LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n назовем *исключительным*, если для любых трёх натуральных чисел a, b и c таких, что $7a+b$ и $7b+c$ делятся на n, число $7c+a$ также делится на n. Найдите самое большое исключительное число или докажите, что таких чисел бесконечно много.

2. Натуральное число n можно за одну операцию либо заменить на $5n+1$, либо на $5n-1$, либо поделить на 2 или на 3 (если делится). Верно ли, что из любого натурального числа можно за несколько операций получить 1?

3. В турнире по бадминтону принял участие 1181 человек. Любые два участника сыграли друг с другом по два матча. Ничьих не было. По окончании турнира оказалось, что каждый участник выиграл столько же матчей, сколько проиграл. Докажите, что можно признать недействительными результаты ровно половины матчей так, чтобы из оставшихся матчей каждый участник всё ещё выиграл столько же матчей, сколько проиграл.

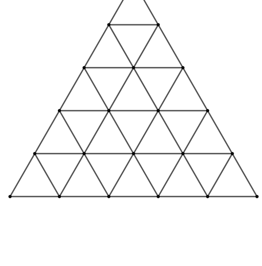
4. 1000-значное число N состоит из ненулевых цифр. Если цифры N разбить на пары рядом стоящих, то в любой паре цифра, стоящая левее, втрое меньше цифры, стоящей правее. Докажите, что N не может быть степенью простого числа.

5. Петя выписал несколько различных натуральных чисел. Затем он разбил эти числа на 10 групп. После этого он разбил эти числа на другие 10 групп. Оказалось, что любая группа первого разбиения и любая группа второго разбиения имеют общее число. Затем Петя для каждой из 20 групп проделал следующую операцию: выписал числа этой группы в порядке возрастания и для каждой пары соседних чисел вычел из большего меньшее. Наибольшая из всех этих разностей оказалась равна n. Найдите наименьшее возможное значение n.

6. Даны два различных натуральных числа a и b, меньшие 59. Для каждого натурального $k<59$ Петя вычислил остатки от деления чисел ak и bk на 59 и выписал в тетрадь сумму этих двух остатков. Сколько среди выписанных 58 сумм может быть тех, которые больше 59?

7. На окружности отмечено n точек. Проведен $n-1$ отрезок с концами в этих точках так, что отрезки не пересекаются по внутренним точкам и от любой точки до любой другой можно добраться, двигаясь по отрезкам. В каждой точке стоит по фишке. За один ход можно поменять местами две фишки, находящиеся в точках, соединённых отрезком, и затем стереть этот отрезок. Докажите, что через несколько таких ходов можно добиться того, чтобы в итоге каждая фишка оказалась в ближайшей по часовой стрелке отмеченной точке.

8. Дано натуральное число $n>1$. Равносторонний треугольник со стороной n разбили тремя наборами параллельных прямых на n^2 маленьких равносторонних треугольников со стороной 1. Затем каждый маленький треугольник покрасили в серый, бурый или малиновый цвет. Раскраска называется *хорошенькой*, если для каждого маленького треугольника среди всех маленьких треугольников, граничащих с ним по стороне, все покрашены в один цвет или все покрашены в разные цвета. Сколько всего существует хорошеньких раскрасок? (Ответ может зависеть от n.)



Справа изображен пример треугольника при $n=5$.

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n назовем *исключительным*, если для любых трёх натуральных чисел a, b и c таких, что $7a+b$ и $7b+c$ делятся на n, число $7c+a$ также делится на n. Найдите самое большое исключительное число или докажите, что таких чисел бесконечно много.

2. Натуральное число n можно за одну операцию либо заменить на $5n+1$, либо на $5n-1$, либо поделить на 2 или на 3 (если делится). Верно ли, что из любого натурального числа можно за несколько операций получить 1?

3. В турнире по бадминтону принял участие 1181 человек. Любые два участника сыграли друг с другом по два матча. Ничьих не было. По окончании турнира оказалось, что каждый участник выиграл столько же матчей, сколько проиграл. Докажите, что можно признать недействительными результаты ровно половины матчей так, чтобы из оставшихся матчей каждый участник всё ещё выиграл столько же матчей, сколько проиграл.

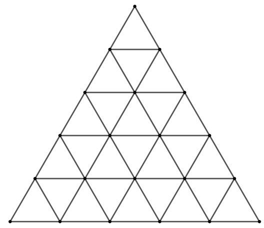
4. Дано 2022-значное число N. Если его цифры разбить на тройки рядом стоящих, то в любой тройке левая цифра втрое меньше центральной, а все правые цифры в тройках равны между собой. Докажите, что N не может быть простым.

5. У Пингвина и Варана есть неограниченный запас яиц и три изначально пустых гнезда. Пингвин и Варан по очереди, начиная с Пингвина, делают ходы. За один ход Пингвин может либо добавить три яйца в какое-нибудь гнездо, либо добавить по одному яйцу в каждое из гнезд. Причем, Пингвин не может в два своих последовательных хода добавлять по три яйца в одно и то же гнездо. Варан своим ходом может либо пропустить ход, либо убрать по два яйца из двух гнезд (но только если они там есть). Может ли Пингвин действовать так, чтобы независимо от действий Варана через некоторое время в одном из гнезд оказалось не меньше 1000 яиц?

6. Даны два различных натуральных числа a и b, меньшие 59. Для каждого натурального $k<59$ Петя вычислил остатки от деления чисел ak и bk на 59 и выписал в тетрадь сумму этих двух остатков. Сколько среди выписанных 58 сумм может быть тех, которые больше 59?

7. На окружности отмечено n точек. Проведен $n-1$ отрезок с концами в этих точках так, что отрезки не пересекаются по внутренним точкам и от любой точки до любой другой можно добраться, двигаясь по отрезкам. В каждой точке стоит по фишке. За один ход можно поменять местами две фишки, находящиеся в точках, соединённых отрезком, и затем стереть этот отрезок. Докажите, что через несколько таких ходов можно добиться того, чтобы в итоге каждая фишка оказалась в ближайшей по часовой стрелке отмеченной точке.

8. Дано натуральное число $n>1$. Равносторонний треугольник со стороной n разбили тремя наборами параллельных прямых на n^2 маленьких равносторонних треугольников со стороной 1. Затем каждый маленький треугольник покрасили в серый, бурый или малиновый цвет. Раскраска называется *хорошенькой*, если для каждого маленького треугольника среди всех маленьких треугольников, граничащих с ним по стороне, все покрашены в один цвет или все покрашены в разные цвета. Сколько всего существует хорошеньких раскрасок? (Ответ может зависеть от n.)



Справа изображен пример треугольника при $n=5$.

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n назовем *исключительным*, если для любых трёх натуральных чисел a, b и c таких, что $7a+b$ и $7b+c$ делятся на n, число $7c+a$ также делится на n. Найдите самое большое исключительное число или докажите, что таких чисел бесконечно много.

2. Натуральное число n можно за одну операцию либо заменить на $5n+1$, либо на $5n-1$, либо поделить на 2 или на 3 (если делится). Верно ли, что из любого натурального числа можно за несколько операций получить 1?

3. В турнире по бадминтону принял участие 1181 человек. Любые два участника сыграли друг с другом по два матча. Ничьих не было. По окончании турнира оказалось, что каждый участник выиграл столько же матчей, сколько проиграл. Докажите, что можно признать недействительными результаты не больше половины матчей (но хотя бы один) так, чтобы из оставшихся матчей каждый участник всё ещё выиграл столько же, сколько проиграл.

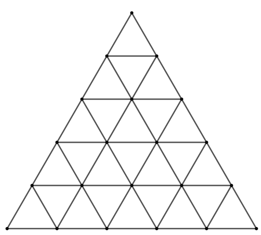
4. Дано 2022-значное число N. Если его цифры разбить на тройки рядом стоящих, то в любой тройке левая цифра втрое меньше центральной, а все правые цифры в тройках равны между собой. Докажите, что N не может быть простым.

5. У Пингвина и Варана есть неограниченный запас яиц и три изначально пустых гнезда. Пингвин и Варан по очереди, начиная с Пингвина, делают ходы. За один ход Пингвин может либо добавить три яйца в какое-нибудь гнездо, либо добавить по одному яйцу в каждое из гнезд. Причем, Пингвин не может в два своих последовательных хода добавлять по три яйца в одно и то же гнездо. Варан своим ходом может либо убрать по два яйца из двух гнезд (но только если они там есть), либо, если нет двух гнёзд с хотя бы двумя яйцами, пропустить ход. Может ли Пингвин действовать так, чтобы независимо от действий Варана через некоторое время в одном из гнезд оказалось не меньше 1000 яиц?

6. Даны два различных натуральных числа a и b, меньших 31. Для каждого натурального $k < 31$ Петя вычислил остатки от деления чисел ak и bk на 31 и выписал в тетрадь сумму этих двух остатков. Сколько среди выписанных 30 сумм может быть равных 31?

7. Найдите наименьшее такое n, что можно разместить n доминошек (прямоугольников из двух клеток) на доске 3×100 так, чтобы больше не осталось места ни для одной доминошки.

8. Дано натуральное число $n > 1$. Равносторонний треугольник со стороной n разбили тремя наборами параллельных прямых на n^2 маленьких равносторонних треугольников со стороной 1. Затем каждый маленький треугольник покрасили в серый, бурый или малиновый цвет. Раскраска называется *хорошенькой*, если для каждого маленького треугольника среди всех маленьких треугольников, граничащих с ним по стороне, все покрашены в один цвет или все покрашены в разные цвета. Сколько всего существует хорошеньких раскрасок? (Ответ может зависеть от n.)



Справа изображен пример треугольника при $n = 5$.

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Представьте число 2022^3 в виде суммы трёх кубов натуральных чисел.

2. Натуральное число n можно за одну операцию либо заменить на $5n+1$, либо на $5n-1$, либо поделить на 2 или на 3 (если делится). Верно ли, что из любого натурального числа можно за несколько операций получить 1?

3. В компании среди любых четверых найдутся три пары знакомых и три пары незнакомых. Какое наибольшее число людей может быть в такой компании?

4. Натуральное число X называется *Восьмым Чудом Света*, если оно делится на 88, и каждая цифра, использующаяся в записи X встречается там столько раз, чему она равна. Например, число 88888888 является Восьмым Чудом Света. Верно ли, что оно является наименьшим из них?

5. Учитель называет какое-то натуральное число N, большее 1. Затем Петя и Вася ходят по очереди. Сначала Петя пишет на доске какое-то натуральное число. Каждым следующим ходом на доску надо выписать либо число на 1 меньшее наименьшего из написанных чисел, либо на 2 большее наибольшего из записанных чисел. Кто запишет число кратное N, проигрывает. При каких N у кого-то из мальчиков есть выигрышная стратегия?

6. Прошёл футбольный турнир в один круг среди $2N$ команд из $2N$ разных городов. В каждом туре встречаются N пар ранее не игравших между собой команд. В каждой игре одна из команд играет в своем городе. Назовём команду *правильной*, если она чередует игры в своем городе и за его пределами (первая игра может быть где угодно). Какое наибольшее количество правильных команд могло оказаться в конце турнира?

7. Найдите наименьшее такое n, что можно разместить n доминошек (прямоугольников из двух клеток) на доске 3×100 так, чтобы больше не осталось места ни для одной доминошки.

8. Равносторонний треугольник разбили на 16 одинаковых равносторонних треугольников (см. рис.) Каждый маленький треугольник покрасили в один из трёх цветов. Раскраска называется *хорошенькой*, если соседи каждой клетки или все покрашены в один цвет или все в разные цвета. Сколько всего существует хорошеньких раскрасок этого треугольника?