LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$, $AB = BC$, $CD = DA$, O – точка пересечения диагоналей. Через точку O провели прямую ℓ, которая пересекает отрезки AB и CD в точках K и L соответственно. Также через точку O провели прямую m, которая пересекает отрезки BC и DA в точках P и Q соответственно. Отрезки KQ и PL пересекаются отрезок AC в точках S и T соответственно. Докажите, что $OS = OT$. (Crux Mathematicorum, 4505, vol.46, №1)

2. Найдите все четверки чисел x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что $x_i + x_j = x_k^2 + x_\ell^2 + 6x_kx_\ell$ для любой перестановки i, j, k, ℓ чисел 1, 2, 3, 4. (Киев, отбор на Всеукраискую олимпиаду, 2021)

3. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет. С конфетами в столовую не пускают, поэтому он раздаёт по одной конфете следующим n детям, заходит в столовую и остаётся там навсегда. После этого дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет (ненадолго) снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

4. Дано натуральное n. Какое наибольшее количество упорядоченных троек целых неотрицательных чисел (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), … можно выбрать так, чтобы сумма трёх чисел в каждой тройке была равна n, и никакое число не встречалось в двух тройках на одной и той же позиции? (Közepiskolai Matematikai Lapok, 2018)

5. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C касается катетов BC и AC в точках D и E соответственно. Точки G и H на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $BD = CG$ и $AE = CH$. Отрезки DH и EG пересекаются в точке M. Докажите, что отличная от M точка пересечения описанных окружностей треугольников DGM и EHM лежит на вписанной окружности треугольника ABC. (Közepiskolai Matematikai Lapok, B. 5148)

6. Пусть $n \geqslant 2$ – натуральное число. Последовательность целых чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ назовём *кировской*, если наибольший общий делитель всех чисел вида $a_i - a_j$ $(a_i \neq a_j)$ равен 1. За одно действие разрешается выбрать два числа a_k и a_ℓ $(k \neq \ell)$ и заменить число a_ℓ в последовательности на число $2a_k - a_\ell$. Докажите, что из $2^n - 1$ кировских последовательностей можно выбрать две такие, что из первой можно получить вторую за несколько действий. (Ибероамериканская олимпиада, 2020)

7. Даны натуральные числа a, b и c. Вася разложил по кругу a камней, b ножниц и c бумаг. Предмет можно поменять местами с **соседним по часовой стрелке** в следующих трёх случаях: если предмет – камень, а сосед – ножницы; если предмет – ножницы, а сосед – бумага; если предмет – бумага, а сосед – камень. Какое наибольшее количество таких перестановок может сделать Вася? Начальную расстановку предметов он выбирает сам. (США, отбор на сборы, 2020/21)

8. На плоскости отмечена 2021 точка, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а также проведены все возможные отрезки, соединяющие эти точки. На 1011 из этих отрезков отмечена их середина. Обязательно ли, пользуясь одной линейкой, можно отметить середины всех оставшихся отрезков? (Индия, 2021)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$, $AB = BC$, $CD = DA$, O – точка пересечения диагоналей. Через точку O провели прямую ℓ, которая пересекает отрезки AB и CD в точках K и L соответственно. Также через точку O провели прямую m, которая пересекает отрезки BC и DA в точках P и Q соответственно. Отрезки KQ и PL пересекаются отрезок AC в точках S и T соответственно. Докажите, что $OS = OT$. (Crux Mathematicorum, 4505, vol.46, №1)

2. Найдите все четверки чисел x_1, x_2, x_3, x_4 такие, что $x_i + x_j = x_k^2 + x_\ell^2 + 6x_kx_\ell$ для любой перестановки i, j, k, ℓ чисел 1, 2, 3, 4. (Киев, отбор на Всеукраискую олимпиаду, 2021)

3. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого

ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет. С конфетами в столовую не пускают, поэтому он раздаёт по одной конфете следующим n детям, заходит в столовую и остаётся там навсегда. После этого дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет (ненадолго) снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

4. Какое наибольшее количество упорядоченных троек целых неотрицательных чисел (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …можно выбрать так, чтобы сумма трёх чисел в каждой тройке была равна 2021, и никакое число не встречалось в двух тройках на одной и той же позиции? (Közepiskolai Matematikai Lapok, 2018, частный случай)

5. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C касается катетов BC и AC в точках D и E соответственно. Точки G и H на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $BD = CG$ и $AE = CH$. Отрезки DH и EG пересекаются в точке M. Докажите, что отличная от M точка пересечения описанных окружностей треугольников DGM и EHM лежит на вписанной окружности треугольника ABC. (Közepiskolai Matematikai Lapok, B. 5148)

6. Найдите наименьшее натуральное N такое, что в арифметической прогрессии из 180 членов не может быть ровно N целых чисел. (OMA Foros Open, 2020)

7. Даны натуральные числа a, b и c. Вася разложил по кругу a камней, b ножниц и c бумаг. Предмет можно поменять местами с **соседним по часовой стрелке** в следующих трёх случаях: если предмет – камень, а сосед – ножницы; если предмет – ножницы, а сосед – бумага; если предмет – бумага, а сосед – камень. Какое наибольшее количество таких перестановок может сделать Вася? Начальную расстановку предметов он выбирает сам. (США, отбор на сборы, 2020/21)

8. На плоскости отмечена 2021 точка, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а также проведены все возможные отрезки, соединяющие эти точки. На 1011 из этих отрезков отмечена их середина. Обязательно ли, пользуясь одной линейкой, можно отметить середины всех оставшихся отрезков? (Индия, 2021)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$, $AB = BC$, $CD = DA$, O – точка пересечения диагоналей. Через точку O провели прямую ℓ, которая пересекает отрезки AB и CD в точках K и L соответственно. Также через точку O провели прямую m, которая пересекает отрезки BC и DA в точках P и Q соответственно. Отрезки KQ и PL пересекаются отрезок AC в точках S и T соответственно. Докажите, что $OS = OT$. (Crux Mathematicorum, 4505, vol.46, №1)

2. Докажите, что существует лишь конечное множество целых b таких, что квадратные трёхчлены $x^2 + 2020x + b$ и $x^2 + 2021x + b$ имеют целые корни. (С. Лучинин)

3. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет. С конфетами в столовую не пускают, поэтому он раздаёт по одной конфете следующим n детям, заходит в столовую и остаётся там навсегда. После этого дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет (ненадолго) снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

4. Какое наибольшее количество упорядоченных троек целых неотрицательных чисел (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), …можно выбрать так, чтобы сумма трёх чисел в каждой тройке была равна 2021, и никакое число не встречалось в двух тройках на одной и той же позиции? (Közepiskolai Matematikai Lapok, 2018, частный случай)

5. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C касается катетов BC и AC в точках D и E соответственно. Точки G и H на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $BD = CG$ и $AE = CH$. Отрезки DH и EG пересекаются в точке M. Докажите, что отличная от M точка пересечения описанных окружностей треугольников DGM и EHM лежит на вписанной окружности треугольника ABC. (Közepiskolai Matematikai Lapok, B. 5148)

6. Найдите наименьшее натуральное N такое, что в арифметической прогрессии из 180 членов не может быть ровно N целых чисел. (OMA Foros Open, 2020)

7. Даны натуральные числа a, b и c. Вася разложил по кругу a камней, b ножниц и c бумаг. Предмет можно поменять местами с **соседним по часовой стрелке** в следующих трёх случаях: если предмет – камень, а сосед – ножницы; если предмет – ножницы, а сосед – бумага; если предмет – бумага, а сосед – камень. Какое наибольшее количество таких перестановок может сделать Вася? Начальную расстановку предметов он выбирает сам. (США, отбор на сборы, 2020/21)

8. На плоскости построена замкнутая 2021-звенная ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. На каждом звене, кроме одного, отмечена середина. Обязательно ли, пользуясь одной линейкой, можно отметить середину оставшегося звена? (Индия, 2021, радикальное упрощение)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В четырёхугольнике $ABCD$, $AB = BC$, $CD = DA$, O – точка пересечения диагоналей. Через точку O провели прямую ℓ, которая пересекает отрезки AB и CD в точках K и L соответственно. Также через точку O провели прямую m, которая пересекает отрезки BC и DA в точках P и Q соответственно. Отрезки KQ и PL пересекаются отрезок AC в точках S и T соответственно. Докажите, что $OS = OT$. (Crux Mathematicorum, 4505, vol.46, №1)

2. Докажите, что существует лишь конечное множество целых b таких, что квадратные трёхчлены $x^2 + 2020x + b$ и $x^2 + 2021x + b$ имеют целые корни. (С. Лучинин)

3. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет. С конфетами в столовую не пускают, поэтому он раздаёт по одной конфете следующим n детям, заходит в столовую и остаётся там навсегда. После этого дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет (ненадолго) снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

4. В строчку выписаны 2021 единиц; между каждыми двумя соседними единицами оставлено место для знака арифметического действия. На все свободные места всеми способами вписываются знаки $+$, $-$, $\times$ и $:$, и для каждого способа подсчитывается результат. Найдите сумму всех полученных результатов. (OMA Foros Open, 2019)

5. Пусть BH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Точка D на отрезке BH такова, что $AB = 2BD$ и $BC = 2CD$. Найдите $\angle BCD$. (Япония, олимпиада для юниоров, финал, 2020)

6. Найдите наименьшее натуральное N такое, что в арифметической прогрессии из 180 членов не может быть ровно N целых чисел. (OMA Foros Open, 2020)

7. У Миши в мешке лежат 2020 красных и 2021 зеленых шариков. Каждую минуту он вынимал из мешка два шарика, смотрит на них, и если они были одного цвета, клал вместо них в мешок два шарика другого цвета (красные вместо зелёных и зелёные вместо красных). Если вынутые шарики были разноцветные, Миша их выкидывал. Через некоторое время в мешке остался один шар. Какого цвета он может быть? (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2021)

8. На плоскости построена замкнутая 2021-звенная ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. На каждом звене, кроме одного, отмечена середина. Обязательно ли, пользуясь одной линейкой, можно отметить середину оставшегося звена? (Индия, 2021, радикальное упрощение)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Действительные x, y, z, t таковы, что

$$(x^2 + y^2 - 1)(z^2 + t^2 - 1) > (xz + yt - 1)^2.$$

Докажите, что $x^2 + y^2 > 1$.

2. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c, d существует бесконечно много натуральных n, для которых число $a^n + b^n + c^n + d^n$ составное. (Косово, 2021)

3. Есть набор прямоугольников 1×1, 1×2, $\ldots$, $1 \times n$. Требуется закрасить $\frac{n(n+1)}{2}$ клеток квадрата $n \times n$, чтобы все закрашенные клетки можно было накрыть прямоугольниками данного набора, располагая их вертикально, а также закрашенные клетки можно было накрыть, располагая прямоугольники горизонтально. Сколькими способами можно это сделать? (Нидерланды, 2020)

4. Пусть BH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Точка D на отрезке BH такова, что $AB = 2BD$ и $BC = 2CD$. Найдите $\angle BCD$. (Япония, олимпиада для юниоров, финал, 2020)

5. Даны натуральные числа a, b и c. Вася разложил по кругу a камней, b ножниц и c бумаг. Предмет можно поменять местами с **соседним по часовой стрелке** в следующих трёх случаях: если предмет – камень, а сосед – ножницы; если предмет – ножницы, а сосед – бумага; если предмет – бумага, а сосед – камень. Какое наибольшее количество таких перестановок может сделать Вася? Начальную расстановку предметов он выбирает сам. (США, отбор на сборы, 2020/21)

6. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет ни одной. С конфетами в столовую не пускают, поэтому он раздаёт по одной конфете следующим n детям, заходит в столовую и остаётся там навсегда. После этого дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет (ненадолго) снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

7. В строчку выписаны 2021 единиц; между каждыми двумя соседними единицами оставлено место для знака арифметического действия. На все свободные места всеми способами вписываются знаки $+$, $-$, $\times$ и $:$, и для каждого способа подсчитывается результат. Найдите сумму всех полученных результатов. (OMA Foros Open, 2019)

8. В ряд рубашкой вверх лежат 100 карточек. На них написаны числа от 1 до 100. Паша знает, какая карточка где лежит, а Вова не знает. Вова может задавать вопросы: показывать на две карточки и узнавать, последовательные ли на них числа. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно услышать ответ "да"? (Индия, 2021)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Элис пригласила на вечеринку 111 своих друзей. Известно, что в каком бы порядке они ни приходили, каждый пришедший будет дружить хотя бы с половиной уже присутствующих на вечеринке людей (включая Элис). Докажите, что кто-то из приглашённых дружит со всеми остальными. (Польша, олимпиада для юниоров, 2021)

2. При каких натуральных n число $3^n + 4n - 1$ является точным квадратом? (Венесуэла, 2019)

3. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c, d существует бесконечно много натуральных n, для которых число $a^n + b^n + c^n + d^n$ составное. (Косово, 2021)

4. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет ни одной. С конфетами в столовую не пускают, поэтому он раздаёт по одной конфете следующим n детям, заходит в столовую и остаётся там навсегда. После этого дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет (ненадолго) снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

5. В строчку выписаны 2021 единиц; между каждыми двумя соседними единицами оставлено место для знака арифметического действия. На все свободные места всеми способами вписываются знаки $+$, $-$, $\times$ и $:$, и для каждого способа подсчитывается результат. Найдите сумму всех полученных результатов. (OMA Foros Open, 2019)

6. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C. На биссектрисе AL взята такая точка K так, что $BK + BA = AC$. Точка M – середина отрезка KL. Найдите угол BMK.

7. Петя пишет на доске три целых числа. Вася дважды проделывает такую операцию: стирает два числа и записывает на доске либо сумму, либо разность, либо произведение стёртых чисел. Когда

остаётся одно число, Вася, пока оно чётное, несколько раз делит его на 2, пока результат остаётся целым, и за каждое деление получает от Пети рубль. Сколько рублей Вася сможет гарантированно получить независимо от исходных чисел? (из третьей лиги "Старт")

8. В кондитерской продаётся 10 видов пирожных. Известно, что любой набор из пяти пирожных разных видов весит больше любого набора из четырёх пирожных разных видов. Для каких натуральных k можно быть уверенным, что любые k пирожных разных видов весят больше любых $k-1$ пирожных разных видов? (из 6 класса)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Элис пригласила на вечеринку 111 своих друзей. Известно, что в каком бы порядке они ни приходили, каждый пришедший будет дружить хотя бы с половиной уже присутствующих на вечеринке людей (включая Элис). Докажите, что кто-то из приглашённых дружит со всеми остальными. (Польша, олимпиада для юниоров, 2021)

2. При каких натуральных n число $3^n + 4n - 1$ является точным квадратом? (Венесуэла, 2019)

3. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет ни одной. С конфетами в столовую не пускают, поэтому он раздаёт по одной конфете следующим n детям, заходит в столовую и остаётся там навсегда. После этого дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет (ненадолго) снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

4. В треугольнике ABC угол B вдвое больше угла C. На биссектрисе AL взята такая точка K так, что $BK + BA = AC$. Точка M – середина отрезка KL. Найдите угол BMK.

5. Петя пишет на доске три целых числа. Вася дважды проделывает такую операцию: стирает два числа и записывает на доске либо сумму, либо разность, либо произведение стёртых чисел. Когда остаётся одно число, Вася, пока оно чётное, несколько раз делит его на 2, пока результат остаётся целым, и за каждое деление получает от Пети рубль. Сколько рублей Вася сможет гарантированно получить независимо от исходных чисел? (из третьей лиги "Старт")

6. В кондитерской продаётся 10 видов пирожных. Известно, что любой набор из пяти пирожных разных видов весит больше любого набора из четырёх пирожных разных видов. Для каких натуральных k можно быть уверенным, что любые k пирожных разных видов весят больше любых $k-1$ пирожных разных видов? (из 6 класса)

7. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Компания из 50 островитян, среди которых были и рыцари, и лжецы, села за круглый стол. Каждый из сидящих сказал, что среди трёх людей – сидящего напротив и двух его соседей – есть и рыцарь, и лжец. Докажите, что в компании не меньше 10 и не больше 25 лжецов. (Киевская городская олимпиада, 2020)

8. Числа a и b отличаются перестановкой цифр. Известно, что $a + b = 10^{100}$. Докажите, что a и b делятся на 10. (Польша, олимпиада для юниоров, 3 этап, 2020/21, открыла для себя книгу Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом, "Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра.")

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Тимофей пригласил на День Рождения 2021 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке гости ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее четверти из уже присутствующих (включая Тимофея). Докажите, что у кого-то из гостей на вечеринке не более двух незнакомых.

2. У Димы есть пустая доска 123×123. Каждую минуту он проделывает одно из двух действий: 1) выбирает три пустые клетки, образующие уголок (квадрат 2×2 без правой верхней клетки), и

кладет в каждую из них по камню; 2) выбирает линию (строку или столбец), в каждой клетке которой лежит по камню, и снимает эти камни с доски. Может ли так случиться, что через несколько действий доска снова станет пустой? (USAMO, 2021)

3. Есть набор прямоугольников 1×1, 1×2, ..., $1\times n$. Требуется закрасить $\frac{n(n+1)}{2}$ клеток квадрата $n\times n$, чтобы все их можно было накрыть прямоугольниками, располагая их вертикально, а ещё чтобы все их можно было накрыть, располагая горизонтально. Сколько существует способов так закрасить клетки? (Нидерланды, 2020)

4. В кондитерской продаётся 100 видов пирожных. Известно, что любой набор из пятидесяти пирожных разных видов весит больше любого набора из сорока девяти пирожных разных видов. Для каких натуральных k можно быть уверенным, что любые k пирожных разных видов весят больше любых $k-1$ пирожных разных видов?

5. Бесконечно много детей в масках, с чистыми руками, выстроились в очередь у входа в столовую так, что от каждого ребёнка до следующего выдержана социальная дистанция в 1,5 м. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет конфет. Дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что в какой-то момент все n конфет снова окажутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

6. На доске выписано 3 различных натуральных числа. Ася может дописывать числа на доску по следующим правилам:

(i) Он может дописать любой натуральный делитель уже выписанного числа.

(ii) Если на доску выписаны различные натуральные числа a и b, большие 1, то Ася может дописать число $1+ab$.

Докажите, что Ася рано или поздно сможет выписать на доску любое наперед заданное натуральное число. (Бродячий сюжет; в прошлый раз предлагалась на XLIII Уральском турнире с источником "Грузия, отбор на ММО, 2006")

7. У Сережи есть две цифры 2, две цифры 7 и цифра 9, а также бесконечно много цифр 0. Он утверждает, что для любого натурального $n<100$ он сможет написать число, кратное n, использовав все пять ненулевых цифр и несколько нулей (например, 27902070 делится на 14). Прав ли он? (С. Берлов по классическим мотивам)

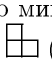
8. Вася разложил по кругу 100 красных, 100 желтых и 100 зелёных карточек. В каждой паре карточек, лежащих рядом, назовём одну из них первой, а другую второй так, чтобы вторая располагалась от первой в сторону движения часовой стрелки. За одну операцию две соседние карточки можно поменять местами, если первая красная, а вторая жёлтая; если первая жёлтая, а вторая зелёная; и если первая зелёная, а вторая красная. Какое наибольшее количество операций может последовательно сделать Вася? Начальную расстановку карточек он выбирает сам. (США, отбор на сборы, 2020/21)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021

ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Тимофей пригласил на День Рождения 2021 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке гости ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее четверти из уже присутствующих (включая Тимофея). Докажите, что у кого-то из гостей на вечеринке не более двух незнакомых.

2. У Димы есть пустая доска 123×123. Каждую минуту он проделывает одно из двух действий: 1) выбирает три пустые клетки, образующие уголок  (квадрат 2×2 без правой верхней клетки), и кладет в каждую из них по камню; 2) выбирает линию (строку или столбец), в каждой клетке которой лежит по камню, и снимает эти камни с доски. Может ли так случиться, что через несколько действий доска снова станет пустой? (USAMO, 2021)

3. Дана клетчатая доска размера 9×9. В каждой клетке второй строки стоит по одной белой фишке, а в каждой клетке восьмой строки – по одной черной. Двое играют в следующую игру: первый ходит белыми фишками, а второй – чёрными. За один ход можно передвинуть фишку на любое количество клеток по столбцу (разрешается передвигать фишку как вверх, так и вниз) так,

чтобы фишка не вышла за пределы доски и не перепрыгнула через фишку противника. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Может ли кто-нибудь из игроков гарантировать себе победу, и если да, то кто? (Игру начинает первый игрок, а далее ходят по очереди.) (Алматы, городская олимпиада)

4. В кондитерской продаётся 100 видов пирожных. Известно, что любой набор из пятидесяти пирожных разных видов весит больше любого набора из сорока девяти пирожных разных видов. Для каких натуральных k можно быть уверенным, что любые k пирожных разных видов весят больше любых $k-1$ пирожных разных видов?

5. Бесконечно много детей выстроились в очередь у входа в столовую. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет конфет. Дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что в какой-то момент все n конфет снова окажутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

6. На доске выписано 3 различных натуральных числа. Вася может дописывать числа на доску по следующим правилам:

(i) Он может дописать любой натуральный делитель уже выписанного числа.

(ii) Если на доску выписаны различные натуральные числа a и b, большие 1, то Вася может дописать число $1+ab$.

Верно ли, что при любых a, b, удовлетворяющих условию, Вася может получить на доске число 3? (Бродячий сюжет; в прошлый раз предлагалась на XLIII Уральском турнире с источником "Грузия, отбор на ММО, 2006")

7. У Сережи есть две цифры 2, две цифры 7 и цифра 9, а также бесконечно много цифр 0. Он утверждает, что для любого натурального $n<100$ он сможет написать число, кратное n, использовав все пять ненулевых цифр и несколько нулей (например, 27902070 делится на 14). Прав ли он? (С. Берлов по классическим мотивам)

8. Вася разложил по кругу 100 красных, 100 желтых и 100 зелёных карточек. В каждой паре карточек, лежащих рядом, назовём одну из них первой, а другую второй так, чтобы вторая располагалась от первой в сторону движения часовой стрелки. За одну операцию две соседние карточки можно поменять местами, если первая красная, а вторая жёлтая; если первая жёлтая, а вторая зелёная; и если первая зелёная, а вторая красная. Докажите, что независимо от изначального расположения карточек, через несколько операций будет больше невозможно сделать ни одной операции. (США, отбор на сборы, 2020/21, упрощение)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021

ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Тимофей пригласил на День Рождения 11 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке гости ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее половины из уже присутствующих (включая Тимофея). Докажите, что среди гостей праздника найдется такой, который знаком со всеми остальными гостями.

2. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Компания из 16 островитян, села за круглый стол. Каждый из сидящих сказал, что из трёх людей – сидящего напротив и двух его соседей – есть и рыцарь, и лжец. Докажите, что в компании не меньше 4 лжецов. (Киевская городская олимпиада, 2020)

3. Дана клетчатая доска размера 9×9. В каждой клетке второй строки стоит по одной белой фишке, а в каждой клетке восьмой строки – по одной черной. Двое играют в следующую игру: первый ходит белыми фишками, а второй – черными. За один ход можно передвинуть фишку в столбце на любое количество клеток вверх или вниз так, чтобы фишка не вышла за пределы доски, и не перепрыгнула через фишку соперника. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу, и если да, то кто? (Начинает первый игрок, а далее ходят по очереди.) (Алматы, городская олимпиада)

4. В кондитерской продаётся 10 видов пирожных. Известно, что любой набор из пяти пирожных разных видов весит больше любого набора из четырёх пирожных разных видов. Для каких натуральных k можно быть уверенным, что любые k пирожных разных видов весят больше любых $k-1$ пирожных разных видов?

5. Бесконечно много детей выстроились в очередь в столовую. У первого ребенка в очереди есть n конфет, а у остальных нет конфет. Дети заходят в столовую по очереди, причём если у очередного заходящего ребёнка k конфет, он раздаёт их по одной следующим за ним k детям. При каких n может случиться, что все n конфет в какой-то момент снова соберутся у одного ребёнка? (USAMTS, 2020/21)

6. В строчку выписано 100 единиц; между каждыми двумя соседними единицами оставлено место для знака арифметического действия. На все свободные места всеми способами вписываются знаки $+$, $-$, $\times$ и $:$, и для каждого способа подсчитывается результат. Найдите сумму всех полученных результатов. (OMA Foros Open, 2019)

7. На складе лежат грузы весом 2, 3 и 5 тонн. Общий вес всех грузов 60 тонн. Докажите, что все грузы можно перевезти на двух машинах грузоподъёмностью 30 тонн каждая.

8. Число B получается из числа A перестановкой цифр. Сумма $A+B$ равна 10^{10}. Докажите, что A и B делятся на 10. (Польша, олимпиада для юниоров, 3 этап, 2020/21, открыла для себя книгу Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом, "Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра.")

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 03.05.2021
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Тимофей пригласил на День Рождения 10 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке гости ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее половины из уже присутствующих (включая Тимофея). Какое наибольшее количество пар незнакомых людей может быть среди приглашённых?

2. Несколько из 25 человек, сидящих за круглым столом, всегда говорят правду, а некоторые – всегда лгут. И те, и другие есть. Остальные – нормальные люди. Каждый произнёс фразу: ¡¡Я сижу между рыцарем и лжецом¿¿. Докажите, что нормальных людей не менее двух. (С. Волченков)

3. Дана клетчатая доска размера 9×9. В каждой клетке второй строки стоит по одной белой фишке, а в каждой клетке восьмой строки – по одной черной. Двое играют в следующую игру: первый ходит белыми фишками, а второй – черными. За один ход можно передвинуть фишку на любое количество клеток по столбцу (разрешается передвигать фишку как вверх, так и вниз) так, чтобы фишка не вышла за пределы доски, и не перепрыгнула через фишку противника. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Может ли кто-нибудь из игроков гарантировать себе победу, и если да, то кто? (Игру начинает первый игрок, а далее ходят по очереди.) (Алматы, городская олимпиада)

4. В наборе 10 гирек. Известно, что любые пять гирек весят больше любых четырёх. Для каких k можно быть уверенным, что любые k гирек весят больше любых $k-1$ гирек? (С. Волченков)

5. Петя пишет на доске три целых числа. Вася дважды проделывает такую операцию: стирает два числа, но записывает на доске сумму, разность или произведение стёртых чисел. Оставшееся после двух операций число, если оно чётное, он несколько раз делит на 2, пока результат остаётся чётным, и за каждое деление получает от Пети конфету. Сколько конфет Вася сможет гарантированно получить, независимо от исходных чисел?

6. Найдите самое большое натуральное число, которое в 7 раз больше суммы квадратов своих цифр. (Ярославские дистанционные игры)

7. Можно ли расположить на доске 8×8 пятнадцать одинаковых непересекающихся отрезков с вершинами в центрах клеток и длиной, большей 4? (С. Волченков)

8. Снегоуборочная машина очищает участок дороги, идущий в гору, за 23 минуты, а тот же участок в обратном направлении – за 17 минут. Одна машина стала убирать этот участок, двигаясь в гору. Через сколько времени должна начать работу вторая машина, двигающаяся с другого конца участка, чтобы к моменту полной уборки первая машина убрала в полтора раза больше снега, чем вторая? (Ярославские дистанционные игры)