

Личная олимпиада. Лига Старт.

1. Рита выписала на доску числа $1, 2, \dots, 101$, каждое число — красным или синим цветом. Оказалось, что самое большое синее число равно количеству синих чисел, а самое маленькое красное число равно половине от количества красных чисел. Сколько красных чисел выписано на доску?
2. В чёрном клетчатом квадрате 23×23 закрасили белым цветом 9 клеток. При каком наибольшем n можно утверждать, что гарантированно найдется полностью черный квадрат $n \times n$? Квадрат $n \times n$ можно располагать только по клеточкам.
3. Среди 30 одинаковых на вид монет одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящих (легче она или тяжелее остальных — неизвестно). Как за два взвешивания на обычных двухчашечных весах гарантированно найти 24 настоящие монеты?
4. Пингвин и Варан играют в игру. Перед ними лежат три кучи камней: в первой 100 камней, во второй 101 камень, в третьей 102 камня. Они делают ходы по очереди, начинает Пингвин. Каждый из игроков своим ходом может выбрать две кучи, в которых в данный момент a и b камней, после чего выкинуть из обеих куч по $\text{НОД}(a, b)$ камней. Выигрывает тот, после чьего хода какая-нибудь куча опустеет. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?
5. В одной стране имеют хождение купюры в 3, 25, 80 тугриков. Бизнесмен Виктор в течение 2024 дней подряд питался в ресторане и каждый день (за исключением первого, в первый день он мог потратить сколько угодно тугриков) тратил на 1 тугрик больше, чем в предыдущий. При этом ему удавалось всё время расплачиваться купюрами без сдачи. Мог ли Виктор за это время потратить ровно миллион купюр?