

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное $n > 10$. Докажите, что из всех натуральных чисел от 1 до $2n$ можно единственным способом выбрать $n + 1$ число так, чтобы среди них не было трёх попарно различных, одно из которых является суммой двух других.

2. На празднике собрались n хозяев и n гостей, $n \geq 3$. Они сели за круглый стол. Два гостя будут говорить друг с другом, если между ними не более 1 человека, или если между ними два человека, хотя бы один из которых хозяин. Докажите, что как бы ни сели собравшиеся за круглый стол, хотя бы n пар гостей будут друг с другом разговаривать.

3. Два бегуна выбежали одновременно навстречу друг другу из пунктов А и Б с разными, но постоянными скоростями, при этом расстояние между ними сокращалось на 1 километр за 3 минуты. Бегуны встретились в точке В, мгновенно развернулись и побежали обратно, при этом каждый из них уменьшил скорость на 1 км/ч. Каждый из них, добежав до точки старта, снова развернулся и побежал навстречу другому (это могло произойти не одновременно). Они встретились в точке Г, мгновенно развернулись, и снова каждый из них уменьшил скорость на 1 км/ч. После очередного разворота в точках старта они встретились в точке Д. Известно, что расстояние от А до Г на 130 метров меньше, чем от А до В. Найдите расстояние между Г и Д.

4. В группе из семи депутатов некоторые тройки депутатов образовали коалиции (депутат может быть членом нескольких коалиций). Всего образовано 6 коалиций. Докажите, что депутатов можно разбить на две подгруппы таким образом, чтобы ни одна коалиция не оказалась целиком внутри одной подгруппы.

5. В каждой клетке таблицы 101×101 расставлены числа 1 или -1 . Для каждой строки и каждого столбца посчитали сумму чисел, стоящих в них. Произведение этих сумм отрицательное. Какое наибольшее (наименьшее по модулю) значение может принимать это произведение?

6. Назовем множество натуральных чисел *перестановочным*, если для любых двух чисел из этого множества можно так переставить цифры в квадрате одного из них, чтобы получился квадрат второго. Например, множество $\{13, 14, 31\}$ — перестановочное, так как $\{13^2, 14^2, 31^2\} = \{169, 196, 961\}$. Но $\{119, 121\}$ — НЕ перестановочное, так как $119^2 = 14161$ и $121^2 = 14641$ имеют одинаковые наборы цифр, но единицы встречаются разное число раз. Существует ли перестановочное множество из 100 различных нечётных чисел?

7. На доске 50×50 стоит хромая ладья. За один ход она может смещаться только по горизонтали или только по вертикали, причем первым своим ходом она смещается на одну клетку, вторым — на две, третьим — на три, четвертым — на четыре, затем опять на одну, две, три, четыре и так далее. Можно ли выбрать клетку на доске так, чтобы, начав с неё, ладья могла за 2499 ходов посетить каждую клетку доски ровно один раз?

8. Натуральные числа x и y таковы, что $3x^2 + 3x + 1 = y^2$. Докажите, что y представляется в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное $n > 10$. Докажите, что из всех натуральных чисел от 1 до $2n$ можно единственным способом выбрать $n + 1$ число так, чтобы среди них не было трёх попарно различных, одно из которых является суммой двух других.

2. Два бегуна выбежали одновременно навстречу друг другу из пунктов А и Б с разными, но постоянными скоростями, при этом расстояние между ними сокращалось на 1 километр за 3 минуты. Бегуны встретились в точке В, мгновенно развернулись и побежали обратно, при этом каждый из них уменьшил скорость на 1 км/ч. Каждый из них, добежав до точки старта, снова развернулся и побежал навстречу другому (это могло произойти не одновременно). Они встретились в точке Г, мгновенно развернулись, и снова каждый из них уменьшил скорость на 1 км/ч. После очередного разворота в точках старта они встретились в точке Д. Известно, что расстояние от А до Г на 130 метров меньше, чем от А до В. Найдите расстояние между Г и Д.

3. В группе из семи депутатов некоторые тройки депутатов образовали коалиции (депутат может быть членом нескольких коалиций). Всего образовано 6 коалиций. Докажите, что депутатов можно разбить на две подгруппы таким образом, чтобы ни одна коалиция не оказалась целиком внутри одной подгруппы.

4. В каждой клетке таблицы 101×101 расставлены числа 1 или -1 . Для каждой строки и каждого столбца посчитали сумму чисел, стоящих в них. Произведение этих сумм отрицательное. Какое наибольшее (наименьшее по модулю) значение может принимать это произведение?

5. Назовем множество натуральных чисел *перестановочным*, если для любых двух чисел из этого множества можно так переставить цифры в квадрате одного из них, чтобы получился квадрат второго. Например, множество $\{13, 14, 31\}$ — перестановочное, так как $\{13^2, 14^2, 31^2\} = \{169, 196, 961\}$. Но $\{119, 121\}$ — НЕ перестановочное, так как $119^2 = 14161$ и $121^2 = 14641$ имеют одинаковые наборы цифр, но единицы встречаются разное число раз. Существует ли перестановочное множество из 100 различных нечётных чисел?

6. На доске 50×50 стоит хромая ладья. За один ход она может смещаться только по горизонтали или только по вертикали, причем первым своим ходом она смещается на одну клетку, вторым — на две, третьим — на три, четвертым — на четыре, затем опять на одну, две, три, четыре и так далее. Можно ли выбрать клетку на доске так, чтобы, начав с неё, ладья могла за 2499 ходов посетить каждую клетку доски ровно один раз?

7. Найдите все такие пары (a, b) натуральных чисел, что $a! + 1 = (b! - 1)^2$.

8. В квартире живут двуногие люди, четырехногие кошки, шестиногие тараканы и восьминогие пауки, причём все виды присутствуют. Пауков вдвое больше, чем людей. Известно, что среднее количество ног у всех существ является целым числом. Каких существ в квартире больше всего?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Петя выбрал из пятидесяти первых натуральных чисел ровно 26 штук. Оказалось, что среди них нет трёх чисел таких, что одно из них является суммой двух других. Докажите, что среди выбранных Петей чисел нет числа 2.

2. Известно, что A — натуральное число, а $\text{НОК}(A, 120) < 500$. Сколько разных значений может принимать A ?

3. Два бегуна выбежали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B с разными, но постоянными скоростями, при этом расстояние между ними сокращалось на 1 километр за 3 минуты. Бегуны встретились в точке B , мгновенно развернулись и побежали обратно, при этом каждый из них уменьшил скорость на 1 км/ч. Каждый из них, добежав до точки старта, снова развернулся и побежал навстречу другому (это могло произойти не одновременно). Они встретились в точке Γ . Середину пути между A и B назовём M . Известно, что расстояние от B до Γ равно 130 метрам. Найдите расстояние от B до M .

4. В группе из семи депутатов некоторые тройки депутатов образовали коалиции (депутат может быть членом нескольких коалиций). Всего образовано 6 коалиций. Докажите, что депутатов можно разбить на две подгруппы таким образом, чтобы ни одна коалиция не оказалась целиком внутри одной подгруппы.

5. В каждой клетке таблицы 101×101 расставлены числа 1 или -1 . Для каждой строки и каждого столбца посчитали сумму чисел, стоящих в них. Произведение этих сумм отрицательное. Какое наибольшее (наименьшее по модулю) значение может принимать это произведение?

6. Существует ли стозначное нечетное число N , сумма цифр которого равна 3, а в записи числа N^2 есть цифра 3?

7. На доске 6×6 стоит хромая ладья. За один ход она может смещаться только по горизонтали или только по вертикали, причем ходы на 1 и на 2 клетки чередуются. Можно ли выбрать клетку на доске так, чтобы, начав с неё, ладья могла за 35 ходов посетить каждую клетку доски ровно один раз?

8. В квартире живут двуногие люди, четырехногие кошки, шестиногие тараканы и восьминогие пауки, причём все виды присутствуют. Пауков вдвое больше, чем людей. Известно, что среднее количество ног у всех существ является целым числом. Каких существ в квартире больше всего?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 27.10.2021

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Петя выбрал из пятидесяти первых натуральных чисел ровно 26 штук. Оказалось, что среди них нет трёх чисел таких, что одно из них является суммой двух других. Докажите, что среди выбранных Петей чисел нет числа 2.

2. Известно, что A — натуральное число, а $\text{НОК}(A, 120) < 500$. Сколько разных значений может принимать A ?

3. Два бегуна выбежали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B с разными, но постоянными скоростями, при этом расстояние между ними сокращалось на 1 километр за 3 минуты. Бегуны встретились в точке B , мгновенно развернулись и побежали обратно, при этом каждый из них уменьшил скорость на 1 км/ч. Каждый из них, добежав до точки старта, снова развернулся и побежал навстречу другому (это могло произойти не одновременно). Они встретились в точке Γ . Середину пути между A и B назовём M . Известно, что расстояние от B до Γ равно 130 метрам. Найдите расстояние от B до M .

4. В группе из шести депутатов некоторые тройки депутатов образовали коалиции (депутат может быть членом нескольких коалиций). Всего образовано 9 коалиций. Докажите, что депутатов можно разбить на две подгруппы таким образом, чтобы ни одна коалиция не оказалась целиком внутри одной подгруппы.

5. В каждой клетке таблицы 101×101 расставлены числа 1 или -1 . Для каждой строки и каждого столбца посчитали сумму чисел, стоящих в них. Произведение этих сумм отрицательное. Какое наибольшее (наименьшее по модулю) значение может принимать это произведение?

6. Каждая буква русского алфавита имеет некоторую положительную цену (в рублях и копейках). Известно, что слово ДОКЛАД стоит ровно 50 рублей, МАТБОЙ — ровно 40 рублей, КОМАНДА — ровно 100 рублей. Может ли КАПИТАН стоить меньше 10 рублей?

7. На столе лежат 4 внешне одинаковые монеты. Вес каждой монеты может равняться 8, 9 или 10 грамм, причем известно, что не все монеты весят одинаково. Есть электронные весы, которые могут указать суммарный вес лежащих на них монет. Как за три взвешивания выяснить, сколько монет каждого веса на столе? Определять, где какая монета, не обязательно.

8. В квартире живут двуногие люди, четырехногие кошки, шестиногие тараканы и восьминогие пауки, причём все виды присутствуют. Пауков вдвое больше, чем людей. Известно, что среднее количество ног у всех существ является целым числом. Каких существ в квартире больше всего?