Решения задач командной олимпиады 8 класса

1. *В круг встали n детей, мальчики и девочки. Оказалось, что среди каждых пяти детей, стоящих подряд, ровно две девочки. Докажите, что это возможно тогда и только тогда, когда n делится на 5.*

Решение. Пронумеруем детей от 1 до n по часовой стрелке. Пусть a_i — пол ребёнка с номером i. Заметим, что дети, стоящие через 5 других детей должны быть одного пола. Если n даёт остаток 1 при делении на 5, то получаем, что

$$\underbrace{a_1 = a_6 = \ldots = a_n} = \underbrace{a_5 = a_{10} = \ldots = a_{n-1}} = \underbrace{a_4 = \ldots = a_{n-2}} = \underbrace{a_3 = \ldots = a_{n-3}} = \underbrace{a_2 = \ldots = a_{n-4}} = a_1.$$

В этом случае все дети одного пола, чего не может быть. Аналогично разбираются случаи, когда n даёт остаток 2,3 или 4 при делении на 5.

Для n кратных 5 подойдёт следующий пример: девочки будут с номерами 1, 2; 6, 7; 11, 12; …; $n-4$, $n-3$, а остальные мальчики.

2. *Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, а точки E и F — основания высот треугольника ABM, опущенных из вершин A и B соответственно. Докажите, что $DE = CF$.*

Решение. Обозначим за T точку пересечения прямых AM и BC. Из того, что $CM = MD$, $\angle AMD = \angle CMT$ и $\angle ADM = \angle TCM$ следует, что треугольники AMD и TMC равны. Значит, $CT = AD = BC$, т.е. FC — медиана в прямоугольном треугольнике BFT и $CF = BC = AD$. Аналогично $ED = AD = BC$, откуда и следует утверждение задачи.

3. *Архипелаг состоит из 1000 островов, некоторые пары которых соединены мостами, причём от любого острова можно добраться по мостам до любого другого. Оказалось, что для любых четырёх островов A, B, C, D таких, что есть мост между A и B, между B и C, между C и D, также есть мост между A и C или между B и D. Докажите, что есть остров, соединённый мостами со всеми остальными.*

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — архипелаги, ребра — мосты. Выберем в этом графе вершину наибольшей степени, назовем её B. Предположим, что B соединена не со всеми вершинами. Так как граф связный, какая-то вершина, соединенная с B, должна быть соединена с вершиной, не соединенной с B (иначе мы не доберемся от B до тех вершин, с которыми она не соединена). Пусть B соединена с C, C соединена с D, но B не соединена с D. Теперь для любой вершины A, которая соединена с B, мы можем применить условие задачи для пути $A-B-C-D$ и получить, что A соединена с C (так как между B и D нет ребра). Таким образом, C соединена с B, со всеми вершинами, с которыми соединена B, и ещё с вершиной D. Это значит, что её степень больше степени B, что противоречит нашему изначальному выбору. Таким образом, вершина наибольшей степени обязана быть соединена со всеми остальными вершинами.

4. *Даны натуральные числа p и q. Вася выбирает вещественные числа a и b, а затем рассматривает всевозможные разности $|a_m - b_n|$, где $a_i = a + \frac{i}{p}$ и $b_i = b + \frac{i}{q}$ для каждого натурального i. Затем Васе дадут столько граммов золота, чему равна наименьшая из этих разностей. Какое наибольшее количество золота удастся заработать Васе? Ответ может зависеть от p и q.*

Ответ: $\frac{1}{2[p,q]}$ граммов. **Решение.** Пусть $(p, q) = d$, $p = du$, $q = dv$. Умножим все числа a_i и b_j (а с ними все васины разности и ответ) на $[p, q] = duv$. Теперь в качестве разностей, получаемых Васей, выступают все числа вида $|c + (mv - nu)|$, где $c = duv(a - b)$.

Числа вида $mv - nu$ с целыми m и n образуют некоторое множество целых чисел I. Докажем, что в I лежат все целые числа. Очевидно, сумма двух чисел из I, а также кратное любого числа из I тоже лежат в I. Рассмотрим в I наименьший положительный элемент s. Если $x \in I$ поделить с остатком на s: $x = sy + r$, $0 \leqslant r < s$, остаток $r = x - ys$ также лежит в I и поэтому равен 0. Таким образом, все элементы I, в том числе m и n, кратны s, откуда $s = 1$, и все кратные s, то есть все целые числа, лежат в I.

Среди васиных разностей, таким образом, есть числа $|\{c\}|$ и $1 - |\{c\}|$, одно из которых не больше 1/2. С другой стороны, если $c = \frac{1}{2}$ (что получается, когда в первоначальном выборе Васи $a - b = \frac{1}{2[p,q]}$), все Васины разности не меньше 1/2. Деля их обратно на $[p, q]$, получаем ответ.

5. *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) $\angle BAC = 70°$. Точка N на стороне AB и точка M на отрезке NC таковы, что $\angle NAM = \angle NCB = 5°$. Прямая BM пересекает биссектрису угла ACN в точке I. Докажите, что NI – биссектриса угла ANC.*

Решение. Обозначим I' точку пересечения биссектрис углов ACN и CAN. Понятно, что I' лежит на биссектрисе угла ANC. Докажем, что точки I', M и B лежат на одной прямой, откуда и будет следовать решение задачи.

Так как треугольник ABC равнобедренный, то $\angle ACB = (180° - \angle BAC)/2 = 55°$, а значит $\angle ACI' = (\angle ACB - \angle NCB)/2 = 25°$. Из симметрии относительно биссектрисы AI' получаем, что $\angle ABI' = \angle ACI' = 25°$, откуда $AI'B = 180° - \angle BAI' - \angle ABI' = 120°$. Треугольник ACM — равнобедренный, так как $\angle ACM = 50°$, $\angle MAC = 65°$, $\angle AMC = 180° - \angle ACM - \angle MAC = 65°$, откуда $AC = CM$. А значит треугольники $AI'C$ и $MI'C$ равны по двум сторонам и углы между ними. Получаем, что треугольник $AI'M$ равнобедренный, $AI' = MI'$ и $\angle I'AM = I'MA = 30°$. Значит $\angle AI'M = 120° = \angle AI'B$, откуда следует, что точки I', M и B лежат на одной прямой.

6. *Найдите все натуральные числа n, для которых числа от 1 до $2n$ можно разбить на такие две группы a_1, a_2, …, a_n и b_1, b_2, …, b_n по n чисел в каждой, что $a_1a_2\ldots a_n + b_1b_2\ldots b_n - 1 \,\vdots\, 2n$.*

Ответ: $n = 2^k$ при $k = 0$ и $k \geqslant 2$. **Решение.** Одно из чисел $a_1a_2\dots a_n$ и $b_1b_2\dots b_n$ нечётно; примем, не умаляя общности, что это число $a_1a_2\dots a_n$. Тогда все a_i нечётны, таким образом, это числа 1, 3, 5, …, $2n-1$ в каком-то порядке. Среди чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ находится число $2n$, поэтому $a_1a_2\dots a_n - 1$ кратно $2n$. Это невозможно, если у n есть нечётный делитель, больший 1, так как в этом случае он находился бы среди a_i и $a_1a_2\dots a_n - 1$ на него бы не делилось. Таким образом, n – степень двойки с целым неотрицательным показателем, $n = 2^{k-1}$.

При $k = 1$ условие задачи, очевидно, удовлетворяется: $0 + 1 - 1$ кратно 2; при $k = 2$ число $2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 1$ на 4 не делится. Докажем индукцией по k, что при $k > 2$ выражение $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2^k - 1) + 2 \cdot 4 \dots 2^k - 1$ кратно 2^k, то есть что на 2^k делится $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2^k-1) - 1$. При $k = 3$ число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 = 104$ кратно 8. Пусть $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2^k - 1) = 1 + 2^k t$, тогда $(2^k+1)(2^k+3)\dots(2^{k+1}-1) = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2^k-1) + 2^k(1+3+\ldots+(2^k-1)) + 2^{2k}u = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2^k-1) + 2^k \cdot 2^{2k-2} + 2^{2k}u$ даёт при делении на 2^{k+1} такой же остаток $1 + 2^k t$. Осталось заметить, что $(1+2^k t)^2 = 1 + 2^{k+1}t + 2^{2k}t^2$ даёт остаток 1 при делении на 2^{k+1}.

7. *В турнире по теннису играли девочки и мальчики (не обязательно равное количество), причём каждая девочка сыграла ровно 1 матч с каждым мальчиком. Оказалось, что каждая девочка победила не менее 21 мальчика, а каждый мальчик победил не менее 12 девочек. При каком наименьшем количестве участников такое возможно? Ничьих в теннисе не бывает.*

Ответ: 65. **Решение.** Пусть девочек было d, а мальчиков m. Тогда всего игр было dm, а побед не менее $21d + 12m$. Значит, $dm \geqslant 21d + 12m$, то есть $(d-12)(m-21) \geqslant 252$. По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом $(d-12)+(m-21) \geqslant 2\sqrt{252} > 31$, значит, $d + m > 64$, а поскольку d и m целые, $d + m \geqslant 65$.

Покажем, как провести удовлетворяющий условию турнир с 65 участниками.

Пригласим на турнир 2 группы по 13 девочек D_1, D_2 и 3 группы по 13 мальчиков M_1, M_2, M_3. Установим взаимно-однозначное соответствие между группами D_1 и M_1, а также между группами D_2 и M_2. Устроим так, чтобы каждая девочка из группы D_1 обыграла сопоставленного ей мальчика из группы M_1 и всех мальчиков из группы M_2, а каждая девочка из группы D_2 обыграла сопоставленного ей мальчика из группы M_2 и всех мальчиков из группы M_1. Всем остальным мальчикам девочки из групп D_1 и D_2 проиграют. Теперь у каждой девочки 14 побед, а у каждого мальчика из групп M_1 и M_2 12 побед.

Теперь занумеруем девочек каждой группы и мальчиков из группы M_3 числами от 1 до 13, а затем расставим участников каждой группы по кругу в порядке, в котором они занумерованы. Для каждого i от 1 до 13 поручим i-й девочке из каждой группы обыграть i-го мальчика из группы M_3, а также шесть мальчиков, следующих за ним по кругу, а остальным мальчикам проиграть. Теперь каждой девочке прибавилось 7 побед (их стало всего 21, как и нужно), а каждый мальчик из группы M_3 победил по 6 девочек из каждой группы и имеет всего 12 побед.

8. *На доске написаны дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$. Вася упражняется в сложении дробей. Каждую минуту он выбирает две дроби, пишет в числитель сумму числителей, в знаменатель — сумму знаменателей, полученную дробь сокращает (до несократимой), а две исходные дроби стирает. Дробь с каким наибольшим значением может оказаться на доске через $n-1$ минуту? Ответ может зависеть от n.*

Ответ: $\frac{1}{2}$. **Решение.** Чтобы получить такой результат, обработаем сначала дроби $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n-1}$ (получив $\frac{2}{2n-1}$), а результат совокупим с $\frac{1}{n-2}$, получив $\frac{3}{3n-3} = \frac{1}{n-1}$. В результате на доске окажутся дроби

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-4}, \frac{1}{n-3}, \frac{1}{n-1}.$$

Теперь каждый раз будем применять васину операцию к двум наименьшим дробям. После k таких операций на доске будут дроби

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-4}, \frac{1}{n-k-3}, \frac{1}{n-k-1}$$

(действительно, из дробей $\frac{1}{n-k-3}$ и $\frac{1}{n-k-1}$ получается дробь $\frac{1}{n-k-2}$). После $n-4$ операций у Васи останутся дроби $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{3}$, из которых получается $\frac{1}{2}$.

Докажем, что больше получиться не может. Заметим, что если $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$ – две дроби с положительными числителями и знаменателями, то дробь $\frac{a+b}{c+d}$ заключена между ними. Отсюда следует, что, если в результате наших операций над набором дробей осталась одна, эта дробь меньше наибольшей дроби исходного набора.

В какой-то момент Вася должен будет применить свою операцию сложения к дроби $\frac{1}{1}$ и какой-то другой, скажем, $\frac{x}{y}$. Если $\frac{x}{y} < \frac{1}{2}$, то есть $y \geqslant 2x+1$, Вася получит дробь $\frac{x+1}{y+1} \leqslant \frac{x+1}{2x+2} = \frac{1}{2}$. Все (возможно) оставшиеся дроби не больше $\frac{1}{2}$, и окончательный результат будет не больше $\frac{1}{2}$. Если $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, то обсуждаемая операция – не последняя (так как из всех дробей, кроме $\frac{1}{1}$, должна получиться дробь, меньшая $\frac{1}{2}$) и участвующая в ней дробь $\frac{1}{2}$ написана на доске с самого начала (по той же причине). Поэтому результат этой операции, $\frac{2}{3}$, будет взаимодействовать с некоторой дробью $\frac{e}{f} \leqslant \frac{1}{3}$. Поскольку $f \geqslant 3e \geqslant 2e+1$, в результате получится $\frac{2+e}{3+f} \leqslant \frac{e+2}{2e+4} = \frac{1}{2}$. После этого на доске останутся только дроби, не большие $\frac{1}{2}$, и окончательный результат будет не больше $\frac{1}{2}$.