МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На столе стоит 11 больших коробок. В некоторых из них находятся по 8 коробок поменьше, остальные пусты. В некоторых коробках поменьше находятся ещё по 8 коробок поменьше, остальные пусты и т.д. Может ли суммарно быть ровно 2021 пустых коробок?

2. В некоторые k клеток доски 8×8 расставлены различные числа таким образом, что для каждой клетки с числом a среди чисел в клетках, имеющих ровно одну общую точку с данной, не более одного числа, большего a. Найдите наибольшее возможное значение k.

3. Даны три отрезка с длинами 1, 2 и 3. Отрезок длины 3 разбили на 100 отрезков. Докажите, что из получившихся 102 отрезков можно выбрать какие-то три таким образом, что сумма длин любых двух выбранных отрезков больше длины оставшегося.

4. Некоторые города страны Уртурии соединены дорогами, причем из любого города можно доехать по дорогам до любого другого, и среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. Докажите, что можно распределить города по не более чем 98 губерниям так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза.

5. Учитель объявил 99 умным детям, что загадал 99 последовательных натуральных чисел, одно из которых делится на 1000. Он сообщил каждому по секрету одно из этих 99 чисел (все сообщенные числа различны). Затем учитель раздал всем по бумажке и попросил каждого из детей написать, может ли он определить сумму 99 загаданных чисел. Каждый написал «Нет». Учитель собрал бумажки и объявил детям, что все написали «Нет», после чего снова раздал бумажки и продолжал так делать, пока кто-то впервые не напишет «Да». Может ли так случиться, что все 99 детей напишут «Да» одновременно?

6. У Алины есть неограниченный запас конфет n видов: вида №1, вида №2, …, вида №n. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции в любом порядке:

1. Съесть конфету вида k, а вместо неё на ее место положить конфеты вида $k-1$ и $k+1$ из запаса именно в таком порядке (на место 1 кладется n и 2, а на место n кладется $n-1$ и 1).
2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида.

При каких натуральных n Кирилл может изначально выложить конфеты так, чтобы Алине не удалось добиться того, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

7. Есть 6 гирь, веса которых 10, 10, 11, 11, 11, 12 килограмм. На каждой из них наклейка, на которой указан вес этой гири. Эксперт знает, что наклейки правильные, но его шеф сомневается - он считает, что его сын мог ради шутки оторвать некоторые наклейки и переклеить их по-другому. Как эксперту всего за 2 взвешивания на двухчашечных весах убедить шефа, что наклейки всё-таки правильные?

8. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, N. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их сумму или их произведение. Докажите, что найдется такое N, большее миллиона, что за $N-1$ операцию на доске можно получить число вида $100\ldots0$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На столе стоит 11 больших коробок. В некоторых из них находятся по 8 коробок поменьше, остальные пусты. В некоторых коробках поменьше находятся ещё по 8 коробок поменьше, остальные пусты и т.д. Может ли суммарно быть ровно 2021 пустых коробок?

2. В некоторые k клеток доски 8×8 расставлены различные числа таким образом, что для каждой клетки с числом a среди чисел в клетках, имеющих ровно одну общую точку с данной, не более одного числа, большего a. Найдите наибольшее возможное значение k.

3. На доске выписаны числа $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{99}$. К ним дописали ещё 100 натуральных чисел, не превосходящих 3^{99}, таким образом, что получилось 200 различных натуральных чисел. Докажите, что можно найти 4 выписанных числа таких, что сумма любых трёх из них больше четвёртого.

4. Некоторые города страны Уртурии соединены дорогами, причем среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. Докажите, что можно распределить города по не более чем 99 губерниям так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза.

5. Учитель объявил 99 умным детям, что загадал 99 последовательных натуральных чисел, одно из которых делится на 1000. Он сообщил каждому по секрету одно из этих 99 чисел (все сообщенные числа различны). Затем учитель раздал всем по бумажке и попросил каждого из детей написать, может ли он определить сумму 99 загаданных чисел. Каждый написал «Нет». Учитель собрал бумажки и объявил детям, что все написали «Нет», после чего снова раздал бумажки и продолжал так делать, пока кто-то впервые не напишет «Да». Может ли так случиться, что все 99 детей напишут «Да» одновременно?

6. У Алины есть неограниченный запас конфет трёх видов: карамель, трюфели и батончики. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции:

1. Съесть конфету одного вида, и на её место положить по конфете двух других видов из запаса в любом порядке.
2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида.

Верно ли, что как бы Кирилл ни разложил изначально конфеты, Алина сможет действовать так, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

7. Есть 6 гирь, веса которых 10, 10, 11, 11, 11, 12 килограмм. На каждой из них наклейка, на которой указан вес этой гири. Эксперт знает, что наклейки правильные, но его шеф сомневается - он считает, что его сын мог ради шутки оторвать некоторые наклейки и переклеить их по-другому. Как эксперту всего за 2 взвешивания на двухчашечных весах убедить шефа, что наклейки всё-таки правильные?

8. На доске написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, N. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их сумму или их произведение. Докажите, что найдется такое N, большее миллиона, что за $N-1$ операцию на доске можно получить число вида $100\ldots0$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе стоит 11 больших коробок. В некоторых из них находятся по 8 коробок поменьше, остальные пусты. В некоторых коробках поменьше находятся ещё по 8 коробок поменьше, остальные пусты и т.д. Может ли суммарно быть ровно 2021 пустых коробок?

2. На некоторые клетки шахматной доски положили по яблоку (всего 20 яблок). Могло ли оказаться, что для каждой клетки доски по крайней мере на одной из соседних с ней по стороне клеток лежит яблоко?

3. На доске выписаны числа $1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{99}$. К ним дописали ещё 100 натуральных чисел, не превосходящих 3^{99}, таким образом, что получилось 200 различных натуральных чисел. Докажите, что можно найти 4 выписанных числа таких, что сумма любых трёх из них больше четвёртого.

4. Некоторые города страны Уртурии соединены дорогами, причем среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. Докажите, что можно распределить города по не более чем 99 губерниям так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза.

5. Сколькими способами на шахматной доске 8×8 можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы ни для каких двух из них одна из них не находилась одновременно правее и ниже другой?

6. У Алины есть неограниченный запас конфет трёх видов: карамель, трюфели и батончики. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции:

1. Съесть конфету одного вида, и на её место положить по конфете двух других видов из запаса в любом порядке.
2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида.

Верно ли, что как бы Кирилл ни разложил изначально конфеты, Алина сможет действовать так, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

7. Есть три гири веса 3 килограмма и три гири веса 5 килограмм. На каждой из них наклейка, на которой указан вес этой гири. Эксперт знает, что наклейки правильные, но его шеф сомневается - он считает, что его сын мог ради шутки оторвать некоторые наклейки и переклеить их по-другому. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах эксперт может убедить шефа, что наклейки всё-таки правильные?

8. На доске написаны числа 1, 2, 3, $\ldots$, N. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их сумму или их произведение. Докажите, что найдется такое N, большее миллиона, что за $N-1$ операцию на доске можно получить число вида $100\ldots0$.

LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. СОЧИ, 24.10 – 30.10.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В компьютерном клубе есть много тройников, каждый из которых можно включить в розетку и обеспечить питанием три компьютера. Вместо компьютеров можно включать другие тройники. Можно ли с помощью нескольких тройников обеспечить питанием 100 компьютеров, так чтобы ни одного компьютера больше нельзя было подключить? (Сначала в компьютерном клубе есть только одна розетка.)

2. На некоторые клетки шахматной доски положили по яблоку (всего 20 яблок). Могло ли оказаться, что для каждой клетки доски по крайней мере на одной из соседних с ней по стороне клеток лежит яблоко?

3. Даны три отрезка с длинами 1, 2 и 3. Отрезок длины 3 разбили на 4 неравных отрезка. Докажите, что из получившихся 6 отрезков какие-то два в сумме длиннее какого-то третьего, большего них.

4. Замените буквы разными цифрами, чтобы в примере на вычитание:

$$\text{УРАЛ} - 57 = \text{СОЧИ}$$

были использованы все 10 цифр.

5. Сочи, как и Зурбаган, втрое ближе к экватору, чем к Южному полюсу. Во сколько раз экватор может быть дальше от Сочи, чем от Зурбагана? Дайте все возможные ответы, но помните, что Сочи находится в Северном полушарии.

6. Сколькими способами на шахматной доске 8×8 можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей так, чтобы ни для каких двух из них одна из них не находилась одновременно правее и ниже другой?

7. Есть три гири веса 3 килограмма и три гири веса 5 килограмм. На каждой из них наклейка, на которой указан вес этой гири. Эксперт знает, что наклейки правильные, но его шеф сомневается - он считает, что его сын мог ради шутки оторвать некоторые наклейки и переклеить их по-другому. За какое наименьшее количество взвешиваний на двухчашечных весах эксперт может убедить шефа, что наклейки всё-таки правильные?

8. Знайка должен выписать на доску 11 последовательных натуральных чисел. После этого ему разрешено превращать некоторые числа на доске в их сумму или произведение. Сами слагаемые и сомножители при этом исчезают. Может ли он за 10 таких превращений получить на доске число 1000?