LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 01.05.2021

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Имеются 4 гири, веса которых равны 1, a, a^2 и a^3 для некоторого $a > 1$ (a не обязательно целое). Как за два взвешивания на чашечных весах найти гирю весом a^3?

2. Мими и Мюзетта по очереди делают ходы в следующей игре: первым ходом Мими выписывает в строчку все числа от 1 до 2021 в некотором порядке, а после этого каждым ходом участница либо переставляет числа в строке так, чтобы получившаяся строка не совпадала ни с одной из выписывавшихся ранее, либо вычеркивает из строки одно (любое) число. Проигрывает участница, вычеркивающая последнее число. Кто выиграет при правильной игре – Мими или Мюзетта? (Аргентина, конкурс FOFO, 2020)

3. Пусть ABC – прямоугольный треугольник, $\angle A = 90°$. Окружность ω с центром на гипотенузе BC касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно, а также пересекает гипотенузу BC в точках F и G (F между B и G). Отрезки FE и DG пересекаются в точке X. Докажите, что $AD = AX$. (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2021)

4. На турнир приехало 400 человек. Среди любых 20 из них есть хотя бы двое знакомых. Назовём человека *необщительным*, если у него меньше 20 знакомых. Какое наибольшее количество необщительных людей может быть? (В. Брагин)

5. Пусть m – натуральное число. Докажите, что найдётся натуральное число $n > m$ такое, что каждое из чисел $2^n - m$, $2^n - (m-1)$, $\ldots$, $2^n + m$ – составное. (Математический турнир Гарвард-MIT, февраль 2021)

6. Клетки доски $2m \times 2n$ клеток (m и n – натуральные числа) раскрашены в шахматном порядке. Сколькими способами можно расставить mn шашек на белых клетках так, чтобы на каждой клетке было не более одной шашки и никакие две шашки не стояли на клетках, соседних по диагонали? (Канада, 2019)

7. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Площадь треугольника ADM больше площади треугольника BCM. Точки P и Q – середины сторон BC и AD соответственно, $AP + AQ = \sqrt{2}$. Докажите, что площадь четырёхугольника $ABCD$ меньше 1. (Középiskolai Matematikai Lapok, 2020, №12, B. 5139)

8. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n}$, $b_{n+1} = b_n + \sqrt[3]{b_n}$ при всех натуральных n. Докажите, что для некоторого n неравенство $a_n \leqslant b_k < a_{n+1}$ выполнено ровно для 2021 значения k. (А.Голованов, Казахстан, 2021)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 01.05.2021

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Однажды, заполняя анкету в свой день рождения, Даня случайно поменял местами две последние цифры года своего рождения. Учитель сказал: “Исправь, пожалуйста, ошибку, а то получается, что ты родишься через количество лет, в семь раз превышающее твой возраст”. В каком году XXI-го века это произошло? (О.С. Нечаева)

2. У Вовы есть синие, белые и красные флажки, каждого цвета – ровно 10 флажков. В магазине могут обменять флажки тремя способами: за 4 белых можно получить 5 синих, или за 2 красных и 3 синих можно получить 4 белых, или за 3 белых и 4 синих можно получить 7 красных. Сможет ли Вова в результате таких обменов сделать так, чтобы у него было как минимум 11 флажков каждого цвета? (Киевская городская олимпиада, 2021)

3. В треугольнике ABC проведены высота BD и биссектриса CE. Оказалось, что $\angle AEC = 45°$. Найдите угол $\angle EDB$. (Швеция, 2014)

4. Назовём число *треугольным*, если оно является суммой нескольких первых натуральных чисел. Числа $a < b < c$ – последовательные треугольные числа. Докажите, что если $a + b + c$ – треугольное число, то b – утроенное треугольное число.

5. На турнир приехало 400 человек. Среди любых 20 из них есть двое знакомых. Назовём человека *необщительным*, если у него меньше 20 знакомых. Какое наибольшее количество необщительных людей может быть? (В. Брагин)

6. На доске написано 2021 различное натуральное число. Оказалось, что произведение любых 100 из них делит произведение остальных. Какое наибольшее количество простых чисел может быть написано на доске?

7. В каждой клетке доски 100×99 (100 строк и 99 столбцов) написана одна из букв А, Б или В таким образом, что выполняются следующие условия:

(i) Каждая буква встречается ровно 3300 раз.

(ii) Ни в каких двух соседних по стороне клетках не записаны одинаковые буквы.

(ii) Любой квадрат 2×2 содержит все три буквы А, Б, В.

Докажите, что в каждой строке ровно 33 буквы А. (Таиланд, онлайн-олимпиада, 2021, модификация)

8. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC$ и $\angle BAC = 20^\circ$. Точка D на стороне AB такова, что $\angle BCD = 70^\circ$, а точка E на стороне AC такова, что $\angle CBE = 50^\circ$. Докажите, что $DE = BC$. (Швейцария-2021, модификация Д.Белова)

LVI УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 30.04 – 06.05.2021

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 01.05.2021

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Имеются 4 гири различных весов. Неизвестно, какая из гирь сколько весит, но известно, что разность весов двух самых лёгких гирь меньше, чем разность весов двух самых тяжёлых. Как за два взвешивания на двухчашечных весах найти самую тяжёлую гирю? (Канада, 1976, упрощение)

2. На острове обитают людоеды и вегетарианцы. Путник, прибывший на остров, спросил у каждого жителя, сколько на острове людоедов. Первый житель ответил “100^2”, второй – “99^2”, третий – “98^2”, …, 99-ый – “2^2”, а все остальные ответили “1”. Все вегетарианцы называли числа, меньшие истинного числа людоедов, а все людоеды – большие. Сколько на острове людоедов? (Középiskolai Matematikai Lapok, 2020, №12, B. 5136)

3. У Вовы есть флажки синего, белого и красного цвета, каждого цвета – ровно 10 флажков. В магазине могут обменять флажки тремя способами. За 4 белых можно получить 5 синих. За 2 красных и три синих можно получить 4 белых. Наконец, за 3 белых и 4 синих можно получить 7 красных. Сможет ли Вова в результате нескольких таких обменов сделать так, чтобы у него было как минимум 11 флажков каждого цвета? (Киевская городская олимпиада, 2021)

4. Докажите, что любое натуральное число $n > 100$ можно представить в виде суммы различных натуральных чисел a, b, c таких, что число a делится на b, а число b делится на c. (С. Берлов)

5. В классе 30 ребят, некоторые из них дружат. Оказалось, что среди любых 10 ребят из этого класса какие-то двое дружат. Какое наибольшее количество школьников, имеющих ровно двух друзей-одноклассников может быть в этом классе? (Из 7 класса, упрощение)

6. Забор состоит из n досок, выстроенных в ряд. Каждая доска окрашена в один из 100 цветов. Оказалось, что для любых трёх различных цветов i, j, k найдутся доски этих цветов такие, что доски цветов i и j располагаются с разных сторон от доски цвета k (не обязательно рядом). Найдите наименьшее возможное значение n. (Таиланд, онлайн-олимпиада, 2021, модификация С.Берлова)

7. Некоторое семизначное число, не кратное 5, делится на четырёхзначное число, получаемое из него вычёркиванием трёх средних цифр. Докажите, что хотя бы одна цифра исходного числа – чётная. (С. Берлов)

8. В каждой клетке доски 2021×2022 (2021 строки, 2022 столбца) написана одна из букв А, Б или В таким образом, что выполняются следующие условия:

(i) Каждая буква встречается ровно 2021×674 раз.

(ii) Ни в каких двух соседних по стороне клетках не записаны одинаковые буквы.

(iii) Любой квадрат 2×2 содержит все три буквы А, Б, В.

Докажите, что в каждой строке ровно 674 буквы А. (Таиланд, онлайн-олимпиада, 2021)