LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Сочи, 24.10-31.10.2021

Командная олимпиада. Лига Старт.

1. *Наде нужно за 2 с половиной часа полностью зарядить смартфон. Она помнит, что в выключенном состоянии смартфон полностью заряжается за 2 часа, а если смотреть на нем кино во время зарядки — заряжается в 4 раза медленнее. Сколько минут Надя может смотреть кино?*

Ответ: 40 минут. **Решение.** Пусть Надя смотрит кино x минут, соответственно выключен смартфон будет в течение $120 + 30 - x = 150 - x$ минут. Получаем, что $\frac{x}{4} + (150 - x) = 120$, откуда $x = 40$.

2. *Таблица состоит из n строчек и 100 столбцов. Каждая клетка окрашена в чёрный или белый цвет, причём в каждой строке поровну чёрных и белых клеток. При каких n может выполняться следующее свойство: если строка и столбец пересекаются по чёрной клетке, то в них поровну чёрных клеток, а если по белой, то поровну белых клеток?*

Ответ: 100 или 50. **Решение.** При шахматной раскраске может быть 100. 50 может быть для таблицы, в которой 50 полностью черных столбцов и 50 белых. Докажем, что других ответов быть не может. Если есть столбец, в котором есть и черная, и белая клетка, то посмотрев на пересечение со строками в этих двух клетках, мы поймем, что в нем ровно 50 черных и ровно 50 белых, то есть количество строк равно 100. Если же в каком-то столбце все клетки одного цвета, то клеток в нем должно быть 50, чтобы выполнялось условие про пересечение со строками.

3. *В классе поровну мальчиков и девочек. На праздник 8 марта каждый мальчик подарил какой-нибудь девочке цветок. Но при этом ровно треть всех девочек осталась без цветков. Тогда все девочки, у которых было более 4 цветков, отдали по одному цветку каким-то другим девочкам. После этого оказалось, что ровно у четверти всех девочек нет цветков. Какова доля девочек, у которых в конце оказался ровно один цветок?*

Ответ: $2/3$. **Решение.** Пусть в классе n мальчиков и n девочек. Заметим, что не более $\frac{1}{12}n$ всех девочек могли получить более 4 цветков, так как иначе цветков было бы больше $5 \cdot \frac{1}{12}n + (\frac{2}{3}n - \frac{1}{12}n) = \frac{5}{12}n + \frac{7}{12}n = n$. При этом, после того как девочки передали цветы, хотя бы $\frac{1}{3}n - \frac{1}{4}n = \frac{1}{12}n$ девочек, у которых раньше не было цветка, должны были получить цветок. Таким образом, описанная в условии ситуация возможна, только если все неравенства выше обратились в равенства. То есть ровно $\frac{1}{12}n$ получили по 5 цветков, а другие $\frac{7}{12}n$ девочек — по одному цветку, после чего еще $\frac{1}{12}n$ из оставшихся девочек получили по одному цветку. Следовательно, в конце ровно $2/3$ от всех девочек имеют ровно по одному цветку.

4. *На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 100. За одну операцию можно стереть с доски два числа, и записать на доску их произведение, увеличенное на 1331. Может ли через 99 таких операций на доске оказаться число вида* $100\dots0$*?*

Ответ: Нет. **Решение.** От противного, пусть может. Вначале на доске есть число, кратное 11. При применении к нему операции вновь получается число, кратное 11. Поэтому среди чисел на доске в любой момент есть кратное 11. А в конце его нет — противоречие.

5. *На столе в каком-то порядке в ряд лежат 100 карточек, пронумерованных числами от 1 до 100. Докажите, что можно эти карточки раскрасить в 3 цвета таким образом, чтобы для любого $n < 100$ при удалении карточек с номерами от 1 до n между любыми двумя одноцветными карточками лежала хотя бы одна карточка другого цвета.*

Решение. Будем красить карточки в порядке убывания их номеров. Карточки 100, 99 и 98 красим в три различных цвета. Пусть мы уже покрасили карточки с номерами $k+1$, $k+2$, ..., 100. Посмотрим на карточку с номером k. Найдем ближайшую к ней справа карточку с номером большим, чем k, (если такая есть) и запомним её цвет. И аналогично слева. Мы запомнили не более двух цветов, поэтому мы можем покрасить карточку k в цвет, отличный от этих двух. Такой покраской мы добились того, что карточка номер k никогда не будет лежать рядом с одноцветной карточкой с большим номером. Проведем описанную процедуру для всех k от 97 до 1. Тогда условие задачи будет выполнено. Действительно, предположим, что при удалении каких-то карточек две одноцветные карточки с номерами $i < j$ оказались рядом. Но карточка с номером i, согласно нашему алгоритму, была покрашена в цвет, отличный от карточки с номером j — противоречие.

6. *Архипелаг состоит из 1000 островов, некоторые пары которых соединены мостами, причём от любого острова можно добраться по мостам до любого другого. Оказалось, что для любых четырёх островов A, B, C, D таких, что есть мост между A и B, между B и C, между C и D, также есть мост между A и C или между B и D. Докажите, что есть остров, соединённый мостами со всеми остальными.*

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — архипелаги, ребра — мосты. Выберем в этом графе вершину наибольшей степени, назовем её B. Предположим, что B соединена не со всеми вершинами. Так как граф связный, какая-то вершина, соединенная с B, должна быть соединена с вершиной, не соединенной с B (иначе мы не доберемся от B до тех вершин, с которыми она не соединена). Пусть B соединена с C, C соединена с D, но B не соединена с D. Теперь для любой вершины A, которая соединена с B, мы можем применить условие задачи для пути $A{-}B{-}C{-}D$ и получить, что A соединена с C (так как между B и D нет ребра). Таким образом, C соединена с B, со всеми вершинами, с которыми соединена B, и ещё с вершиной D. Это значит, что её степень больше степени B, что противоречит нашему изначальному выбору. Таким образом, вершина наибольшей степени обязана быть соединена со всеми остальными вершинами.

7. *Найдите все пары натуральных чисел (A, B), имеющих поровну цифр и таких, что если к числу A приписать справа число B, то полученное число окажется вдвое больше их произведения.*

Ответ: $(3, 6)$ и $(13, 52)$. **Решение.** Пусть в A и B по k цифр. Тогда условие запишется в виде $10^k A + B = 2 \cdot A \cdot B$. Замечаем, что B делится на A, то есть $B = nA$, где $n \leqslant 9$, так как в A и B поровну цифр. Сокращая исходное выражение на A, получим $10^k + n = 2nA$. Значит, 10^k делится на n, откуда $n = 1$, 2, 4, 5. Кроме того, $10^k + n$ четно, поэтому и n четно. Разберем оставшиеся случаи:

1) $n = 2$, $10^k + 2 = 4A$. При $k \geqslant 2$ левая часть не делится на 4. При $k = 1$ находим $A = 3$, $B = 6$. Проверяем: $36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$. Подходит.

2) $n = 4$, $10^k + 4 = 8A$. При $k \geqslant 3$ и $k = 1$ левая часть не делится на 8. При $k = 2$ находим $A = 13$, $B = 52$. Проверяем: $1352 = 2 \cdot 13 \cdot 52$. Подходит.

8. *По кругу стоят 40 школьников так, что все расстояния между соседними школьниками одинаковы. Учителю известно, что среди них k честных (всегда говорят правду), но не известно, кто именно. Остальные могут и говорить правду, и врать. У одного из школьников в кармане лежит бриллиант, и учитель хочет узнать, у кого. Учитель спросил у каждого школьника, каково расстояние между ним и школьником с бриллиантом. Найдите наименьшее k, при котором учитель может гарантированно определить, у кого в кармане бриллиант. (Все школьники знают, у кого находится бриллиант. Расстояние между школьниками равно длине наиболее короткой из двух дуг между ними.)*

Ответ: 22 **Решение.** Покажем, что 21 человека может быть недостаточно. Пусть A, B, C, D — четыре человека, делящие окружность на 4 равные дуги (то есть между A и B, между B и C, между C и D, между D и A ровно 19 человек). И пусть все люди на дуге BD, содержащей A, называют расстояние до A. Все люди на дуге BD, содержащей C, называют расстояние до C. При этом B и D равноудалены от A и C, поэтому они говорят расстояние до них обоих сразу. Тогда может так быть, что бриллиант у A и честные школьники на дуге от B до D, содержащей A. А может оказаться, что бриллиант у C и честные школьники на дуге от B до D, содержащей C. Следовательно, мы не можем точно сказать, находится бриллиант у A или у C. Теперь докажем, что если честных людей хотя бы 22, то мы точно сможем определить, у кого бриллиант. Каждый человек, когда говорит расстояние d, указывает не более чем на двух людей (поскольку на круге есть не более двух точек на расстоянии d от данной). Посчитаем для каждого человека, сколько людей на него указало. На школьника A с бриллиантом указало не менее 22 человек. Если на всех остальных школьников указало меньше человек, то мы однозначно определили, у кого бриллиант. Значит, есть ещё школьник B, на которого указало хотя бы 22 человека. Суммарно 44 указания, то есть не менее 4 человек указало одновременно и на A, и на B. Но такого быть не может, так как есть не более двух школьников, которые равноудалены от A и B.