МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На озере по кругу расположены 23 камня. На них сидят 22 лягушки (на некоторых камнях может сидеть несколько лягушек), пронумерованные числами 1, 2,…, 22 (каждое число встречается ровно один раз). Каждую минуту все лягушки прыгают по следующему правилу: лягушка номер i прыгает ровно на i камней по часовой стрелке (например, лягушка с номером 22 прыгает на следующий против часовой стрелки камень). Докажите, что в какой-то момент не менее 6 камней будут свободны от лягушек.

2. На доске 50×50 стоит хромая ладья. За один ход она может смещаться только по горизонтали или только по вертикали, причем первым своим ходом она смещается на одну клетку, вторым — на две, третьим — на три, четвертым — на четыре, затем опять на одну, две, три, четыре и так далее. Можно ли выбрать клетку на доске так, чтобы начав с неё, ладья могла за 2499 ходов посетить каждую клетку доски ровно один раз?

3. Назовем множество натуральных чисел *перестановочным*, если для любых двух чисел из этого множества можно так переставить цифры в квадрате одного из них, чтобы получился квадрат второго. Например, множество $\{13, 14, 31\}$ — перестановочное, так как $\{13^2, 14^2, 31^2\} = \{169, 196, 961\}$. Но $\{119, 121\}$ — НЕ перестановочное, так как $119^2 = 14161$ и $121^2 = 14641$ имеют одинаковые наборы цифр, но единицы встречаются разное число раз. Существует ли перестановочное множество из 100 различных нечётных чисел?

4. Натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ дают различные остатки при делении на n. Оказалось, что числа a_1, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $\ldots$, $a_n - a_{n-1}$ также дают различные остатки при делении на n. При каких n такое могло случиться?

5. По кругу стоят 100 красных и 100 синих точек в некотором порядке. Пара точек одного цвета называется *интересной*, если между ними или 8, или 9 других точек. Каково наименьшее возможное количество интересных пар?

6. В каждой клетке таблицы 7×7 стоит число 1 или -1. Для каждой строки и каждого столбца посчитали сумму чисел, стоящих в них. Оказалось, что произведение этих 14 сумм отрицательно. Какое наибольшее значение может принимать это произведение?

7. Можно ли каждое из чисел 1, 2, $\ldots$, 2021 окрасить в один из 11 цветов таким образом, чтобы все цвета присутствовали и никакие три различные натуральные числа вида $(a, b, a + b)$, не превосходящие 2021, не были бы покрашены в три различных цвета?

8. В школе 30 учеников. Они записались в несколько кружков (кружков хотя бы три), причём для любых трёх кружков есть школьник, который посещает все три. Докажите, что можно выбрать 10 школьников таким образом, чтобы среди них был хотя бы один представитель каждого кружка.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Квадрат можно разрезать на три прямоугольника, периметр каждого из которых равен 15 см, а можно разрезать на три прямоугольника, периметры которых одинаковые, но другие. Какие?

2. На доске 50×50 стоит хромая ладья. За один ход она может смещаться только по горизонтали или только по вертикали, причем первым своим ходом она смещается на любое нечетное число клеток, вторым — на любое четное число клеток, третьим — снова на любое нечетное, четвертым — снова на любое четное, и так далее. Можно ли выбрать клетку на доске так, чтобы начав с неё, ладья могла за 2499 ходов посетить каждую клетку доски ровно один раз?

3. Назовем множество натуральных чисел *перестановочным*, если для любых двух чисел из этого множества можно так переставить цифры в квадрате одного из них, чтобы получился квадрат второго. Например, множество $\{13, 14, 31\}$ — перестановочное, так как $\{13^2, 14^2, 31^2\} = \{169, 196, 961\}$. Но $\{119, 121\}$ — НЕ перестановочное, так как $119^2 = 14161$ и $121^2 = 14641$ имеют одинаковые наборы цифр, но единицы встречаются разное число раз. Существует ли перестановочное множество из 100 различных чисел?

4. Натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ дают различные остатки при делении на n. Оказалось, что числа a_1, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $\ldots$, $a_n - a_{n-1}$ также дают различные остатки при делении на n. При каких n такое могло случиться?

5. По кругу стоят 50 красных и 50 синих точек в некотором порядке. Пара точек одного цвета называется *интересной*, если они стоят или рядом, или через одну. Каково наименьшее возможное количество интересных пар?

6. В каждой клетке таблицы 7×7 стоит число 1 или -1. Для каждой строки и каждого столбца посчитали сумму чисел, стоящих в них. Оказалось, что произведение этих 14 сумм отрицательно. Какое наибольшее значение может принимать это произведение?

7. Можно ли каждое из чисел 1, 2, $\ldots$, 2021 окрасить в один из 11 цветов таким образом, чтобы все цвета присутствовали и никакие три различные натуральные числа вида $(a, b, a + b)$, не превосходящие 2021, не были бы покрашены в три различных цвета?

8. В школе 30 учеников. Они записались в несколько кружков, причём для любых двух кружков есть школьник, который посещает оба (всего кружков хотя бы два). Докажите, что можно выбрать 15 школьников таким образом, чтобы среди них был хотя бы один представитель каждого кружка.

LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 25.10 – 30.10.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Квадрат можно разрезать на три прямоугольника, периметр каждого из которых равен 15 см, а можно разрезать на три прямоугольника, периметры которых одинаковые, но другие. Какие?

2. На доске 12×12 стоит хромая ладья. За один ход она может смещаться только по горизонтали или только по вертикали, причем в каждый свой нечетный ход ладья смещается на одну клетку, а в каждый четный ход — на две. Считается, что при ходе на две клетки она посещает и ту клетку, которую перепрыгнула. На каких полях может стоять хромая ладья в начале, чтобы она могла обойти каждое поле доски, не посещая ни одну клетку дважды?

3. Аня и Беня играют в игру. Перед ними две кучки спичек: в первой 100 спичек, во второй 200. Игроки по очереди (начинает Аня) должны брать 1 или 2 спички из большей кучки (если в кучках спичек поровну – из любой). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу?

4. Натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$ дают различные остатки при делении на 11. Может ли так случиться, что числа a_1, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $\ldots$, $a_{11} - a_{10}$ также дают различные остатки при делении на 11?

5. По кругу стоят 50 красных и 50 синих точек в некотором порядке. Пара точек одного цвета называется *интересной*, если они стоят или рядом, или через одну. Каково наименьшее возможное количество интересных пар?

6. В каждой клетке таблицы 7×7 стоит число 1 или -1. Для каждой строки и каждого столбца посчитали сумму чисел, стоящих в них. Оказалось, что произведение этих 14 сумм отрицательно. Какое наибольшее значение может принимать это произведение?

7. Назовем множество натуральных чисел *перестановочным*, если для любых двух чисел из этого множества можно так переставить цифры в квадрате одного из них, чтобы получился квадрат второго. Например, множество $\{13, 14, 31\}$ — перестановочное, так как $\{13^2, 14^2, 31^2\} = \{169, 196, 961\}$. Но $\{119, 121\}$ — НЕ перестановочное, так как $119^2 = 14161$ и $121^2 = 14641$ имеют одинаковые наборы цифр, но единицы встречаются разное число раз. Существует ли перестановочное множество из 100 различных чисел?

8. В школе 30 учеников. Они записались в несколько кружков, причём для любых двух кружков есть школьник, который посещает оба (всего кружков хотя бы два). Докажите, что можно выбрать 15 школьников таким образом, чтобы среди них был хотя бы один представитель каждого кружка.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Квадрат можно разрезать на три прямоугольника, периметр каждого из которых равен 15 см, а можно разрезать на три прямоугольника, периметры которых одинаковые, но другие. Какие?

2. На доске 6×6 стоит хромая ладья. За один ход она может смещаться только по горизонтали или только по вертикали, причем в каждый свой нечетный ход ладья смещается на одну клетку, а в каждый четный ход — на две. Считается, что при ходе на две клетки хромая ладья посещает и ту клетку, которую перепрыгнула. На каких полях может стоять хромая ладья в начале, чтобы она могла обойти каждое поле доски, не побывав ни на одном поле дважды?

3. Аня и Беня играют в игру. Перед ними две кучки спичек: в первой 100 спичек, во второй 200. Игроки по очереди (начинает Аня) должны брать 1 или 2 спички из большей кучки (если в кучках спичек поровну – из любой). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу?

4. Натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$ заканчиваются на различные цифры. Может ли случиться, что числа $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_{10} - a_9$ также заканчиваются на различные цифры?

5. Какое наименьшее количество последовательных чисел, меньших 2021, можно перемножить, чтобы результат поделился на 2021?

6. В мастерской выбивают надписи на камне. За каждую букву установлена цена. Слово ВОЛ обойдётся заказчику в 150 рублей, ОЛОВО – в 230 рублей, СТОК – в 200 рублей. Сколько надо заплатить за слово ОТКОС?

7. Пожилой математик в своих мемуарах вспомнил, что в N-м году он записал на доске числа $1, 2, 3 \ldots, N$, некоторые красным маркером, остальные — зелёным. Оказалось, что разность между суммой красных чисел и суммой зелёных чисел равна N. Дело происходило, по его воспоминаниям, то ли в 2021-м, то ли в 2022-м году. Так в какие из этих лет такое могло произойти?

8. На болоте в ряд расположена 2021 кочка. В соревнованиях по прыжкам участвуют лягушки с номерами от 1 до 2021, все стартуют с первой кочки. Лягушка с номером k делает прыжки на k кочек вперёд. Если прыгать дальше некуда, лягушка останавливается. Есть ли такая кочка, на которой остановятся больше 30 лягушек?