МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Последовательность (a_n) определена условиями $a_0 = 1$ и $a_n = \sum\limits_{k^2 \leqslant n} a_{n-k^2}$ для $n \geqslant 1$. Докажите, что среди чисел a_1, a_2, …, $a_{100\,000\,000}$ есть хотя бы 5000 чётных.

2. Длина стороны AB треугольника ABC равна 1, $\angle BAC = 60°$, $\angle ACB = 100°$, F — середина BC. Точка D на стороне AB такова, что $DB = FB$. Чему равно $S_{ABC} + 2S_{FBD}$? S_{XYZ} означает площадь треугольника XYZ.

3. Вещественные числа x_1, x_2, …, x_{1000} удовлетворяют условиям $x_i + x_j \geqslant (-1)^{i+j}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant 1000$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 1000x_{1000}.$$

4. Дано натуральное $n > 2$. Докажите, что существуют n натуральных чисел таких, что произведение любых $n-1$ из них даёт остаток 1 при делении на оставшееся число.

5. Дано натуральное число n. В ряд выписывают n вещественных чисел. За один ход можно заменить число x на среднее арифметическое числа x и его соседей (одного для крайних чисел, двух для некрайних). Будем говорить, что число *меняет знак*, если из неотрицательного оно становится отрицательным, и наоборот. Какое наибольшее количество смен знака (в зависимости от n) может произойти с самым левым числом?

6. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Точки F, G и H являются точками пересечения прямых AB и CD, AC и BE, AD и FG соответственно. Докажите, что $\angle BHF = 2\angle HFE$.

7. Ученик математического кружка Вася прогулял все уроки физкультуры и сдаёт по ней письменный экзамен. Экзамен представляет собой тест из 100 вопросов, на каждый есть ответы «Да» и «Нет», ровно один из этих ответов является верным. За каждую попытку Вася отвечает «Да» или «Нет» на каждый вопрос, а физрук сообщает в ответ, сколько ответов оказались верными. Сможет ли Вася добиться того, чтобы на 100-й попытке верно ответить на все вопросы?

8. У Васи есть 13 различных трёхзначных чисел. Докажите, что он может выписать некоторые из них в строчку и расставить между ними знаки сложения, вычитания, умножения и деления (но не скобки) так, чтобы значение получившегося выражения было больше 3, но меньше 4.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В классе учатся девочки и мальчики, всего 19 детей. Каждый из них дружит ровно с 10 своими одноклассниками. Учитель выбирает одного ученика и просит выйти его и всех его друзей. Докажите, что он может выбрать ученика так, чтобы в классе осталось не поровну мальчиков и девочек.

2. Длина стороны AB треугольника ABC равна 1, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 100^\circ$, F — середина BC. Точка D на стороне AB такова, что $DB = FB$. Чему равно $S_{ABC} + 2S_{FBD}$? S_{XYZ} означает площадь треугольника XYZ.

3. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ удовлетворяют условиям $x_i + x_j \geqslant (-1)^{i+j}$ при $1 \leqslant i < j \leqslant 1000$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 1000x_{1000}.$$

4. Дано натуральное $n > 2$. Докажите, что все его делители, кроме, быть может, одного, можно разбить на пары, в каждой из которых одно число будет делиться на другое.

5. В ряд выписаны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. За один ход можно заменить число x на среднее арифметическое числа x и его соседей (одного для крайних чисел, двух для не крайних). Будем говорить, что число *меняет знак*, если из неотрицательного оно становится отрицательным, и наоборот. Могло ли самое левое число менять знак больше тысячи раз?

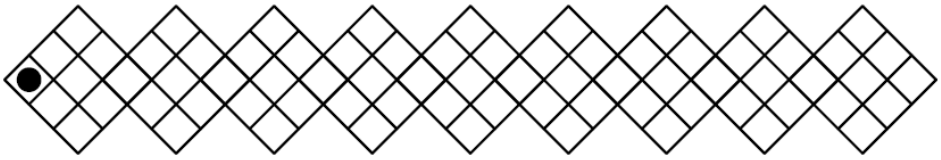
6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM. На отрезке AM нашлась такая точка P, что $BP \perp AM$. На отрезке AM выбрана точка Q такая, что $AQ = 2PM$. Докажите, что $\angle CQM = \angle BAM$.

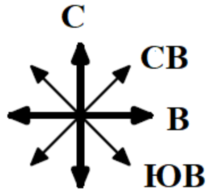
7. Ученик математического кружка Вася прогулял все уроки физкультуры и сдаёт по ней письменный экзамен. Экзамен представляет собой тест из 100 вопросов, на каждый есть ответы «Да» и «Нет», ровно один из этих ответов является верным. За каждую попытку Вася отвечает «Да» или «Нет» на каждый вопрос, а физрук сообщает в ответ, сколько ответов оказались верными. Сможет ли Вася добиться того, чтобы на 100-й попытке верно ответить на все вопросы?

8. У Васи есть 13 различных трёхзначных чисел. Докажите, что он может выписать некоторые из них в строчку и расставить между ними знаки сложения, вычитания, умножения и деления (но не скобки) так, чтобы значение получившегося выражения было больше 3, но меньше 4.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Аня и Боря играют на изображённом на рисунке игровом поле в следующую игру. Изначально фишка находится в клетке с чёрным кружком. Каждым ходом может игрок подвинуть фишку на ближайшую клетку в направлении севера (С), северо-востока (СВ), востока (В) или юго-востока (ЮВ), начинает Аня. Проигрывает игрок, который не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?





2. В остроугольном треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C, AD — высота, M — середина стороны BC. Докажите, что $AB = 2DM$.

3. Числа a, b, c, d, e, f таковы, что оба числа $a\cdot(b-c+d-e+f)$ и $f\cdot(a-b+c-d+e)$ отрицательны. Докажите, что число $a\cdot f$ тоже отрицательно.

4. Дано натуральное $n > 2$. Докажите, что все его делители, кроме, быть может, одного, можно разбить на пары, в каждой из которых одно число будет делиться на другое.

5. В ряд выписаны действительные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}. За один ход можно заменить число x на среднее арифметическое числа x и его соседей (одного для крайних чисел, двух для не крайних). Будем говорить, что число *меняет знак*, если из неотрицательного оно становится отрицательным, и наоборот. Могло ли самое левое число менять знак больше тысячи раз?

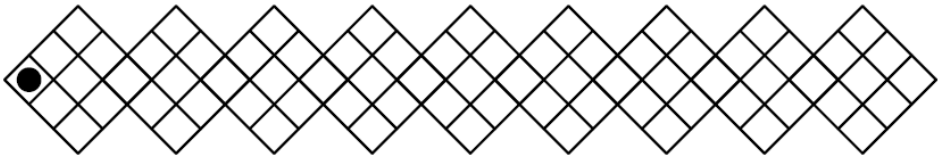
6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM. На отрезке AM нашлась такая точка P, что $BP \perp AM$. На отрезке AM выбрана точка Q такая, что $AQ = 2PM$. Докажите, что $\angle CQM = \angle BAM$.

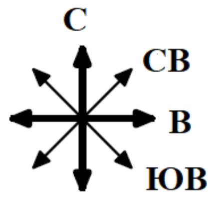
7. Ученик математического кружка Вася прогулял все уроки физкультуры и сдаёт по ней письменный экзамен. Экзамен представляет собой тест из 100 вопросов, на каждый есть ответы «Да» и «Нет», ровно один из этих ответов является верным. За каждую попытку Вася отвечает «Да» или «Нет» на каждый вопрос, а физрук сообщает в ответ, сколько ответов оказались верными. Сможет ли Вася добиться того, чтобы на 100-й попытке верно ответить на все вопросы?

8. На столе лежат 165 камней, каждый из которых весит больше 50, но меньше 100 килограммов. Эти камни как-то разложили на 11 куч. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 30.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Аня и Боря играют на изображённом на рисунке игровом поле в следующую игру. Изначально фишка находится в клетке с чёрным кружком. Каждым ходом может игрок подвинуть фишку на ближайшую клетку в направлении севера (С), северо-востока (СВ), востока (В) или юго-востока (ЮВ), начинает Аня. Проигрывает игрок, который не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?





2. В остроугольном треугольнике ABC угол B в два раза больше угла C, AD — высота, M — середина стороны BC. Докажите, что $AB = 2DM$.

3. Числа a, b, c, d, e, f таковы, что оба числа $a\cdot(b-c+d-e+f)$ и $f\cdot(a-b+c-d+e)$ отрицательны. Докажите, что число $a\cdot f$ тоже отрицательно.

4. Дано натуральное $n > 2$. Докажите, что все его делители, кроме, быть может, одного, можно разбить на пары, в каждой из которых одно число будет делиться на другое.

5. Найти все пары натуральных чисел a и b, для которых

$$(a, b) + [a, b] = 4(a + b) + 2021.$$

6. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM. На отрезке AM нашлась такая точка P, что $BP \perp AM$. На отрезке AM выбрана точка Q такая, что $AQ = 2PM$. Докажите, что $\angle CQM = \angle BAM$.

7. В квадрате 13×13 каждая клетка покрашена в черный или белый цвет. Докажите, что можно вырезать один столбец и одну строку из этого квадрата так, чтобы среди оставшихся клеток черных и белых было **не** поровну.

8. На столе лежат 63 камня, каждый из которых весит больше 100, но меньше 110 килограммов. Эти камни как-то разложили на 3 кучи. Докажите, что можно выбрать две из этих куч таким образом, чтобы в первой куче как количество камней, так и их суммарный вес был не меньше, чем во второй куче.