LVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Сочи, 24.10-31.10.2021

Личная олимпиада. Лига Старт.

1. *Дан куб* $10 \times 10 \times 10$. *Можно ли закрасить несколько его граней так, чтобы после разрезания куба на 1000 единичных кубиков, количество кубиков, у которых хотя бы одна грань закрашена, было нечетным? (Грань можно закрашивать только целиком.)*

Ответ: Да, можно закрасить три грани, имеющие одну общую вершину. **Решение.** Кубики, не имеющие закрашенной грани — в точности те, которые принадлежат кубу $9 \times 9 \times 9$, примыкающему к противоположной вершине. Их нечетное число, а всего единичных кубиков четно. Поэтому и кубиков с окрашенной гранью четно.

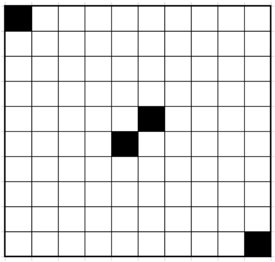
2. *В турнире по бадминтону участвовало 16 спортсменов. Каждые двое сыграли не более одной игры, при этом ничьих не было. После окончания турнира оказалось, что все игроки одержали различное количество побед. Докажите, что все участники потерпели различное количество поражений.*

Решение. На турнире можно одержать от 0 до 15 побед. Так как это ровно 16 вариантов, то каждый из этих вариантов встретился у одного из спортсменов. Следовательно, было сыграно $0 + 1 + 2 + \ldots + 15 = 15 \cdot 14/2$ игр, а это все возможные игры, которые могли быть сыграны. Таким образом, каждый участник сыграл 15 игр, у всех участников разное число побед, поэтому и разное число поражений.

3. *На экране компьютера горит натуральное число, большее 1 000 000. Каждую минуту из числа на экране вычитается количество его натуральных делителей, отличных от самого числа (например, из числа 28 вычитается 5). Докажите, что рано или поздно на экране окажется нечётное простое число.*

Решение. Заметим, что все делители числа n, кроме самого n, не превосходят $n/2$, поэтому каждое следующее число на экране компьютера не меньше половины предыдущего. Следовательно, в некоторый момент на экране будет гореть число от 5 до 8. Но тогда оно либо уже нечётное простое, либо станет таковым в следующую минуту.

4. *Дана доска* 10×10. *Из неё вырезали четыре клетки, отмеченные на рисунке. Все оставшиеся клетки разбили на прямоугольники* 1×2 *(которые называются доминошками). Докажите, что можно разбить исходную доску на два прямоугольника так, чтобы не более одной доминошки имело общую клетку с обоими прямоугольниками.*



Решение. Предположим, что каждая прямая пересекает хотя бы две доминошки. Пронумеруем столбцы слева направо. Будем говорить, что горизонтальная доминошка начинается в столбце номер k, если её левая клетка лежит в столбце k. Заметим, что линия сетки, проходящая между столбцом k и $k+1$ пересекает в точности те доминошки, которые начинаются в столбце k, поэтому можно считать, что в каждом столбце (кроме последнего) начинается хотя бы две доминошки. В самом левом столбце одна клетка вырезана, вертикальные доминошки занимают четное число клеток, поэтому в первом столбце начинается нечетное число горизонтальных доминошек, то есть хотя бы 3. Во втором столбце, четное число клеток занято вертикальными доминошками, нечетное число клеток занято горизонтальными доминошками, начинающимися в первом столбце, поэтому нечетное число доминошек начинается во втором столбце, то есть опять хотя бы 3. Аналогично в третьем и четвертом столбцах. В пятом столбце одна клетка вырезана, поэтому в нем начинается четное число доминошек. И в шестом столбце одна клетка вырезана, четное число клеток занято вертикальными доминошками и доминошками, начинающимися в пятом столбце, поэтому в нём начинается нечетное число доминошек. Аналогично, в 7, 8 и 9 столбцах. Итого, не менее $8 \cdot 3 + 2 = 26$ горизонтальных доминошек. Аналогично, не менее 26 вертикальных доминошек. То есть суммарно не менее 52 доминошек, что невозможно в квадрате 10×10.

5. *На доске выписано 30 чисел (необязательно различных, необязательно целых). Известно, что как бы ни разбить эти числа на 10 групп по 3, найдутся две группы, суммы чисел в которых совпадают. Какое наибольшее количество попарно различных чисел может быть на доске?*

Ответ: 9. **Решение.** Девять чисел может быть, например, если выписаны 22 единицы и числа от 2 до 9. Тогда при любом разбиении будет хотя бы две группы, целиком состоящие из единиц. Докажем, что если на доске есть хотя бы 10 различных чисел, то их можно так разбить на тройки, что во всех тройках суммы различны. Выберем 10 различных чисел и поместим их по одному в каждую группу. Далее из оставшихся чисел выберем два наибольших и поместим их в группу к наибольшему из выбранных. Из оставшихся опять выберем два наибольших и поместим их в группу ко второму по величине из выбранных. И так далее. Тогда первая группа будет иметь самую большую сумму, вторая — вторую по величине и т.д.