LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В квадрате 4038×4038, нарисованном на клетчатой бумаге, отмечены все узлы (вершины клеток), кроме четырёх вершин квадрата. Аня ставит зеленую фишку в центральный узел и играет с Борей в следующую игру. При каждом ходе сначала Боря ставит красные фишки в узлы на сторонах квадрата, не более чем по две на каждой стороне, а затем Аня передвигает зелёную фишку ровно по трём сторонам клеток, причём двигать в узел, занятый красной фишкой, нельзя. Если Аня сможет поставить зелёную фишку в узел на стороне квадрата, она выиграет. Есть ли у неё выигрышная стратегия?

2. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что существует единственная пара целых чисел x и y такая, что

$$(x+2y-a)^2+(2x-y-b)^2 \leqslant 1.$$

3. Не отрывая карандаша от бумаги, Вася нарисовал на плоскости замкнутую ломаную, среди любых двух соседних сторон которой ровно одна вертикальна. Оказалось, что каждую вертикальную сторону Вася рисовал сверху вниз. Докажите, что эта ломаная – самопересекающаяся.

4. Последовательность x_n удовлетворяет следующим условиям: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а для каждого $n \geqslant 3$ выполнено равенство $x_{n-2}(x_{n+1}+x_{n-1})=x_n(x_n+x_{n-1})$. Верно ли, что каждое из чисел x_1, x_2, x_3, …, x_{2020} целое?

5. Пусть M — произвольная точка на отрезке AB; P и Q — такие точки, что $PA=PM$ и $QA=QB$; R — такая точка, что $PAQR$ — параллелограмм. Докажите, что $RM=RB$.

6. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки K, L и M соответственно. Оказалось, что KLM — равносторонний треугольник, а точки пересечения биссектрис треугольников ABC и KLM совпадают. Найдите необходимое и достаточное условие на треугольник ABC, в котором такая ситуация возможна.

7. Дано простое число $p>2$. Докажите, что среди любых $p+1$ целых чисел можно выбрать $p-1$ число a_1, a_2, …, a_{p-1} так, чтобы $a_1+2a_2+3a_3+\ldots+(p-1)a_{p-1}$ делилось на p.

8. В 8-А классе $n \geqslant 2$ учеников. Для них организованы кружки, каждый из которых посещают хотя бы двое. Каждые два кружка, у которых есть хотя бы два общих ученика, отличаются по количеству участников. Докажите, что кружков не более $(n-1)^2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n можно расставить $\frac{n(n-1)}{2}$ последовательных натуральных чисел на рёбрах полного графа с n вершинами так, что для любого пути (возможно, замкнутого) из трёх ребер число на среднем ребре кратно наибольшему общему делителю чисел на двух других рёбрах?

2. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что существует единственная пара целых чисел x и y такая, что

$$(x+2y-a)^2+(2x-y-b)^2 \leqslant 1.$$

3. Не отрывая карандаша от бумаги, Вася нарисовал на плоскости замкнутую ломаную, среди любых двух соседних сторон которой ровно одна вертикальна. Оказалось, что каждую вертикальную сторону Вася рисовал сверху вниз. Докажите, что эта ломаная – самопересекающаяся.

4. Последовательность целых неотрицательных чисел 0, 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, 2, ... определена условиями: $a_0 = 0$,

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - n \text{ при } a_{n-1} \geqslant n, \\ a_{n-1} + n \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Верно ли, что эта последовательность содержит все целые неотрицательные числа?

5. Пусть M — произвольная точка на отрезке AB; P и Q — такие точки, что $PA = PM$ и $QA = QB$; R — такая точка, что $PAQR$ — параллелограмм. Докажите, что $RM = RB$.

6. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки K, L и M соответственно. Оказалось, что KLM — равносторонний треугольник, а точки пересечения биссектрис треугольников ABC и KLM совпадают. Найдите необходимое и достаточное условие на треугольник ABC, в котором такая ситуация возможна.

7. Дано простое число $p > 2$. Докажите, что среди любых $p+1$ целых чисел можно выбрать $p-1$ число $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ так, чтобы $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$ делилось на p.

8. В 8-А классе $n \geqslant 2$ учеников. Для них организованы кружки, каждый из которых посещают хотя бы двое. Каждые два кружка, у которых есть хотя бы два общих ученика, отличаются по количеству участников. Докажите, что кружков не более $(n-1)^2$.

LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В куче N камней. Аня и Боря по очереди убирают камни из кучи, начинает Аня. За один ход можно убрать либо чётное число камней, большее нуля, но не более половины кучи, либо нечётное число камней, но не менее половины кучи. Побеждает тот, кто уберет последний камень. При каком наименьшем $N \geqslant 100\,000$ Боря может выиграть независимо от действий Ани?

2. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что существует единственная пара целых чисел x и y такая, что

$$(x+2y-a)^2+(2x-y-b)^2 \leqslant 1.$$

3. Не отрывая карандаша от бумаги, Вася нарисовал на плоскости замкнутую ломаную, среди любых двух соседних сторон которой ровно одна вертикальна. Оказалось, что каждую вертикальную сторону Вася рисовал сверху вниз. Докажите, что эта ломаная – самопересекающаяся.

4. Последовательность целых неотрицательных чисел 0, 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, 2, ... определена условиями: $a_0 = 0$,

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - n \text{ при } a_{n-1} \geqslant n, \\ a_{n-1} + n \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Верно ли, что эта последовательность содержит все целые неотрицательные числа?

5. Пусть M — произвольная точка на отрезке AB; P и Q — такие точки, что $PA = PM$ и $QA = QB$; R — такая точка, что $PAQR$ — параллелограмм. Докажите, что $RM = RB$.

6. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены точки K, L и M соответственно. Известно, что KLM — равносторонний треугольник, а точки пересечения биссектрис треугольников ABC и KLM совпадают. Верно ли, что треугольник ABC также равносторонний?

7. Вася задумал натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12 и 14, а затем сложил их. Мог ли Вася получить 46?

8. На кружок ходит 25 школьников. Преподаватель кружка сказал детям предложить ему составы команд на Уральский Турнир (в команде должно быть ровно 6 человек), при этом настоял, чтобы никакие два предложенных состава не пересекались больше чем по одному человеку. Докажите, что школьники не смогут предложить преподавателю больше 16 различных составов команд.