Математический бой №2. 08.05.2022
Старшая группа, высшая лига

1. Из точки A к окружности ω проведены касательные AB и AC. На отрезках AB и AC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle DEA$ — прямой. Пусть F — точка, симметричная точке E относительно прямой BC. Докажите, что центр окружности ω лежит на прямой DF.

2. Даны целые числа a_0, b_0, c_0, a, b, c такие, что $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c) = 1$. Докажите, что существуют натуральное n и целые a_1, a_2, $\ldots$, $a_n = a$, b_1, b_2, $\ldots$, $b_n = b$, c_1, c_2, $\ldots$, $c_n = c$ такие, что $a_{i-1}a_i + b_{i-1}b_i + c_{i-1}c_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. Числа d_1, d_2, $\ldots$, d_n — все натуральные делители числа 10^{2022}. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + 10^{1011}} + \frac{1}{d_2 + 10^{1011}} + \ldots + \frac{1}{d_n + 10^{1011}}.$$

4. 2022 шарика выложены в ряд. Их цвета чередуются: чёрный, белый, чёрный, белый, $\ldots$. Вася Чёрный и Петя Белый ходят по очереди, начинает Вася. Своим ходом игрок выбирает два шарика своего цвета, между которыми лежат только шарики чужого цвета (хотя бы один), и перекрашивает все эти промежуточные шарики в свой цвет. Если один из игроков не может сделать ход, игра прекращается. Вася хочет, чтобы в этот момент было как можно больше чёрных шариков. Какое наибольшее количество шариков он может себе обеспечить?

5. Каждая клетка доски 41×41 окрашена в синий или красный цвет, причём клеток каждого из цветов не менее 780. Докажите, что можно выбрать 40 клеток: 20 синих и 20 красных таким образом, что никакие две выбранные клетки не стоят в одной строке или в одном столбце.

6. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a}{2} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}$$

для всех положительных чисел a, b, c.

7. Дан остроугольный треугольник ABC, точка H — точка пересечения его высот, M — середина отрезка AH. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, проходящих через H и касающихся отрезка BC в точках B и C соответственно. Пусть X_1 — центр вневписанной окружности треугольника O_1HM, касающейся стороны O_1M. Аналогично определяется точка X_2. Докажите, что $O_1O_2 \parallel X_1X_2$.

8. Дано нечётное простое число p. Последовательность целых неотрицательных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_p, каждое из которых меньше p, назовём *прекрасной*, если
(1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ не делится на p;
(2) $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$ делится на p.
Найдите количество прекрасных последовательностей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 08.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На сторонах AD и DC дельтоида $ABCD$ ($AB = BC, AD = DC$) выбрали точки E и F соответственно так, что прямая EF параллельна стороне BC. Докажите, что точка, симметричная точке F относительно диагонали AC, лежит на прямой BE.

2. Даны целые числа a_0, b_0, c_0, a, b, c такие, что $(a_0, b_0, c_0) = (a, b, c) = 1$. Докажите, что существуют натуральное n и целые a_1, a_2, $\ldots$, $a_n = a$, b_1, b_2, $\ldots$, $b_n = b$, c_1, c_2, $\ldots$, $c_n = c$ такие, что $a_{i-1}a_i + b_{i-1}b_i + c_{i-1}c_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. Числа d_1, d_2, $\ldots$, d_n — все натуральные делители числа 10^{2022}. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + 10^{1011}} + \frac{1}{d_2 + 10^{1011}} + \ldots + \frac{1}{d_n + 10^{1011}}.$$

4. 2022 шарика выложены в ряд. Их цвета чередуются: чёрный, белый, чёрный, белый, $\ldots$. Вася Чёрный и Петя Белый ходят по очереди, начинает Вася. Своим ходом игрок выбирает два шарика своего цвета, между которыми лежат только шарики чужого цвета (хотя бы один), и перекрашивает все эти промежуточные шарики в свой цвет. Если один из игроков не может сделать ход, игра прекращается. Вася хочет, чтобы в этот момент было как можно больше чёрных шариков. Какое наибольшее количество шариков он может себе обеспечить?

5. Каждая клетка доски 41×41 окрашена в синий или красный цвет, причём клеток каждого из цветов не менее 780. Докажите, что можно выбрать 40 клеток: 20 синих и 20 красных таким образом, что никакие две выбранные клетки не стоят в одной строке или в одном столбце.

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ca} + \frac{1}{c + ab} \geqslant \frac{7}{1 + abc}.$$

7. Дан остроугольный треугольник ABC, точка H — точка пересечения его высот, M — середина отрезка AH. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, проходящих через H и касающихся отрезка BC в точках B и C соответственно. Пусть X_1 — центр вневписанной окружности треугольника O_1HM, касающейся стороны O_1M. Аналогично определяется точка X_2. Докажите, что $O_1O_2 \parallel X_1X_2$.

8. Дано нечётное простое число p. Последовательность целых неотрицательных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_p, каждое из которых меньше p, назовём *прекрасной*, если

(1) $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ не делится на p;

(2) $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$ делится на p.

Найдите количество прекрасных последовательностей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 08.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На сторонах AD и DC дельтоида $ABCD$ ($AB = BC, AD = DC$) выбрали точки E и F соответственно так, что прямая EF параллельна стороне BC. Докажите, что точка, симметричная точке F относительно диагонали AC, лежит на прямой BE.

2. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ — перестановка чисел $(1, 2, \ldots, 8)$. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел a_1, a_1+a_2, $\ldots$, $a_1+a_2+\ldots+a_8$? Напомним, что точным квадратом называется квадрат целого числа.

3. Числа d_1, d_2, $\ldots$, d_n — все натуральные делители числа 10^{2022}. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1 + 10^{1011}} + \frac{1}{d_2 + 10^{1011}} + \ldots + \frac{1}{d_n + 10^{1011}}.$$

4. 2022 шарика выложены в ряд. Их цвета чередуются: чёрный, белый, чёрный, белый, $\ldots$. Вася Чёрный и Петя Белый ходят по очереди, начинает Вася. Своим ходом игрок выбирает два шарика своего цвета, между которыми лежат только шарики чужого цвета (хотя бы один), и перекрашивает все эти промежуточные шарики в свой цвет. Если один из игроков не может сделать ход, игра прекращается. Вася хочет, чтобы в этот момент было как можно больше чёрных шариков. Какое наибольшее количество шариков он может себе обеспечить?

5. Каждая клетка доски 41×41 окрашена в синий или красный цвет, причём клеток каждого из цветов не менее 780. Докажите, что можно выбрать 40 клеток: 20 синих и 20 красных таким образом, что никакие две выбранные клетки не стоят в одной строке или в одном столбце.

6. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \geqslant \frac{7}{1+abc}.$$

7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. На стороне AD нашлась точка P такая, что $\angle APC = 90^\circ$, $\angle ABP = 90^\circ$ и $BP \parallel CD$. Пусть M — середина PD. Докажите, что $\angle ACM = 90^\circ$.

8. 12 пиратов разного возраста выстроились в ряд от самого старшего к самому младшему. Они поделили 2022 монеты так, что каждый пират, кроме самого старшего, получил на 1 монету меньше, чем стоящий перед ним. После этого время от времени один из пиратов, у которого хотя бы 11 монет, отдаёт каждому из остальных пиратов по одной монете. Какое наибольшее количество монет может оказаться у одного пирата в результате таких операций?

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 05.05 – 11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 08.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан треугольник ABC, в котором $BC < AC$. Точка M — середина стороны AB. Точка K симметрична точке B относительно прямой CM. На отрезке CM нашлась такая точка E, что $BC = AE$. Докажите, что $CE = AK$.

2. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ — перестановка чисел $(1, 2, \ldots, 8)$. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел a_1, a_1+a_2, $\ldots$, $a_1+a_2+\ldots+a_8$? Напомним, что точным квадратом называется квадрат целого числа.

3. На доске написано натуральное число. Когда на доске написано число x, его можно заменить одним из чисел $2x$ и $2x+1$. Сколько существует натуральных чисел, из которых такими операциями можно получить число 2022?

4. Саша выкладывает в ряд 20 монет. Каждую монету она кладет орлом или решкой вверх по своему выбору. После этого Аня называет Саше последовательность из 10 орлов и решек. Саша должна удалить из своего ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Докажите существует хотя бы 1000 способов изначально положить монеты так, чтобы Саша смогла выполнить задание независимо от того, какую последовательность назовет Аня.

5. Почтовое отделение на острове, населённом рыцарями (которые всегда говорят правду) и лжецами (которые всегда лгут), довольно загружено. К окошкам стоят четыре очереди: в одной 12 человек, в другой 11, в третьей 15 и в четвёртой 14. Каждый посетитель, кроме тех, которые стоят первыми в своих очередях, сказал: «Среди людей, стоящих в очереди до меня, не менее двух лжецов». Сколько рыцарей в почтовом отделении?

6. Пусть $a > 0$ и $|b-c| \geqslant a$. Докажите, что выполнено хотя бы одно из неравенств $b^2 \geqslant 4ac$ и $c^2 \geqslant 4ab$.

7. На основании AD равнобедренной трапеции $ABCD$ нашлась точка P такая, что $\angle APC = 90^\circ$, $\angle ABP = 90^\circ$ и $BP \parallel CD$. Пусть M — середина PD. Докажите, что $\angle ACM = 90^\circ$.

8. 12 пиратов разного возраста выстроились в ряд от самого старшего к самому младшему. Они поделили 2022 монеты так, что каждый пират, кроме самого старшего, получил на 1 монету меньше, чем стоящий перед ним. После этого время от времени один из пиратов, у которого хотя бы 11 монет, отдаёт каждому из остальных пиратов по одной монете. Какое наибольшее количество монет может оказаться у одного пирата в результате таких операций?