Решения задач олимпиады 8 класса

1. *В турнире по бадминтону участвовало 16 спортсменов. Каждые двое сыграли не более одной игры, при этом ничьих не было. После окончания турнира оказалось, что все игроки одержали различное количество побед. Докажите, что все участники потерпели различное количество поражений.*

Решение. На турнире можно одержать от 0 до 15 побед. Так как это ровно 16 вариантов, то каждый из этих вариантов встретился у одного из спортсменов. Следовательно, было сыграно $0+1+2+\ldots+15 = 15\cdot 14/2$ игр, а это все возможные игры, которые могли быть сыграны. Таким образом, каждый участник сыграл 15 игр, у всех участников разное число побед, поэтому и разное число поражений.

2. *Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b, что наибольший общий делитель чисел a^2+1 и b^2+1 равен $a+b$.*

Решение. Воспользовавшись свойством НОД$(x,y) =$ НОД$(x-y,y)$, получаем

$$\text{НОД}(a^2+1, b^2+1) = \text{НОД}((a^2+1)-(b^2+1), b^2+1) = \text{НОД}((a-b)(a+b), b^2+1).$$

Поэтому достаточно потребовать $b^2+1 = a+b$, то есть взять $a = b^2-b+1$.

3. *В треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC. Точка D на стороне AC такова, что $DM \perp BC$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке X. Оказалось, что $2BX = AC$. Докажите, что X — середина отрезка AM.*

Решение. Пусть S — середина AC. Тогда в равнобедренном треугольнике BDC на боковых сторонах BD и CD имеются такие точки X и S, что $BX = CS$. Из этого следует, что $SX \parallel BC$. Тем самым в треугольнике CAM прямая SX проходит через середину стороны AC и параллельна CM, то есть прямая SX является средней линией треугольника CAM, откуда $AX = XM$.

4. *В корзинах $K_1, \ldots, K_n$ лежат шары цветов $C_1, \ldots, C_n$. Известно, что для каждого цвета можно разделить корзины на две кучи так, что в кучах поровну шаров этого цвета. Докажите, что найдется такое число m, что в корзине K_m не более половины шаров имеют цвет C_m.*

Решение. Из условия вытекает, что для каждого числа j количество шаров цвета j в коробке с номером j не больше, чем половина всех шаров цвета j. Иначе говоря, если обозначить через a_j количество шаров цвета j в коробке с номером j, то $a_1+a_2+\cdots+a_n \leqslant \frac{1}{2}N$, где N — количество всех шаров.

Если предположить, что для всех j в корзине K_j более половины шаров имеют цвет C_j (то есть a_j больше половины числа шаров в коробке K_j), то будет выполнего $a_1+a_2+\cdots+a_n > \frac{1}{2}N$ — противоречие с полученным в предыдущем абзаце неравенством.

5. *Для каждого натурального m докажите неравенство*

$$\left|\{\sqrt{m}\} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{8(\sqrt{m}+1)}.$$

Напомним, что $\{x\}$ — это дробная часть числа x, она равна $x-[x]$, где $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Решение. Пусть $[\sqrt{m}] = k$. Тогда

$$\left|\{\sqrt{m}\} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|2k+1-2\sqrt{m}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{|4k^2+4k+1-4m^2|}{2k+1+2\sqrt{m}}.$$

Числитель последней дроби – нечётное натуральное число, и поэтому не меньше 1. Таким образом,

$$\left|\{\sqrt{m}\} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k+1+2\sqrt{m}} \geqslant \frac{1}{2(4\sqrt{m}+1)} > \frac{1}{8(\sqrt{m}+1)},$$

что и требовалось доказать.