LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

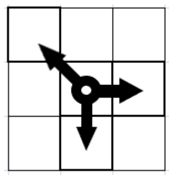
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020

ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА.

1. Найдите все натуральные $n > 2$, обладающие следующим свойством: из чисел 1, 2,…, $n+1$ можно выкинуть одно, а оставшиеся расставить по окружности так, чтобы все разности между двумя соседними числами были различны.

2. В строчку выписано несколько различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое из чисел, кроме трех самых правых, равно наибольшему общему делителю чисел, написанных на две и на три позиции правее. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

3. В некоторой клетке квадрата 100×100 лежит 10000 фишек. За один шаг разрешается из клетки, в которой находится не менее трёх фишек, передвинуть одну фишку в соседнюю по углу клетку A и одновременно две другие фишки передвинуть в две различные соседние по стороне с исходной клеткой, но не соседние с клеткой A (пример хода см. на рисунке справа).



Может ли так случиться, что через несколько шагов в каждой клетке таблицы будет ровно по одной фишке?

4. Дано натуральное число N. Надя нашла наименьшее натуральное число, большее N, в котором все цифры нечетны. Сережа нашел наименьшее натуральное число, большее N, в котором все цифры четны. Какие четные цифры могут встретиться в записи суммы Надиного и Сережиного чисел?

5. Петя, Вася и Толя участвуют в аукционе. Изначально у каждого по 100 монет, на аукцион выставлено 10 книг, в каждом из 10 раундов разыгрывается одна книга. Первым в каждом раунде делает ставку Петя, затем Вася, и уже затем Толя (ставка — целое неотрицательное число монет, не превышающее того, которое имеется у участника на момент ставки), после чего раунд заканчивается. В течение раунда повторять ненулевую ставку соперника запрещено. Побеждает в раунде тот, кто сделал наибольшую ставку, однако книгу он забирает по цене, равной наибольшей из ставок, предложенных в этом раунде соперниками. Какое наибольшее число книг Петя может гарантированно унести с аукциона независимо от действий его соперников?

6. В математическом конгрессе принимало участие 28 математиков. За время конгресса прошло 9 банкетов. На каждом банкете математиков рассаживали за один круглый стол на 4 места и за 4 круглых стола на 6 мест. Про пару математиков, сидящих за одним столом, скажем, что она оказалась в *интересном положении*, если они сидят рядом или напротив друг друга. Могло ли так случиться, что никакая пара математиков не оказывалась в интересном положении более одного раза?

7. Даны 100 одинаковых с виду монет. Некоторые из них настоящие, а некоторые — фальшивые, причём известно, что есть и те, и другие. Настоящие весят поровну, фальшивые тоже, но легче настоящих. Есть двухчашечные весы. За одно взвешивание можно положить несколько (хотя бы одну) монет на каждую чашу и весы покажут, на какой чаше груз тяжелее, или что они весят поровну. Докажите, что за 51 взвешивание можно определить, сколько фальшивых монет среди данных.

8. На доске написано 12 различных положительных чисел. Оказалось, что их можно разбить на 4 группы по 3 числа с равными суммами, а также на 6 групп по 2 числа с равными суммами. Докажите, что сумма шести наибольших чисел отличается от суммы шести наименьших менее, чем в 5 раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020

ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Алиса участвует в безумном чаепитии. За круглым крутящимся столом расставлены 64 чашки с чаем. Каждую минуту Алиса выпивает чашку перед собой, затем Шляпник называет натуральное число k, после чего Алиса выбирает направление (по или против часовой стрелки) и вращает стол на k позиций в этом направлении. Если перед Алисой оказывается пустая чашка — чаепитие прекращается. Алиса хочет, чтобы чаепитие поскорее закончилось, а Шляпник — чтобы чаепитие длилось как можно дольше. Сколько будет длиться чаепитие?

2. В строчку выписано несколько различных натуральных чисел. Оказалось, что каждое из чисел, кроме трех самых правых, равно наибольшему общему делителю чисел, написанных на две и на три позиции правее. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

3. В квадрате 20×20 клеток 300 клеток закрашено. Верно ли, что независимо от расположения закрашенных клеток, этот квадрат всегда можно разрезать на клетчатые прямоугольники таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике были ровно две закрашенные клетки?

4. Дано натуральное число N. Надя нашла наименьшее натуральное число, большее N, в котором все цифры нечетны. Сережа нашел наименьшее натуральное число, большее N, в котором все цифры четны. Какие четные цифры могут встретиться в записи суммы Надиного и Сережиного чисел?

5. Петя, Вася и Толя участвуют в аукционе. Изначально у каждого по 100 монет, на аукцион выставлено 10 книг, в каждом из 10 раундов разыгрывается одна книга. Первым в каждом раунде делает ставку Петя, затем Вася, и уже затем Толя (ставка — целое неотрицательное число монет, не превышающее того, которое имеется у участника на момент ставки), после чего раунд заканчивается. В течение раунда повторять ненулевую ставку соперника запрещено. Побеждает в раунде тот, кто сделал наибольшую ставку, однако книгу он забирает по цене, равной наибольшей из ставок, предложенных в этом раунде соперниками. Какое наибольшее число книг Петя может гарантированно унести с аукциона независимо от действий его соперников?

6. По окружности расставлено 55 точек. За одну операцию можно либо выбрать 4 точки и соединить каждые две из них отрезками, либо выбрать две группы по 3 точки и соединить каждую точку первой группы с каждой точкой второй группы отрезками. Никакой отрезок нельзя проводить дважды. Докажите, что при помощи таких операций можно добиться того, чтобы каждые две точки были соединены отрезком.

7. Даны 100 одинаковых с виду монет. Некоторые из них настоящие, а некоторые — фальшивые, причём известно, что есть и те, и другие. Настоящие весят поровну, фальшивые тоже, но легче настоящих. Есть двухчашечные весы. За одно взвешивание можно положить несколько (хотя бы одну) монет на каждую чашу и весы покажут, на какой чаше груз тяжелее, или что они весят поровну. Докажите, что за 51 взвешивание можно определить, сколько фальшивых монет среди данных.

8. На доске написано 6 различных положительных чисел. Оказалось, что их можно разбить на 3 группы по 2 числа с равными суммами, а также на 2 группы по 3 числа с равными суммами. Докажите, что сумма трех наибольших чисел отличается от суммы трех наименьших не более, чем в 5 раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 19.02.2020
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 МЕСТА В ТРЕТЬЕЙ ЛИГЕ

1. Алиса участвует в безумном чаепитии. За круглым крутящимся столом расставлены 120 чашек с чаем. Каждую минуту Алиса выпивает чашку перед собой, затем Шляпник называет натуральное число k, после чего Алиса выбирает направление (по или против часовой стрелки) и вращает стол на k позиций в этом направлении. (Например, если $k = 1$, то перед Алисой окажется одна из двух соседних чашек). Если перед Алисой оказывается пустая чашка — чаепитие прекращается. Алиса хочет, чтобы чаепитие поскорее закончилось, а Шляпник — чтобы чаепитие длилось как можно дольше. Может ли Шляпник заставить Алису участвовать в чаепитии хотя бы час?

2. У Даны 25 карточек, пронумерованных числами от 1 до 25. Дана хочет выложить некоторые из них в ряд, так, чтобы номера любых двух карточек, лежащих рядом, имели общий делитель, больший 2. Какое наибольшее число карточек Дана сможет выложить?

3. На уроке сидели 30 учеников. Когда учительница вышла из класса, ребята начали баловаться. Каждую минуту один из учеников ставил точку на носу каждому из остальных, а сразу после этого кто-то один стирал все точки со своего носа. Могут ли ребята договориться действовать так, что к моменту возвращения учительницы через 40 минут у всех было разное количество точек?

4. Сумма трех наибольших делителей натурального числа N в 10 раз больше суммы трёх наименьших его делителей. Найдите все возможные значения N.

5. Билл и Чарли играют в игру. В начале Чарли выбирает натуральное число N и записывает его на доску. Затем Билл и Чарли по очереди (начинает Билл) приписывают по одной из цифр 1, 2 или 3 справа к числу на доске, пока каждый из них не сделает 2020 ходов. Нельзя повторять цифру, только что написанную соперником. Чарли выигрывает, если получившееся в итоге число делится на 3, иначе выигрывает Билл. Может ли Билл выиграть независимо от действий Чарли?

6. В квадрате 20×20 клеток 300 клеток закрашено. Верно ли, что независимо от расположения закрашенных клеток, этот квадрат всегда можно разрезать на клетчатые прямоугольники таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике были ровно 2 закрашенные клетки?

7. Даны 100 одинаковых с виду монет. Некоторые из них настоящие, а некоторые — фальшивые, причём известно, что есть и те, и другие. Настоящие весят поровну, фальшивые тоже, но легче настоящих. Есть двухчашечные весы. За одно взвешивание можно положить несколько (хотя бы одну) монет на каждую чашу и весы покажут, на какой чаше груз тяжелее, или что они весят поровну. Докажите, что за 51 взвешивание можно определить, сколько фальшивых монет среди данных.

8. На доске написано 6 различных положительных чисел. Оказалось, что их можно разбить на 3 группы по 2 числа с равными суммами, а также на 2 группы по 3 числа с равными суммами. Докажите, что сумма трех наибольших чисел отличается от суммы трех наименьших не более, чем в 5 раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 19.02.2020
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Существуют ли 6 неотрицательных целых чисел, не превышающих 20, таких, что в любой паре этих чисел их разность отличалась от разности в любой другой паре?

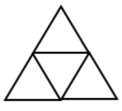
2. У Даны 25 карточек, пронумерованных числами от 1 до 25. Дана хочет выложить некоторые из них в ряд, так, чтобы номера любых двух карточек, лежащих рядом, имели общий делитель, больший 2. Какое наибольшее число карточек Дана сможет выложить?

3. На уроке сидели 25 учеников. Когда учительница вышла из класса, ребята начали баловаться. Каждую минуту один из учеников ставил точку на носу каждому из остальных, а сразу после этого староста класса стирал все точки у кого-то одного. Могут ли ребята договориться действовать так, что к моменту возвращения учительницы через 40 минут у всех было разное количество точек?

4. Дано натуральное число N. Надя нашла наименьшее натуральное число, большее N, в котором все цифры нечётны. Сережа нашел наименьшее натуральное число, большее N, в котором все цифры чётны. Какие чётные цифры могут встретиться в записи суммы Надиного и Сережиного числа?

5. Существует ли такое натуральное число, у которого при умножении на 3 сумма цифр уменьшается ровно в 6 раз?

6. Из 4 равносторонних треугольников со стороной 1 сложен треугольник со стороной 2 (см. рис.). Какое наибольшее количество точек можно отметить на сторонах треугольников, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1? (Расстояние измеряется по линиям вдоль границ треугольников).



7. В первую минуту суток на электронных часах горит 00:00, а в последнюю – 23:59. Сколько времени в течении суток на часах горит хотя бы одна единица и нет ни одной двойки?

8. Автобус ехал из города A в город B, на пути между которыми стоит село C. Когда автобус доехал до C, то оказалось, что он проехал столько километров, сколько минут ему осталось ехать до B. Но когда он проехал оставшуюся часть пути, то оказалось, что он проехал от C до B столько километров, сколько минут он затратил на дорогу от A до C. Какова скорость автобуса?