МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное n. Последовательность целых чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ определена следующими правилами: $a_0 = n$, а для $k \geqslant 1$ число a_k — наименьшее натуральное число, большее a_{k-1} и такое, что $a_k + a_{k-1}$ — точный квадрат. Докажите, что существует ровно $[\sqrt{2n}]$ натуральных чисел, не представимых в виде $a_k - a_\ell$ с $k > \ell \geqslant 0$.

2. В остроугольном треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C. На биссектрисе угла A и на стороне AC отметили точки D и E соответственно так, что $\angle ADB = \angle AED = 90^\circ$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ADC лежит на прямой BE.

3. У Васи есть $2n$ дисков радиусов $1, 2, \ldots, n$. Для каждого радиуса есть два диска такого радиуса: один прозрачный и один непрозрачный. Вася хочет надеть на шпиндель n дисков разного радиуса так, чтобы края всех дисков были видны, если посмотреть на шпиндель сверху (то есть под непрозрачным диском не должно быть дисков меньшего радиуса). Сколькими способами Вася может это сделать?

4. Точка K расположена на медиане BM треугольника ABC так, что $CM = CK$. Оказалось, что $\angle CBM = 2\angle ABM$. Докажите, что $BC = KM$.

5. Найдите все простые числа p и q, для которых каждое из чисел $p+4q$ и $q+4p$ — точный квадрат.

6. Сравните числа

$$\frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \ldots + \frac{1}{8086} + \frac{1}{8087} \text{ и } \frac{11}{6}.$$

7. В школе запустили 20 кружков. За один вопрос можно про любые два кружка узнать, какие ученики ходят в оба эти кружка, а какие ходят ровно в один из них (без указания в какой именно). За какое наименьшее количество вопросов можно узнать списки посещающих каждый кружок?

8. На доске написаны три целых неотрицательных числа a, b, c, сумма которых равна 2021. Нина и Тадаси делают ходы по очереди (начинает Нина). Своим ходом игрок выбирает натуральное число k, прибавляет k к одному из чисел на доске (по своему выбору) и уменьшает на k каждое из двух других чисел. Проигрывает игрок, получивший отрицательное число. Сколько существует начальных троек (a, b, c), при которых выигрывает Тадаси?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное n. Последовательность целых чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ определена следующими правилами: $a_0 = n$, а для $k \geqslant 1$ число a_k — наименьшее натуральное число, большее a_{k-1} и такое, что $a_k + a_{k-1}$ — точный квадрат. Докажите, что существует ровно $[\sqrt{2n}]$ натуральных чисел, не представимых в виде $a_k - a_\ell$ с $k > \ell \geqslant 0$.

2. В остроугольном треугольнике ABC ($BC > AB$) проведены высота BH и медиана BM, а также внутри треугольника отмечена такая точка P, что $\angle PBC = \angle ABH$, $\angle PHB = \angle ACB$, Докажите, что точка M равноудалена от точек H и P.

3. У Васи есть $2n$ дисков радиусов 1, 2, ..., n. Для каждого радиуса есть два диска такого радиуса: один прозрачный и один непрозрачный. Вася хочет надеть на шпиндель n дисков разного радиуса так, чтобы края всех дисков были видны, если посмотреть на шпиндель сверху (то есть под непрозрачным диском не должно быть дисков меньшего радиуса). Сколькими способами Вася может это сделать?

4. Точка K расположена на медиане BM треугольника ABC так, что $CM = CK$. Оказалось, что $\angle CBM = 2\angle ABM$. Докажите, что $BC = KM$.

5. Найдите все простые числа p и q, для которых каждое из чисел $p+4q$ и $q+4p$ — точный квадрат.

6. Сравните числа

$$\frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \ldots + \frac{1}{8086} + \frac{1}{8087} \text{ и } \frac{11}{6}.$$

7. В школе запустили 20 кружков. За один вопрос можно про любые два кружка узнать, какие ученики ходят в оба эти кружка, а какие ходят ровно в один из них (без указания в какой именно). За какое наименьшее количество вопросов можно узнать списки посещающих каждый кружок?

8. У Пингвина и Варана есть неограниченный запас яиц и три изначально пустых гнезда. Пингвин и Варан по очереди, начиная с Пингвина, делают ходы. За один ход Пингвин может либо добавить три яйца в какое-нибудь гнездо, либо добавить по одному яйцу в каждое из гнезд. Причем, Пингвин не может в два своих последовательных хода добавлять по три яйца в одно и то же гнездо. Варан своим ходом может либо пропустить ход, либо убрать по два яйца из двух гнезд (но только если они там есть). Может ли Пингвин действовать так, чтобы независимо от действий Варана через некоторое время в одном из гнезд оказалось не меньше 1000 яиц?

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 05.05 – 11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Различные вещественные числа x и y удовлетворяют условию

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2022x+2022y.$$

Найдите $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})$.

2. В остроугольном треугольнике ABC ($BC > AB$) проведены высота BH и медиана BM, а также внутри треугольника отмечена такая точка P, что $\angle PBC = \angle ABH$, $\angle PHB = \angle ACB$, Докажите, что точка M равноудалена от точек H и P.

3. У Васи есть $2n$ дисков радиусов $1, 2, \ldots, n$. Для каждого радиуса есть два диска такого радиуса: один прозрачный и один непрозрачный. Вася хочет надеть на шпиндель n дисков разного радиуса так, чтобы края всех дисков были видны, если посмотреть на шпиндель сверху (то есть под непрозрачным диском не должно быть дисков меньшего радиуса). Сколькими способами Вася может это сделать?

4. Точка K расположена на медиане BM треугольника ABC так, что $CM = CK$. Оказалось, что $\angle CBM = 2\angle ABM$. Докажите, что $BC = KM$.

5. Назовём целое число n *странным*, если существуют такие целые числа x и y, что $n = x^3 + 2y^2$. Какое наибольшее количество странных чисел может идти подряд?

6. Сравните числа

$$\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}+\ldots+\frac{1}{8086}+\frac{1}{8087} \text{ и } \frac{11}{6}.$$

7. В турнире по бадминтону приняло участие 329 человек. Любые два участника сыграли друг с другом по два матча. Ничьих не было. По окончании турнира оказалось, что каждый участник выиграл столько же матчей, сколько проиграл. Докажите, что можно признать недействительными результаты ровно половины матчей так, чтобы из оставшихся матчей каждый участник всё ещё выиграл столько же, сколько проиграл.

8. У Пингвина и Варана есть неограниченный запас яиц и три изначально пустых гнезда. Пингвин и Варан по очереди, начиная с Пингвина, делают ходы. За один ход Пингвин может либо добавить три яйца в какое-нибудь гнездо, либо добавить по одному яйцу в каждое из гнезд. Причем, Пингвин не может в два своих последовательных хода добавлять по три яйца в одно и то же гнездо. Варан своим ходом может либо пропустить ход, либо убрать по два яйца из двух гнезд (но только если они там есть). Может ли Пингвин действовать так, чтобы независимо от действий Варана через некоторое время в одном из гнезд оказалось не меньше 1000 яиц?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Различные вещественные числа x и y удовлетворяют условию

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2022x+2022y.$$

Найдите $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})$.

2. В треугольнике ABC $\angle A=60^\circ$, и $3AB=AC$. Докажите, что $\angle B<105^\circ$.

3. У Васи есть $2n$ дисков радиусов 1, 2, $\ldots$, n. Для каждого радиуса есть два диска такого радиуса: один прозрачный и один непрозрачный. Вася хочет надеть на шпиндель n дисков разного радиуса так, чтобы края всех дисков были видны, если посмотреть на шпиндель сверху (то есть под непрозрачным диском не должно быть дисков меньшего радиуса). Сколькими способами Вася может это сделать?

4. Точка K расположена на медиане BM треугольника ABC так, что $CM=CK$. Оказалось, что $\angle CBM=2\angle ABM$. Докажите, что $BC=KM$.

5. Натуральное число n можно за одну операцию либо заменить на $5n+1$, либо на $5n-1$, либо поделить на 2 или на 3 (если делится). Докажите, что из любого натурального числа можно за несколько операций получить 1.

6. Сравните числа

$$\frac{1}{2022}+\frac{1}{2023}+\ldots+\frac{1}{8086}+\frac{1}{8087} \text{ и } \frac{11}{6}.$$

7. Несколько команд сыграли круговой турнир по волейболу (каждые две команды встретились ровно в одном матче, ничьих не было). У одной команды меньше побед, чем у любой из остальных. Каждая из остальных команд проиграла ровно одной команде, имеющей меньше побед. Какое наименьшее число команд могло участвовать в этом турнире?

8. У Пингвина и Варана есть неограниченный запас яиц и три изначально пустых гнезда. Пингвин и Варан по очереди, начиная с Пингвина, делают ходы. За один ход Пингвин может либо добавить три яйца в какое-нибудь гнездо, либо добавить по одному яйцу в каждое из гнезд. Причем, Пингвин не может в два своих последовательных хода добавлять по три яйца в одно и то же гнездо. Варан своим ходом может либо пропустить ход, либо убрать по два яйца из двух гнезд (но только если они там есть). Может ли Пингвин действовать так, чтобы независимо от действий Варана через некоторое время в одном из гнезд оказалось не меньше 1000 яиц?