МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Три натуральных числа $a < b < c$ таковы, что $b - a = c - b$. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = b \cdot (b - a)^2$. Найдите все возможные значения c.

2. Учитель загадал четыре трёхзначных последовательных числа, одно из которых делится на 6, а другое — на 7, сообщил это четырём умным детям, а также назвал каждому по одному из задуманных чисел (все названные числа различны). Числа, названные другим детям, они не слышали. Затем учитель раздал каждому по бумажке и попросил написать, могут ли они определить все 4 загаданных числа. Каждый написал, что не может. Учитель собрал бумажки и объявил детям, что никто не может отгадать четвёрку загаданных чисел. Затем учитель снова раздал детям по бумажке с тем же заданием. На этот раз каждый ребёнок смог однозначно определить загаданные числа. Сколько существует четвёрок чисел, которые мог загадать учитель?

3. На столе лежат 40 красных, 41 синий и 41 жёлтый шар. Паша и Вова по очереди делают ходы, начинает Паша. За один ход можно взять любые два шара, только если это не пара из синего и жёлтого шара. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Клетки доски 10×10 раскрашены в 11 цветов. Будем называть клетку *прекрасной*, если среди 19 клеток, находящихся с ней в одной строке или одном столбце, встречаются все 11 цветов. Какое наибольшее число прекрасных клеток может быть на этой доске?

5. Даны три отрезка длины 1, 2 и 3. Отрезок длины 3 разбили на 100 отрезков. Докажите, что из получившихся 102 отрезков можно выбрать какие-то три таким образом, что сумма длин любых двух выбранных отрезков больше длины третьего.

6. Коля выписал на доску все натуральные делители числа N в порядке возрастания. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередуются. Может ли N делиться на 2021?

7. В стране Уртурии не менее 100 городов. Некоторые города соединены дорогами, причём из любого города можно доехать по дорогам до любого другого, и среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. На какое наименьшее количество губерний гарантированно можно разбить все города так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам, не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза?

8. Для натурального $n \geqslant 100$ определим $T(n)$ как число, полученное из n перемещением двух первых цифр в конец. Например, $T(12345) = 34512$ и $T(100) = 10$. Найдите наименьшее $n \geqslant 100$, для которого $T(n) = 9n$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Три натуральных числа $a < b < c$ таковы, что $b - a = c - b$. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = b \cdot (b - a)^2$. Найдите все возможные значения c.

2. Учитель загадал четыре трёхзначных последовательных числа, одно из которых делится на 6, а другое — на 7, сообщил это четырём умным детям, а также назвал каждому по одному из задуманных чисел (все названные числа различны). Числа, названные другим детям, они не слышали. Затем учитель раздал каждому по бумажке и попросил написать, могут ли они определить все 4 загаданных числа. Каждый написал, что не может. Учитель собрал бумажки и объявил детям, что никто не может отгадать четвёрку загаданных чисел. Затем учитель снова раздал детям по бумажке с тем же заданием. На этот раз каждый ребёнок смог однозначно определить загаданные числа. Сколько существует четвёрок чисел, которые мог загадать учитель?

3. На столе лежат 40 красных, 41 синий и 41 жёлтый шар. Паша и Вова по очереди делают ходы, начинает Паша. За один ход можно взять любые два шара, только если это не пара из синего и жёлтого шара. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Клетки доски 10×10 раскрашены в 11 цветов. Будем называть клетку *прекрасной*, если среди 19 клеток, находящихся с ней в одной строке или одном столбце, встречаются все 11 цветов. Могут ли оказаться прекрасными более 90 клеток доски?

5. У Васи есть фишки трех цветов: красные (К), зеленые (З) и синие (С). Он поставил в ряд 7 фишек: КЗКЗКЗК. За один ход он может выбрать две любые фишки и заменить их и все фишки между ними по следующему правилу: красные меняются на зеленые, зеленые — на синие, синие — на красные. Через какое наименьшее число ходов все фишки в ряду могут стать синими?

6. Даны три отрезка длины 1, 2 и 3. Отрезок длины 3 разбили на 100 отрезков. Докажите, что из получившихся 102 отрезков можно выбрать какие-то три таким образом, что сумма длин любых двух выбранных отрезков больше длины третьего.

7. В стране Уртурии не менее 100 городов. Некоторые города соединены дорогами, причем из любого города можно доехать по дорогам до любого другого, и среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. Докажите, что города можно разбить на не более чем 99 губерний так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза.

8. Для натурального $n \geqslant 100$ определим $T(n)$ как число, полученное из n перемещением двух первых цифр в конец. Например, $T(12345) = 34512$ и $T(100) = 10$. Найдите наименьшее $n \geqslant 100$, для которого $T(n) = 9n$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых выполняется равенство $3! + a! = b! + 3! \cdot c!$. Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

2. На столе лежат 40 красных, 40 синих и 40 жёлтых шаров. Паша и Вова по очереди делают ходы, начинает Паша. За один ход можно взять любые два шарика, только если это не пара из синего и жёлтого шара. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Клетки доски 6×6 раскрашены в 7 цветов. Будем называть клетку *прекрасной*, если среди 11 клеток, находящихся с ней в одной строке или одном столбце, встречаются все 7 цветов. Могут ли оказаться прекрасными более 30 клеток доски?

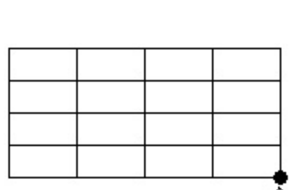
4. У Васи есть фишки трех цветов: красные (К), зеленые (З) и синие (С). Он поставил в ряд 7 фишек: КЗКЗКЗК. За один ход он может выбрать две любые фишки и заменить их и все фишки между ними по следующему правилу: красные меняются на зеленые, зеленые — на синие, синие — на красные. Через какое наименьшее число ходов все фишки в ряду могут стать синими?

5. Даны три отрезка длины 1, 2 и 3. Отрезок длины 3 разбили на 5 отрезков. Докажите, что из получившихся 7 отрезков можно выбрать какие-то три таким образом, что сумма длин любых двух выбранных отрезков больше длины третьего.

6. Коля выписал на доску все натуральные делители числа $N > 1$ в порядке возрастания. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередуются. Может ли N быть квадратом некоторого натурального числа?

7. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, представимы в виде $2^a - 2^b$, где a и b — целые неотрицательные числа?

8. Вокруг прямоугольного парка размером 400 на 800 метров проходит аллея, также парк разделен аллеями на прямоугольники 100 на 200 метров. Вход в парк находится в углу прямоугольника. Посетитель, зайдя в парк, прошел по всем аллеям и вернулся ко входу в парк. Какой наименьшей длины мог быть его маршрут?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

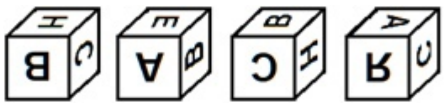
1. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых выполняется равенство $3! + a! = b! + 3! \cdot c!$. Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

2. На столе лежат 40 красных, 40 синих и 40 жёлтых шаров. Паша и Вова по очереди делают ходы, начинает Паша. За один ход можно взять любые два шарика, только если это не пара из синего и жёлтого шара. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Квадрат 9×9 разрезан на 9 квадратов 3×3. Сколькими способами можно поставить 9 фишек в клетки квадрата так, чтобы в каждой строчке, в каждом столбце, а также в каждом квадрате 3×3 была ровно одна фишка?

4. У Васи есть фишки трех цветов: красные (К), зеленые (З) и синие (С). Он поставил в ряд 9 фишек: КЗКЗКЗКЗК. За один ход он может выбрать две любые фишки и заменить их и все фишки между ними по следующему правилу: красные меняются на зеленые, зеленые – на синие, синие – на красные. Может ли он за 7 ходов сделать все фишки синими?

5. Мальчик выложил из четырёх одинаковых кубиков своё имя (мальчик сидит за кубиками). С обратной стороны кубики выглядят так, как на рисунке. Как зовут мальчика? На картинке мальчик сидит за кубиками.



6. Коля выписал на доску все натуральные делители числа $N > 1$ в порядке возрастания. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередуются. Может ли N быть квадратом некоторого натурального числа?

7. Замените буквы разными цифрами, чтобы в примере на вычитание

$$\text{УРАЛ} - 57 = \text{СОЧИ}$$

были использованы все 10 цифр. Найдите все решения.

8. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, представимы в виде $2^a - 2^b$, где a и b — целые неотрицательные числа?