КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 25.10.2021
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА. РЕШЕНИЯ

1. На плоскости нарисованы 5 лучей, выходящих из одной точки. Может ли оказаться, что среди углов между лучами ровно 8 острых? Если да, то приведите пример со значениями углов между лучами, если нет, то объясните, почему так не бывает.

Ответ. Да, может. **Решение.** Нарисуем 4 луча так, что между соседними образуются углы в 1°. Пятый луч нарисуем так, чтобы угол между ним и ближайшим из тех четырёх лучей составлял 88°. Тогда острыми будут только углы с пятым лучом, причём ровно два.

2. В гостинице n номеров. Ключи от номеров хранятся в 10 коробках, в каждой коробке 2022 ключа. Администраторы могут потерять какие-то коробки, поэтому хозяин гостиницы организовал хранение ключей так, что даже если любые три коробки потеряются, от каждого номера всё равно можно будет найти хотя бы один ключ. Какое наибольшее количество номеров может быть в этой гостинице?

Ответ. 5055 номеров. **Решение.** Если от какого-то номера не более трёх ключей, то все они могут быть потеряны. Поэтому администраторы должны заготовить не менее 4 ключей от каждого номера, следовательно, общее количество номеров не может быть больше $\frac{2022\cdot 10}{4} = 5055$. При этом 5055 номеров могут быть. Для этого их можно разбить на пять групп по 1011 штук: ключи от номеров первой группы положить в 1, 2, 3, 4 коробки; от номеров второй группы — в 3, 4, 5, 6; от третьей — в 5, 6, 7, 8; от четвертой — в 7, 8, 9, 10; от пятой — в 9, 10, 1, 2.

3. В каждую клетку таблицы 4×4 записаны натуральные числа таким образом, что произведения чисел в каждой строке и произведения чисел в каждом столбце равны между собой (все восемь произведений). Чему может быть равно число G? Найдите все варианты.

14	5	8	A
6	4	7	B
20	21	2	C
D	E	F	G

Ответ. $G = 7$ или $G = 28$. **Решение.** Разложим на простые множители имеющиеся в таблице числа. Произведение чисел в первом столбце равно $14\cdot 6\cdot 20\cdot D = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot D$. Зная это произведение, легко найти $A = 3D$, $B = 10D$, $C = 2D$. Перемножив числа в последнем столбце, получим $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot D \cdot D \cdot D \cdot G = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot D$, откуда $D^2 \cdot G = 2^2 \cdot 7$. Учитывая, что D и G — натуральные числа, возможны два варианта: $D = 1$, $G = 28$ и $D = 2$, $G = 7$.

4. Пятизначное число без нулей в записи назовём *сбалансированным*, если сумма любых трёх его цифр делится на каждую из двух других. Сколько всего существует сбалансированных чисел?

Ответ. 24. **Решение.** Обозначим максимальную цифру этого числа через e. Обозначим остальные цифры через a, b, c, d. Тогда $a + b + c$ делится на e и $a + b + d$ делится на e. Тогда их разность $d - c$ тоже делится на e. Так как e — максимальная цифра, и $c, d \neq 0$, то

$-e < d - c < e$, то есть $d - c = 0$. Аналогично доказывается, что любые две из оставшихся цифр равны. Поэтому мы получили набор цифр вида a, a, a, a и e, где $e \geqslant a$.

Во-первых, вариант $e = a$ подходит, и таких чисел 9. Если всё-таки $e > a$, то $a+a+e \,\vdots\, a$, поэтому $e = ak$ для некоторого натурального k. Тогда по условию $a + a + a \,\vdots\, ak$, откуда $3 \,\vdots\, k$. Значит, при $e \neq a$ получаем, что $k = 3$. Поэтому $a \leqslant 3$, и наборы 11113, 22226, 33339 подходят. Каждый набор даёт ещё по 5 чисел.

5. В компании n человек. У каждого из них не менее 2021 знакомого. При этом нет пятерых людей, попарно знакомых друг с другом. При каком наименьшем n такое возможно?

Ответ. 2695. **Решение.** Покажем, как могло оказаться 2695 человек. Разобьём их на 4 группы размером 674, 674, 674 и 673. Сделаем людей внутри одной группы незнакомыми, а в разных — знакомыми. Тогда у каждого человека знакомых минимум $673 + 674 + 674 = 2021$, а пяти попарно знакомых точно нет.
Докажем, что менее 2695 человек быть не могло. Предположим, что у нас $2694 - x$ людей. Тогда у каждого не более $672 - x$ незнакомых. Будем набирать группу из попарно знакомых. Когда мы добавляем к ней любого человека, он запретит с учётом себя не более $673 - x$. Поскольку $4(673 - x) = 2692 - 4x < 2694 - x$, то после того как наберём не более четверых, не запрещённые останутся, поэтому можно будет добавить человека в нашу группу. Получается, найдётся группа из 5 попарно знакомых.

6. Найдите все пары натуральных чисел (A, B), имеющих поровну цифр и таких, что если к числу A приписать с конца число B, то полученное число окажется вдвое больше их произведения.

Ответ. $(3, 6)$, $(13, 52)$. **Решение.** Обозначим количество цифр в числах A и B за k. Тогда условие задачи равносильно равенству $10^k A + B = 2A \cdot B$, откуда $10^k A = B(2A-1)$. Так как числа A и $2A-1$ взаимно просты, $10^k \,\vdots\, (2A-1)$. При этом число $2A-1$ нечётно. Наибольший нечётный делитель числа 10^k равен 5^k, поэтому $5^k \geqslant 2A - 1 \geqslant 2 \cdot 10^{k-1} - 1 = 2^k \cdot 5^{k-1} - 1$, откуда $k \leqslant 2$. При $k = 1$ получаем делители $2A - 1 = 1$ или $2A - 1 = 5$, при $k = 2$ получаем делитель $2A - 1 = 25$. Выразив A и подставив в исходное равенство, найдем пары $(1, 10)$, $(3, 6)$ и $(13, 52)$. Первая не подходит, т.к. B оказалось двузначным, две другие дают ответ.

7. По кругу стоят 1400 школьников так, что все расстояния между соседними школьниками одинаковы. Известно, что k из них честные (всегда говорят правду), а остальные могут и говорить правду, и врать. У одного из школьников в кармане лежит бриллиант, и учитель хочет узнать, у кого. Учитель спросил у каждого школьника, каково расстояние между ним и школьником с бриллиантом. Найдите наименьшее k, при котором учитель может гарантированно определить, у кого в кармане бриллиант. (Все школьники знают, у кого находится бриллиант. Расстояние между школьниками равно длине наиболее короткой из двух дуг между ними.)

Ответ. 702. **Решение.** Покажем, что 701 человека может быть недостаточно. Пусть A, B, C, D — четыре человека, делящие окружность на 4 равные дуги (то есть между A и B, между B и C, между C и D, между D и A ровно 349 человек). И пусть все люди на дуге BD, содержащей A, называют расстояние до A. Все люди на дуге BD, содержащей C, называют расстояние до C. При этом B и D равноудалены от A и C, поэтому они говорят расстояние до них обоих сразу. Тогда может так быть, что бриллиант у A и честные школьники на дуге от B до D, содержащей A. А может оказаться, что бриллиант у C и честные школьники на дуге от B до D, содержащей C. Следовательно, мы не можем точно сказать, находится бриллиант у A или у C. Тем более не хватит меньшего количества честных.

Теперь докажем, что если честных людей хотя бы 702, то мы точно сможем определить, у кого бриллиант. Каждый человек, когда говорит расстояние d, указывает либо только на себя (если $d = 0$), или на двух людей (если $d > 0$). Посчитаем для каждого человека, сколько людей на него указало. На школьника A с бриллиантом указало не менее 702 человек. Если на всех остальных школьников указало меньше человек, то мы однозначно определили, у кого бриллиант. Значит, есть ещё школьник B, на которого указало хотя бы 702 человека. Суммарно 1404 указаний, то есть не менее 4 человек указало одновременно и на A и на B. Но такого быть не может, так как есть не более двух школьников, которые равноудалены от A и B.

8. На доске написаны дроби $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\ldots$, $\frac{1}{100}$. Вася упражняется в сложении дробей. Каждую минуту он выбирает две дроби, пишет в числитель сумму числителей, в знаменатель сумму знаменателей, полученную дробь сокращает (до несократимой), а две исходные дроби стирает. Дробь с каким наибольшим значением может оказаться на доске через 99 минут?

Ответ. $\frac{1}{2}$. **Решение.** Будем решать задачу для дробей со знаменателями от 1 до n. Чтобы получить такой результат, обработаем сначала дроби $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n-1}$ (получив $\frac{2}{2n-1}$), а результат совокупим с $\frac{1}{n-2}$, получив $\frac{3}{3n-3} = \frac{1}{n-1}$. В результате на доске окажутся дроби

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n-4}, \frac{1}{n-3}, \frac{1}{n-1}.$$

Теперь каждый раз будем применять васину операцию к двум наименьшим дробям. После k таких операций на доске будут дроби

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n-4}, \frac{1}{n-k-3}, \frac{1}{n-k-1}$$

(действительно, из дробей $\frac{1}{n-k-3}$ и $\frac{1}{n-k-1}$ получается дробь $\frac{1}{n-k-2}$). После $n-4$ операций у Васи останутся дроби $\frac{1}{1}$ и $\frac{1}{3}$, из которых получается $\frac{1}{2}$.

Докажем, что больше получиться не может. Заметим, что если $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$ – две дроби с положительными числителями и знаменателями, то дробь $\frac{a+b}{c+d}$ заключена между ними. Отсюда следует, что, если в результате наших операций над набором дробей осталась одна, эта дробь меньше наибольшей дроби исходного набора.

В какой-то момент Вася должен будет применить свою операцию сложения к дроби $\frac{1}{1}$ и какой-то другой, скажем, $\frac{x}{y}$. Если $\frac{x}{y} < \frac{1}{2}$, то есть $y \geqslant 2x+1$, Вася получит дробь $\frac{x+1}{y+1} \leqslant \frac{x+1}{2x+2} = \frac{1}{2}$. Все (возможно) оставшиеся дроби не больше $\frac{1}{2}$, и окончательный результат будет не больше $\frac{1}{2}$. Если $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, то обсуждаемая операция – не последняя (так как из всех дробей, кроме $\frac{1}{1}$, должна получиться дробь, меньшая $\frac{1}{2}$) и участвующая в ней дробь $\frac{1}{2}$ написана на доске с самого начала (по той же причине). Поэтому результат этой операции, $\frac{2}{3}$, будет взаимодействовать с некоторой дробью $\frac{e}{f} \leqslant \frac{1}{3}$. Поскольку $f \geqslant 3e \geqslant 2e+1$, в результате получится $\frac{2+e}{3+f} \leqslant \frac{e+2}{2e+4} = \frac{1}{2}$. После этого на доске останутся только дроби, не большие $\frac{1}{2}$, и окончательный результат будет не больше $\frac{1}{2}$.