LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число a_1. Для каждого натурального i число a_{i+1} получается так: a_i умножают на 5^{2021}, каждую цифру десятичной записи произведения заменяют её остатком при делении на 2, и получившуюся последовательность цифр рассматривают как двоичную запись a_{i+1}. Докажите, что $a_N = a_{N+2^{2021}}$ при всех достаточно больших N. (USAMTS, 2020/21)

2. Для каждой пары (x, y) вещественных чисел таких, что $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, обозначим $M(x, y)$ наибольшее из чисел xy, $1-x-y+xy$ и $x+y-2xy$. Найдите наименьшее возможное значение $M(x, y)$. (Испания, 2019)

3. На острове расположены 10 стран, некоторые из которых граничат друг с другом. Каждая страна использует свою валюту и располагает единственным обменным пунктом, в котором взамен 10 денежных единиц этой страны посетителю выдают по одной денежной единице всех сопредельных стран. Максим и Фёдор прилетели на остров, имея по 100 денежных единиц каждой из 10 стран (в том числе по 100 малороссийских рублей). Затем их пути разошлись, и каждый из них ударился в загул по обменным пунктам, пока количество денежных единиц каждой страны в кошельке каждого из них не стало меньше 10. Докажите, что у Максима и Фёдора осталось поровну малороссийских рублей. (Középiskolai Matematikai Lapok, B. 5140)

4. В равнобедренном треугольнике с основанием BC угол $\angle CAB$ меньше $60°$. На стороне AC выбрана точке D, для которой $\angle DBC = \angle BAC$. Серединный перпендикуляр к BD и прямая, проходящая через A параллельно BC, пересекаются в точке E. Точка F расположена на прямой AC таким образом, что A принадлежит отрезку CF и $AF = 2AC$. Докажите, что прямая, проходящая через F перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через E перпендикулярно AC, пересекаются на прямой BD. (Киев, отбор на всеукраинскую олимпиаду, 2021)

5. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$, в котором $AB > BC$, ограничивают четырёхугольник, площадь которого равна площади параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение AB/BC. (USAMTS, 2020/21)

6. Дан квадрат со стороной 1. В нем расположен многоугольник периметра 120. Докажите, что у этого многоугольника хотя бы 15 углов имеют градусную меру больше $180°$. (говорят, Израиль, олимпида им. Гроссмана, 2013, но мы там не нашли)

7. На доске написаны натуральные числа $x_1, \ldots, x_m$, среди которых могут быть одинаковые. Известно, что каждое из чисел $F_1, \ldots, F_{1000}$ может быть представлено в виде суммы нескольких чисел, написанных на доске (возможно, одного). При каком наименьшем m это возможно? ($F_1, \ldots, F_{1000}$ – числа Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при $k > 1$.) (Олимпиада "Балтийский путь", 2017)

8. В зоопарке имеется пять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней – лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц, кроме нижних и верхних, отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что каждая обезьяна получит по банану. (Канада, 1989)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что для каждого натурального d число $(a_1+d)(a_2+d)\ldots(a_n+d)$ делится на $a_1a_2\ldots a_n$. Докажите, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – это числа 1, 2, …, n в некотором порядке. (Rioplatense, 2018, уровень 3)

2. Для каждой пары (x, y) вещественных чисел таких, что $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, обозначим $M(x, y)$ наибольшее из чисел xy, $1-x-y+xy$ и $x+y-2xy$. Найдите наименьшее возможное значение $M(x, y)$. (Испания, 2019)

3. На острове расположены 10 стран, некоторые из которых граничат друг с другом. Каждая страна использует свою валюту и располагает единственным обменным пунктом, в котором взамен

10 денежных единиц этой страны посетителю выдают по одной денежной единице всех сопредельных стран. Максим и Фёдор прилетели на остров, имея по 100 денежных единиц каждой из 10 стран (в том числе по 100 малороссийских рублей). Затем их пути разошлись, и каждый из них ударился в загул по обменным пунктам, пока количество денежных единиц каждой страны в кошельке каждого из них не стало меньше 10. Докажите, что у Максима и Фёдора осталось поровну малороссийских рублей. (Közepiskolai Matematikai Lapok, B. 5140)

4. В равнобедренном треугольнике с основанием BC угол $\angle CAB$ меньше $60°$. На стороне AC выбрана точке D, для которой $\angle DBC = \angle BAC$. Серединный перпендикуляр к BD и прямая, проходящая через A параллельно BC, пересекаются в точке E. Точка F расположена на прямой AC таким образом, что A принадлежит отрезку CF и $AF = 2AC$. Докажите, что прямая, проходящая через F перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через E перпендикулярно AC, пересекаются на прямой BD. (Киев, отбор на всеукраинскую олимпиаду, 2021)

5. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$, в котором $AB > BC$, ограничивают четырёхугольник, площадь которого равна площади параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение AB/BC. (USAMTS, 2020/21)

6. Каждая клетка доски $2n \times 2n$ покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску разнообразной, если в ней нет горизонтальных доминошек, состоящих только из чёрных клеток, и нет вертикальных доминошек, состоящих только из белых клеток. Какое наименьшее количество клеток нужно перекрасить, чтобы гарантированно получить из изначальной раскраски разнообразную? (С. Лучинин)

7. На доске написаны натуральные числа $x_1, \ldots, x_m$, среди которых могут быть одинаковые. Известно, что каждое из чисел $F_1, \ldots, F_{1000}$ может быть представлено в виде суммы нескольких чисел, написанных на доске (возможно, одного). При каком наименьшем m это возможно? ($F_1, \ldots, F_{1000}$ – числа Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ при $k > 1$.) (Олимпиада "Балтийский путь", 2017)

8. В зоопарке имеется пять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней – лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц, кроме нижних и верхних, отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что каждая обезьяна получит по банану. (Канада, 1989)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Множество, состоящее из n натуральных чисел, назовём *сбалансированным*, если для каждого натурального k, $1 \leqslant k \leqslant n$, среднее арифметическое любых k элементов множества целое. Найдите наибольшую возможную сумму элементов сбалансированного множества, в котором все числа не превосходят 2021. (Мексика, 2017)

2. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют условиям $|x+y| = 1-z$, $|y+z| = 1-x$, $|z+x| = 1-y$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+y+z$. (Чехия, школьный этап, категория B, 2020/21)

3. На острове расположены 10 стран, некоторые из которых граничат друг с другом. Каждая страна использует свою валюту и располагает единственным обменным пунктом, в котором взамен 10 денежных единиц этой страны посетителю выдают по одной денежной единице всех сопредельных стран. Максим и Фёдор прилетели на остров, имея по 100 денежных единиц каждой из 10 стран (в том числе по 100 малороссийских рублей). Затем их пути разошлись, и каждый из них ударился в загул по обменным пунктам, пока количество денежных единиц каждой страны в кошельке каждого из них не стало меньше 10. Докажите, что у Максима и Фёдора осталось поровну малороссийских рублей. (Közepiskolai Matematikai Lapok, B. 5140)

4. В равнобедренном треугольнике с основанием BC угол $\angle CAB$ меньше $60°$. На стороне AC выбрана точке D, для которой $\angle DBC = \angle BAC$. Серединный перпендикуляр к BD и прямая, проходящая через A параллельно BC, пересекаются в точке E. Точка F расположена на прямой AC таким образом, что A принадлежит отрезку CF и $AF = 2AC$. Докажите, что прямая, проходящая через F

перпендикулярно AB, и прямая, проходящая через E перпендикулярно AC, пересекаются на прямой BD. (Киев, отбор на всеукраинскую олимпиаду, 2021)

5. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$, в котором $AB > BC$, ограничивают четырёхугольник, площадь которого равна площади параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение AB/BC. (USAMTS, 2020/21)

6. Каждая клетка доски $2n \times 2n$ покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску разнообразной, если в ней нет горизонтальных доминошек, состоящих только из чёрных клеток, и нет вертикальных доминошек, состоящих только из белых клеток. Какое наименьшее количество клеток нужно перекрасить, чтобы гарантированно получить из изначальной раскраски разнообразную? (С. Лучинин)

7. Дано натуральное число n. Определим последовательность (a_n) условиями $a_0 = 1$, $a_{2i+1} = a_i$ и $a_{2i+2} = a_i + a_{i+1}$ при каждом целом неотрицательном i. Найдите сумму $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n-1}$. (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2020)

8. В зоопарке имеется пять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней – лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц, кроме нижних и верхних, отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что каждая обезьяна получит по банану. (Канада, 1989)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Множество, состоящее из n натуральных чисел, назовём *сбалансированным*, если для каждого натурального k, $1 \leqslant k \leqslant n$, среднее арифметическое любых k элементов множества целое. Найдите наибольшую возможную сумму элементов сбалансированного множества, в котором все числа не превосходят 2021. (Мексика, 2017)

2. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют условиям $|x+y| = 1-z$, $|y+z| = 1-x$, $|z+x| = 1-y$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+y+z$. (Чехия, школьный этап, категория B, 2020/21)

3. В стране 10 городов и m автострад, каждая из которых соединяет два города и не проходит через другие города. При каком наименьшем m заведомо можно назначить некоторые города мегаполисами так, чтобы каждый из них был соединён автострадой не менее, чем с пятью другими мегаполисами? (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2020)

4. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AC и BC наружу построены квадраты $ACQT$ и $BCPS$. На отрезке AP взята точка F такая, что $\angle BQP = \angle CFP$. Доказать, что прямая CF делит отрезок AB пополам. (из 7 класса)

5. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма $ABCD$, в котором $AB > BC$, ограничивают четырёхугольник, площадь которого равна площади параллелограмма $ABCD$. Найдите отношение AB/BC. (USAMTS, 2020/21)

6. Каждая клетка доски $2n \times 2n$ покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску разнообразной, если в ней нет горизонтальных доминошек, состоящих только из чёрных клеток, и нет вертикальных доминошек, состоящих только из белых клеток. Какое наименьшее количество клеток нужно перекрасить, чтобы гарантированно получить из изначальной раскраски разнообразную? (С. Лучинин)

7. Дано натуральное число n. Определим последовательность (a_n) условиями $a_0 = 1$, $a_{2i+1} = a_i$ и $a_{2i+2} = a_i + a_{i+1}$ при каждом целом неотрицательном i. Найдите сумму $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n-1}$. (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2020)

8. В зоопарке имеется пять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней – лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц, кроме нижних и верхних, отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что каждая обезьяна получит по банану. (Канада, 1989)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Существуют ли такие натуральные числа a_1, a_2, …, a_{2021} (не обязательно различные), что a_k делится на k для всех k и сумма $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{2021}} = 1$? (Бразилия, 2020)

2. Дано натуральное $n > 2$. Диме необходимо вписать числа от 1 до n^2 в клетки квадрата $n \times n$ так, чтобы были выполнены условия:

(i) все числа встретились по одному разу;

(ii) в каждой строке числа идут в порядке возрастания слева направо;

(iii) в каждом столбце числа идут в порядке возрастания сверху вниз.

Докажите, что у Димы хотя бы $2^{2n-3} \cdot 3^{2n-5} \cdot 4^{2n-7} \cdot \ldots \cdot (n-1)^3 \cdot n$ способов сделать это.

3. В начале игры в кругу стоят 20 жёлтых стаканов. Имеется также запас из 47 белых и 33 жёлтых стаканов. Паша и Варя по очереди выбирают любой по цвету стакан из запаса и ставят его между некоторыми двумя стаканами, стоящими в круге. Начинает Паша. Варя хочет к концу игры получить расстановку с пятью подряд идущими жёлтыми стаканами. Паша хочет ей помешать. Кто выиграет при правильной игре? (А.Смолин)

4. Доска в форме правильного шестиугольника со стороной n разрезана на правильные треугольники со стороной 1. Треугольники раскрашены в чёрный и белый цвета так, что соседние по стороне треугольники имеют разный цвет. Ладья, стоящая в клетке, бьёт вдоль направлений, параллельных сторонам шестиугольника. На рисунке показан пример такой доски для $n = 4$ и того, как бьёт ладья.

На доске расставили $2n$ не бьющих друг друга ладей. Докажите, что ровно половина из них стоит на белых треугольниках. (Д.В.Карпов, Россия, отбор на ММО, 1995)

5. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AC и BC наружу построены квадраты $ACQT$ и $BCPS$. На отрезке AP взята точка F такая, что $\angle BQP = \angle CFP$. Докажите, что прямая CF делит отрезок AB пополам.

6. Вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют условиям

$$abc - d = 1, \quad bcd - a = 2, \quad cda - b = 3, \quad dab - c = -6.$$

Докажите, что $a + b + c + d \neq 0$. (Юниорская Балканиада, 2010; V Южный математический турнир)

7. В зоопарке имеется пять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней – лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что каждая обезьяна получит по банану. (от 8 класса)

8. Конечно или бесконечно множество таких пар натуральных чисел (a, b), что $\frac{a(a+2021)}{b(b+2021)}$ равно квадрату простого числа?

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существуют ли такие натуральные числа a_1, a_2, …, a_{2021} (не обязательно различные), что a_k делится на k для всех k и сумма $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{2021}} = 1$? (Бразилия, 2020)

2. Дано натуральное $n > 2$. Диме необходимо вписать числа от 1 до n^2 в клетки квадрата $n \times n$ так, чтобы были выполнены условия:

(i) все числа встретились по одному разу;

(ii) в каждой строке числа идут в порядке возрастания слева направо;

(iii) в каждом столбце числа идут в порядке возрастания сверху вниз.

Докажите, что у Димы хотя бы $2^{2n-3} \cdot 3^{2n-5} \cdot 4^{2n-7} \cdot \ldots \cdot (n-1)^3 \cdot n$ способов сделать это.

3. В начале игры в кругу стоят 20 жёлтых стаканов. Имеется также запас из 47 белых и 33 жёлтых стаканов. Паша и Варя по очереди выбирают любой по цвету стакан из запаса и ставят его между некоторыми двумя стаканами, стоящими в круге. Начинает Паша. Паша хочет к концу игры

получить расстановку с пятью подряд идущими жёлтыми стаканами. Варя хочет ему помешать. Кто выиграет при правильной игре? (А.Смолин)

4. Пронумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$. Найдите все натуральные n, для которых $p_1! + p_2! + \ldots + p_n! = a^b$ при некоторых натуральных a и $b > 1$. Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$. (Киевская городская олимпиада, 2020)

5. Про два рациональных числа a и b известно, что $\{a^2 + b\} = \{b^2 + a\}$. Докажите, что эти дробные части не могут быть равны $\frac{1}{2021}$. Напомним, что дробная часть числа $\{x\}$ – наименьшее неотрицательное число, которое надо вычесть из числа x, чтобы получилось целое число. (Олимпиада Русановского лицея, г.Киев, 2019)

6. Дан остроугольный треугольник ABC. На сторонах AC и BC наружу построены квадраты $ACQT$ и $BCPS$. На отрезке AP взята точка F такая, что $\angle BQP = \angle CFP$. Докажите, что прямая CF делит отрезок AB пополам.

7. Каждая клетка доски $2n \times 2n$ покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску *разнообразной*, если в ней нет ни одной горизонтальной доминошки, состоящей только из чёрных клеток, и нет ни одной вертикальной доминошки, состоящей только из белых клеток. Какое наименьшее количество клеток нужно перекрасить, чтобы гарантированно получить из изначальной раскраски разнообразную? Доминошкой называют прямоугольник 1×2. (С. Лучинин)

8. Рассмотрим пошаговый бой, в котором участвуют два бойца с параметрами ЗДОРОВЬЕ, АТАКА и СКОРОСТЬ, происходящий по следующим правилам. В очередном раунде бойцы атакуют друг друга по-очереди, нанося урон, равный своей АТАКЕ, причём начинает тот, у кого скорость больше. Если же скорость у них одинакова, они атакуют друг друга одновременно. Если у бойца ЗДОРОВЬЕ стало неположительным, он умирает. Параметры бойцов – неотрицательные целые числа, причём ЗДОРОВЬЕ не меньше 1. Мы хотим создать супербойца, который будет побеждать любого бойца с суммой параметров 100 и выживать при этом. При какой минимальной сумме параметров супербойца это получится сделать? (В.Новиков)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное $n > 2$. Диме необходимо вписать числа от 1 до n^2 в клетки квадрата $n \times n$ так, чтобы были выполнены условия:

(i) все числа встретились по одному разу;

(ii) в каждой строке числа идут в порядке возрастания слева направо;

(iii) в каждом столбце числа идут в порядке возрастания сверху вниз.

Докажите, что у Димы хотя бы $2^{2n-3} \cdot 3^{2n-5} \cdot 4^{2n-7} \cdot \ldots \cdot (n-1)^3 \cdot n$ способов сделать это.

2. Пронумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$. Найдите все натуральные n, для которых $p_1! + p_2! + \ldots + p_n! = a^b$ при некоторых натуральных a и $b > 1$. Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$. (Киевская городская олимпиада, 2020)

3. На празднование Дня Именинника в отряде было куплено несколько пицц. На всех мальчиков было заказано 14 пицц, при этом каждому мальчику досталось поровну. Каждой девочке тоже досталось поровну, но в два раза меньше, чем мальчику. Сколько всего пицц было куплено, если известно, что девочек в отряде 13, а мальчиков больше, чем девочек? (Олимпиада Русановского лицея, Киев, 2019)

4. Сколько есть наборов из 5 двузначных чисел, делящихся на три, в которых каждая цифра встречается ровно по одному разу? (Математический турнир им. Ляшко, устная олимпиада, 2020)

5. Каждая клетка доски $2n \times 2n$ покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску *разнообразной*, если в ней нет ни одной горизонтальной доминошки, состоящей только из чёрных клеток, и нет ни одной вертикальной доминошки, состоящей только из белых клеток. Какое наименьшее количество клеток нужно перекрасить, чтобы гарантированно получить из изначальной раскраски разнообразную? Доминошкой называют прямоугольник 1×2. (С. Лучинин)

6. Первоклассник Вася учится сложению. Мама выписала на доске семь различных чисел от 1 до 26, а Вася записал все возможные суммы двух, трех, четырех и т.д. (до семи) чисел из маминых. Могут ли все выписанные на доске числа оказаться различными? (осенний математический турнир им. академика Стефана Додунекова, Болгария, 2018)

7. Противоположные стороны шестиугольника попарно параллельны. Четыре стороны равны 20 см, еще одна равна 21 см. Чему может быть равна шестая сторона? (осенний математический турнир им. академика Стефана Додунекова, Болгария, 2018)

8. Рассмотрим пошаговый бой, в котором участвуют два бойца с параметрами ЗДОРОВЬЕ, АТАКА и СКОРОСТЬ, происходящий по следующим правилам. В очередном раунде бойцы атакуют друг друга по-очереди, нанося урон, равный своей АТАКЕ, причём начинает тот, у кого скорость больше. Если же скорость у них одинакова, они атакуют друг друга одновременно. Если у бойца ЗДОРОВЬЕ стало неположительным, он умирает. Параметры бойцов – неотрицательные целые числа, причём ЗДОРОВЬЕ не меньше 1. Мы хотим создать супербойца, который будет побеждать любого бойца с суммой параметров 100 и выживать при этом. При какой минимальной сумме параметров супербойца это получится сделать? (В.Новиков)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В ряд стоят несколько натуральных чисел, ряд начинается и заканчивается числом 1. Оказалось, что сумма никаких нескольких первых чисел не делится на 3. Докажите, что если любое некрайнее число уменьшить или увеличить на 1, то это свойство нарушится. (С. Берлов)

2. Дано натуральное $n > 10$. Диме необходимо вписать числа от 1 до n^2 в клетки квадрата $n \times n$ так, чтобы были выполнены условия:

(i) все числа встретились по одному разу;

(ii) в каждой строке числа идут в порядке возрастания слева направо;

(iii) в каждом столбце числа идут в порядке возрастания сверху вниз.

Докажите, что у Димы не меньше $2^{2n-3} \cdot 3^{2n-5} \cdot 4^{2n-7} \cdot \ldots \cdot (n-1)^3 \cdot n$ способов сделать это. (В.Брагин)

3. Пираты на “Чёрной Жемчужине” перессорились, в результате чего каждый из них выхватил по два пистолета и направил их на двух других пиратов. Капитан Джек Воробей после этого назвал имена всех пиратов в каком-то порядке. Пират, которого называли по имени, сразу выстреливал из обоих своих пистолетов (если цель уже убита, он все равно в нее стреляет). Пират, в которого выстрелили, мгновенно умирает. Оказалось, что в результате погибло 100 пиратов. Для какого наибольшего k можно заведомо утверждать, что какой бы порядок ни выбрал Джек, погибло бы не менее k пиратов? (Центральноевропейская математическая олимпиада, 2018. усложнение)

4. Существуют ли такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$, что a_k делится на k для всех k и сумма $\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{2021}} = 1$? (Бразилия, 2020)

5. Даны различные натуральные числа x и y такие, что если к x прибавить наибольший делитель y, отличный от y, то получится тот же результат, что и если к y прибавить наибольший делитель x, отличный от x. Докажите, что один из этих наибольших делителей делится на другой. (С. Берлов)

6. На острове 10 стран, некоторые из которых граничат друг с другом. У каждой страны собственная валюта. В Главном банке острова можно обменять 10 единиц валюты любой страны на валюты всех соседей этой страны, по одной единице каждой. Два предпринимателя Билл и Стив имеют по 100 единиц валюты каждой из стран. Каждый из них произвёл несколько обменов в Главном банке, в результате чего у каждого из них осталось не более одной единицы валюты каждой из стран. Докажите, что у них осталось поровну Мухляндских тугриков (Мухляндия – одна из стран на острове, тугрики – их валюта). (Középiskolai Matematikai Lapok, B. 5140, упрощение)

7. В зоопарке имеется десять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней – лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки, к самым верхним и самым нижним ступенькам лестниц верёвки не привязаны). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что все бананы будут съедены. (Канада, 1989)

8. Каждая клетка доски 300×300 покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску *разнообразной*, если в ней нет ни двух соседних по горизонтали чёрных клеток, ни двух соседних по вертикали белых клеток. При каком наименьшем k можно утверждать, что из любой раскраски можно получить разнообразную, перекрасив не более, чем k клеток? (С. Лучинин)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021

ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В ряд стоят несколько натуральных чисел, ряд начинается и заканчивается числом 1. Оказалось, что сумма никаких нескольких первых чисел не делится на 3. Докажите, что если любое некрайнее число уменьшить или увеличить на 1, то это свойство нарушится. (С. Берлов)

2. Дано натуральное $n > 10$. Диме необходимо вписать числа от 1 до n^2 в клетки квадрата $n \times n$ так, чтобы были выполнены условия:

(i) все числа встретились по одному разу;

(ii) в каждой строке числа идут в порядке возрастания слева направо;

(iii) в каждом столбце числа идут в порядке возрастания сверху вниз.

Докажите, что у Димы не меньше $2^{2n-3} \cdot 3^{2n-5} \cdot 4^{2n-7} \cdot \ldots \cdot (n-1)^3 \cdot n$ способов сделать это. (В.Брагин)

3. Пираты на "Чёрной Жемчужине" перессорились, в результате чего каждый из них выхватил по два пистолета и направил их на двух других пиратов. Капитан Джек Воробей после этого назвал имена всех пиратов в каком-то порядке. Пират, которого называли по имени, сразу выстреливал из обоих своих пистолетов (если цель уже убита, он все равно в нее стреляет). Пират, в которого выстрелили, мгновенно умирает. Оказалось, что в результате погибло 100 пиратов. Для какого наибольшего k можно заведомо утверждать, что какой бы порядок ни выбрал Джек, погибло бы не менее k пиратов? (Центральноевропейская математическая олимпиада, 2018. усложнение)

4. Мама с Машей договорились, что мама купит Маше несколько одинаковых коробок конфет на день рождения, а Маша раздаст конфеты всем своим друзьям как можно больше конфет поровну, и оставшиеся конфеты может оставить себе. Если мама купит Маше две коробки конфет, то Маше достанется три конфеты, а если мама купит пять коробок, то Маше достанется 18 конфет. Сколько у Маши может быть друзей?

5. Даны два последовательных натуральных числа. Если к каждому из них прибавить его наибольший собственный делитель – получатся одинаковые результаты. Чему могут быть равны эти числа? (Напомним, что собственный делитель числа – это делитель, не совпадающий с самим числом.) (С. Берлов)

6. Существуют ли пять таких различных чисел (не обязательно положительных), что при выкидывании любого из них оставшиеся четыре можно разбить на две пары, произведения в которых равны? (Д.Ширяев)

7. В зоопарке имеется десять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней – лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки, к самым верхним и самым нижним ступенькам лестниц верёвки не привязаны). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что все бананы будут съедены. (Канада, 1989)

8. Каждая клетка доски 300×300 покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску *разнообразной*, если в ней нет ни двух соседних по горизонтали чёрных клеток, ни двух соседних по вертикали белых клеток. При каком наименьшем k можно утверждать, что из любой раскраски можно получить разнообразную, перекрасив не более, чем k клеток? (С. Лучинин)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021

ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В Цветочном городе из крана течёт арбузный сок. Знайка подставил под кран кружку и стал её наполнять. А Незнайка и Пончик стали через трубочки этот сок из кружки пить, каждый со своей скоростью. Через 10 минут кружка оказалась заполнена наполовину. Незнайка пить перестал, а Пончик продолжил. Ещё через 6 минут кружка заполнилась. Кран закрыли, а полную кружку через трубочку выпил Незнайка. Сколько времени ему на это потребовалось?

2. На доске написано 30 натуральных чисел. Можно любые 4 числа одновременно умножать на 4 или к любым трём числам одновременно прибавлять 1. Всегда ли можно все числа сделать равными?

(С. Берлов)

3. Пираты на Чёрной Жемчужине перессорились, в результате чего каждый из них выхватил по два пистолета и направил их на двух других пиратов. Джек Воробей после этого назвал имена пиратов в каком-то порядке. Пират, имя которого назвали, сразу выстреливал из обоих своих пистолетов (если цель уже убита, он все равно в неё стреляет). Пират, в которого выстрелили, мгновенно умирает. Оказалось, что в результате погибло 16 пиратов. Мог ли Джек выбрать порядок перечисления имён пиратов так, чтобы погибших пиратов оказалось бы не больше 5? (Центральноевропейская математическая олимпиада, 2018)

4. По кругу расставили числа от 1 до 2021 в каком-то порядке, затем между любыми двумя соседними числами записали их положительную разность, а изначальные числа стерли. Какое наибольшее значение может принимать наименьшее из оставшихся на доске чисел?

5. Три последовательных натуральных числа $a < b < c$ обладают следующим свойством: если к a прибавить наибольший собственный делитель c, к b прибавить наибольший собственный делитель a, а к c прибавить наибольший собственный делитель b, то получится один и тот же результат. Чему могут быть равны эти числа? Собственный делитель числа – это делитель, не совпадающий с самим числом. (С. Берлов, упрощение)

6. Есть 2 обезьянки и 2 лестницы, на верхних ступеньках обеих лестниц лежит по банану. Несколько верёвок соединяют лестницы, каждая верёвка соединяет две лестницы. Нет двух верёвок, прикрепленных к одной ступеньке одной и той же лестницы, а к самым верхним ступенькам лестниц верёвки не привязаны. Каждая обезьянка сидит у подножия своей лестницы. Обезьянки взбираются по лестницам, но каждый раз, когда они натыкаются на верёвку, они перебираются по ней к лестнице на другом конце верёвки, а затем продолжают карабкаться вверх. Докажите, что каждая обезьянка получит банан. (Канада, 1989)

7. Мама с Машей договорились, что мама купит Маше несколько одинаковых коробок конфет на день рождения, а Маша раздаст как можно больше конфет своим друзьям поровну, и оставшиеся конфеты может съесть сама. Если мама купит Маше две коробки конфет, то Маше достанется всего 3 конфетки, а если мама купит пять коробок, то Маше достанется 18 конфет. Может ли Маша попросить у мамы столько коробок, чтобы съесть больше 18 конфет? (А.Сафиуллина)

8. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску разнообразной, если в ней нет горизонтальных доминошек, состоящих только из чёрных клеток, и нет вертикальных доминошек, состоящих только из белых клеток. Какое наименьшее количество клеток нужно перекрасить, чтобы гарантированно получить из изначальной раскраски разнообразную? (С. Лучинин)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 05.05.2021
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В ряд стоят несколько целых чисел, первое и последнее из которых равно 1. Оказалось, что сумма никаких нескольких первых чисел не делится на 3. Докажите, что если любое некрайнее число увеличить или уменьшить на 1, то это свойство нарушится. (С. Берлов)

2. Есть 2 обезьянки и 2 лестницы, и на вершине каждой лестницы есть банан. Несколько верёвок соединяют лестницы, каждая верёвка соединяет две лестницы. Нет двух верёвок, прикрепленных к одной ступеньке одной и той же лестницы, а к самым верхним ступенькам лестниц верёвки не привязаны. Каждая обезьянка сидит у подножия своей лестницы. Обезьянки взбираются по лестницам, но каждый раз, когда они натыкаются на верёвку, они перебираются по ней к лестнице на другом конце верёвки, а затем продолжают карабкаться вверх. Покажите, что независимо от того, сколько веревок есть, каждая обезьянка получает банан. (Канада, 1989)

3. Пираты на “Чёрной Жемчужине” перессорились, в результате чего каждый из них выхватил по два револьвера и направил их на двух других пиратов. Джек Воробей после этого назвал имена пиратов в каком-то порядке. Пират, которого называли по имени, сразу выстреливал из обоих своих револьверов (если цель уже убита, он все равно в нее стреляет). Пират, в которого выстрелили, мгновенно умирает. Оказалось, что в результате погибло 16 пиратов. Мог ли Джек выбрать такой порядок перечисления имён пиратов, при котором погибших пиратов оказалось бы не больше 5? (Центральноевропейская математическая олимпиада, 2018)

4. По кругу расставили числа от 1 до 2021 в каком-то порядке. Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность между большим и меньшим. При какой начальной расстановке наименьшая из всех этих разностей принимает наибольшее значение? (Фольклор)

5. Какие два последовательных натуральных числа a и b обладают следующим свойством: если к a прибавить наибольший собственный делитель b, то получится тот же результат, что и если к b прибавить наибольший собственный делитель a? Напомним, что собственный делитель числа – это делитель, не совпадающий с самим числом. (С. Берлов, упрощение С. Волченкова)

6. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Будем называть раскраску *разнообразной*, если в ней нет соседних по горизонтали чёрных клеток, и нет соседних по вертикали белых клеток. Сколько существует разнообразных раскрасок? (С. Лучинин, упрощение)

7. Мама с Машей договорились, что мама купит Маше несколько одинаковых коробок конфет на день рождения, а Маша раздаст как можно больше конфет своим друзьям поровну, и оставшиеся конфеты может съесть сама. Если мама купит Маше две коробки конфет, то Маше достанется всего 3 конфетки, а если мама купит пять коробок, то Маше достанется 18 конфет. Сколько у Маши может быть друзей? (А.Сафиуллина)

8. В Цветочном городе из крана течёт арбузный сок. Знайка подставил под кран кружку и стал её наполнять. А Незнайка и Пончик стали через трубочки этот сок из кружки пить, каждый со своей скоростью. Через 10 минут кружка оказалась заполнена наполовину. Незнайка пить перестал, а Пончик продолжил. Ещё через 6 минут кружка заполнилась. Кран закрыли, а полную кружку через трубочку выпил Незнайка. Сколько времени ему на это потребовалось? (С. Волченков. Ярославские дистанционные игры)