LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, бои за 1–6 места

1. Пусть n натуральное число. В математическом конгрессе принимает участие $6n+4$ математика. За время конгресса проходит $2n+1$ банкет. На каждом банкете математиков рассаживают за один круглый стол на 4 места и n круглых столов на 6 мест. Про пару математиков скажем, что она оказалась в *интересном положении*, если они сидят за одним столом рядом или напротив друг друга. При каких n можно так рассаживать математиков на банкетах, что никакая пара математиков не оказались бы в интересном положении более одного раза?

2. Простое число p и натуральные числа a, b, c, n таковы, что $a, b, c < p$, а все три числа $a+(n-1)b$, $b+(n-1)c$ и $c+(n-1)a$ делятся на p^2. Докажите, что n — составное число.

3. Даны $2n$ шариков ($n \geqslant 2$) двух разных весов (оба веса встречаются). Докажите, что за $n+1$ взвешивание на двухчашечных весах без гирь можно определить количество тяжёлых шариков.

4. Числа a, b и c таковы, что $a+b$, $b+c$ и $c+a$ больше нуля и меньше единицы. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 < 1$.

5. Натуральные числа a, b, c и n таковы, что (i) числа a, b, c, $a+b+c$ попарно взаимно просты; (ii) число $(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)(ab+bc+ca)$ является n-й степенью натурального числа. Докажите, что abc является разностью двух n-х степеней натуральных чисел.

6. Петя, Вася и Толя участвуют в аукционе. Изначально у каждого по 100 монет, на аукцион выставлено 10 книг, в каждом из 10 раундов разыгрывается одна книга. Первым в каждом раунде делает ставку Петя, затем Вася, и уже затем Толя (ставка — это натуральное число монет или ноль, не превосходящая имеющееся у игрока число монет), после чего раунд заканчивается. В течение раунда повторять ненулевую ставку соперника запрещено. Побеждает в раунде тот, кто сделал наибольшую ставку, однако книгу он забирает по цене, равной наибольшей из ставок, предложенных в этом раунде соперниками. Какое наибольшее число книг Петя может гарантированно унести с аукциона независимо от действий его соперников?

7. Точки M и N расположены на сторонах AC и AB соответственно равностороннего треугольника ABC так, что треугольники ABM и ACN — остроугольные. Высоты треугольника ABM пересеклись в точке P, а высоты треугольника ACN — в точке Q; R — точка пересечения BM и CN. Оказалось, что PQR — равносторонний треугольник. Чему могут быть равны углы CBM и BCN?

8. В связном графе из каждой вершины выходит четное число рёбер. Для каждой вершины рассмотрели все возможные циклические маршруты, которые начинаются и заканчиваются в ней, и записали НОД длин всех этих маршрутов. (Циклический маршрут может несколько раз проходить по одной и той же вершине, но не может дважды проходить по ребру. Длина циклического маршрута — это количество его рёбер.) Докажите, что все выписанные числа одинаковы.

LV УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 14–20.02.2020

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, бой за 7 место, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть n натуральное число. В математическом конгрессе принимает участие $6n+4$ математика. За время конгресса проходит $2n+1$ банкет. На каждом банкете математиков рассаживают за один круглый стол на 4 места и n круглых столов на 6 мест. Про пару математиков скажем, что она оказалась в *интересном положении*, если они сидят за одним столом рядом или напротив друг друга. При каких n можно так рассаживать математиков на банкетах, что никакая пара математиков не оказались бы в интересном положении более одного раза?

2. Простое число p и натуральные числа a, b, c, n таковы, что $a, b, c < p$, а все три числа $a+(n-1)b$, $b+(n-1)c$ и $c+(n-1)a$ делятся на p^2. Докажите, что n — составное число.

3. Даны $2n$ шариков ($n \geqslant 2$) двух разных весов (оба веса встречаются). Докажите, что за $n+1$ взвешивание на двухчашечных весах без гирь можно определить количество тяжёлых шариков.

4. Для любых чисел a и b докажите неравенство $\dfrac{a+b}{(4a^2+3)(4b^2+3)} \leqslant \dfrac{1}{16}$.

5. Натуральные числа a, b, c и n таковы, что (i) числа a, b, c, $a+b+c$ попарно взаимно просты; (ii) число $(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)(ab+bc+ca)$ является n-й степенью натурального числа. Докажите, что abc является разностью двух n-х степеней натуральных чисел.

6. Петя, Вася и Толя участвуют в аукционе. Изначально у каждого по 100 монет, на аукцион выставлено 10 книг, в каждом из 10 раундов разыгрывается одна книга. Первым в каждом раунде делает ставку Петя, затем Вася, и уже затем Толя (ставка — это натуральное число монет или ноль, не превосходящая имеющееся у игрока число монет), после чего раунд заканчивается. В течение раунда повторять ненулевую ставку соперника запрещено. Побеждает в раунде тот, кто сделал наибольшую ставку, однако книгу он забирает по цене, равной наибольшей из ставок, предложенных в этом раунде соперниками. Какое наибольшее число книг Петя может гарантированно унести с аукциона независимо от действий его соперников?

7. Точки M и N расположены на сторонах AC и AB соответственно правильного треугольника ABC так, что ABM и ACN — равные остроугольные треугольники. Высоты треугольника ABM пересеклись в точке P, а высоты треугольника ACN — в точке Q; R — точка пересечения BM и CN. Оказалось, что PQR — равносторонний треугольник. Найдите все возможные значения угла CBM.

8. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все отличные от него города, в которые можно попасть из данного, перемещаясь по дорогам страны, и выписали на доску их количество. Докажите, что одно из чисел на доске повторяется не менее 48 раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 20.02.2020

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пусть n натуральное число. В математическом конгрессе принимает участие $6n+4$ математика. За время конгресса проходит $2n+1$ банкет. На каждом банкете математиков рассаживают за один круглый стол на 4 места и n круглых столов на 6 мест. Про пару математиков скажем, что она оказалась в *интересном положении*, если они сидят за одним столом рядом или напротив друг друга. При каких n можно так рассаживать математиков на банкетах, что никакая пара математиков не оказались бы в интересном положении более одного раза?

2. Простое число p и натуральные числа a, b, c, n таковы, что $a, b, c < p$, а все три числа $a+(n-1)b$, $b+(n-1)c$ и $c+(n-1)a$ делятся на p^2. Докажите, что n — составное число.

3. Даны $2n$ шариков ($n \geqslant 2$) двух разных весов (оба веса встречаются). Докажите, что за $n+1$ взвешивание на двухчашечных весах без гирь можно определить количество тяжёлых шариков.

4. Для любых чисел a и b докажите неравенство $\dfrac{a+b}{(4a^2+3)(4b^2+3)} \leqslant \dfrac{1}{16}$.

5. Даны четыре натуральных числа. Для каждой пары чисел посчитали их наибольшие общие делители, в результате получились числа 2, 3, 4, 5, 6 и 9. Какова наименьшая возможная сумма этих чисел?

6. Петя, Вася и Толя участвуют в аукционе. Изначально у каждого по 100 монет, на аукцион выставлено 10 книг, в каждом из 10 раундов разыгрывается одна книга. Первым в каждом раунде делает ставку Петя, затем Вася, и уже затем Толя (ставка — это натуральное число монет или ноль, не превосходящая имеющееся у игрока число монет), после чего раунд заканчивается. В течение раунда повторять ненулевую ставку соперника запрещено. Побеждает в раунде тот, кто сделал наибольшую ставку, однако книгу он забирает по цене, равной наибольшей из ставок, предложенных в этом раунде соперниками. Какое наибольшее число книг Петя может гарантированно унести с аукциона независимо от действий его соперников?

7. Дан равнобедренный треугольник ABC с углом $\angle A$, равным 100°. На сторонах BC и AB соответственно выбраны такие точки M и N, что $BM = BA$ и $BN = CM$. Найдите угол $\angle BNM$.

8. В стране 2020 городов, соединённых сетью дорог. Для каждого города рассмотрели все отличные от него города, в которые можно попасть из данного, перемещаясь по дорогам страны, и выписали на доску их количество. Докажите, что одно из чисел на доске повторяется не менее 45 раз.