КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 25.10.2021
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В круг встали n детей, мальчики и девочки. Оказалось, что среди каждых пяти детей, стоящих подряд, ровно две девочки. Докажите, что это возможно тогда и только тогда, когда n делится на 5.

2. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, а точки E и F — основания высот треугольника ABM, опущенных из вершин A и B соответственно. Докажите, что $DE = CF$.

3. Архипелаг состоит из 1000 островов, некоторые пары которых соединены мостами, причём от любого острова можно добраться по мостам до любого другого. Оказалось, что для любых четырёх островов A, B, C, D таких, что есть мост между A и B, между B и C, между C и D, также есть мост между A и C или между B и D. Докажите, что есть остров, соединённый мостами со всеми остальными.

4. Даны натуральные числа p и q. Вася выбирает вещественные числа a и b, а затем рассматривает всевозможные разности $|a_m - b_n|$, где $a_i = a + \frac{i}{p}$ и $b_i = b + \frac{i}{q}$ для каждого натурального i. Затем Васе дадут столько граммов золота, чему равна наименьшая из этих разностей. Какое наибольшее количество золота удастся заработать Васе? Ответ может зависеть от p и q.

5. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = AC)$ $\angle BAC = 70°$. Точка N на стороне AB и точка M на отрезке NC таковы, что $\angle NAM = \angle NCB = 5°$. Прямая BM пересекает биссектрису угла ACN в точке I. Докажите, что NI – биссектриса угла ANC.

6. Найдите все натуральные числа n, для которых числа от 1 до $2n$ можно разбить на такие две группы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ по n чисел в каждой, что $a_1a_2\ldots a_n + b_1b_2\ldots b_n - 1 \;\vdots\; 2n$.

7. В турнире по теннису играли девочки и мальчики (не обязательно равное количество), причём каждая девочка сыграла ровно 1 матч с каждым мальчиком. Оказалось, что каждая девочка победила не менее 21 мальчика, а каждый мальчик победил не менее 12 девочек. При каком наименьшем количестве участников такое возможно? Ничьих в теннисе не бывает.

8. На доске написаны дроби $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$. Вася упражняется в сложении дробей. Каждую минуту он выбирает две дроби, пишет в числитель сумму числителей, в знаменатель — сумму знаменателей, полученную дробь сокращает (до несократимой), а две исходные дроби стирает. Дробь с каким наибольшим значением может оказаться на доске через $n-1$ минуту? Ответ может зависеть от n.