МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Играют Аня и Беня, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать на доску их неотрицательную разность. Беня хочет, чтобы в какой-то момент больше половины всех чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?

2. У продавца на рынке есть 11 гирек различной массы. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих гирек продавец посчитал суммарную массу этого набора. Оказалось, что ровно две из этих сумм равны, и больше равных сумм среди них нет. Докажите, что все гири можно разделить на две группы так, чтобы сумма масс гирь в первой группе равнялась сумме масс гирь во второй группе.

3. Дима выписал на доску несколько (более одного) нечётных чисел, не превосходящих N. Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если добавить на доску любое нечетное число, не превосходящее N, то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется число, равное натуральной степени простого числа.

4. В классе больше шести учеников. В каждый кружок ходит 6 человек. Оказалось, что любые два ученика ходят ровно в один общий кружок. Докажите, что в классе хотя бы 31 ученик.

5. Для какого наибольшего натурального k найдется такое натуральное число n, содержащее хотя бы 100 цифр и не содержащее нулевых цифр, для которого суммы цифр чисел n, $2n$, $3n$, $\ldots$, kn идут в порядке строгого убывания?

6. Несколько клеток доски 50×50 отмечено, причём в любом квадрате 3×3 отмечено не менее двух клеток. Какое наименьшее количество клеток может быть отмечено?

7. По кругу лежат 100 конфет трех видов в некотором порядке. Если две конфеты одного вида лежат через одну, можно конфету между ними заменить на конфету того же вида, что и эти две. Если две конфеты разных видов лежат через одну, можно конфету между ними заменить на конфету вида, отличного от этих двух. Докажите, что независимо от начального расположения конфет можно при помощи нескольких замен сделать так, чтобы все конфеты в круге стали одного вида.

8. На дне моря щука нашла 100 яиц, в каком-то из которых находится игла. У Ивана есть детектор, который для любой группы от 1 до 100 яиц за одну проверку определяет, есть ли там яйцо с иглой. Детектор может (и Ивану об этом известно) один раз ошибиться, показав наличие иглы там, где её на самом деле нет. Как определить, где игла, не более, чем за 14 проверок?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Играют Аня и Беня, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать на доску их неотрицательную разность. Беня хочет, чтобы в какой-то момент больше половины всех чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?

2. У продавца на рынке есть 11 гирек различной массы. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих гирек продавец посчитал суммарную массу этого набора. Оказалось, что ровно две из этих сумм равны, и больше равных сумм среди них нет. Докажите, что все гири можно разделить на две группы так, чтобы сумма масс гирь в первой группе равнялась сумме масс гирь во второй группе.

3. Дима выписал на доску несколько (более одного) натуральных чисел, не превосходящих N. Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если добавить на доску любое натуральное число, не превосходящее N, то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется натуральная степень двойки.

4. В семье несколько дочерей и трое сыновей, причем все дочери старше всех сыновей. Все дети родились в один день, но все в разные годы. Когда родился старший сын, суммарный возраст всех детей в семье был равен 55 годам. Когда родился младший, суммарный возраст стал равен 155 годам. Сегодня, в очередной день рожденья, суммарный возраст составляет 166 лет. Сколько лет сегодня исполнилось среднему сыну?

5. Для какого наибольшего натурального k найдется такое натуральное число n, содержащее хотя бы 100 цифр и не содержащее нулевых цифр, для которого суммы цифр чисел n, $2n$, $3n$, $\ldots$, kn идут в порядке строгого убывания?

6. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в прямоугольной таблице 100×200 так, чтобы в любом квадрате 3×3, содержащемся в этой таблице, было хотя бы две отмеченные клетки?

7. По кругу лежат 100 конфет трех видов в некотором порядке. Если две конфеты одного вида лежат через одну, можно конфету между ними заменить на конфету того же вида, что и эти две. Если две конфеты разных видов лежат через одну, можно конфету между ними заменить на конфету вида, отличного от этих двух. Докажите, что независимо от начального расположения конфет можно при помощи нескольких замен сделать так, чтобы все конфеты в круге стали одного вида.

8. На дне моря щука нашла 100 яиц, в каком-то из которых находится игла. У Ивана есть детектор, который для любой группы яиц за одну проверку определяет, есть ли там яйцо с иглой. Детектор может (и Ивану об этом известно) один раз ошибиться, показав наличие иглы там, где её на самом деле нет. Как определить, где игла, не более, чем за 20 проверок?

LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 25.10 – 30.10.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 100. Играют Аня и Беня, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать на доску их неотрицательную разность. Беня хочет, чтобы в какой-то момент больше половины всех чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?

2. У продавца на рынке есть 11 гирек различной массы. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих гирек продавец посчитал суммарную массу этого набора. Оказалось, что ровно две из этих сумм равны, и больше равных сумм среди них нет. Докажите, что все гири можно разделить на две группы так, чтобы сумма масс гирь в первой группе равнялась сумме масс гирь во второй группе.

3. На доске в ряд выписаны числа от 1 до 14 в некотором порядке. Дима записал в тетрадку сумму первых трех чисел, после этого сумму второго, третьего и четвертого чисел, затем сумму третьего, четвертого и пятого чисел и т.д. В итоге в тетрадке оказалась запись

$$17, 28, 23, 26, 20, 19, 21, 26, 28, 25, 27, 20.$$

Чему может быть равна сумма второго и предпоследнего чисел на доске?

4. В семье несколько дочерей и трое сыновей, причем все дочери старше всех сыновей. Все дети родились в один день, но все в разные годы. Когда родился старший сын, суммарный возраст всех детей в семье был равен 55 годам. Когда родился младший, суммарный возраст стал равен 155 годам. Сегодня, в очередной день рожденья, суммарный возраст составляет 166 лет. Сколько лет сегодня исполнилось среднему сыну?

5. Существует ли такое натуральное число n, содержащее хотя бы 100 цифр и не содержащее нулевых цифр, для которого суммы цифр чисел n, $2n$, $3n$ идут в порядке строгого убывания?

6. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в прямоугольной таблице 100×200 так, чтобы в любом квадрате 3×3, содержащемся в этой таблице, было хотя бы две отмеченные клетки?

7. В классе больше шести учеников. В каждый кружок ходит 6 человек. Оказалось, что любые два ученика ходят ровно в один общий кружок. Докажите, что в классе хотя бы 31 ученик.

8. На дне моря щука нашла 100 яиц, в каком-то из которых находится игла. У Ивана есть детектор, который для любой группы яиц за одну проверку определяет, есть ли там яйцо с иглой. Детектор может (и Ивану об этом известно) один раз ошибиться, показав наличие иглы там, где её на самом деле нет. Как определить, где игла, не более, чем за 20 проверок?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На доске написаны числа 1, 2, ..., 50. Играют Аня и Беня, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать на доску их неотрицательную разность. Беня хочет, чтобы в какой-то момент больше половины всех чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?

2. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в прямоугольной таблице 10×20 так, чтобы в любом квадрате 3×3, содержащемся в этой таблице, были хотя бы две отмеченные клетки?

3. Несколько игроков баскетбольной команды Олимпиакос перешли в команду Галатасарай. Мог ли при этом средний рост игроков обеих команд увеличиться?

4. На рёбрах кубика произвольным образом написаны натуральные числа $1, 2, \ldots, 12$. Может ли оказаться, что ни на одной паре рёбер, имеющих общую вершину, нет соседних чисел (отличающихся на 1)?

5. На доску последовательно выписываются числа $n, 2n, 3n, \ldots$, где n — натуральное число. Все выписанные числа не больше 100. В какой-то момент оказалось, что на доске появились все цифры от 0 до 9. На каком наименьшем шаге это могло произойти?

6. На N карточках записаны числа ($N > 2$). Карточки разложили по кругу числами вниз. Юра может спросить, какая сумма чисел на любых двух рядом лежащих карточках. При каких N он может точно сказать, на какой карточке какое число?

7. Найдите какую-нибудь пару последовательных трёхзначных чисел, произведение которых имеет наибольшее число различных простых делителей среди всех таких пар.

8. На дне моря щука нашла 5 яиц, в каком-то из которых находится игла. У Ивана есть детектор, который для любой группы яиц за одну проверку определяет, есть ли там яйцо с иглой. Детектор может (и Ивану об этом известно) один раз ошибиться, показав наличие иглы там, где её на самом деле нет. Как определить, где игла, не более, чем за 4 проверки?