МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1–6 МЕСТА

1. Паша разрезал квадрат 2022×2022 на доминошки. После чего Вадим расставляет в клетках каждой доминошки числа 1 или -1 (в двух клетках одной доминошки одно и то же число). Вадим стремится, чтобы суммы во всех строчках были по модулю не более k. Для какого k он может это сделать независимо от Пашиного разрезания?

2. Вова выбрал бесконечное множество S целых чисел. Он называет целое число *чистым*, если оно представляется в виде суммы нескольких различных чисел из S единственным образом, и *грязным* в противном случае (то есть если представляется несколькими разными способами или вообще не представляется). Докажите, что грязных чисел либо 0, либо бесконечно много.

3. Докажите, что не существует натуральных $a, b > 10$ таких, что $a^3 + 1 \,\vdots\, b^2$ и $b^3 + 1 \,\vdots\, a^2$.

4. Двое играют в игру. Перед ними лежит колода из n одинаковых карт и одна карта «Взрывной Котёнок». Первый игрок кладёт Взрывного Котёнка в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котёнок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору (при этом другой игрок видит, куда положили Взрывного котёнка). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каком наибольшем n у второго игрока есть выигрышная стратегия?

5. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что для любых натуральных m, n выполнены равенства

$$a_{m+n} = a_m + a_n - mn \quad \text{и}$$
$$a_{mn} = m^2 a_n + n^2 a_m + 2a_m a_n.$$

Чему может быть равно a_{2022}?

6. На доске выписано 2021 натуральное число: $1011, 1012, \ldots, 3031$. Петя каждую минуту выбирает 3 написанных на доске числа a, b и c, стирает их, а вместо них пишет число $\frac{min(a,b,c)}{3}$. Докажите, что в тот момент, когда на доске останется ровно одно число, оно будет меньше 1.

7. Рассмотрим все 36-элементные подмножества множества из 72 элементов. Можно ли их покрасить в 36 цветов так, чтобы любые два одноцветных множества имели хотя бы три общих элемента?

8. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 120°$, $\angle B = 40°$. На отрезке AC отмечена точка M такая, что $AB = AM$. На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка N такая, что $\angle AMN = 40°$. Найдите величину угла $\angle BNC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовём пару клеток на доске 2021×2021 *близкими*, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Сколькими способами можно заполнить все клетки таблицы целыми числами так, чтобы в каждой клетке стояло количество нечётных чисел, находящихся в близких с ней клетках?

2. Некоторые натуральные числа окрашены в синий цвет, причём среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть хотя бы одно синее. Докажите, что можно выбрать 100 синих чисел, не превосходящих 2^{110}, все суммы которых (по одному, по два, по три и т. д., по 100) различны.

3. Докажите, что не существует натуральных $a, b > 10$ таких, что $a^3 + 1 \vdots b^2$ и $b^3 + 1 \vdots a^2$.

4. Двое играют в игру. Перед ними лежит колода из n одинаковых карт и одна карта «Взрывной Котёнок». Первый игрок кладёт Взрывного Котёнка в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котёнок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору (при этом другой игрок видит, куда положили Взрывного котёнка). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каком наибольшем n у второго игрока есть выигрышная стратегия?

5. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что для любых натуральных m, n выполнены равенства

$$a_{m+n} = a_m + a_n - mn \quad \text{и}$$
$$a_{mn} = m^2 a_n + n^2 a_m + 2a_m a_n.$$

Чему может быть равно a_{2022}?

6. На доске выписано 2021 натуральное число: $1011, 1012, \ldots, 3031$. Петя каждую минуту выбирает 3 написанных на доске числа a, b и c, стирает их, а вместо них пишет число $\frac{min(a,b,c)}{3}$. Докажите, что в тот момент, когда на доске останется ровно одно число, оно будет меньше 1.

7. Существуют ли такие действительные числа a, b, c, что значения трех выражений abc, $ab + bc + ac$, $a + b + c$, идущие в этом порядке, представляют из себя три последовательных натуральных числа?

8. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 120°$, $\angle B = 40°$. На отрезке AC отмечена точка M такая, что $AB = AM$. На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка N такая, что $\angle AMN = 40°$. Найдите величину угла $\angle BNC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Назовём пару клеток на доске 2021×2021 *близкими*, если они находятся в одной строке или в одном столбце. Сколькими способами можно заполнить все клетки таблицы целыми числами так, чтобы в каждой клетке стояло количество нечётных чисел, находящихся в близких с ней клетках?

2. Некоторые натуральные числа окрашены в синий цвет, причём среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть хотя бы одно синее. Докажите, что можно выбрать 100 синих чисел, не превосходящих 2^{110}, все суммы которых (по одному, по два, по три и т. д., по 100) различны.

3. Путешественница Алина побывала в n городах, $n > 10$, и в каждом городе она купила 10 марок. Младшая сестра Карина разложила эти марки по n конвертам, положив в каждый конверт ровно 10 марок. Алина хочет собрать марки каждого города в отдельном конверте. Конверты открыты, можно смотреть, какие марки лежат внутри. За одну операцию Алина может поменять местами две марки. Докажите, что за $9n - 23$ операции Алина обязательно сможет добиться желаемого.

4. На бесконечной ленте по порядку написаны все степени двойки $1, 2, 4, \ldots$. Петя и Ваня делают ходы по очереди, начинает Петя. За один ход можно стереть с ленты два рядом стоящих числа и на это место записать их сумму. Цель Вани — получить два числа на ленте, которые больше 1 и отличаются на 1. Докажите, что Петя может ему помешать.

5. На окружности отмечены 2022 точки, одна из них красная, а остальные — синие. Коля перекрашивает точки, за один раз проделывая одну из двух операций:

1) выбрать две соседние точки одного цвета и у обеих изменить цвет;

2) выбрать две точки разного цвета, между которыми ровно одна другая точка, и изменить цвет у обеих.

Может ли Коля через несколько таких операций получить раскраску, в которой каждая точка имеет цвет, противоположный изначальному?

6. Существуют ли такие действительные числа a, b, c, что значения трех выражений abc, $ab+bc+ac$, $a+b+c$, идущие в этом порядке, представляют из себя три последовательных натуральных числа?

7. Внутри квадрата $ABCD$ расположены две точки P и Q. При этом $\angle PAQ = 45°$, $\angle QAD < 45°$, $BP = 3$, $PQ = 5$, $BP \parallel QD$. Найдите длину отрезка DQ.

8. Криворукий бармен разливает лимонад из двух графинов по 100 кружкам. Один графин у него в правой руке, другой в левой, и орудует он ими по очереди (начиная с правой). Правой он всегда наливает в какую-нибудь кружку 100 мл лимонада, а левой — 50 мл. На каждую из этих операций он всегда тратит 1 секунду. Изначально в каждой кружке либо 50 мл лимонада, либо пусто. Бармен хочет как можно скорее добиться того, чтобы во всех кружках стало поровну лимонада. Верно ли, что он может гарантированно уложиться в 230 секунд, независимо от изначального количества пустых кружек? (Запас лимонада в графинах и объем кружек не ограничены.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Путешественница Алина побывала в n городах, $n > 10$, и в каждом городе она купила 10 марок. Младшая сестра Карина разложила эти марки по n конвертам, положив в каждый конверт ровно 10 марок. Алина хочет собрать марки каждого города в отдельном конверте. Конверты открыты, можно смотреть, какие марки лежат внутри. За одну операцию Алина может поменять местами две марки. Докажите, что за $9n - 23$ операции Алина обязательно сможет добиться желаемого.

2. Сколькими способами можно записать в ряд все натуральные числа от 1 до 2022 так, чтобы для любого $1 \leqslant k \leqslant 2021$ ни сумма первых k чисел, ни сумма последних $2022 - k$ чисел не делилась на 3?

3. На бесконечной ленте по порядку написаны все степени двойки $1, 2, 4, \ldots$. Петя и Ваня делают ходы по очереди, начинает Петя. За один ход можно стереть с ленты два рядом стоящих числа и на это место записать их сумму. Цель Вани — получить два числа на ленте, которые больше 1 и отличаются на 1. Докажите, что Петя может ему помешать.

4. На окружности отмечены 2022 точки, одна из них красная, а остальные — синие. Коля перекрашивает точки, за один раз проделывая одну из двух операций:

1) выбрать две соседние точки одного цвета и у обеих изменить цвет;

2) выбрать две точки разного цвета, между которыми ровно одна другая точка, и изменить цвет у обеих.

Может ли Коля через несколько таких операций получить раскраску, в которой каждая точка имеет цвет, противоположный изначальному?

5. Существуют ли три таких натуральных нечетных числа n, m и k, что верно равенство $(n+m)^2 + (n+k)^2 = (k+m)^2$?

6. На вечеринку было приглашено 60 человек. Повар в меню предложил приготовить каждому по два кекса весом 120 г. Он запросил на складе 5 кг муки, но в результате ошибки ему доставили только 2 кг. Тогда повар уменьшил вес каждого кекса на треть и прикинул, сколько гостей не придет, после чего заявил, что в этом случае все получат по кексу, а большинство — даже по два. Какое наименьшее количество гостей, по мнению повара, не придет?

7. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать на 5 прямоугольников с одинаковым отношением большей стороны к меньшей, так чтобы ни у каких двух из них не было равных по длине сторон?

8. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, а диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $CD = AO$, $BC = OD$ и CA — биссектриса угла BCD. Найдите величину угла $\angle ABC$.