше исходного?

6. Велосипедная дорожка образована двумя касающимися кругами, длинный — 4000 м, короткий — 2000 м. Ездить по кругам можно только в направлении, указанном стрелочкой. Двое велосипедистов стартуют одновременно из точки A и едут каждый по своему кругу с одинаковой скоростью. Малый круг каждый из велосипедистов проходит за 8 мин. Какое минимальное расстояние может быть между ними через 21 минуту, если к этому моменту они ни разу не встречались? Расстояния считаются по велосипедным дорожкам.



7. Для $x \neq 0$ докажите неравенство $x^2 + \frac{1}{x^2} - x + \frac{1}{x} \geq \frac{7}{4}$.

8. В треугольнике ABC проведена высота BH. Известно, что $\angle BAC = 19^\circ$ и $\angle BCA = 38^\circ$. Докажите, что $AH = BC + CH$.