LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 05.05 – 11.05.2022

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.05.2022
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. Паша вырезал из бумаги 5 одинаковых квадратов со стороной 1. Может ли он из них сложить многоугольник, периметр которого равен 19? Бумажные квадраты нельзя накладывать друг на друга даже частично.

2. Про четыре положительных числа a, b, c, d известно, что

$$\frac{a+b}{c+d} < \frac{a+d}{b+c} < \frac{c+d}{a+b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Упорядочьте числа a, b, c, d в порядке возрастания.

3. На доске написано 100 натуральных чисел. Оказалось, что разность наибольшего и наименьшего из них ровно в 10 раз больше, чем НОД всех этих ста чисел. Докажите, что среди написанных чисел найдутся 10 одинаковых.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 120°$. На стороне AB отмечена точка P такая, что $BP = 2AP$. На стороне CB отмечена точка T такая, что $\angle CPT = 30°$. Найдите отношение $\frac{CT}{TB}$.

5. Обозначим через $d(k)$ количество натуральных делителей числа k. Например, $d(6) = 4$, так как число 6 имеет 4 натуральных делителя: $1, 2, 3$ и 6. Докажите, что для любого натурального n выполнено

$$d(1) + d(3) + d(5) + \ldots + d(2n-1) \leqslant d(2) + d(4) + d(6) + \ldots + d(2n).$$

6. На доске 100×100 некоторые клетки окрашены в чёрный цвет, а остальные — в белый. Известно, что среди любых 51 клеток, идущих подряд по диагонали, есть клетки обоих цветов. Квадратик 2×2 на доске называется *шахматным*, если любые две его соседние по стороне клетки окрашены в разные цвета. Какое наибольшее количество шахматных квадратиков может быть на этой доске?

7. Саша и Серёжа написали на доске по положительному числу, меньшему 1. Каждую минуту каждый из мальчиков сравнивает свое число с $\frac{1}{2}$ и, если оно меньше $\frac{1}{2}$, прибавляет к нему $\frac{1}{2}$, а иначе — возводит его в квадрат. Докажите, что если вначале числа мальчиков были различны, то будет момент, когда они проделают разные действия.

8. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Вася выписал некоторые множества из четырёх чисел. Оказалось, что любые две четвёрки либо вообще не пересекаются, либо пересекаются ровно по 2 элементам. Какое наибольшее количество четвёрок мог выписать Вася?