МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab+bc+ca=3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

2. Для положительных вещественных чисел p и q будем называть *остатком при делении p на q* наименьшее неотрицательное вещественное число r такое, что $\frac{p-r}{q}$ — целое число. Докажите, что для каждого натурального b существует ровно одно натуральное a такое, что если r_1 и r_2 — остатки при делении $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ на $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ соответственно, то $r_1+r_2=\sqrt{2}$.

3. На биссектрисе AD остроугольного треугольника ABC ($AB>AC$) лежит точка P. Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках Q и R соответственно. Докажите, что $PB-PC>RB-QC$.

4. Саша нарисовал граф, вершинами которого являются все возможные последовательности из 0 и 1 длины 2019, а ребро между вершинами проводится, если соответствующие последовательности отличаются ровно в одном месте. Назовём расстановку ненулевых чисел в вершинах этого графа *k-гармонической*, если для любой вершины сумма чисел в соседних с ней вершинах в k раз больше числа в самой вершине. При каких вещественных k существует k-гармоническая расстановка чисел в вершинах этого графа?

5. Квадрат $ABCD$ разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины A и C одного цвета. Докажите, что вершины B и D тоже одного цвета.

6. Дано натуральное число $n>10$. Докажите, что ни для какого $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ число $(2n)!+k$ не делится на $n!+1$.

7. Точка D на стороне AC треугольника ABC такова, что $BD=AC$. Точка F внутри треугольника такова, что $\angle ACF=\frac{1}{2}\angle ADB$, $\angle CAF=\frac{1}{2}\angle CDB$. Прямая BF пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $AD=CE$.

8. На киносеанс пришло 99 зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно трёх общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы. Докажите, что у них или есть общий знакомый, или общий незнакомый среди зрителей.

LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Про положительные числа a, b, c известно, что $(a+b)(a+c) = 1$. Докажите, что $a^2 + a + b + c \geqslant 7/4$.

2. Для положительных вещественных чисел p и q будем называть *остатком при делении p на q* наименьшее неотрицательное вещественное число r такое, что $\frac{p-r}{q}$ — целое число. Докажите, что для каждого натурального b существует ровно одно натуральное a такое, что если r_1 и r_2 — остатки при делении $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ на $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ соответственно, то $r_1 + r_2 = \sqrt{2}$.

3. На биссектрисе AD остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$) лежит точка P. Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках Q и R соответственно. Докажите, что $RB > QC$.

4. Пусть k — некоторое вещественное число. В вершинах куба расставлены ненулевые вещественные числа. Оказалось, что число в любой вершине ровно в k раз меньше суммы трёх чисел в вершинах, соседних с ней. Найдите все возможные значения числа k, при которых это возможно.

5. Квадрат $ABCD$ разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины A и C одного цвета. Докажите, что вершины B и D тоже одного цвета.

6. Дано натуральное число $n > 10$. Докажите, что $(2n)! + 1$ не делится на $n! + 1$.

7. Точка D на стороне AC треугольника ABC такова, что $BD = AC$. Точка F внутри треугольника такова, что $\angle ACF = \frac{1}{2}\angle ADB$, $\angle CAF = \frac{1}{2}\angle CDB$. Прямая BF пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $AD = CE$.

8. На киносеанс пришло 99 зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно трёх общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы. Докажите, что у них или есть общий знакомый, или общий незнакомый среди зрителей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 19.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $ab+bc+ca=0$. Докажите, что из чисел

$$\frac{1}{abc} \quad \text{и} \quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

одно положительное, а другое — отрицательное. Все знаменатели в выражениях выше можно считать ненулевыми по условию.

2. Для положительных вещественных чисел p и q будем называть *остатком при делении p на q* наименьшее неотрицательное вещественное число r такое, что $\frac{p-r}{q}$ — целое число. Евклид написал на доске два положительных числа a и b. Раз в минуту, если на доске нет 0, он вычисляет остаток при делении большего числа на меньшее и заменяет большее число на этот остаток. Докажите, что рано или поздно на доске появится число, меньшее $1/1000$.

3. Дан прямоугольник $ABCD$. На сторонах BC и AD вне прямоугольника построили прямоугольные треугольники BSC и ATD, причём $\angle BSC = \angle ATD = 90^\circ$. Докажите, что длина отрезка ST не превосходит полупериметра прямоугольника $ABCD$.

4. Пусть k — некоторое вещественное число. В вершинах куба расставлены ненулевые вещественные числа. Оказалось, что число в любой вершине ровно в k раз меньше суммы трёх чисел в вершинах, соседних с ней. Найдите все возможные значения числа k, при которых это возможно.

5. Квадрат $ABCD$ разрезан на прямоугольники так, что ни в какой вершине не сходятся 4 прямоугольника. Все вершины раскрасили в два цвета так, что в любом прямоугольнике противоположные по диагонали вершины разного цвета. Известно, что вершины A и C одного цвета. Докажите, что вершины B и D тоже одного цвета.

6. Натуральные числа a, b и k таковы, что $[a,b]+(a,b)=k(a+b)$, где $k>1$. Докажите, что $a+b \geqslant 4k$.

7. Точка D на стороне AC треугольника ABC такова, что $BD=AC$. Точка F внутри треугольника такова, что $\angle ACF = \frac{1}{2}\angle ADB$, $\angle CAF = \frac{1}{2}\angle CDB$. Прямая BF пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $AD=CE$.

8. На киносеанс пришло 99 зрителей. Известно, что любые двое зрителей, не знакомые между собой, имеют ровно двух общих знакомых среди зрителей. Петя и Вася знакомы. Докажите, что у них или есть общий знакомый, или общий незнакомый среди зрителей.