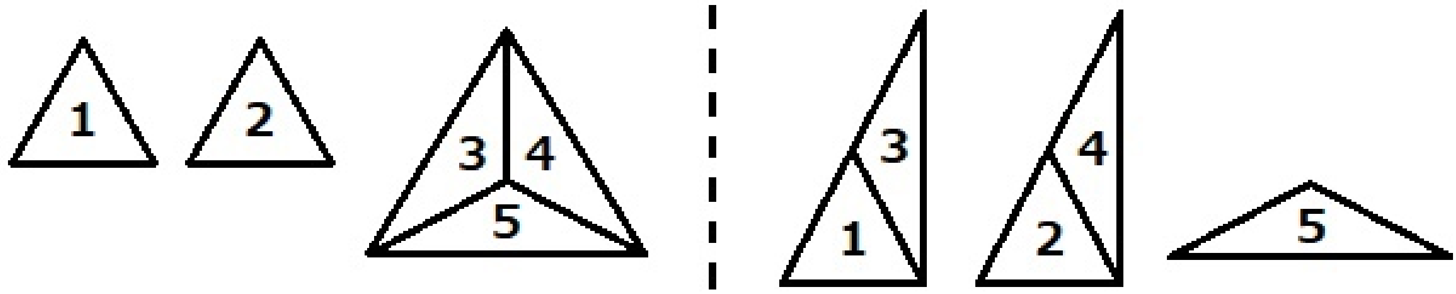
ЛИЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 25.10.2021
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА. РЕШЕНИЯ

1. Незнайка вырезал из картона 5 треугольных частей. Он говорит, что смог составить три остроугольных треугольника, использовав каждую из пяти частей по одному разу. Переложив все пять частей другим способом, он смог составить три не остроугольных треугольника. Могли ли слова Незнайки быть правдой?

Ответ. Да, могли. **Решение.** Например, как на картинке. Первый раз Незнайка составил три равносторонних треугольника, второй раз — два прямоугольных и один тупоугольный.



2. Можно ли из множества $\{1, 2, \ldots, 9, 10, 11\}$ выбрать десять различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ так, чтобы все десять чисел $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_9 - a_{10}|, |a_{10} - a_1|$ были различными?

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Всего различных разностей может быть 10: все натуральные числа от 1 до 10. У нас как раз 10 разностей, и если мы хотим, чтобы все они были различными, это должны быть в каком-то порядке числа 1, 2, 3, …, 10. Далее заметим, что сумма разностей из условия должна быть чётной: если мы сложим эти разности без знаков модуля, то чётность суммы не изменится, а в таком случае получается 0, то есть чётное число. Но сумма чисел от 1 до 10 равна 55 — нечётное число, противоречие.

3. На экране компьютера горит натуральное число, большее 1 000 000. Каждую минуту из числа на экране вычитается количество его натуральных делителей, отличных от самого числа (например, из числа 28 вычитается 5). Докажите, что рано или поздно на экране будет нечётное простое число.

Решение. Заметим, что все делители числа n, кроме самого n, не превосходят $n/2$, поэтому каждое следующее число на экране компьютера не меньше половины предыдущего. Следовательно, в некоторый момент на экране будет гореть число от 5 до 8. Но тогда оно либо уже нечётное простое, либо станет таковым в следующую минуту.

4. На клетчатой плоскости живут 20 ёжиков. Каждый ёжик поделил количество ёжиков, которые живут в той же строке, на количество ёжиков, которые живут в том же столбце (и там, и там ёжик учитывает самого себя). Могли ли у всех ёжиков получиться разные числа?

Ответ. Нет, не могли. **Решение.** Предположим, что в одном столбце находятся хотя бы 6 ежей. Тогда в их дробях знаменатели будут одинаковыми, поэтому числители должны быть разными. Другими словами, для этих шести ёжиков в их строчках должно быть разное количество ёжиков. В строчке с наименьшим количеством хотя бы 1 ёжик, в следующей по величине — хотя бы 2, и т.д., в шестой — хотя бы 6. В сумме получаем не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ёжиков.

Значит, в столбце не более 5 ёжиков. Аналогично в строчках тоже не больше, чем по 5 ёжиков. Тогда всего комбинаций "числитель-знаменатель" максимум 25: 5 вариантов для числителя и 5 вариантов для знаменателя. Но варианты 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 и 5-5 дают одно и то же число, поэтому остаётся 21 вариант. Осталось заметить, что также одно число дают варианты 1-2 и 2-4, а также 2-1 и 4-2. Каждый из этих вариантов уменьшает возможное количество различных значений на 1, и мы получаем не более 19 различных значений.

5. Есть много шаров, на каждом из которых написано число от 1 до 10 (числа могут повторяться). Они как-то разложены по десяти корзинам, пронумерованных числами от 1 до 10. Известно, что для каждого номера можно разделить все корзины на две кучи так, что в кучах поровну шаров этого номера. Докажите, что найдется такой номер, что в корзине с этим номером не более половины шаров имеют тот же номер.

Решение. Обозначим k_i количество шариков в корзине i, а c_i — количество шариков с номером i. Поскольку $k_1 + k_2 + \ldots + k_{10} = c_1 + c_2 + \ldots + c_{10}$, то не может быть так, что $k_i < c_i$ для любого i. Выберем такой номер i, что $k_i c_i$. Тогда если в корзине i больше $\frac{k_i}{2}$ шариков цвета i, то там больше половины всех существующих шариков цвета i.

Но тогда невозможно разложить корзины на две группы, чтобы в группах было поровну шаров цвета i, поскольку в одной из корзин больше шаров этого цвета, чем в остальных корзинах вместе взятых.