LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На планете Уртур шарообразной формы есть 2020 заправок. Они расположены так, что диаметрально противоположно каждой заправке расположена заправка. На заправках есть бензин. Он распределён так, что, начав с любой заправки, можно доехать до диаметрально противоположной (возможно, заезжая по пути на другие заправки). Обязательно ли найдется заправка, начав с которой, можно посетить все другие заправки?

2. Решите в натуральных числах уравнение $m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1)$.

3. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ таковы, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})^2 = 101.$$

Докажите, что $|a_k| \leqslant 10$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant 100$.

4. Точки M и N расположены на сторонах AC и AB соответственно правильного треугольника ABC так, треугольники ABM и ACN — остроугольные. Точки пересечения высот этих треугольников и точка пересечения BM и CN — вершины равностороннего треугольника. Чему могут быть равны углы CBM и BCN?

5. Саша пишет последовательности из 0 и 7. На нулевом шаге он пишет последовательность 007. Далее, на k-м шаге он заменяет каждую уже написанную последовательность A на $k+2$ последовательности, у которых первые $k+2$ символа совпадают с A, а потом к s из них приписывает в конце 0, а к остальным — 7, где s — количество нулей в последовательности A. Так, после первого шага у него будут последовательности 0070, 0070 и 0077. Через 2016 шагов Саша устал. Теперь на доске 2018!/2 последовательностей, и в каждой 2019 цифр! А в скольких из них 7 больше, чем 0?

6. Даны $2n$ шариков ($n \geqslant 2$) двух разных весов (оба веса встречаются). Докажите, что за $n+1$ взвешивание на двухчашечных весах без гирь можно определить количество тяжёлых шариков.

7. На плоскости дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что найти на плоскости точку P, для которой треугольники PAB, PBC, PCD и PDA равновелики, можно тогда и только тогда, когда или одна диагональ четырёхугольника разбивает его на два равновеликих треугольника, или один из четырёх треугольников, образованных после проведения обеих диагоналей, равновелик фигуре из трёх оставшихся треугольников.

8. Найдите наименьшее натуральное n такое, что

$$\underbrace{2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}}_{n\text{ двоек}} > \underbrace{((\ldots(100!)!\ldots)!)!}_{100\text{ факториалов}}.$$

LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На планете Уртур шарообразной формы есть 2020 заправок. Они расположены так, что диаметрально противоположно каждой заправке расположена заправка. На заправках есть бензин. Он распределён так, что, начав с любой заправки, можно доехать до диаметрально противоположной (возможно, заезжая по пути на другие заправки). Обязательно ли найдется заправка, начав с которой, можно посетить все другие заправки?

2. Простое число p и натуральные числа a, b, c, n таковы, что $a, b, c < p$, а все три числа $a+(n-1)b$, $b+(n-1)c$ и $c+(n-1)a$ делятся на p^2. Докажите, что n — составное число.

3. Вещественные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} таковы, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})^2 = 101.$$

Докажите, что $|a_k| \leqslant 10$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant 100$.

4. Точки M и N расположены на сторонах AC и AB соответственно правильного треугольника ABC так, треугольники ABM и ACN — остроугольные. Точки пересечения высот этих треугольников и точка пересечения BM и CN — вершины равностороннего треугольника. Чему могут быть равны углы CBM и BCN?

5. На асфальте нарисована табличка 2×2:

1	2
4	3

. Кот Альба запрыгнул в клетку с числом 1. Дальше он за один ход может перейти в любую соседнюю по стороне клетку. Сколькими способами он может сделать несколько ходов так, чтобы сумма чисел в клетках, на которых он побывал, равнялась 21 (считая исходную и последнюю клетку)?

6. Даны $2n$ шариков ($n \geqslant 2$) двух разных весов (оба веса встречаются). Докажите, что за $n+1$ взвешивание на двухчашечных весах без гирь можно определить количество тяжёлых шариков.

7. Сторона AB треугольника ABC поделена точками M и N на три равные части: $AM = MN = NB$. На отрезке MN выбрана точка P. Через точки M и N проведены прямые, параллельные CP, до пересечения со сторонами AC и BC в точках Q и R соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CQPR$ и треугольник AQP равновелики.

8. Найдите наименьшее натуральное n такое, что

$$\underbrace{2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}}_{n\ \text{двоек}} > \underbrace{((\ldots(100!)!\ldots)!)!}_{100\ \text{факториалов}}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На плоскости расположены n заправок. Бензин распределён по заправкам так, что, начав с любой заправки, можно доехать до любой другой (возможно, заезжая по пути на другие заправки). При каких n можно утверждать, что обязательно найдё тся заправка, начав с которой, можно посетить все другие заправки?

2. Даны четыре натуральных числа. Для каждой пары чисел посчитали их наибольшие общие делители, в результате получились числа 2, 3, 4, 5, 6 и 9. Какова наименьшая возможная сумма четырёх исходных чисел?

3. Вещественные числа a_1, a_2, …, a_{100} таковы, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})^2 = 101.$$

Докажите, что $|a_k| \leqslant 10$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant 100$.

4. Точки M и N расположены на сторонах AC и AB соответственно правильного треугольника ABC так, что ABM и ACN — равные остроугольные треугольники. Высоты треугольника ABM пересеклись в точке P, а высоты треугольника ACN — в точке Q; R — точка пересечения BM и CN. Оказалось, что PQR — равносторонний треугольник. Найдите все возможные значения угла CBM.

5. На асфальте нарисована табличка 2×2:

1	2
4	3

. Кот Альба запрыгнул в клетку с числом 1. Дальше он за один ход может перейти в любую соседнюю по стороне клетку. Сколькими способами он может сделать несколько ходов так, чтобы сумма чисел в клетках, на которых он побывал, равнялась 21 (считая исходную и последнюю клетку)?

6. Даны $2n$ шариков ($n \geqslant 2$) двух разных весов (оба веса встречаются). Докажите, что за $n+1$ взвешивание на двухчашечных весах без гирь можно определить количество тяжёлых шариков.

7. Сторона AB треугольника ABC поделена точками M и N на три равные части: $AM = MN = NB$. На отрезке MN выбрана точка P. Через точки M и N проведены прямые, параллельные CP, до пересечения со сторонами AC и BC в точках Q и R соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CQPR$ и треугольник AQP равновелики.

8. Пусть $a_1 = 1$ и $a_n = n \cdot a_{[n/2]}$ при $n > 1$. Докажите, что $a_n > n^2$ при всех $n \geqslant 12$.