МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Алиса и Вера играют в игру. У них есть 2022 бутылочки с молоком объемом 200 мл каждая. Изначально в каждой бутылочке по 30 мл молока. Первой ходит Алиса. За каждый ход игрок может совершить одно из двух действий:

(1) выбрать бутылочку, в которой не менее 100 мл молока, и выпить половину молока из неё;

(2) выбрать две бутылочки, в каждой из которых менее 100 мл молока, перелить молоко из одной во вторую, и выбросить пустую бутылочку.

Проигрывает та, кто не может сходить. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

2. Дана чёрная доска 9×9. Оля перекрашивает её клетки в белый цвет. После перекрашивания очередной клетки, Оля пишет в ней количество её чёрных соседей по стороне на данный момент. Так Оля перекрасила все клетки. Какое наименьшее количество клеток могут содержать число, большее 1?

3. Может ли для различных натуральных чисел a, b и c выполняться равенство $a + b + \text{НОД}(a, b) = b + c + \text{НОД}(b, c) = a + c + \text{НОД}(a, c)$?

4. В чемпионате по водному поло участвовало $n \geqslant 2$ команд, любые две команды сыграли друг с другом ровно один раз. За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков и в итоговой таблице были упорядочены в порядке убывания очков. Однако через несколько дней организаторы обнаружили, что произошла техническая ошибка, и все результаты были учтены неверно. Все матчи, которые ранее считались результативными, на самом деле закончились вничью, а все матчи, которые раньше считались ничейными, на самом деле закончились победой одной из команд. После того как результаты были пересчитаны, организаторы вывесили новую упорядоченную таблицу результатов, в которой все команды опять набрали разное число очков.

При каких n могло так оказаться, что в правильной таблице команды упорядочились в обратном порядке (т.е. команда, которая раньше была первой, стала последней, второй — предпоследней, и т.д.)?

5. Два перпендикулярных отрезка AE и CG пересекаются в точке D. Точки B и F такие, что $ABCD$ и $DEFG$ — прямоугольники. Известно, что $\angle GAD = 36°$, $\angle GCF = 15°$, $BE = CF$. Найдите величину угла $\angle AEB$. Ответ дайте в градусах.

6. На доске написано несколько различных натуральных чисел. За один ход Паша находит все натуральные числа n, для которых сейчас выписано ровно одно из чисел n и $n-1$, и запоминает их. После этого он стирает предыдущий набор и записывает все числа, которые он только что запомнил. Докажите, что существует бесконечно много таких k, что через k ходов на доске будет написан изначальный набор и изначальный набор, увеличенный на k.

7. Наибольшее из действительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n равно M, а наименьшее — m. Известно, что если $a_i \leqslant a_j \leqslant a_k$, то $a_i + a_k \leqslant 2a_j$. Докажите, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant 2m + (n - 2)M$.

8. Найдите наименьшее натуральное n, при котором у чисел n^2 и $n^2 + 7^{2021}$ одинаковое количество натуральных делителей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дана чёрная доска 9×9. Оля перекрашивает её клетки в белый цвет. После перекрашивания очередной клетки, Оля пишет в ней количество её чёрных соседей по стороне на данный момент. Так Оля перекрасила все клетки. Какое наименьшее количество клеток могут содержать число, большее 1?

2. Может ли для различных натуральных чисел a, b и c выполняться равенство $a+b+\text{НОД}(a,b) = b+c+\text{НОД}(b,c) = a+c+\text{НОД}(a,c)$?

3. В чемпионате по водному поло участвовало 10 команд, любые две команды сыграли друг с другом ровно один раз. За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков, и в итоговой таблице были упорядочены в порядке убывания очков. Однако через несколько дней организаторы обнаружили, что произошла техническая ошибка и все результаты были учтены неверно. Все матчи, которые ранее считались результативными, на самом деле закончились вничью, а все матчи, которые раньше считались ничейными, на самом деле закончились победой одной из команд. После того как результаты были пересчитаны, организаторы вывесили новую упорядоченную таблицу результатов, в которой все команды опять набрали разное число очков.

Могло ли так оказаться, что в правильной таблице команды упорядочились в обратном порядке (т.е. команда, которая раньше была первой, стала последней, второй — предпоследней и т.д.)?

4. Два перпендикулярных отрезка AE и CG пересекаются в точке D. Точки B и F такие, что $ABCD$ и $DEFG$ — прямоугольники. Известно, что $\angle GAD = 36^\circ$, $\angle GCF = 15^\circ$, $BE = CF$. Найдите величину угла $\angle AEB$. Ответ дайте в градусах.

5. На доске написано несколько различных натуральных чисел. За один ход Паша находит все натуральные числа n, для которых сейчас выписано ровно одно из чисел n и $n-1$, и запоминает их. После этого он стирает предыдущий набор и записывает все числа, которые он только что запомнил. Докажите, что существует бесконечно много таких k, что через k ходов на доске будет написан изначальный набор и изначальный набор, увеличенный на k.

6. На доске выписано 100 чисел, не обязательно различных. Для каждого из $2^{100}-1$ способов выбрать непустой набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Найдите наибольшее возможное число единиц, которое может быть записано в тетради Димы.

Например, если бы на доске были написаны числа -1, 2, 2, то в тетради были бы записаны 3 один раз, 4 один раз, 2 два раза, -1 один раз, 1 два раза. Итого, 2 единицы.

7. Наибольшее из действительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n равно M, а наименьшее — m. Известно, что если $a_i \leqslant a_j \leqslant a_k$, то $a_i + a_k \leqslant 2a_j$. Докажите, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant 2m + (n-2)M$.

8. Найдите все натуральные n, при которых у чисел n^2 и n^2+115 одинаковое количество натуральных делителей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дана белая доска 6×6. Можно ли покрасить 9 клеток в чёрный цвет так, чтобы не осталось ни одного замкнутого маршрута, проходящего хотя бы по четырём неповторяющимся белым клеткам доски (но, возможно, не по всем)? Из одной клетки можно переходить в другую, только если у них есть общая сторона.

2. Может ли для различных натуральных чисел a, b и c выполняться равенство $a + b + \text{НОД}(a, b) = b + c + \text{НОД}(b, c) = a + c + \text{НОД}(a, c)$?

3. В чемпионате по водному поло участвовало 10 команд, любые две команды сыграли друг с другом ровно один раз. За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков, и в итоговой таблице были упорядочены в порядке убывания очков. Однако через несколько дней организаторы обнаружили, что произошла техническая ошибка и все результаты были учтены неверно. Все матчи, которые ранее считались результативными, на самом деле закончились вничью, а все матчи, которые раньше считались ничейными, на самом деле закончились победой одной из команд. После того как результаты были пересчитаны, организаторы вывесили новую упорядоченную таблицу результатов, в которой все команды опять набрали разное число очков.

Могло ли так оказаться, что в правильной таблице команды упорядочились в обратном порядке (т.е. команда, которая раньше была первой, стала последней, второй — предпоследней и т.д.)?

4. Два перпендикулярных отрезка AE и CG пересекаются в точке D. Точки B и F такие, что $ABCD$ и $DEFG$ — прямоугольники. Известно, что $\angle GAD = 36^\circ$, $\angle GCF = 15^\circ$, $BE = CF$. Найдите величину угла $\angle AEB$. Ответ дайте в градусах.

5. На доске выписано 100 чисел, не обязательно различных. Для каждого из $2^{100} - 1$ способов выбрать непустой набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Найдите наибольшее возможное число единиц, которое может быть записано в тетради Димы.

Например, если бы на доске были написаны числа -1, 2, 2, то в тетради были бы записаны 3 один раз, 4 один раз, 2 два раза, -1 один раз, 1 два раза. Итого, 2 единицы.

6. Найдите все натуральные n, при которых у чисел n^2 и $n^2 + 21$ одинаковое количество натуральных делителей.

7. У шеф-повара есть круглая пицца, разрезанная на 200 кусков при помощи 100 прямолинейных разрезов, проходящих через центр пиццы. Также у повара есть n различных соусов. Каждый соус повар положил на некоторые 100 подряд идущих кусков пиццы. После этого повар подсчитал, сколько соусов попало на каждый кусок. Пусть m и M наименьшее и наибольшее из полученных чисел. Найдите все возможные значения суммы $m+M$ (ответ может зависеть от n)?

8. Положительные числа a и b таковы, что $3(ab + 1) = a^2b^2 - 1$. Докажите, что $a^4 + b^4 > 5(a^2 + b^2) - 10$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дана белая доска 6×6. Можно ли покрасить 9 клеток в чёрный цвет так, чтобы не осталось ни одного замкнутого маршрута, проходящего хотя бы по четырём неповторяющимся белым клеткам доски (но, возможно, не по всем)? Из одной клетки можно переходить в другую, только если у них есть общая сторона.

2. Может ли для различных натуральных чисел a, b и c выполняться равенство $a + b + \text{НОД}(a, b) = b + c + \text{НОД}(b, c) = a + c + \text{НОД}(a, c)$?

3. В чемпионате по водному поло участвовало 9 команд, любые две команды сыграли друг с другом ровно один раз. За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков и в итоговой таблице были упорядочены в порядке убывания очков. Однако через несколько дней организаторы обнаружили, что произошла техническая ошибка, и все результаты были учтены неверно. Все матчи, которые ранее считались результативными, на самом деле закончились вничью, а все матчи, которые раньше считались ничейными, на самом деле закончились победой одной из команд. После того как результаты были пересчитаны, организаторы вывесили новую упорядоченную таблицу результатов, в которой все команды опять набрали разное число очков.

Могло ли так оказаться, что в правильной таблице команды упорядочились в обратном порядке (т.е. команда, которая раньше была первой, стала последней, второй — предпоследней и т.д.)?

4. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка P так, что $\angle PAC = 45^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AP пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что $PQ \perp BC$.

5. Найдите все натуральные n, при которых у чисел n^2 и $n^2 + 21$ одинаковое количество натуральных делителей.

6. У шеф-повара есть круглая пицца, разрезанная на 200 кусков при помощи 100 прямолинейных разрезов, проходящих через центр пиццы. Также у повара есть n различных соусов. Каждый соус повар положил на некоторые 100 подряд идущих кусков пиццы. После этого повар подсчитал, сколько соусов попало на каждый кусок. Пусть m и M наименьшее и наибольшее из полученных чисел. Найдите все возможные значения суммы $m+M$ (ответ может зависеть от n)?

7. Положительные числа a и b таковы, что $3(ab + 1) = a^2b^2 - 1$. Докажите, что $a^4 + b^4 > 5(a^2 + b^2) - 10$.

8. Лёня загадал число вида $n^2 - n$ при некотором натуральном $n > 1$. За один ход Ася может сказать вслух любое число, которое она к этому времени еще не называла, и Леня вычтет его из текущего числа. Если у Лёни результат больше нуля, то он говорит: “Дальше”; если равен нулю, то Ася выигрывает, а если меньше нуля, то Ася проигрывает. Сможет ли Ася гарантированно выиграть?