МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 08.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что сумма длин перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны четырёхугольника $ABCD$, не больше полупериметра $ABCD$.

2. На тренировку вышли 11 футболистов. Футболисты пронумерованы различными числами от 1 до 11. Тренер выдал каждому игроку список из 100 инструкций вида:

1) когда мяч попадет к тебе первый раз, дай пас игроку номер x_1;

2) когда мяч попадет к тебе второй раз, дай пас игроку номер x_2;

$\vdots$

100) когда мяч попадет к тебе в сотый раз, дай пас игроку номер x_{100}.

Разные игроки могли получить разные списки инструкций. В начале тренировки тренер отдает мяч игроку номер 1, и далее игроки перепасовываются согласно их инструкциям. Но один из игроков — хулиган, поэтому когда мяч попадает ему первый раз, он отдает пас кому захочет, а когда мяч попадает ему второй раз, он забирает мяч себе, и тренировка заканчивается. Если какому-то игроку мяч попадает в 101-й раз, он объявляет, что устал, и тренировка также заканчивается. Тренер не знает, кто из игроков хулиган. Может ли он составить списки инструкций так, чтобы каждый игрок (включая хулигана) хотя бы один раз за тренировку сделал пас независимо от того, кто является хулиганом?

3. Саша выкладывает в ряд 2022 монеты. Каждую монету она кладет орлом или решкой вверх по своему выбору. После этого Аня называет Саше последовательность из 1011 орлов и решек. Саша должна удалить из своего ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Сколько существует способов изначально положить монеты так, чтобы Саша смогла выполнить задание независимо от того, какую последовательность назовет Аня?

4. Вадим строит последовательность натуральных чисел. Он выбирает $a_1 > 100$, а $a_{k+1} = a_k^2 - 1$. Может ли так оказаться, что любое простое число будет делителем какого-то члена этой последовательности?

5. Каждая клетка доски 41×41 окрашена в синий или красный цвет, причём клеток каждого из цветов не менее 780. Докажите, что можно выбрать 40 клеток: 20 синих и 20 красных таким образом, что никакие две выбранные клетки не стоят в одной строке или в одном столбце.

6. Будем называть натуральное число *забавным*, если в его двоичной записи единиц больше, чем нулей. Конечно или бесконечно количество забавных квадратов?

7. Вдоль кольцевой железной дороги длиной 1080 км три частные компании хотят построить несколько станций. Первая компания хочет построить 3 станции, между которыми будет ровно по 360 км, вторая — 4 станции, между которыми ровно по 270 км, и третья — 5 станций, между которыми ровно по 216 км. Государство требует, чтобы длина наибольшего участка между двумя соседними станциями была как можно меньше. Найдите, какой будет длина этого участка при выполнении требования.

8. Даны целые числа a_0, b_0, c_0, a, b, c такие, что $\text{НОД}(a_0, b_0, c_0) = \text{НОД}(a, b, c) = 1$. Докажите, что существуют натуральное n и целые $a_1, a_2, \ldots, a_n = a$, $b_1, b_2, \ldots, b_n = b$, $c_1, c_2, \ldots, c_n = c$ такие, что $a_{i-1}a_i + b_{i-1}b_i + c_{i-1}c_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 08.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дан треугольник ABC, в котором $BC < AC$. Точка M — середина стороны AB. Точка K симметрична точке B относительно прямой CM. На отрезке CM нашлась такая точка E, что $BC = AE$. Докажите, что $CE = AK$.

2. На тренировку вышли 11 футболистов. Футболисты пронумерованы различными числами от 1 до 11. Тренер выдал каждому игроку список из 100 инструкций вида:

1) когда мяч попадет к тебе первый раз, дай пас игроку номер x_1;

2) когда мяч попадет к тебе второй раз, дай пас игроку номер x_2;

$\vdots$

100) когда мяч попадет к тебе в сотый раз, дай пас игроку номер x_{100}.

Разные игроки могли получить разные списки инструкций. В начале тренировки тренер отдает мяч игроку номер 1, и далее игроки перепасовываются согласно их инструкциям. Но один из игроков — хулиган, поэтому когда мяч попадает ему первый раз, он отдает пас кому захочет, а когда мяч попадает ему второй раз, он забирает мяч себе, и тренировка заканчивается. Если какому-то игроку мяч попадает в 101-й раз, он объявляет, что устал, и тренировка также заканчивается. Тренер не знает, кто из игроков хулиган. Может ли он составить списки инструкций так, чтобы каждый игрок (включая хулигана) хотя бы один раз за тренировку сделал пас независимо от того, кто является хулиганом?

3. Саша выкладывает в ряд 2022 монеты. Каждую монету она кладет орлом или решкой вверх по своему выбору. После этого Аня называет Саше последовательность из 1011 орлов и решек. Саша должна удалить из своего ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Сколько существует способов изначально положить монеты так, чтобы Саша смогла выполнить задание независимо от того, какую последовательность назовет Аня?

4. Вадим строит последовательность натуральных чисел. Он выбирает $a_1 > 100$, а $a_{k+1} = a_k^2 - 1$. Может ли так оказаться, что любое простое число будет делителем какого-то члена этой последовательности?

5. Числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — все натуральные делители числа 10^{2022}. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + 10^{1011}} + \frac{1}{d_2 + 10^{1011}} + \ldots + \frac{1}{d_n + 10^{1011}}.$$

6. Найдите все четверки целых чисел такие, что $a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$.

7. Вдоль кольцевой железной дороги длиной 1080 км три частные компании хотят построить несколько станций. Первая компания хочет построить 3 станции, между которыми будет ровно по 360 км, вторая — 4 станции, между которыми ровно по 270 км, и третья — 5 станций, между которыми ровно по 216 км. Государство требует, чтобы длина наибольшего участка между двумя соседними станциями была как можно меньше. Найдите, какой будет длина этого участка при выполнении требования.

8. Можно ли раскрасить все клетки доски 8×8 в красный и синий цвета так, чтобы красных и синих клеток было поровну, но нельзя было расставить 8 не бьющих друг друга ладей ни на какие 8 клеток, среди которых поровну красных и синих?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 08.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан треугольник ABC, в котором $BC < AC$. Точка M — середина стороны AB. Точка K симметрична точке B относительно прямой CM. На отрезке CM нашлась такая точка E, что $BC = AE$. Докажите, что $CE = AK$.

2. На тренировку вышли 11 футболистов. Футболисты пронумерованы различными числами от 1 до 11. Тренер выдал каждому игроку список из 100 инструкций вида:

1) когда мяч попадет к тебе первый раз, дай пас игроку номер x_1;

2) когда мяч попадет к тебе второй раз, дай пас игроку номер x_2;

⋮

100) когда мяч попадет к тебе в сотый раз, дай пас игроку номер x_{100}.

Разные игроки могли получить разные списки инструкций. В начале тренировки тренер отдает мяч игроку номер 1, и далее игроки перепасовываются согласно их инструкциям. Но один из игроков — хулиган, поэтому когда мяч попадает ему первый раз, он отдает пас кому захочет, а когда мяч попадает ему второй раз, он забирает мяч себе, и тренировка заканчивается. Если какому-то игроку мяч попадает в 101-й раз, он объявляет, что устал, и тренировка также заканчивается. Тренер не знает, кто из игроков хулиган. Может ли он составить списки инструкций так, чтобы каждый игрок (включая хулигана) хотя бы один раз за тренировку сделал пас независимо от того, кто является хулиганом?

3. Саша выкладывает в ряд 2022 монеты. Каждую монету она кладет орлом или решкой вверх по своему выбору. После этого Аня называет Саше последовательность из 1011 орлов и решек. Саша должна удалить из своего ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Сколько существует способов изначально положить монеты так, чтобы Саша смогла выполнить задание независимо от того, какую последовательность назовет Аня?

4. Действительные числа x, y, z таковы, что

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=z.$$

Докажите, что

$$\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\frac{z^2+4}{2z}.$$

5. Сумма цифр десятизначного натурального числа n равна 31, а цифры в его записи идут в порядке неубывания. Какую наибольшую сумму цифр может иметь число $9n$?

6. Найдите все четверки целых чисел такие, что $a^2 + 5b^2 - 2c^2 - 2cd - 3d^2 = 0$.

7. Вдоль кольцевой железной дороги длиной 1080 км три частные компании хотят построить несколько станций. Первая компания хочет построить 3 станции, между которыми будет ровно по 360 км, вторая — 4 станции, между которыми ровно по 270 км, и третья — 5 станций, между которыми ровно по 216 км. Государство требует, чтобы длина наибольшего участка между двумя соседними станциями была как можно меньше. Найдите, какой будет длина этого участка при выполнении требования.

8. Можно ли раскрасить все клетки доски 8×8 в красный и синий цвета так, чтобы красных и синих клеток было поровну, но нельзя было расставить 8 не бьющих друг друга ладей ни на какие 8 клеток, среди которых поровну красных и синих?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 08.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Действительные числа x, y, z таковы, что

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=z.$$

Докажите, что

$$\frac{x^4+y^4}{x^4-y^4}+\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}=\frac{z^2+4}{2z}.$$

2. В треугольнике ABC сторона BC больше стороны AB. Отрезки BH и BL — высота и биссектриса соответственно. Оказалось, что $2HL + LC = BC$. Во сколько раз угол A треугольника ABC больше угла C?

3. В результате кораблекрушения Алладин очутился на острове, где жил умный джинн. Он показал Алладину 25 закрытых одинаковых на вид сундуков, в каждом из которых лежало от 1 до 25 одинаковых золотых слитков, причем в разных сундуках — разное количество. Еще у джинна оказались весы, которые показывают, какой сундук тяжелее (но не показывают, на сколько), и тестер. Если в тестер положить два сундука, то он покажет модуль разности количества слитков в сундуках. Джинн разрешил пользоваться приборами не более 36 раз. Если Алладин скажет, сколько слитков в каком сундуке, то джинн его телепортирует домой. Сможет ли Алладин вернуться домой?

4. Сумма цифр десятизначного натурального числа n равна 31, а цифры в его записи идут в порядке неубывания. Какую наибольшую сумму цифр может иметь число $9n$?

5. Можно ли раскрасить все клетки доски 8×8 в красный и синий цвета так, чтобы красных и синих клеток было поровну, но нельзя было расставить 8 не бьющих друг друга ладей ни на какие 8 клеток, среди которых поровну красных и синих?

6. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ — перестановка чисел $(1, 2, \ldots, 8)$. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел a_1, $a_1 + a_2$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_8$?

7. В племени нимхов обитает 60 нимхов. Традиционно каждый нимх ходит либо с чёрными, либо с белыми волосами, и ежедневно видит 31 другого нимха. На следующий день нимх ходит с тем цветом волос, который преобладал на головах встреченных им в прошлый день нимхов. Так получилось, что количество нимхов с чёрными волосами не меняется уже сто лет. Сколько может быть нимхов с чёрными волосами?

8. Вильгельм в Лондоне построил мистическую башню высотой не более 100 метров. Ежедневно башня либо понижается на 50 сантиметров, либо поднимается на 2% от изначальной высоты. Но, как говорят жители Лондона, каждые 52 дня башня становится такой же высоты, какой её построил Вильгельм. Какой высоты Вильгельм мог построить башню, если её высота изначально измерялась целым количеством метров?