LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На маршруте пригородного поезда Москва–Петушки имеется несколько промежуточных станций. В кассах продаются билеты от любой станции до любой другой; цена проезда между любыми двумя различными станциями положительна. Веничка обнаружил, что если по пути со станции A на станцию B выходить из электрички не более двух раз (покупая билет на каждую поездку отдельно), то цена прямого билета от A до B будет не более, чем вдвое дороже самого дорогого из билетов на отдельные перегоны. Веничка доехал от Москвы до Петушков, на каждой станции выходя и покупая билет до следующей. Докажите, что проезд от Москвы до Петушков по прямому билету обошёлся бы ему не более, чем в два раза дороже. (Польша, 2020/21, 3 этап)

2. Существуют ли 2^{2021} различных пар натуральных чисел (a_i, b_i), что

$$\frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2^{2021}}b_{2^{2021}}} = 1$$

и

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{2021}} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{2^{2021}} = 3^{2022}?$$

(Латвия, отбор на ММО, 2021)

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а лучи BA и CD – в точке E. Середины отрезков EF, BF и BC – точки G, H и I соответственно. Докажите, что $\angle GFD = \angle GIH$. (Középiskolai Matematikai Lapok, B. 5107)

4. Прямоугольники BCC_1B_2, CAA_1C_2 и ABB_1A_2 построены наружу остроугольного треугольника ABC. Оказалось, что $\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180°$. Докажите, что прямые B_1C_2, C_1A_2 и A_1B_2 пересекаются в одной точке. (США, 2021)

5. В каждой клетке доски 100×100 изначально стоит число 0. За одну операцию разрешается выбрать строку или столбец и поменять в ней все 0 на 1, а все 1 – на 0. Саша проделал операцию с каждой из строк и каждым из столбцов в некотором порядке, по одному разу с каждой линией. После каждой операции он подсчитывал сумму чисел во всех клетках доски. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 200 чисел, подсчитанных Сашей? (А. Антропов, заключительный этап турнира Ломоносова 2021)

6. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Рыцарь отправился в странствие из своего замка. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, лежащего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивал в ту сторону, в которую он свернул перед этим, и через некоторое время впервые снова оказался в своём замке. Какое наибольшее количество раз он мог проехать через замок какого-нибудь другого рыцаря? (США, 2021)

7. Назовём натуральное число t *хорошим*, если существует последовательность a_0, a_1, … натуральных чисел такая, что $a_0 = 15$, $a_1 = t$, и $a_{n-1}a_{n+1} = (a_n - 1)(a_n + 1)$ для каждого натурального n. Найдите все хорошие числа. (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2020)

8. Дано простое число $p \geqslant 5$. Для каждой перестановки $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ чисел 1, 2, …, p, в которой $x_i \neq i$ для каждого $i \leqslant p$, посчитали остаток от деления числа $x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p$ на p. Докажите, что перестановок, у которых этот остаток равен 1, столько же, сколько перестановок, у которых он равен 4. (Польша, 2020/21, 2 этап)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дана последовательность вещественных чисел a_1, a_2, …, a_{2021}. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и k, $1 \leqslant m \leqslant 2021$, что числа $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ и $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2021}$ отличаются не более чем на $|a_k|$ (если $m = 2021$, вторая сумма считается равной 0). (Саудовская Аравия, отбор на юниорскую Балканиаду, 2019)

2. Двум Сашам, Кириллу и Серёже сейчас суммарно 136 лет; 25 лет назад сумма возрастов тех, кто уже родился, составляла 41 год, а ещё за 10 лет до этого – 17 лет. Саша старше Кирилла,

Кирилл старше второго Саши, а второй Саша старше Серёжи. Чей возраст можно определить по этим данным? Возраст – это целое число. (А. Антропов)

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а лучи BA и CD – в точке E. Середины отрезков EF, BF и BC – точки G, H и I соответственно. Докажите, что $\angle GFD = \angle GIH$. (Középiskolai Matematikai Lapok, B. 5107)

4. Прямоугольники BCC_1B_2, CAA_1C_2 и ABB_1A_2 построены наружу остроугольного треугольника ABC. Оказалось, что $\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180°$. Докажите, что прямые B_1C_2, C_1A_2 и A_1B_2 пересекаются в одной точке. (США, 2021)

5. В каждой клетке доски 100×100 изначально стоит число 0. За одну операцию разрешается выбрать строку или столбец и поменять в ней все 0 на 1, а все 1 – на 0. Саша проделал операцию с каждой из строк и каждым из столбцов в некотором порядке, по одному разу с каждой линией. После каждой операции он подсчитывал сумму чисел во всех клетках доски. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 200 чисел, подсчитанных Сашей? (А. Антропов, заключительный этап турнира Ломоносова 2021)

6. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Рыцарь отправился в странствие из своего замка. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, лежащего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивал в ту сторону, в которую он свернул перед этим, и через некоторое время впервые снова оказался в своём замке. Какое наибольшее количество раз он мог проехать через замок какого-нибудь другого рыцаря? (США, 2021)

7. Назовём натуральное число t *хорошим*, если существует последовательность $a_0, a_1, \ldots$ натуральных чисел такая, что $a_0 = 15$, $a_1 = t$, и $a_{n-1}a_{n+1} = (a_n - 1)(a_n + 1)$ для каждого натурального n. Найдите все хорошие числа. (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2020)

8. На плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами (x, y), где $1 \leqslant x, y \leqslant 106$. Оказалось, что любые две точки (x, y) и (x', y') удовлетворяют одному из условий (i) $x > x' - 10$ и $y > y' - 10$, или (ii) $x' > x - 10$ и $y' > y - 10$. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено? (Польша, 2020/21, 1 этап)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дана последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и k, $1 \leqslant m \leqslant 2021$, что числа $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ и $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2021}$ отличаются не более чем на $|a_k|$ (если $m = 2021$, вторая сумма считается равной 0). (Саудовская Аравия, отбор на юниорскую Балканиаду, 2019)

2. Двум Сашам, Кириллу и Серёже сейчас суммарно 136 лет; 25 лет назад сумма возрастов тех, кто уже родился, составляла 41 год, а ещё за 10 лет до этого – 17 лет. Саша старше Кирилла, Кирилл старше второго Саши, а второй Саша старше Серёжи. Чей возраст можно определить по этим данным? Возраст – это целое число. (А. Антропов)

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а лучи BA и CD – в точке E. Середины отрезков EF, BF и BC – точки G, H и I соответственно. Докажите, что $\angle GFD = \angle GIH$. (Középiskolai Matematikai Lapok, B. 5107)

4. Прямоугольники BCC_1B_2, CAA_1C_2 и ABB_1A_2 построены наружу остроугольного треугольника ABC. Оказалось, что $\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180°$. Докажите, что прямые B_1C_2, C_1A_2 и A_1B_2 пересекаются в одной точке. (США, 2021)

5. В каждой клетке доски 100×100 изначально стоит число 0. За одну операцию разрешается выбрать строку или столбец и поменять в ней все 0 на 1, а все 1 – на 0. Саша проделал операцию с каждой из строк и каждым из столбцов в некотором порядке, по одному разу с каждой линией. После каждой операции он подсчитывал сумму чисел во всех клетках доски. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 200 чисел, подсчитанных Сашей? (А. Антропов, заключительный этап турнира Ломоносова 2021)

6. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Рыцарь отправился в странствие из своего замка. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, лежащего

на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивал в ту сторону, в которую он свернул перед этим, и через некоторое время впервые снова оказался в своём замке. Мог ли он три раза проехать через замок какого-нибудь другого рыцаря? (США, 2021)

7. У натурального числа n нет ни одного натурального делителя d, удовлетворяющего неравенству $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Докажите, что у n есть простой делитель $p > \sqrt[3]{n^2}$. (Польша, 2020/21, 1 этап)

8. На плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами (x, y), где $1 \leqslant x, y \leqslant 106$. Оказалось, что любые две точки (x, y) и (x', y') удовлетворяют одному из условий (i) $x > x' - 10$ и $y > y' - 10$, или (ii) $x' > x - 10$ и $y' > y - 10$. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено? (Польша, 2020/21, 1 этап)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дана последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и k, $1 \leqslant m \leqslant 2021$, что числа $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ и $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2021}$ отличаются не более чем на $|a_k|$ (если $m = 2021$, вторая сумма считается равной 0). (Саудовская Аравия, отбор на юниорскую Балканиаду, 2019)

2. Двум Сашам, Кириллу и Серёже сейчас суммарно 136 лет; 25 лет назад сумма возрастов тех, кто уже родился, составляла 41 год, а ещё за 10 лет до этого – 17 лет. Саша старше Кирилла, Кирилл старше второго Саши, а второй Саша старше Серёжи. Чей возраст можно определить по этим данным? Возраст – это целое число. (А. Антропов)

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а лучи BA и CD – в точке E. Середины отрезков EF, BF и BC – точки G, H и I соответственно. Докажите, что $\angle GFD = \angle GIH$. (Középiskolai Matematikai Lapok, B. 5107)

4. Точки D, E и F расположены на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно так, что отрезок DE перпендикулярен к AC и $\angle BAC = 2\angle BFD$. Известно, что $AE = EC + BD$ и $CD = DB + AF$. Докажите, что треугольник ABC – равносторонний. (Перу, 2018, уровень 2)

5. В каждой клетке доски 100×100 изначально стоит число 0. За одну операцию разрешается выбрать строку или столбец и поменять в ней все 0 на 1, а все 1 – на 0. Саша проделал операцию с каждой из строк и каждый из столбцов в некотором порядке. После каждой операции он подсчитывал сумму чисел во всех клетках доски. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех 200 чисел, подсчитанных Сашей? (А. Антропов, заключительный этап турнира Ломоносова 2021, упрощение)

6. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Рыцарь отправился в странствие из своего замка. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, лежащего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивал в ту сторону, в которую он свернул перед этим, и через некоторое время впервые снова оказался в своём замке. Мог ли он три раза проехать через замок какого-нибудь другого рыцаря? (США, 2021)

7. У натурального числа n нет ни одного натурального делителя d, удовлетворяющего неравенству $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant \sqrt[3]{n^2}$. Докажите, что у n есть простой делитель $p > \sqrt[3]{n^2}$. (Польша, 2020/21, 1 этап)

8. На плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами (x, y), где $1 \leqslant x, y \leqslant 106$. Оказалось, что любые две точки (x, y) и (x', y') удовлетворяют одному из условий (i) $x > x' - 10$ и $y > y' - 10$, или (ii) $x' > x - 10$ и $y' > y - 10$. Какое наибольшее количество точек может быть отмечено? (Польша, 2020/21, 1 этап)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано простое число p. Найдите все пары натуральных a и b, для которых оба числа $\frac{4a+p}{b} + \frac{4b+p}{a}$ и $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ целые. (Юниорская Балканиада, шортлист, 2008)

2. Существуют ли 2^{2021} различных пар натуральных чисел (a_i, b_i), таких что

$$\frac{1}{a_1 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2^{2021}} b_{2^{2021}}} = 1$$

и

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^{2021}} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{2^{2021}} = 3^{2022}?$$

Напомним, что пары (a, b) и (c, d) считаются одинаковыми в том и только в том случае, если $a = c$ и $b = d$. В частности, среди чисел $a_1, \ldots a_{2^{2021}}, b_1, \ldots, b_{2^{2021}}$ могут быть одинаковые. (Латвия, отбор на ММО, 2021)

3. Клетки квадрата 13×13 раскрашены в чёрный или белый цвет. За один ход можно инвертировать цвета всех клеток любого квадрата 2×2 или любого квадрата 9×9. Всегда ли можно сделать все клетки чёрными? (Швеция, 2017)

4. В больнице три палаты по 200 пациентов и несколько пустых палат. Два врача играют в такую игру. Каждый день ровно один из врачей выбирает одну палату, расселяет пациентов из неё в две или три пустые, а пациентов из невыбранных палат выписывает из больницы. Врачи ходят по очереди, и тот, кто утром не сможет сделать ход, проигрывает. Какой врач может выиграть – первый или второй? (из 6-го класса)

5. Жанна заполняет таблицу $n \times n$ целыми числами на свой выбор так, чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце были различны. После этого появляется чёртик и стирает числа в нескольких клетках. Жанна хочет покрасить несколько непустых клеток в красный цвет так, чтобы выполнялось два условия:

(i) в каждой строке и в каждом столбце не больше одной красной клетки;

(ii) для каждой непустой и неокрашенной клетки или есть красная клетка в той же строке с большим числом, или красная клетка в том же столбце с меньшим числом.

Докажите, что Жанна может изначально расставить числа так, чтобы независимо от действий чёртика осуществить желаемое. (Германия, 2018)

6. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отметили соответственно точки D, E и F так, что $DE \perp AC$ и $\angle BAC = 2\angle BFD$. Оказалось, что $AE = EC + BD$ и $CD = DB + AF$. Докажите, что треугольник ABC правильный. (Перу, 2018)

7. Группа из 101 детей отправилась в лес за грибами. Каждый ребёнок собрал не более 2020, но хотя бы один гриб. Оказалось, что при любом разбиении детей на две группы суммарное количество грибов у одной из групп не более 2020. Какое наибольшее количество грибов могли собрать все дети вместе? (Украина, 2021)

8. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что $a_1 = 2021$ и

$$a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 1$$

для всех натуральных n. Докажите, что при $n \geqslant 2$ число a_n можно разложить в произведение $2n$ сомножителей, где каждый больше 1. Сомножители не обязательно различны. (Таиланд, 2021)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Клетки квадрата 13×13 раскрашены в чёрный или белый цвет. За один ход можно инвертировать цвета всех клеток любого квадрата 2×2 или любого квадрата 9×9. Всегда ли можно сделать все клетки чёрными? (Швеция, 2017)

2. Назовем натуральное число n *представимым*, если существуют такие натуральные m и k, что $m^3 - k! = n$. Каких чисел от 1 до 2021 больше – представимых или остальных? (Осенний математический турнир им. академика Стефана Додунекова, Болгария, 2019)

3. В больнице три палаты по 200 пациентов и несколько пустых палат. Два врача играют в такую игру. Каждый день ровно один из врачей выбирает одну палату, расселяет пациентов из неё в две или три пустые, а пациентов из невыбранных палат выписывает из больницы. Врачи ходят по очереди, и тот, кто утром не сможет сделать ход, проигрывает. Какой врач может выиграть – первый или второй? (из 6-го класса)

4. Жанна заполняет таблицу $n \times n$ целыми числами на свой выбор так, чтобы числа в каждой строке и в каждом столбце были различны. После этого появляется чёртик и стирает числа в нескольких клетках. Жанна хочет покрасить несколько непустых клеток в красный цвет так, чтобы выполнялось два условия:

(i) в каждой строке и в каждом столбце не больше одной красной клетки;

(ii) для каждой непустой и неокрашенной клетки или есть красная клетка в той же строке с большим числом, или красная клетка в том же столбце с меньшим числом.

Докажите, что Жанна может изначально расставить числа так, чтобы независимо от действий чёртика осуществить желаемое. (Германия, 2018)

5. Вася выписывает по очереди различные натуральные числа и следит за тем, чтобы любые 9 выписанных чисел имели общий делитель, больший единицы, а никакие 10 выписанных чисел такого общего делителя не имели. Докажите, что в какой-то момент Вася не сможет выписать очередное число. (Középiskolai Matematikai Lapok, 2021)

6. Дана последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и k, $1 \leqslant m \leqslant 2021$, что числа $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ и $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2021}$ отличаются не более чем на $|a_k|$ (если $m = 2021$, вторая сумма считается равной 0). (Саудовская Аравия, отбор на юниорскую Балканиаду, 2019)

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC выбрана точка D таким образом, что $AD = BC$. Докажите, что биссектриса угла ADC и серединный перпендикуляр к отрезку CD пересекаются на прямой AC. (фольклор)

8. Пусть a, b и c – стороны некоторого треугольника. Какое наибольшее количество из чисел

$$\frac{a+b}{a+b-c}, \quad \frac{b+c}{b+c-a}, \quad \frac{c+a}{c+a-b}$$

может быть больше 2? (Киевская городская олимпиада, 2020)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Клетки квадрата 13×13 раскрашены в чёрный или белый цвет. За один ход можно инвертировать цвета всех клеток любого квадрата 2×2 или любого квадрата 9×9. Всегда ли можно сделать все клетки чёрными? (Швеция, 2017)

2. Назовем натуральное число n *представимым*, если существуют такие натуральные m и k, что $m^3 - k! = n$. Каких чисел от 1 до 2021 больше – представимых или остальных? (Осенний математический турнир им. академика Стефана Додунекова, Болгария, 2019)

3. В группе из 10 школьников двое не сделали домашнее задание, но у них очень распространена взаимопомощь. Учитель может дать небольшой тест группе из 4 школьников, и по ответам понять, есть ли в этой группе кто-то, не сделавший домашнее задание. Как за 6 тестов учитель может гарантированно найти обоих лентяев? (фольклор)

4. В больнице три палаты по 200 пациентов и несколько пустых палат. Два врача играют в такую игру. Каждый день ровно один из врачей выбирает одну палату, расселяет пациентов из неё в две или три пустые, а пациентов из невыбранных палат выписывает из больницы. Врачи ходят по очереди, и тот, кто утром не сможет сделать ход, проигрывает. Какой врач может выиграть – первый или второй? (из 6-го класса)

5. Дана последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и k, $1 \leqslant m \leqslant 2021$, что числа $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ и $a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{2021}$ отличаются не более чем на $|a_k|$ (если $m = 2021$, вторая сумма считается равной 0). (Саудовская Аравия, отбор на юниорскую Балканиаду, 2019)

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне BC выбрана точка D таким образом, что $AD = BC$. Докажите, что биссектриса угла ADC и серединный перпендикуляр к отрезку CD пересекаются на прямой AC. (фольклор)

7. Двум Сашам, Кириллу и Серёже сейчас суммарно 136 лет; 25 лет назад сумма возрастов тех, кто уже родился, составляла 41 год, а ещё за 10 лет до этого – 17 лет. Саша старше Кирилла, Кирилл старше второго Саши, а второй Саша старше Серёжи. Чей возраст можно определить по этим данным? Возраст – это целое число. (А. Антропов)

8. Пусть a, b и c – стороны некоторого треугольника. Какое наибольшее количество из чисел

$$\frac{a+b}{a+b-c}, \quad \frac{b+c}{b+c-a}, \quad \frac{c+a}{c+a-b}$$

может быть больше 2? (Киевская городская олимпиада, 2020)

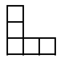
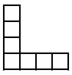
LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1–6 МЕСТА

1. Рассмотрим клетчатую фигурку, состоящую из 99 клеток, такую, что из любой клетки этой фигурки можно добраться до любой другой клетки, несколько раз переходя в соседнюю по стороне клетку. Операцию с фигуркой назовём *переделкой*, если от фигурки отрезали одну клетку и приставили в другом месте таким образом, чтобы получилась фигурка, равная исходной. После нескольких переделок фигурка больше не содержит ни одной исходной клетки. Может ли она содержать квадрат 2×2? (Középiskolai Matematikai Lapok, 2021, упрощение)

2. Вася выписывает в ряд различные натуральные числа и следит за тем, чтобы любые 9 выписанных чисел имели общий делитель, больший единицы, а никакие 10 выписанных чисел такого общего делителя не имели (пока чисел меньше 9, на них ограничений нет). Докажите, что в какой-то момент Вася не сможет выписать очередное число. (Középiskolai Matematikai Lapok, 2021)

3. Дано натуральное число n, состоящее из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Оказалось, что для любой из $6! = 720$ перестановок цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 найдутся 6 подряд стоящих цифр числа n, которые стоят ровно в этом порядке. Докажите, что в числе n не менее 844 цифр. (Апгрейд С.Берлова)

4. Даны 20 последовательных натуральных чисел, больших 10^{100}. Докажите, что среди них есть число, имеющее простой делитель, больший 50. (С. Берлов)

5. Алиса разбила доску 2021×2024 на фигурки трех видов: клетки 1×1 и уголки вида  и  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Каково наименьшее возможное количество фигурок 1×1 в таком разбиении? (форум MathLinks)

6. В больнице четыре палаты, по 200 пациентов в каждой. Два врача играют в такую игру. Каждый день один из врачей выбирает одну палату, в которой сейчас не менее двух пациентов. Всех пациентов из остальных палат он немедленно выписывает. После чего расселяет всех пациентов из выбранной палаты в две или три пустые палаты. Врачи ходят по очереди, и тот, кто не может сделать ход – проигрывает. Какой врач может выиграть – первый или второй?

7. В стране несколько городов. Некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города выходят более 100 дорог в другие города. Докажите, что в стране найдутся 100 кольцевых маршрутов различных длин, ни один из которых не проходит дважды через один и тот же город. (Длиной маршрута называется количество дорог, через которые маршрут проходит.) (С. Берлов)

8. Четверым мудрецам предложили испытание. Их по очереди приводят в зал и каждому дают на выбор два различных числа из набора 1, 2, 3. Мудрец выбирает одно из них и уходит. Каждому мудрецу (начиная со второго) сообщают, какое число выбрал предыдущий мудрец. Мудрецы знают, в каком порядке их приведут в зал. Докажите, что они могут так заранее договориться, чтобы сумма чисел, выбранных всеми четырьмя мудрецами, оказалась отлична от 8. (С. Берлов)

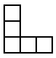
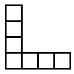
LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА; ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО

1. Рассмотрим клетчатую фигурку, состоящую из 99 клеток, такую, что из любой клетки этой фигурки можно добраться до любой другой клетки, несколько раз переходя в соседнюю по стороне клетку. Операцию с фигуркой назовём *переделкой*, если от фигурки отрезали одну клетку и приставили в другом месте таким образом, чтобы получилась фигурка, равная исходной. После нескольких переделок фигурка больше не содержит ни одной исходной клетки. Может ли она содержать квадрат 2×2? (Középiskolai Matematikai Lapok, 2021, упрощение)

2. Вася выписывает в ряд различные натуральные числа и следит за тем, чтобы любые 9 выписанных чисел имели общий делитель, больший единицы, а никакие 10 выписанных чисел такого общего делителя не имели (пока чисел меньше 9, на них ограничений нет). Докажите, что в какой-то момент Вася не сможет выписать очередное число. (Középiskolai Matematikai Lapok, 2021)

3. Дано натуральное число n, состоящее из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Оказалось, что для любой из $6! = 720$ перестановок цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 найдутся 6 подряд стоящих цифр числа n, которые стоят ровно в этом порядке. Докажите, что в числе n не менее 844 цифр. (Апгрейд С.Берлова)

4. Каких чисел от 1 до 2021 больше: представимых в виде $7^a - b^3$ с натуральными a и b, или не представимых?

5. Можно ли доску 2021×2020 разбить на фигурки двух видов:  и  ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать. (форум MathLinks, упрощение)

6. В больнице четыре палаты, по 200 пациентов в каждой. Два врача играют в такую игру. Каждый день один из врачей выбирает одну палату, в которой сейчас не менее двух пациентов. Всех пациентов из остальных палат он немедленно выписывает. После чего расселяет всех пациентов из выбранной палаты в две или три пустые палаты. Врачи ходят по очереди, и тот, кто не может сделать ход – проигрывает. Какой врач может выиграть – первый или второй?

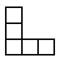
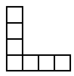
7. Однокруговой хоккейный турнир на пять команд требуется провести так, чтобы каждая команда играла не более одного матча в день и не более двух матчей в течение любых трёх дней подряд. За какое наименьшее число дней можно провести турнир? (С. Токарев. Ярославские дистанционные игры)

8. Четверым мудрецам предложили испытание. Их по очереди приводят в зал и каждому дают на выбор два различных числа из набора 1, 2, 3. Мудрец выбирает одно из них и уходит. Каждому мудрецу (начиная со второго) сообщают, какое число выбрал предыдущий мудрец. Мудрецы знают, в каком порядке их приведут в зал. Докажите, что они могут так заранее договориться, чтобы сумма чисел, выбранных всеми четырьмя мудрецами, оказалась отлична от 8. (С. Берлов)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021

ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Можно ли доску 2021×2020 разбить на фигурки двух видов:  и  ? Фигурки нужно класть строго по клеточкам, их можно поворачивать и переворачивать.

2. На 64 карточках написаны различные числа. Карточки по одной положили числами вниз в клетки таблицы 8×8 так, что в каждой строке числа идут в порядке возрастания слева направо, и в каждом столбце числа идут в порядке возрастания сверху вниз. За один ход можно перевернуть одну карточку и узнать, какое число на ней написано. Можно ли за 15 ходов определить, написано ли на какой-нибудь карточке заданное число a? (С. Волченков)

3. Дано натуральное число n, состоящее из цифр 1, 2, 3, 4, 5. Оказалось, что для любой перестановки цифр 1, 2, 3, 4, 5 найдутся 5 подряд стоящих цифр числа n, которые образуют ровно эту перестановку. Докажите, что в числе n не менее 147 цифр.

4. В больнице три палаты по 200 пациентов и несколько пустых палат. Два врача играют в такую игру. Каждый день ровно один из врачей выбирает одну палату, расселяет пациентов из неё в две или три пустые, а пациентов из невыбранных палат выписывает из больницы. Врачи ходят по очереди, и тот, кто утром не сможет сделать ход, проигрывает. Какой врач может выиграть – первый или второй?

5. Ралина пишет строчку из 0 и 1 так, что образующаяся последовательность цифр a_1, a_2, a_3, ... удовлетворяет таким правилам:

(1) $a_n + a_{n+1} \neq a_{n+2} + a_{n+3}$;

(2) $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \neq a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5}$.

Докажите, что если первой цифрой Ралина напишет единицу, то 2020-й она напишет ноль. (АМО2020)

6. У купца 7 кошельков, в каждом из которых лежат червонцы. Купец знает, что при въезде в город стража отберёт у него один кошелёк (неизвестно какой). Может ли купец так разложить червонцы по кошелькам, что после потери любого кошелька, не раскрывая кошельков, он сможет заплатить любую сумму от 1 до 20 червонцев? (Фольклор)

7. Между 19.00 и 20.00 каждый из семьи Ивановых безотрывно провёл у телевизора 15 минут, 3 из которых пришлись на рекламу. Каким наименьшим в течение всего этого часа могло быть

рекламное время, если в каждый момент кто-то находился у телевизора? (С. Токарев по мотивам Н. Константинова?)

8. Однокруговой хоккейный турнир на пять команд требуется провести так, чтобы каждая команда играла не более одного матча в день и не более двух матчей в течение любых трёх дней подряд. За какое наименьшее число дней можно провести турнир? (С. Токарев. Ярославские дистанционные игры)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 31.04 – 06.05.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 06.05.2021
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Учитель написал на доске число x, а затем каждую минуту дописывал ещё одно число – на x больше предыдущего: $x, 2x, 3x, \ldots$ Так он выписал не менее 4 чисел. Оказалось, что все написанные им цифры – разные. Какое наибольшее количество цифр могло быть использовано? (С. Токарев. Ярославские дистанционные игры)

2. На 64 карточках написаны различные числа. Карточки по одной положили числами вниз в клетки таблицы 8×8 так, что в каждой строке числа идут в порядке возрастания слева направо, и в каждом столбце числа идут в порядке возрастания сверху вниз. За один ход можно перевернуть одну карточку и узнать, какое число на ней написано. Можно ли за 15 ходов определить, написано ли на какой-нибудь карточке заданное число a? (С. Волченков)

3. В стране 20 прямолинейных судоходных каналов. Их схема представлена на рисунке. Сколькими способами можно закрыть для судоходства 5 каналов, чтобы осталась возможность доплыть из любой точки в любую другую? (С. Волченков)

4. В больнице три палаты по 200 пациентов и несколько пустых палат. Два врача играют в такую игру. Каждый день ровно один из врачей выбирает одну палату, расселяет пациентов из неё в две или три пустые, а пациентов из невыбранных палат выписывает из больницы. Врачи ходят по очереди, и тот, кто утром не сможет сделать ход, проигрывает. Какой врач может выиграть – первый или второй?

5. Натуральное число n, состоит из цифр 1, 2, 3. Оказалось, что для любой перестановки цифр 1, 2, 3 найдутся 3 подряд стоящих цифры числа n, которые образуют ровно эту перестановку. Найдите наименьшее такое n.

6. У купца 7 кошельков, в каждом из которых лежат червонцы. Купец знает, что при въезде в город стража отберёт у него один кошелёк (неизвестно какой). Может ли купец так разложить червонцы по кошелькам, что после потери любого кошелька, не раскрывая кошельков, он сможет заплатить любую сумму от 1 до 20 червонцев? (Фольклор)

7. Между 19.00 и 20.00 каждый из семьи Ивановых безотрывно провёл у телевизора 15 минут, 3 из которых пришлись на рекламу. Каким наименьшим в течение всего этого часа могло быть рекламное время, если в каждый момент кто-то находился у телевизора? (С. Токарев по мотивам Н. Константинова?)

8. Однокруговой хоккейный турнир на пять команд требуется провести так, чтобы каждая команда играла не более одного матча в день и не более двух матчей в течение любых трёх дней подряд. За какое наименьшее число дней можно провести турнир? (С. Токарев, ярославские дистанционные игры)