МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В каждой клеточке таблицы 10×10 нарисована стрелка, направленная вверх, вниз, вправо или влево. При каком наименьшем n из любой такой таблицы можно вычеркнуть не более n стрелок так, чтобы среди оставшихся стрелок никакие две не были направлены друг на друга? Стрелки считаются направленными друг на друга, даже если между ними есть другие стрелки.

2. Натуральное число n таково, что $3n^2 + 3n + 1$ — точный квадрат. Докажите, что $\sqrt{3n^2 + 3n + 1}$ – сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел.

3. В треугольнике ABC, в котором $AB > AC$, точка D на стороне AB такова, что $CD = BD$. Точка M — середина AC, точки F на стороне AC и E на луче BM таковы, что точки D, E и F лежат на одной прямой, которая параллельна BC. Докажите, что $CE = CF$.

4. Дан треугольник ABC, в котором $AB+AC > 3BC$. Внутри этого треугольника отмечены точки P и Q такие, что $\angle ABP = \angle PBQ = \angle QBC$ и $\angle ACQ = \angle QCP = \angle PCB$. Докажите, что $AP + AQ > 2BC$.

5. Множество A, состоящее из рациональных чисел, таково, что если p, $q \in A$, то $p/q \in A$. Кроме того, если $100 \leqslant p \leqslant 101$, то $p \in A$. Докажите, что A содержит все положительные рациональные числа.

6. За круглым столом сидят N гостей и N хозяев ($N \geqslant 4$). Два гостя разговаривают друг с другом, если между ними сидит не более одного человека, или если между ними сидят ровно два человека, среди которых по крайней мере один хозяин. Докажите, что, как бы эти $2N$ человек ни располагались за столом, не менее N пар гостей будут разговаривать друг с другом.

7. В стране некоторые пары городов соединены односторонними дорогами; между двумя городами может быть не более одной дороги. Правительство страны хочет провести реформу, поменяв направления на некоторых дорогах, чтобы выполнялись два свойства:
1. нельзя выехать из города, и, проехав по каким-то дорогам, вернуться в него;
2. самый длинный простой путь по дорогам после реформы не длиннее, чем самый длинный простой путь до реформы.
Докажите, что правительства сможет это сделать. Простой путь — это такой путь, который через каждый город проходит не более одного раза.

8. Докажите, что если x, y, $z \geqslant 1$, то

$$x|y-z| + y|z-x| + z|x-y| + 4(x+y+z) + 3xyz \geqslant 4(xy+yz+zx).$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В каждой клеточке таблицы 10×10 нарисована стрелка, направленная вверх, вниз, вправо или влево. При каком наименьшем n из любой такой таблицы можно вычеркнуть не более n стрелок так, чтобы среди оставшихся стрелок никакие две не были направлены друг на друга? Стрелки считаются направленными друг на друга, даже если между ними есть другие стрелки.

2. Натуральное число n таково, что $3n^2 + 3n + 1$ — точный квадрат. Докажите, что $\sqrt{3n^2 + 3n + 1}$ – сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел.

3. В треугольнике ABC, в котором $AB > AC$, точка D на стороне AB такова, что $CD = BD$. Точка M — середина AC, точки F на стороне AC и E на луче BM таковы, что точки D, E и F лежат на одной прямой, которая параллельна BC. Докажите, что $CE = CF$.

4. Дан треугольник ABC, в котором $AB+AC > 3BC$. Внутри этого треугольника отмечены точки P и Q такие, что $\angle ABP = \angle PBQ = \angle QBC$ и $\angle ACQ = \angle QCP = = \angle PCB$. Докажите, что $AP + AQ > 2BC$.

5. На доске написано число 2021. Разрешается умножать его на любое рациональное число от $1/2$ до 2. Вася задумал рациональное положительное число. Докажите, что с помощью описанных операций Вася сможет получить задуманное им число.

6. За круглым столом сидят N гостей и N хозяев ($N \geqslant 4$). Два гостя разговаривают друг с другом, если между ними сидит не более одного человека, или если между ними сидят ровно два человека, среди которых по крайней мере один хозяин. Докажите, что, как бы эти $2N$ человек ни располагались за столом, не менее N пар гостей будут разговаривать друг с другом.

7. $n \geqslant 2$ учеников решали 2^{n-1} задач. Оказалось, что для каждых двух задач есть ученик, который решил обе эти задачи, и ученик, который решил ровно одну из них. Докажите, что есть задача, которую решили все.

8. При каком наибольшем n среди любых десяти различных натуральных чисел, не превосходящих n, обязательно найдутся три таких числа a, b и c, что $ab > c$, $bc > a$ и $ca > b$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В каждой клеточке таблицы 10×10 нарисована стрелка, направленная вверх, вниз, вправо или влево. При каком наименьшем n из любой такой таблицы можно вычеркнуть не более n стрелок так, чтобы среди оставшихся стрелок никакие две не были направлены друг на друга? Стрелки считаются направленными друг на друга, даже если между ними есть другие стрелки.

2. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{2021-a}{a} \cdot \frac{2021-b}{b} = 2.$$

3. В треугольнике ABC, в котором $AB > AC$, точка D на стороне AB такова, что $CD = BD$. Точка M — середина AC, точки F на стороне AC и E на луче BM таковы, что точки D, E и F лежат на одной прямой, которая параллельна BC. Докажите, что $CE = CF$.

4. В треугольнике ABC угол $\angle A$ тупой и $AB = AC$. Точка M такова, что C — середина AM. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает прямую AB в точке P. Известно, что прямые PM и BC перпендикулярны. Докажите, что APM — равносторонний треугольник.

5. На доске написано число 2021. Разрешается умножать его на любое рациональное число от $1/2$ до 2. Вася задумал рациональное положительное число. Докажите, что с помощью описанных операций Вася сможет получить задуманное им число.

6. За круглым столом сидят N гостей и N хозяев ($N \geqslant 4$). Два гостя разговаривают друг с другом, если между ними сидит не более одного человека, или если между ними сидят ровно два человека, среди которых по крайней мере один хозяин. Докажите, что, как бы эти $2N$ человек ни располагались за столом, не менее N пар гостей будут разговаривать друг с другом.

7. $n \geqslant 2$ учеников решали 2^{n-1} задач. Оказалось, что для каждых двух задач есть ученик, который решил обе эти задачи, и ученик, который решил ровно одну из них. Докажите, что есть задача, которую решили все.

8. При каком наибольшем n среди любых десяти различных натуральных чисел, не превосходящих n, обязательно найдутся три таких числа a, b и c, что $ab > c$, $bc > a$ и $ca > b$?

LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. СИРИУС, 24.10 – 30.10.2021

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В каждой клеточке таблицы 10×10 нарисована стрелка, направленная вверх, вниз, вправо или влево. При каком наименьшем n из любой такой таблицы можно вычеркнуть не более n стрелок так, чтобы среди оставшихся стрелок никакие две не были направлены друг на друга? Стрелки считаются направленными друг на друга, даже если между ними есть другие стрелки.

2. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{2021-a}{a} \cdot \frac{2021-b}{b} = 2.$$

3. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AD = AB+CD$. Биссектрисы углов BAD и ADC пересекаются в точке P. Докажите, что $BP = CP$.

4. В треугольнике ABC угол $\angle A$ тупой и $AB = AC$. Точка M такова, что C — середина AM. Серединный перпендикуляр к отрезку AM пересекает прямую AB в точке P. Известно, что прямые PM и BC перпендикулярны. Докажите, что APM — равносторонний треугольник.

5. На доске написано число 1. Вася и Петя по очереди (начинает Вася) могут умножать или делить это число на 2, 3 или 5. Они заранее договорились, что тот, кто получит натуральное число от 95 до 105, будет награждён конфетой. В итоге число из требуемого диапазона получилось. Кто мог получить конфету?

6. В государстве n городов и k дорог, каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Достигатель и Стиратель играют в игру. Сначала Стиратель помещает в один город автомобиль, а в другой город — приз. Ход Достигателя состоит в том, что он едет на автомобиле по дороге в какой-то город; ход Стирателя состоит в том, что он уничтожает одну дорогу. Сначала ходит Достигатель, потом Стиратель, потом снова Достигатель и т.д. Цель Достигателя — попасть в город с призом, а Стиратель хочет ему помешать. При каком наименьшем k Достигатель всегда может выиграть?

7. Клетки таблицы 11×1024 (11 строчек, 1024 столбца) покрашены в два цвета: красный и синий. Известно, что для любых двух столбцов есть строчка, которая пересекает их по двум синим клеткам, а также есть строчка, которая пересекает их по синей и красной клетке. Докажите, что есть столбец, в котором все клетки синие.

8. Докажите, что среди любых десяти различных натуральных чисел, не превосходящих 50, обязательно найдутся три таких числа a, b и c, что $ab > c$, $bc > a$ и $ca > b$.