МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, бои за 1-4 места

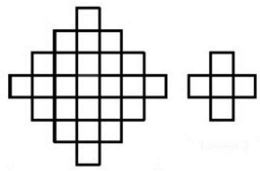
1. Десять ребят решили поучаствовать в футбольном турнире. Перед каждым матчем какие-то пятеро из них образуют команду и идут играть, остальные в этот день не играют. Могло ли так случиться, что после 12 игр любые трое ребят хотя бы один раз играли в одной команде?

2. На доске написано число 1 000 000. Петя каждую минуту дописывает на доску наименьшее натуральное число таким образом, чтобы ни одно из чисел на доске не делилось на другое. Докажите, что начиная с какого-то момента Петя будет выписывать только простые числа.

3. На доске написано 300 натуральных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5. Алиса и Вера играют в игру. Алиса начинает, и они по очереди делают такие ходы: каждая из них своим ходом может стереть любое число и написать вместо него либо его квадрат, либо его куб по своему выбору. Докажите, что независимо от действий Веры, Алиса может играть так, что через несколько ходов сумма чисел на доске будет делиться на 15.

4. В классе 29 учеников, у каждого по 10 друзей. Докажите, что кто-то из учеников может покинуть класс, забрав с собой всех своих друзей, чтобы в классе осталось НЕ поровну мальчиков и девочек. (Дружба взаимна: если А друг Б, то Б друг А).

5. Дан крест размера 5999. В каждом квадратике записано число $+1$. За один ход можно выбрать несколько клеток, образующих крест размера 3 и умножить все числа в этом кресте на -1. Можно ли за несколько ходов получить во всех клетках число -1?
(Крестом размера k называется фигура как на картинке, у которой в вертикали, соединяющей самую верхнюю клетку с самой нижней, ровно k клеток. Например, на картинке изображены кресты размера 7 и 3.)



6. На столе лежат 165 камней, каждый из которых весит больше 50, но меньше 100 килограммов. Эти камни как-то разложили на 11 куч. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

7. На окружности отмечено 100 точек. Кирилл выбирает k из этих точек и каждую выбранную точку красит в красный или синий цвет. Алина хочет покрасить оставшиеся точки в красный и синий цвета так, чтобы можно было провести 50 непересекающихся (даже по концам) отрезков с концами в этих точках, и при этом у каждого отрезка концы были одинакового цвета. При каком наибольшем k Алине гарантированно удастся это сделать?

8. На доске 8×8 расставлено несколько шариков. Пакман движется по доске, начиная из левой нижней клетки вверх. Каждый раз, натыкаясь на шарик, он поворачивает направо и продолжает движение (шарик при этом остается на месте). Если на очередном отрезке пути Пакман не встречает шарика — он падает с доски. Докажите, что можно так расставить 43 шарика, что Пакман наткнется на все шарики ровно по одному разу и затем упадет с доски.

LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. СОЧИ, 24.10 – 30.10.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021

ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, бои за 5-8 места, ПЕРВАЯ ЛИГА

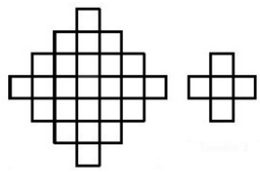
1. Десять ребят решили поиграть в футбол. Перед каждым матчем они как-то разбиваются на две команды по 5 человек и играют. Могло ли так случиться, что после 6 матчей любые трое ребят хотя бы один раз играли в одной команде?

2. На доске написано несколько натуральных чисел, удовлетворяющих условию: ни одно из чисел не делится на другое. Петя каждую минуту дописывает на доску наименьшее из натуральных чисел, при выписывании которого условие не нарушается. Докажите, что когда-нибудь Петя выпишет простое число.

3. На доске написано 300 натуральных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5. Алиса и Вера играют в игру. Алиса начинает, и они по очереди делают такие ходы: каждая из них своим ходом может стереть любое число и написать вместо него либо его квадрат, либо его куб по своему выбору. Докажите, что независимо от действий Веры, Алиса может играть так, что через несколько ходов сумма чисел на доске будет делиться на 15.

4. В квадрате 13×13 каждая клетка покрашена в черный или белый цвет. Докажите, что можно вырезать один столбец и одну строку из этого квадрата так, чтобы среди оставшихся клеток черных и белых было НЕ поровну.

5. Дан крест размера 2021. В каждом квадратике записано число $+1$. За один ход можно выбрать несколько клеток, образующих крест размера 3 и умножить все числа в этом кресте на -1. Можно ли за несколько ходов получить во всех клетках число -1?
(Крестом размера k называется фигура как на картинке, у которой в вертикали, соединяющей самую верхнюю клетку с самой нижней, ровно k клеток. Например, на картинке изображены кресты размера 7 и 3.)



6. На столе лежат 63 камня, каждый из которых весит больше 100, но меньше 110 килограммов. Эти камни как-то разложили на 3 кучи. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

7. На окружности отмечено 100 точек. Кирилл выбирает 60 из этих точек и каждую выбранную точку красит в красный или синий цвет. Алина хочет покрасить оставшиеся точки в красный и синий цвета так, чтобы можно было провести 50 непересекающихся (даже по концам) отрезков с концами в этих точках, и при этом у каждого отрезка концы были одинакового цвета. Верно ли, что Алине гарантированно удастся это сделать?

8. На доске 8×8 расставлено несколько шариков. Пакман движется по доске, начиная из левой нижней клетки вверх. Каждый раз, натыкаясь на шарик, он поворачивает направо и продолжает движение (шарик при этом остается на месте). Если на очередном отрезке пути Пакман не встречает шарика — он падает с доски. Докажите, что можно так расставить 43 шарика, что Пакман наткнется на все шарики ровно по одному разу и затем упадет с доски.

LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. СОЧИ, 24.10 – 30.10.2021

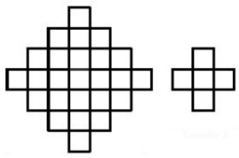
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА, бои за 1-6 места

1. Десять ребят решили поучаствовать в футбольном турнире. Перед каждым матчем какие-то пятеро из них образуют команду и идут играть, остальные в этот день не играют. Могло ли так случиться, что после 12 матчей любые трое ребят ровно один раз играли в одной команде?

2. На доске написано несколько натуральных чисел, удовлетворяющих условию: ни одно из чисел не делится на другое. Петя каждую минуту дописывает на доску наименьшее из натуральных чисел, при выписывании которого условие не нарушается. Докажите, что когда-нибудь Петя выпишет простое число.

3. На доске написано 300 натуральных чисел, не делящихся на 5. Алиса и Вера играют в игру. Алиса начинает, и они по очереди делают ходы. За ход можно стереть с доски любое число, а вместо него записать его квадрат или куб. Докажите, что независимо от действий Веры Алиса может играть так, что через несколько ходов сумма чисел на доске будет делиться на 5.

4. В квадрате 13×13 каждая клетка покрашена в черный или белый цвет. Докажите, что можно вырезать один столбец и одну строку из этого квадрата так, чтобы среди оставшихся клеток черных и белых было НЕ поровну.



5. Дан крест размера 2021. В каждом квадратике записано число $+1$. За один ход можно выбрать несколько клеток, образующих крест размера 3 и умножить все числа в этом кресте на -1. Можно ли за несколько ходов получить во всех клетках число -1? (Крестом размера k называется фигура как на картинке, у которой в вертикали, соединяющей самую верхнюю клетку с самой нижней, ровно k клеток. Например, на картинке изображены кресты размера 7 и 3.)

6. На столе лежат 63 камня, каждый из которых весит больше 100, но меньше 110 килограммов. Эти камни как-то разложили на 3 кучи. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

7. На окружности отмечено 100 точек. Кирилл выбирает 60 из этих точек и каждую выбранную точку красит в красный или синий цвет. Алина хочет покрасить оставшиеся точки в красный и синий цвета так, чтобы можно было провести 50 непересекающихся (даже по концам) отрезков с концами в этих точках, и при этом у каждого отрезка концы были одинакового цвета. Верно ли, что Алине гарантированно удастся это сделать?

8. В левом нижнем углу шахматной доски стоит мышь мордочкой вверх. На некоторых других клетках лежат куски сыра. Мышь начинает движение вперёд. Дойдя до сыра, она съедает кусочек (не весь), поворачивает направо и продолжает движение. Если на своём пути мышь больше сыра не встречает, она падает с доски. Может ли мышь надкусить ровно 34 куска сыра, по одному разу каждый, и затем упасть с доски?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА, бой за 7-8 места, ТРЕТЬЯ ЛИГА

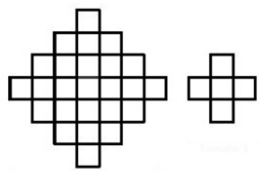
1. Вдоль прямой лежат 10 точек. Требуется начертить несколько непересекающихся (даже в концах) отрезков с концами в этих точках так, чтобы каждая точка лежала на каком-то отрезке. Сколькими способами это можно сделать?

2. Зверюга Гарри зовёт в гости своего тайного врага Кривого Билли. Перед приходом гостя Гарри кладёт в три пирожка с капустой и три пирожка с картошкой смертельный яд. В пирожок с вишней (на всякий случай для себя) кладётся противоядие, которое надо принять после яда. Кривому Билли донесли, что внешне неотличимые пирожки лежат на блюде по кругу в порядке по часовой стрелке – три с картошкой, три с капустой и один с вишней. Когда перед Билли поставили блюдо, он должен съесть хотя бы один пирожок, а может и больше, если захочет. Яд действует не сразу, и можно продолжать есть пирожки, пока не попадётся пирожок с вишней. Какое наименьшее количество съеденных пирожков может гарантированно обеспечить Кривому Билли безопасность?

3. В ряд выписано 21 различное натуральное число, ни одно из них не превышает N. В каждой паре соседних чисел одно делится на другое. При каком наименьшем N это может быть?

4. В каждой клетке полоски 1×2021 стоит 0 или 1. Оказалось, что какие бы 10 подряд идущих клеток ни вырезать, количество нулей среди оставшихся клеток будет больше количества единиц на 1. Докажите, что во всей полоске количества нулей и единиц отличаются на 1.

5. Дан крест размера 2021. В каждом квадратике записано число $+1$. За один ход можно выбрать несколько клеток, образующих крест размера 3 и умножить все числа в этом кресте на -1. Можно ли за несколько ходов получить во всех клетках число -1?
(Крестом размера k называется фигура как на картинке, у которой в вертикали, соединяющей самую верхнюю клетку с самой нижней, ровно k клеток. Например, на картинке изображены кресты размера 7 и 3.)



6. На столе лежат 63 камня, каждый из которых весит больше 100, но меньше 110 килограммов. Эти камни как-то разложили на 3 кучи. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

7. В ряд лежат 9 палочек длиной $1, 2, \ldots, 9$. Аня и Беня по очереди (начинает Аня) удаляют по одной палочке, пока не останется 3 штуки. Если сумма длин меньших оказывается больше длины большей палочки, выигрывает Беня. Есть ли у Ани стратегия, чтобы не допустить этого?

8. В левом нижнем углу шахматной доски стоит мышь мордочкой вверх. На некоторых других клетках лежат куски сыра. Мышь начинает движение вперёд. Дойдя до сыра, она съедает кусочек (не весь), поворачивает направо и продолжает движение. Если на своём пути мышь больше сыра не встречает, она падает с доски. Может ли мышь надкусить ровно 34 куска сыра, по одному разу каждый, и затем упасть с доски?