LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

Командная олимпиада. Лига Старт.

1. Продавец и покупатель торгуются за мраморный кубок. Изначально продавец оценил его в 6 000 рублей, а покупатель в 4 000 рублей. Затем продавец понизил свою цену на несколько процентов, а покупатель повысил свою на то же самое число процентов. Удивительно, но их цены после этого совпали и сделка успешно состоялась! Чему же равна итоговая цена?

2. На 99 карточках записаны числа от 1 до 99 по одному разу. Петя выложил карточки в ряд в таком порядке, чтобы они образовали наибольшее возможное 189- значное число. Какая карточка в этом ряду лежит на 15 слева месте?

3. У Димы есть 1001 монета. Сначала он выкладывает свои монеты в ряд, сам выбирая как положить очередную монету: орлом вверх или решкой. После того как все монеты выложены, Дима проделывает следующие операции. За одну операцию он выбирает две соседние монеты, среди которых ровно одна лежит орлом вверх, а затем переворачивает либо левую из этих двух монет и все монеты левее ее, либо правую из этих двух и все правее ее. Какое наибольшее число операций Дима может совершить?

4. На доске написано 100 натуральных чисел. Оказалось, что разность наибольшего и наименьшего из них ровно в 10 раз больше, чем наибольший общий делитель всех этих ста чисел. Докажите, что среди написанных чисел найдутся 10 одинаковых.

5. Петя и Вася играют в игру. Изначально в куче лежит неограниченный запас камней, а у игроков нет камней. Петя ходит первым. За один ход игрок может либо взять себе один камень из кучи, либо передать хотя бы один, но не более половины своих камней сопернику. Проигрывает тот игрок, у которого впервые окажется 20 или более камней. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу независимо от действий соперника, и если может, то кто именно?

6. Натуральное число n назовем *почти квадратом*, если существует такое натуральное k, что $n = k(k+1)$. Существуют ли 2022 различных почти квадрата, сумма которых тоже почти квадрат?

7. На доске 100×100 некоторые клетки окрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый. Известно, что среди любой 51 клетки, идущей подряд по диагонали, есть клетки обоих цветов. Квадратик 2×2 на доске называется *шахматным*, если любые две его соседние по стороне клетки окрашены в разные цвета. Какое наибольшее количество шахматных квадратиков может быть на этой доске?

8. Натуральное число a обладает таким свойством, что если к любому его натуральному делителю прибавить 2, то получится простое число. Какое наибольшее количество натуральных делителей может иметь число a?