

Командная олимпиада. Лига Старт.

1. Наде нужно за 2 с половиной часа полностью зарядить смартфон. Она помнит, что в выключенном состоянии смартфон полностью заряжается за 2 часа, а если смотреть на нем кино во время зарядки — заряжается в 4 раза медленнее. Сколько минут Надя может смотреть кино?

2. Таблица состоит из n строчек и 100 столбцов. Каждая клетка окрашена в чёрный или белый цвет, причём в каждой строке поровну чёрных и белых клеток. При каких n может выполняться следующее свойство: если строка и столбец пересекаются по чёрной клетке, то в них поровну чёрных клеток, а если по белой, то поровну белых клеток?

3. В классе поровну мальчиков и девочек. На праздник 8 марта каждый мальчик подарил какой-нибудь девочке цветок. Но при этом ровно треть всех девочек осталась без цветков. Тогда все девочки, у которых было более 4 цветков, отдали по одному цветку каким-то другим девочкам. После этого оказалось, что ровно у четверти всех девочек нет цветков. Какова доля девочек, у которых в конце оказался ровно один цветок?

4. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 100$. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их произведение, увеличенное на 1331. Может ли через 99 таких операций на доске оказаться число вида $100\dots 0$?

5. На столе в каком-то порядке в ряд лежат 100 карточек, пронумерованных числами от 1 до 100. Докажите, что можно эти карточки раскрасить в 3 цвета таким образом, чтобы для любого $n < 100$ при удалении карточек с номерами от 1 до n между любыми двумя одноцветными карточками лежала хотя бы одна карточка другого цвета.

6. Архипелаг состоит из 1000 островов, некоторые пары которых соединены мостами, причём от любого острова можно добраться по мостам до любого другого. Оказалось, что для любых четырёх островов A, B, C, D таких, что есть мост между A и B , между B и C , между C и D , также есть мост между A и C или между B и D . Докажите, что есть остров, соединённый мостами со всеми остальными.

7. Найдите все пары натуральных чисел (A, B) , имеющих поровну цифр и таких, что если к числу A приписать справа число B , то полученное число окажется вдвое больше их произведения.

8. По кругу стоят 40 школьников так, что все расстояния между соседними школьниками одинаковы. Учителю известно, что среди них k честных (всегда говорят правду), но не известно, кто именно. Остальные могут и говорить правду, и врать. У одного из школьников в кармане лежит бриллиант, и учитель хочет узнать, у кого. Учитель спросил у каждого школьника, каково расстояние между ним и школьником с бриллиантом. Найдите наименьшее k , при котором учитель может гарантированно определить, у кого в кармане бриллиант. (Все школьники знают, у кого находится бриллиант. Расстояние между школьниками равно длине наиболее короткой из двух дуг между ними.)