МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Бесконечная последовательность натуральных чисел a_1, a_2, … такова, что все числа

$$\frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_1+a_2}{a_3},\ \frac{a_1+a_2+a_3}{a_4},\ \ldots$$

натуральны и нечётны. Докажите, что $a_{n+1} = 2a_n$ для всех n, начиная с некоторого.

2. На плоскости даны $n > 2$ прямых общего положения, которые разбивают плоскость на части. Докажите, что количество частей, ограниченных ровно 3 прямыми, по крайней мере на 4 больше количества частей, ограниченных более, чем 4 прямыми.

3. У Алины есть неограниченный запас конфет n видов: вида 1, вида 2, …, вида n. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции в любом порядке:
1. Съесть конфету вида k, а вместо неё на её место положить конфеты вида $k-1$ и $k+1$ из запаса именно в таком порядке (на место вида 1 кладутся виды n и 2, а на место вида n — виды $n-1$ и 1).
2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида.
При каких натуральных n Кирилл может изначально выложить конфеты так, чтобы Алине не удалось добиться того, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

4. Клетки доски 10×10 раскрашены в 11 цветов. Будем называть клетку *прекрасной*, если среди 19 клеток, находящихся с ней в одной строке или одном столбце, встречаются все 11 цветов. Какое наибольшее число прекрасных клеток может быть?

5. В треугольнике ABC точка N – основание биссектрисы угла B, а точка M — середина стороны AC. На отрезке BN нашлись точки A_1 и C_1 такие, что $NA = NA_1$ и $NC = NC_1$. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке E. Прямая ME пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $AB + BF = CF$.

6. Найдите все тройки натуральных чисел $a < b < c$, для которых $b - a = c - b$ и $a^2 + b^2 + c^2 = b\cdot(b-a)^2$.

7. В треугольнике ABC с $\angle B > 90^\circ$ на стороне AC нашлась такая точка H, что $AH = BH$ и $BH \perp BC$. Пусть D и E — середины сторон AB и BC соответственно. Прямая, проходящая через H и параллельная AB, пересекает DE в точке F. Докажите, что $\angle BCF = \angle ACD$.

8. Некоторые города страны Уртурии соединены дорогами, причём из любого города можно доехать по дорогам до любого другого, и среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. Докажите, что можно распределить города по не более чем 98 губерниям так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что все числа
$$\frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_1+a_2}{a_3},\ \frac{a_1+a_2+a_3}{a_4},\ \ldots$$
натуральны и нечётны. Докажите, что в этой последовательности найдётся член, больший 10^{2021}.

2. На плоскости проведены 100 прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две из которых не параллельны. Эти прямые разбивают плоскость на части. Серёжа хочет провести ещё одну прямую, не параллельную ни одной из проведённых прямых, и не проходящую ни через одну из точек их пересечения, так, чтобы она пересекла хотя бы 60 треугольников. Докажите, что Серёже это не удастся.

3. У Алины есть неограниченный запас конфет 9 видов: вида 1, вида 2, …, вида 9. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции в любом порядке:
1. Съесть конфету вида k, а вместо неё на её место положить конфеты вида $k-1$ и $k+1$ из запаса именно в таком порядке (на место вида 1 кладутся виды 9 и 2, а на место вида 9 — виды 8 и 1).
2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида.
Верно ли, что как бы Кирилл ни разложил изначально конфеты, Алина сможет действовать так, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

4. Клетки доски 10×10 раскрашены в 11 цветов. Будем называть клетку *прекрасной*, если среди 19 клеток, находящихся с ней в одной строке или одном столбце, встречаются все 11 цветов. Может ли на доске быть больше 90 прекрасных клеток?

5. В треугольнике ABC точка N – основание биссектрисы угла B, а точка M — середина стороны AC. На отрезке BN нашлись точки A_1 и C_1 такие, что $NA = NA_1$ и $NC = NC_1$. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке E. Прямая ME пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $AB + BF = CF$.

6. Найдите все тройки натуральных чисел $a < b < c$, для которых $b - a = c - b$ и $a^2 + b^2 + c^2 = b\cdot(b-a)^2$.

7. Дан треугольник ABC. На стороне AB выбрана точка K, а на отрезке CK — точка L так, что $AK = KL = \frac{1}{2}KB$. Известно, что $\angle CAB = 45^\circ$ и $\angle CKB = 60^\circ$. Докажите, что $AL = BL = CL$.

8. Некоторые города страны Уртурии соединены дорогами, причём из любого города можно доехать по дорогам до любого другого, и среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. Докажите, что можно распределить города по не более чем 98 губерниям так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза.

Математический бой №1. 26.10.2021
Старшая группа, вторая лига

1. Обозначим $S(m)$ сумму цифр натурального числа m. Существует ли такое натуральное число n, что

$$S(3n) < S(4n) < \ldots < S(33n)?$$

2. На плоскости проведены 100 прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две из которых не параллельны. Эти прямые разбивают плоскость на части. Серёжа хочет провести ещё одну прямую, не параллельную ни одной из проведённых прямых, и не проходящую ни через одну из точек их пересечения, так, чтобы она пересекла хотя бы 60 треугольников. Докажите, что Серёже это не удастся.

3. У Алины есть неограниченный запас конфет 10 видов: вида 1, вида 2, ..., вида 10. Кирилл взял несколько конфет у Алины и выложил их в ряд. Алина может проделывать с конфетами в ряду следующие операции в любом порядке:
1. Съесть конфету вида k, а вместо неё на её место положить конфеты вида $k-1$ и $k+1$ из запаса именно в таком порядке (на место вида 1 кладутся виды 10 и 2, а на место вида 10 — виды 9 и 1).
2. Съесть две соседние конфеты, если они одного вида.
Верно ли, что как бы Кирилл ни разложил изначально конфеты, Алина сможет действовать так, чтобы в ряду не осталось ни одной конфеты?

4. В ряд лежит n кучек из одного камня. За один ход разрешается выбрать две кучки, объединить их в одну, и в объединённую кучку добавить ещё один камень. Можно ли выбрать такое n и так проделывать операции, чтобы в конце осталась одна кучка с 1000 камнями (и больше ничего)?

5. В треугольнике ABC точка N – основание биссектрисы угла B, а точка M — середина стороны AC. На отрезке BN нашлись точки A_1 и C_1 такие, что $NA = NA_1$ и $NC = NC_1$. Прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке E. Прямая ME пересекает отрезок BC в точке F. Докажите, что $AB + BF = CF$.

6. Коля выписал на доску все натуральные делители числа $N > 1$ в порядке возрастания. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередуются. Может ли N быть квадратом некоторого натурального числа?

7. Дан треугольник ABC. На стороне AB выбрана точка K, а на отрезке CK — точка L так, что $AK = KL = \frac{1}{2}KB$. Известно, что $\angle CAB = 45^\circ$ и $\angle CKB = 60^\circ$. Докажите, что $AL = BL = CL$.

8. Некоторые города страны Уртурии соединены дорогами, причём из любого города можно доехать по дорогам до любого другого, и среди любых 100 городов есть какие-то два, соединённые дорогой. Докажите, что можно распределить города по не более чем 99 губерниям так, чтобы города каждой губернии можно было объехать по дорогам не покидая этой губернии и не посещая ни один город более одного раза.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Обозначим $S(m)$ сумму цифр натурального числа m. Существует ли такое натуральное число n, что

$$S(3n) < S(4n) < \ldots < S(33n)?$$

2. На плоскости проведены 100 прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две из которых не параллельны. Эти прямые разбивают плоскость на части. Серёжа хочет провести ещё одну прямую, не параллельную ни одной из проведённых прямых, и не проходящую ни через одну из точек их пересечения, так, чтобы она пересекла хотя бы 60 треугольников. Докажите, что Серёже это не удастся.

3. У Васи есть фишки трех цветов: красные (К), зелёные (З) и синие (С). Он поставил в ряд 9 фишек: КЗКЗКЗКЗК. За один ход он может выбрать две любые фишки и заменить их и все фишки между ними по следующему правилу: красные меняются на зелёные, зелёные — на синие, синие — на красные. Может ли он за 7 ходов сделать все фишки синими?

4. В ряд лежит n кучек из одного камня. За один ход разрешается выбрать две кучки, объединить их в одну, и в объединённую кучку добавить ещё один камень. Можно ли выбрать такое n и так проделывать операции, чтобы в конце осталась одна кучка с 1000 камнями (и больше ничего)?

5. На сторонах AC и AB треугольника ABC нашлись точки D и E соответственно такие, что $AD = BD$ и $CE = BC$. Докажите, что $\angle ECA = \angle CBD$.

6. Коля выписал на доску все натуральные делители числа $N > 1$ в порядке возрастания. Оказалось, что нечётные и чётные делители чередуются. Может ли N быть квадратом некоторого натурального числа?

7. Дан треугольник ABC. На стороне AB выбрана точка K, а на отрезке CK — точка L так, что $AK = KL = \frac{1}{2}KB$. Известно, что $\angle CAB = 45^\circ$ и $\angle CKB = 60^\circ$. Докажите, что $AL = BL = CL$.

8. В классе учатся 30 человек. Учитель знает, что среди любых 7 из них есть по крайней мере 2 друга. Докажите, что учитель может их выставить не более чем в 6 шеренг так, чтобы каждые два человека из одной шеренги, стоящие рядом, были друзьями. В шеренге может стоять всего один человек.