МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Школьники писали тест из 6 вопросов. В каждом вопросе было два варианта ответа. Оказалось, что у любых двух школьников хотя бы три ответа отличаются. Какое наибольшее количество школьников могло быть?

2. Найдите все натуральные n, для которых десятичная запись числа $n^5 + 79$ состоит только из единиц.

3. На доске написано число 1. За один ход Петя может написанное число заменить на одно из $2n$, $\frac{n}{2}$, $3n+1$, $\frac{n-1}{3}$. Тем не менее число после замены должно оставаться натуральным. Пете поручили получить число k. Докажите, что он сможет это сделать за несколько операций.

4. На планете несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если же чередовать красные и зелёные дороги, то тоже всегда возвращаешься ровно через 6 переездов. Наконец, если чередовать жёлтые и зелёные дороги, то всегда возвращаешься ровно через 4 переезда. Какое наименьшее число городов может быть на планете?

5. У продавца на рынке есть 11 гирек различной массы. Для каждого набора из нескольких своих гирек продавец посчитал суммарную массу этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалось ровно 2046 различных. Докажите, что все гири можно разделить на две группы так, чтобы суммарные массы гирь в группах были равны.

6. Дима выписал на доску несколько чисел, не превосходящих N. Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если выписать на доску ещё хотя бы одно число, не превосходящее N, то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется степень простого числа (возможно, нулевая степень, то есть число 1).

7. Про числа a, b, c известно, что $ab + bc + ca = 1$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a(b^2+1)}{a+b} + \frac{b(c^2+1)}{b+c} + \frac{c(a^2+1)}{c+a}?$$

8. Какое наименьшее количество клеток можно отметить в квадрате 50×50, чтобы в любом квадрате 3×3 было не менее двух отмеченных клеток?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Школьники писали тест из 6 вопросов. В каждом вопросе было два варианта ответа. Оказалось, что у любых двух школьников хотя бы три ответа отличаются. Какое наибольшее количество школьников могло быть?

2. Фигура *даман* бьёт как слон, но только в двух из четырёх направлений (для разных даманов эти направления могут отличаться). Какое наибольшее число даманов можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

3. Найдите все натуральные n, для которых десятичная запись числа $n^5 + 79$ состоит только из единиц.

4. На доске написано число 1. За один ход Петя может написанное число заменить на одно из $2n$, $\frac{n}{2}$, $3n+1$, $\frac{n-1}{3}$. Тем не менее число после замены должно оставаться натуральным. Пете поручили получить число k. Докажите, что он сможет это сделать за несколько операций.

5. На планете несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если же чередовать красные и зелёные дороги, то тоже всегда возвращаешься ровно через 6 переездов. Наконец, если чередовать жёлтые и зелёные дороги, то всегда возвращаешься ровно через 4 переезда. Какое наименьшее число городов может быть на планете?

6. У продавца на рынке есть 11 гирек различной массы. Для каждого набора из нескольких своих гирек продавец посчитал суммарную массу этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалось ровно 2046 различных. Докажите, что все гири можно разделить на две группы так, чтобы суммарные массы гирь в группах были равны.

7. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Играют Аня и Беня, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать их неотрицательную разность. Беня хочет, чтобы в какой-то момент большая часть чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?

8. Дима выписал на доску несколько чисел, не превосходящих N. Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если выписать на доску ещё хотя бы одно число, не превосходящее N, то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется степень простого числа (возможно, нулевая степень, то есть число 1).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Фигура *даман* бьёт как слон, но только в двух из четырёх направлений (для разных даманов эти направления могут отличаться). Какое наибольшее число даманов можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

2. Найдите все натуральные n, для которых десятичная запись числа $n^5 + 79$ состоит только из единиц.

3. В классе больше шести учеников. В каждый кружок ходят 6 человек. Оказалось, что любые два человека ходят в точности на один общий кружок. Докажите, что в классе хотя бы 31 ученик.

4. Андрей заменил буквы $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ на цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, использовав каждую по одному разу, так, чтобы выражение

$$\frac{2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e}{2^f + 2^g + 2^h + 2^i + 2^j}$$

принимало наиболее близкое к 1 значение. Найдите это значение.

5. На планете несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если же чередовать красные и зелёные дороги, то тоже всегда возвращаешься ровно через 6 переездов. Наконец, если чередовать жёлтые и зелёные дороги, то всегда возвращаешься ровно через 4 переезда. Какое наименьшее число городов может быть на планете?

6. На доске написаны числа 1, 2, $\ldots$, 100. Играют Аня и Беня, делая ходы по очереди, начинает Аня. За один ход можно стереть два числа и записать их неотрицательную разность. Беня хочет, чтобы в какой-то момент большая часть чисел на доске делились на 7. Может ли Аня ему помешать?

7. Дима выписал на доску несколько чисел, не превосходящих N. Он заметил, что ни одно выписанное число не делится на другое, но если выписать на доску ещё хотя бы одно число, не превосходящее N, то это свойство нарушится. Докажите, что среди выписанных чисел найдется степень простого числа (возможно, нулевая степень, то есть число 1).

8. Можно ли квадрат 21×21 разрезать на квадраты 5×5 и 2×2?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 29.10.2021
МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Фигура *даман* бьёт как слон, но только в двух из четырёх направлений (для разных даманов эти направления могут отличаться). Какое наибольшее число даманов можно поставить на шахматную доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

2. На десяти колпаках написано по одному числу, от 2 до 11 включительно. Трем мудрецам надели по колпаку, остальные спрятали. Каждый мудрец видит только два числа на колпаках других мудрецов. Им сообщили, что произведение чисел на надетых колпаках является квадратом натурального числа. Может ли кто-нибудь из мудрецов наверняка узнать число на своём колпаке?

3. В классе больше шести учеников. В каждый кружок ходят 6 человек. Оказалось, что любые два человека ходят в точности на один общий кружок. Докажите, что в классе хотя бы 31 ученик.

4. Андрей заменил буквы $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ на цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, использовав каждую по одному разу, так, чтобы выражение

$$\frac{2^a + 2^b + 2^c + 2^d + 2^e}{2^f + 2^g + 2^h + 2^i + 2^j}$$

принимало наиболее близкое к 1 значение. Найдите это значение.

5. На планете несколько городов, соединённых дорогами. Каждая дорога соединяет два города, между любыми двумя городами не более одной дороги, и дороги не пересекаются вне городов. Из каждого города выходит ровно 3 дороги: красная, жёлтая и зелёная. Известно, что если поехать, начав с произвольного города, чередуя красные и жёлтые дороги, то ровно через 6 переездов обязательно вернёшься в начало пути. Если чередовать красные и зеленые дороги, либо жёлтые и зелёные дороги, то также вернёшься ровно через 6 переездов. Может ли на такой планете быть ровно 12 городов?

6. На доске в ряд выписаны числа от 1 до 14 в некотором порядке. Дима записал в тетрадку сумму первых трех чисел, после этого сумму второго, третьего и четвертого чисел, затем сумму третьего, четвертого и пятого чисел и т.д. В итоге в тетрадке оказалась запись

$$17, 28, 23, 26, 20, 19, 21, 26, 28, 25, 27, 20$$

Чему может быть равна сумма второго и предпоследнего чисел на доске?

7. Коля задумал три натуральных числа a, b, c и посчитал, что $a + b + c = 57$, а $abc + ab + ac + bc = 2021$. Докажите, что Коля допустил ошибку в вычислениях.

8. Можно ли разрезать квадрат 6×6 по границам клеток на 8 прямоугольников с попарно различными площадями?