

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.05.2022

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Можно ли поставить числа $1, 12, 123, \dots, 123456789$ в ряд так, чтобы каждые два числа, стоящие рядом, были взаимно просты? Напомним, что целые числа называются взаимно простыми, если у них нет общего натурального делителя, большего единицы.

2. Через вершину B прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведён луч, который пересекает отрезок AC в точке K , а прямую, проходящую через точку A , параллельно стороне BC , — в точке L . Докажите, что если $KL = 2AB$, то $\angle ABC = 3\angle CBK$.

3. В алфавите племени Которас ровно 11 букв, любая последовательность букв является словом. Известно, что для каждого натурального k в языке этого племени имеется ровно пять k -буквенных неприличных слов. Докажите, что можно написать на стене такое приличное слово из 2022 букв, что, где бы MS Word ни вставил пробел, получатся два приличных слова.

4. Натуральное число n называется *хорошим*, если оно представимо в виде суммы различных делителей n , среди которых есть единица. Докажите, что для любого натурального k существует хорошее число, кратное k .

5. В последовательности a_1, a_2, a_3, \dots число a_1 равно 1, а число a_n при $n \geq 2$ равно $a_{n-1} + 3$, если $n - 1$ встречается среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , и $a_{n-1} + 2$ в противном случае. Докажите, что $a_n < n(1 + \sqrt{2})$ при всех натуральных n .