

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020

### ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. За круглым столом сидят 100 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: “Среди следующих 10 человек, сидящих справа от меня, ровно трое – лжецы”. Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Приведите все варианты и докажете, что других нет.

2. В куче  $N$  камней. Аня и Боря по очереди убирают камни из кучи, начинает Аня. За один ход можно убрать либо чётное число камней, большее нуля, но не более половины кучи, либо нечётное число камней, но не менее половины кучи. Побеждает тот, кто уберет последний камень. При каком наименьшем  $N \geq 100\,000$  Боря может выиграть независимо от действий Ани?

3. На книжной полке стоят  $n \geq 3$  томов энциклопедии, пронумерованные числами от 1 до  $n$ . Библиотекарь смотрит на две самые левые книги и если левее стоит книга с бóльшим номером, меняет их местами. Затем он проделывает то же самое с книгами, стоящими на втором и третьем слева местах, третьем и четвертом и т.д. Действуя таким образом, он три раза прошел от левого края полки до правого. Определите, сколько существует изначальных расстановок томов, для которых после трех таких проходов тома окажутся упорядочены в порядке возрастания номеров.

4. Найдите все такие натуральные числа  $n$ , что все числа от 1 до  $2n$  можно разбить на пары таким образом, что если числа в парах сложить, то произведение полученных  $n$  сумм будет квадратом натурального числа.

5. Натуральное число  $A \geq 10$  приписали к самому себе, и оказалось, что получившееся число делится на  $A^2$ . Чему могут быть равны первые две цифры числа  $A$ ?

6. Натуральные числа  $a, b, c, d, m$  удовлетворяют условию

$$\text{НОД}(am + b, cm + d) = 2020.$$

Какие натуральные значения может принимать выражение  $ad - bc$ ?

7. Назовем раскраску клеток доски  $8 \times 8$  в черный и белый цвета *хорошей*, если в ней четное число черных клеток. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и у обеих меняет цвет. Для каждой хорошей раскраски Сережа посчитал, за какое наименьшее число ходов можно из этой раскраски получить раскраску, в которой все клетки черные. Чему равно самое большое из найденных Сережей чисел?

8. Докажите, что из любых 60 натуральных чисел можно выбрать 58 чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{58}$  так, чтобы  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 58a_{58}$  делилось на 59.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020

### ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. За круглым столом сидят 100 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: “Среди следующих 10 человек, сидящих справа от меня, ровно трое – лжецы”. Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Приведите все варианты и докажете, что других нет.

2. В куче  $N$  камней. Аня и Боря по очереди убирают камни из кучи, начинает Аня. За один ход можно убрать либо чётное число камней, большее нуля, но не более половины кучи, либо нечётное число камней, но не менее половины кучи. Побеждает тот, кто уберет последний камень. При каком наименьшем  $N \geq 100\,000$  Боря может выиграть независимо от действий Ани?

3. На книжной полке стоят  $n \geq 3$  томов энциклопедии, пронумерованные числами от 1 до  $n$ . Библиотекарь смотрит на две самые левые книги и если левее стоит книга с бóльшим номером, меняет их местами. Затем он проделывает то же самое с книгами, стоящими на втором и третьем слева местах, третьем и четвертом и т.д. Действуя таким образом, он прошел от левого края полки до правого. Определите, сколько существует изначальных расстановок томов, для которых в результате такого прохода тома окажутся упорядочены в порядке возрастания номеров.

4. Найдите все такие натуральные числа  $n$ , что все числа от 1 до  $2n$  можно разбить на пары таким образом, что если числа в парах сложить, то произведение полученных  $n$  сумм будет квадратом натурального числа.

5. Натуральное число  $A \geq 10$  приписали к самому себе, и оказалось, что получившееся число делится на  $A^2$ . Чему могут быть равны первые две цифры числа  $A$ ?

6. Натуральные числа  $a, b, c, d$  удовлетворяют условию

$$\text{НОД}(2a + b, 2c + d) = 2020.$$

Какие натуральные значения может принимать выражение  $ad - bc$ ?

7. Можно ли заполнить все клетки доски  $55 \times 55$  числами 2, 3,  $-5$ , чтобы в каждой строке и в каждом столбце сумма чисел была равна 0?

8. Дано натуральное число  $a$ . Может ли оказаться, что сумма тысячи чисел  $a + 1, 2a + 1, 3a + 1, \dots, 1000a + 1$  делится на каждое из этих тысячи чисел?

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020**

**ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА**

1. За круглым столом сидят 100 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из сидящих за столом произнёс фразу: «Среди следующих 10 человек, сидящих справа от меня, ровно трое – лжецы». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Приведите все варианты и докажете, что других нет.

2. Вася задумал натуральное число. Он посчитал остатки при делении этого числа на 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, а затем сложил их. Мог ли Вася получить 46?

3. На кружок ходит 25 школьников. Преподаватель кружка сказал детям предложить ему состав команды на Уральский Турнир (в команде должно быть ровно 6 человек), при этом настоял, чтобы никакие два предложенных состава не пересекались больше чем по одному человеку. Докажите, что школьники не смогут предложить преподавателю больше 16 различных составов команды.

4. При каких натуральных  $n$  таблицу  $n \times n$  можно заполнить числами 1, 2 и  $-3$  (не обязательно все числа использовать хотя бы по разу) так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялась 0?

5. Натуральное число  $A \geq 10$  приписали к самому себе, и оказалось, что получившееся число делится на  $A^2$ . Чему могут быть равны первые две цифры числа  $A$ ?

6. Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  удовлетворяют условию

$$\text{НОД}(2a + b, 2c + d) = 2020.$$

Докажите, что  $ad - bc$  делится на 2020.

7. На белой доске  $8 \times 8$  чётное число клеток покрашены в черный цвет. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и в обеих меняет цвет. Верно ли, что он всегда сможет покрасить в чёрный цвет всю доску менее чем за 40 ходов?

8. Дано натуральное число  $a$ . Может ли оказаться, что сумма ста чисел  $a + 1$ ,  $2a + 1$ ,  $3a + 1$ ,  $\dots$ ,  $100a + 1$  делится на каждое из этих ста чисел?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 17.02.2020

### ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В ряд стоят 10 жителей острова Рыцарей и Лжецов. Пятеро из них сказали: “Справа от меня в ряду есть рыцарь”, а пятеро других: “Слева от меня в ряду есть лжец”. Какое наибольшее количество лжецов может быть среди них? (Жителями острова Рыцарей и Лжецов являются рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут).

2. На столе лежат 2020 монет. Петя, Витя и Толя играют в игру. Ходят по очереди, однако Петя в начале игры определяет, кто будет ходить первым, кто вторым, кто третьим. За один ход Петя берет одну монету со стола, Витя – 1, 3, 5 или 7 монет, а Толя – 2, 4, 6 или 8 монет. Если перед ходом Толи на столе остается всего одна монета, то он свой ход пропускает. Выигрывает тот, кто своим ходом сможет забрать последнюю монету. Может ли кто-либо из игроков обеспечить себе победу независимо от действий остальных?

3. Какое наибольшее количество сторон может быть у многоугольника, если они все лежат на шести прямых?

4. При каких натуральных  $n$  таблицу  $n \times n$  можно заполнить числами 1, 2 и  $-3$  (не обязательно все числа использовать хотя бы по разу) так, чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равнялась 0?

5. Натуральное число  $A \geq 10$  приписали к самому себе, и оказалось, что получившееся число делится на  $A^2$ . Чему могут быть равны первые две цифры числа  $A$ ?

6. Натуральные числа  $a, b, c, d$  удовлетворяют условию  $\text{НОД}(2a + b, 2c + d) = 2020$ . Докажите, что  $ad - bc$  делится на 2020.

7. На белой доске  $8 \times 8$  чётное число клеток покрашены в черный цвет. За один ход Сережа выбирает две соседние по стороне клетки и в обеих меняет цвет. Верно ли, что он всегда сможет покрасить в чёрный цвет всю доску менее чем за 40 ходов?

8. По велотреку ездят три велосипедиста с постоянными скоростями. Первый обгоняет второго в 4 раза чаще, чем третий. Во сколько раз чаще, чем третий второго, первый обгоняет третьего?