МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021, МЛАДШАЯ ГРУППА ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1–4 МЕСТА

1. По кругу сидит 2021 человек. За одно действие поменяться местами могут любые два соседних человека. За какое наименьшее число действий люди могут пересесть так, чтобы каждый сидел на 1000 позиций левее изначальной?

2. Натуральное число n без нулей в записи назовём *фантастическим*, если какую-то его цифру можно удалить и получить делитель числа n. Например, 25 — фантастическое, так как можно удалить 2 и получить 5 — делитель числа 25. Докажите, что фантастических чисел конечное количество.

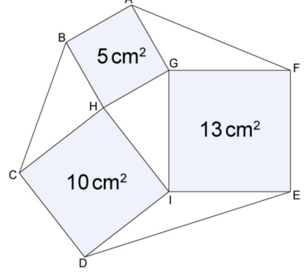
3. Для каких целых $0 \leqslant k \leqslant 9$ существуют натуральные m и n такие, что число $3^m + 3^n + k$ является точным квадратом?

4. В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За один ход можно заменить число x на среднее арифметическое числа x и его соседей (одного для крайних чисел, двух для не крайних). Будем говорить, что число *меняет знак*, если из неотрицательного оно становится отрицательным, и наоборот. Какое наибольшее количество смен знака может произойти с самым левым числом?

5. В левой нижней клетке квадрата $(2n+1) \times (2n+1)$ сидит заяц, в правой верхней — охотник. Раз в минуту они одновременно переходят в соседнюю по стороне клетку, причем заяц может двигаться только вправо или вверх, а охотник только влево или вниз. Если после перехода охотник и заяц оказываются на одной и той же вертикали либо горизонтали, то они видят друг друга, и охотник подстреливает зайца. Сколько различных маршрутов из $4n$ ходов, не выходящих за пределы квадрата, может выбрать охотник перед началом охоты, чтобы наверняка подстрелить зайца? Охотник не сходит с выбранного маршрута в процессе охоты.

6. Паша и Вова играют в игру. Перед ними лежат две шоколадки: 100×100 и 100×500. За один ход нужно выбрать одну из шоколадок, разломать её на две прямоугольные части с целыми сторонами и съесть один из **трёх** кусочков (в том числе можно съесть кусочек, который игрок сейчас не ломал). Ходят по очереди, начинает Паша, проигрывает тот, кто не может сходить. Кто из игроков побеждает при правильной игре?

7. Три квадрата $ABHG$, $CDIH$, $EFGI$ расположены так, что между ними образован треугольник GHI (нумерация вершин квадратов и треугольника против часовой стрелки). Площади квадратов соответственно равны 5 см^2, 10 см^2 и 13 см^2. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.



8. В графе 2021 вершина, все степени 1100. Вершины этого графа раскрасили в чёрный и белый цвета. Докажите, что можно удалить какую-то вершину и все смежные с ней так, чтобы чёрных и белых вершин осталось не поровну.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 5–8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА. БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. По кругу сидит 2021 человек. За одно действие поменяться местами могут любые два соседних человека. За какое наименьшее число действий люди могут пересесть так, чтобы каждый сидел на 1000 позиций левее изначальной?

2. На столе лежат 165 камней, каждый из которых весит больше 50, но меньше 100 килограммов. Эти камни как-то разложили на 11 куч. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

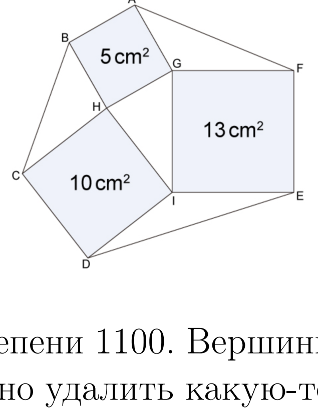
3. Для каких целых $0 \leqslant k \leqslant 9$ существуют натуральные m и n такие, что число $3^m + 3^n + k$ является точным квадратом?

4. В ряд выписаны действительные числа a_1, a_2, …, a_{100}. За один ход можно заменить число x на среднее арифметическое числа x и его соседей (одного для крайних чисел, двух для не крайних). Будем говорить, что число *меняет знак*, если из неотрицательного оно становится отрицательным, и наоборот. Могло ли самое левое число больше тысячи раз менять знак?

5. В левой нижней клетке квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ сидит заяц, в правой верхней — охотник. Раз в минуту они одновременно переходят в соседнюю по стороне клетку, причем заяц может двигаться только вправо или вверх, а охотник только влево или вниз. Если после перехода охотник и заяц оказываются на одной и той же вертикали либо горизонтали, то они видят друг друга, и охотник подстреливает зайца. Сколько различных маршрутов из $4n$ ходов, не выходящих за пределы квадрата, может выбрать охотник перед началом охоты, чтобы наверняка подстрелить зайца? Охотник не сходит с выбранного маршрута в процессе охоты.

6. Паша и Вова играют в игру. Перед ними лежат две шоколадки: 100×100 и 100×500. За один ход нужно выбрать одну из шоколадок, разломать её на две прямоугольные части с целыми сторонами и съесть один из **трёх** кусочков (в том числе можно съесть кусочек, который игрок сейчас не ломал). Ходят по очереди, начинает Паша, проигрывает тот, кто не может сходить. Кто из игроков побеждает при правильной игре?

7. Три квадрата $ABHG$, $CDIH$, $EFGI$ расположены так, что между ними образован треугольник GHI (нумерация вершин квадратов и треугольника против часовой стрелки). Площади квадратов соответственно равны 5 см^2, 10 см^2 и 13 см^2. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.



8. В графе 2021 вершина, все степени 1100. Вершины этого графа раскрасили в чёрный и белый цвета. Докажите, что можно удалить какую-то вершину и все смежные с ней так, чтобы чёрных и белых вершин осталось не поровну.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021, МЛАДШАЯ ГРУППА ПЕРВАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 3–8 МЕСТА

1. По кругу сидит 2021 человек. За одно действие поменяться местами могут любые два соседних человека. За какое наименьшее число действий люди могут пересесть так, чтобы каждый сидел на 1000 позиций левее изначальной?

2. На столе лежат 165 камней, каждый из которых весит больше 50, но меньше 100 килограммов. Эти камни как-то разложили на 11 куч. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

3. Для каких целых $0 \leqslant k \leqslant 9$ существуют натуральные m и n такие, что число $3^m + 3^n + k$ является точным квадратом?

4. В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. За один ход можно заменить число x на среднее арифметическое числа x и его соседей (одного для крайних чисел, двух для не крайних). Будем говорить, что число *меняет знак*, если из неотрицательного оно становится отрицательным, и наоборот. Могло ли самое левое число больше тысячи раз менять знак?

5. В левой нижней клетке квадрата $(2n + 1) \times (2n + 1)$ сидит заяц, в правой верхней — охотник. Раз в минуту они одновременно переходят в соседнюю по стороне клетку, причем заяц может двигаться только вправо или вверх, а охотник только влево или вниз. Если после перехода охотник и заяц оказываются на одной и той же вертикали либо горизонтали, то они видят друг друга, и охотник подстреливает зайца. Может ли охотник пройти до левого нижнего угла по такому маршруту, чтобы наверняка подстрелить зайца? Охотник не сходит с выбранного маршрута в процессе охоты.

6. Паша и Вова играют в игру. Перед ними лежат две шоколадки: 100×100 и 100×500. За один ход нужно выбрать одну из шоколадок, разломать её на две прямоугольные части с целыми сторонами и съесть один из **трёх** кусочков (в том числе можно съесть кусочек, который игрок сейчас не ломал). Ходят по очереди, начинает Паша, проигрывает тот, кто не может сходить. Кто из игроков побеждает при правильной игре?

7. В классе учатся девочки и мальчики, всего 19 детей. Каждый из них дружит ровно с 10 своими одноклассниками. Учитель выбирает одного ученика и просит выйти его и всех его друзей. Докажите, что он может выбрать ученика так, чтобы в классе осталось не поровну мальчиков и девочек.

8. Действительные ненулевые числа a, b таковы, что $a - b = ab$. Чему может быть равно $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - ab$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021, МЛАДШАЯ ГРУППА ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе лежат 165 камней, каждый из которых весит больше 50, но меньше 100 килограммов. Эти камни как-то разложили на 11 куч. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

2. Для каких целых $0 \leqslant k \leqslant 9$ существуют натуральные m и n такие, что число $3^m + 3^n + k$ является точным квадратом?

3. В левой нижней клетке квадрата $(2n+1) \times (2n+1)$ сидит заяц, в правой верхней — охотник. Раз в минуту они одновременно переходят в соседнюю по стороне клетку, причем заяц может двигаться только вправо или вверх, а охотник только влево или вниз. Если после перехода охотник и заяц оказываются на одной и той же вертикали либо горизонтали, то они видят друг друга, и охотник подстреливает зайца. Может ли охотник пройти до левого нижнего угла по такому маршруту, чтобы наверняка подстрелить зайца? Охотник не сходит с выбранного маршрута в процессе охоты.

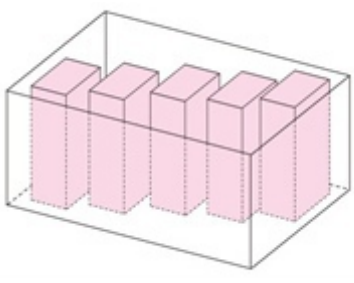
4. В классе учатся девочки и мальчики, всего 19 детей. Каждый из них дружит ровно с 10 своими одноклассниками. Учитель выбирает одного ученика и просит выйти его и всех его друзей. Докажите, что он может выбрать ученика так, чтобы в классе осталось не поровну мальчиков и девочек.

5. Натуральное число n таково, что числа $4n$ и $6n$ имеют поровну натуральных делителей. Могут ли числа $12n$ и $18n$ тоже иметь поровну натуральных делителей?

6. Действительные ненулевые числа a, b таковы, что $a - b = ab$. Чему может быть равно $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - ab$?

7. На окружности отмечено 100 различных точек. Кирилл выбирает 60 из этих точек и красит каждую из них в красный или синий цвет. Потом Алина красит остальные 40 точек в красный или синий цвет. Алина хочет, чтобы точки можно было соединить 50 непересекающимися (даже в концах) отрезками так, чтобы концы каждого отрезка были одноцветными. Верно ли, что Алине гарантированно удастся это сделать?

8. Внутри прямоугольного аквариума лежат 5 одинаковых блоков. Уровень воды в аквариуме равен 9 см. Когда два блока вынули, уровень воды оказался равен 7 см. Какой уровень воды будет, если достать все блоки? Высота аквариума и блоков больше 9 см.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021, МЛАДШАЯ ГРУППА ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Серёжа играет в компьютерную игру «Умный Садовник». В своем саду он может посадить деревья трех видов. Если общее количество апельсиновых деревьев в его саду равно n, то он должен заплатить за них n^2 золотых монет. Если общее количество абрикосовых деревьев равно k, то он должен заплатить $20k$ золотых монет. Наконец, если общее количество грушевых деревьев равно m, то он должен заплатить m^3 золотых монет. Серёжа хочет посадить в своем саду 40 деревьев (каких-то видов может быть 0 деревьев). Сколько каких деревьев он должен посадить, если хочет минимизировать затраты игрового золота?

2. Если сложить пять дат, на которые приходилась последняя рабочая неделя, т.е. 25.10.21, 26.10.21, 27.10.21, 28.10.21, 09.10.21, то получится 135.50.105. Если сложить другие пять последовательных дат, то получится 63.**.80. Какое двузначное число пропущено?

3. В левой нижней клетке квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ сидит заяц, в правой верхней — охотник. Раз в минуту они одновременно переходят в соседнюю по стороне клетку, причем заяц может двигаться только вправо или вверх, а охотник только влево или вниз. Если после перехода охотник и заяц оказываются на одной и той же вертикали либо горизонтали, то они видят друг друга, и охотник подстреливает зайца. Может ли охотник пройти до левого нижнего угла по такому маршруту, чтобы наверняка подстрелить зайца? Охотник не сходит с выбранного маршрута в процессе охоты.

4. В классе учатся девочки и мальчики, всего 19 детей. Каждый из них дружит ровно с 10 своими одноклассниками. Учитель выбирает одного ученика и просит выйти его и всех его друзей. Докажите, что он может выбрать ученика так, чтобы в классе осталось не поровну мальчиков и девочек.

5. Нарисуйте такой восьмиугольник, который можно разрезать на 2 равные части, можно разрезать на 3 равные части, и можно разрезать на 4 равные части.

6. Действительные ненулевые числа a, b таковы, что $a-b=ab$. Чему может быть равно $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-ab$?

7. На окружности отмечено 100 различных точек. Кирилл выбирает 60 из этих точек и красит каждую из них в красный или синий цвет. Потом Алина красит остальные 40 точек в красный или синий цвет. Алина хочет, чтобы точки можно было соединить 50 непересекающимися (даже в концах) отрезками так, чтобы концы каждого отрезка были одноцветными. Верно ли, что Алине гарантированно удастся это сделать?

8. Внутри прямоугольного аквариума лежат 5 одинаковых блоков. Уровень воды в аквариуме равен 9 см. Когда два блока вынули, уровень воды оказался равен 7 см. Какой уровень воды будет, если достать все блоки? Высота аквариума и блоков больше 9 см.