

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2020**

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА**

1. Петя записал два  $k$ -значных натуральных числа, используя для этого все 10 цифр. Оказалось, что разность написанных чисел равна 2020. При каком наименьшем  $k$  он мог это сделать?
2. В 6«А» классе 24 ученика. В школьном журнале все дети выписаны в алфавитном порядке их фамилий, а имя Алина встречается нечетное число раз. Оказалось, что номер первой Алины в журнале равняется количеству Алин в классе, а номер третьей Алины в три раза больше. Кроме того, для любой Алины есть Алина в соседней строчке. Найдите номера всех Алин в журнале.
3. В целых точках прямой сидят  $n > 1$  лягузавров, пронумерованных числами от 1 до  $n$ . Они делают ходы по очереди: первый, второй, ...,  $n$ -ый, затем опять первый, второй и т.д. Лягузавр, который делает очередной ход, выбирает другого лягузавра на расстоянии хотя бы 2 от себя и прыгает на 1 в его направлении. Допускается, чтобы в одной точке оказывалось одновременно несколько лягузавров. Докажите, что рано или поздно какой-нибудь лягузавр не сможет сделать ход.
4. На доску выписаны два натуральных числа. За одну операцию можно выбрать любое натуральное число  $n > 1000$  и одно из чисел на доске умножить на  $n$ , а ко второму числу прибавить  $n$ . Докажите, что за несколько операций можно сделать числа на доске равными.
5. Дана прямоугольная клетчатая доска. Некоторые единичные отрезки, являющиеся сторонами клеток, покрасили в красный цвет. Ладья, стоящая в клетке доски, бьет все клетки доски, до которых может дойти за один ход, не переступая через красные отрезки. Известно, что на доску можно поставить 1000 ладей так, чтобы они били все клетки доски, а можно поставить 2000 ладей так, чтобы никакая из них не била другую. Найдите наименьшее возможное число красных отрезков.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2020

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. В 7 «А» классе 24 ученика. В школьном журнале все дети выписаны в алфавитном порядке их фамилий, а имя Алина встречается нечетное число раз. Оказалось, что номер первой Алины в журнале равняется количеству Алин в классе, а номер третьей Алины в три раза больше. Кроме того, для любой Алины есть Алина в соседней строчке. Найдите номера всех Алин в журнале.
2. В поселке 2020 жителей. Оказалось, что среди любых 194 жителей есть трое одного возраста. Докажите, что в этом поселке есть 22 жителя одного возраста.
3. Существуют ли такие простые числа  $p$ ,  $q$  и  $r$ , для которых число  $(p^2-7)(q^2-7)(r^2-7)$  является точным квадратом?
4. Числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  больше  $1/2$ , и  $ab+bc+ca = 5/4$ . Докажите, что  $a+b+c > a^2+b^2+c^2$ .
5. Дана прямоугольная клетчатая доска. Некоторые единичные отрезки, являющиеся сторонами клеток, покрасили в красный цвет. Ладья, стоящая в клетке доски, бьет все клетки доски, до которых может дойти за один ход, не переступая через красные отрезки. Известно, что на доску можно поставить 1000 ладей так, чтобы они били все клетки доски, а можно поставить 2000 ладей так, чтобы никакая из них не била другую. Найдите наименьшее возможное число красных отрезков.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 15.02.2020

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Про натуральные числа  $a, b, c$  и  $d$  известно, что

$$2a-6b-2c+3d=4, 3a+8b-3c-4d=6.$$

Докажите, что  $d$  делится на  $b$ .

2. Дана прямоугольная клетчатая доска. Некоторые единичные отрезки, являющиеся сторонами клеток, покрасили в красный цвет. Ладья, стоящая в клетке доски, бьет все клетки доски, до которых может дойти за один ход, не переступая через красные отрезки. Известно, что на доску можно поставить 1000 ладей так, чтобы они били все клетки доски. Докажите, что если поставить на доску 2020 ладей, то какие-то две ладьи будут бить друг друга.

3. В параллелограмме  $ABCD$  с острым углом  $A$  серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$  пересекает отрезок  $CD$  в точке  $X$ ;  $O$  — центр параллелограмма. Докажите, что  $AD = 2XO$ .

4. Медведь заполнил таблицу  $2020 \times 2020$  числами по следующему правилу: все числа в самой верхней строке и самом левом столбце равны 1, а каждое из оставшихся чисел равно разности числа, стоящего над ним, и числа, стоящего слева от него (см. часть таблицы на картинке). Чему равна сумма абсолютных величин чисел на диагонали, идущей из левой нижней клетки в правую верхнюю?

1	1	1	1
1	0	1	0
1	-1	2	-2
1	-2	4	-6

5. Барсук задумал 10 натуральных чисел, и написал на левую доску все их попарные НОДы, а на правую — их НОКи (по 45 чисел на каждой доске в произвольном порядке). Всегда ли Енот, зная числа на досках, сможет определить, какие 10 чисел задумал Барсук?