LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Дан граф. Вова хочет записать в каждую вершину целое число так, чтобы для любой вершины число, записанное в ней, было равно количеству соседних с ней вершин, в которых записано четное число. Вова нашел уже 99 способов записать так числа. Обязательно ли он может найти ещё хотя бы один способ?

2. Докажите, что ни для какого натурального числа n числа $1, 2, 3, \ldots, 12n-2$ нельзя разбить на две группы по $6n-1$ чисел в каждой таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе.

3. Паша разбил квадрат 2022×2022 на доминошки. После чего Вадим пишет в каждую клетку число 1 или -1 так, чтобы для каждой Пашиной доминошки числа, стоящие в ее клетках, были равны. Вадим хочет, чтобы суммы во всех строчках были по модулю не более k. Для какого наименьшего натурального k он может это сделать вне зависимости от разбиения Паши?

4. Некоторые натуральные числа окрашены в синий цвет, причём среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть хотя бы одно синее. Докажите, что можно выбрать 100 синих чисел, не превосходящих 2^{110}, все суммы которых (по одному, по два, по три и т. д., по 100) различны.

5. Двое играют в игру. Перед ними колода из 119 одинаковых карт рубашкой вверх и еще одна карта «Взрывной Котенок» (рубашки у всех карт, включая Взрывного Котенка, одинаковые). Первый игрок кладёт Взрывного Котенка рубашкой вверх в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котенок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору рубашкой вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Натуральное число n не делится на m^2 ни для какого натурального $m > 1$. Известно, что n имеет ровно 2^{100} делителей. Какое наибольшее количество делителей n можно выбрать так, чтобы для любых двух выбранных делителей a и b число $a^2 + ab - n$ не являлось квадратом целого числа?

7. Можно ли по кругу расставить 17 натуральных чисел таким образом, чтобы сумма всех этих чисел не делилась на 17, а для любого числа сумма каких-то нескольких (возможно одного, но меньше 17) чисел, стоящих подряд по часовой стрелке, начиная с этого числа, делилась бы на 17?

8. Криворукий бармен разливает лимонад из двух графинов по 100 кружкам. Один графин у него в правой руке, другой в левой, и орудует он ими по очереди (начиная с правой). Правой он всегда наливает в какую-нибудь кружку 100 мл лимонада, а левой — 50 мл. На каждую из этих операций он всегда тратит 1 секунду. Изначально в каждой кружке либо 50 мл лимонада, либо пусто. Бармен хочет как можно скорее добиться того, чтобы во всех кружках стало поровну лимонада. Верно ли, что он может гарантированно уложиться в 230 секунд, независимо от изначального количества пустых кружек? (Запас лимонада в графинах и объем кружек не ограничены.)

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022

ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА

ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-8 МЕСТА

1. На окружности отмечены 2022 точки, одна из них красная, а остальные — зеленые. Коля перекрашивает точки, за один раз проделывая одну из двух операций:

1) Выбрать две точки одного цвета, между которыми нет других точек, и у обеих изменить цвет на противоположный.

2) Выбрать две точки разного цвета, между которыми ровно одна другая точка, и у обеих изменить цвет на противоположный.

Может ли Коля через несколько таких операций получить раскраску, в которой каждая точка имеет цвет, противоположный изначальному?

2. Докажите, что ни для какого натурального числа n числа $1, 2, 3, \ldots, 12n-2$ нельзя разбить на две группы по $6n-1$ чисел в каждой таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе.

3. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать на 5 прямоугольников с одинаковым отношением большей стороны к меньшей, так чтобы ни у каких двух из них не было равных по длине сторон?

4. Некоторые натуральные числа окрашены в синий цвет, причём среди любых 100 идущих подряд натуральных чисел есть хотя бы одно синее. Докажите, что можно выбрать 100 синих чисел, не превосходящих 2^{120}, все суммы которых (по одному, по два, по три и т. д., по 100) различны.

5. Двое играют в игру. Перед ними колода из 119 одинаковых карт рубашкой вверх и еще одна карта «Взрывной Котенок» (рубашки у всех карт, включая Взрывного Котенка, одинаковые). Первый игрок кладёт Взрывного Котенка рубашкой вверх в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котенок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору рубашкой вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

6. Натуральное число $n > 1$ не делится на m^2 ни для какого натурального $m > 1$. Верно ли, что для любого такого n всегда можно выбрать половину всех его делителей так, чтобы для любых двух выбранных делителей a и b число $a^2 + ab + n$ не являлось квадратом натурального числа?

7. Можно ли по кругу расставить 17 натуральных чисел таким образом, чтобы сумма всех этих чисел не делилась на 17, а для любого числа сумма каких-то нескольких (возможно одного, но меньше 17) чисел, стоящих подряд по часовой стрелке, начиная с этого числа, делилась бы на 17?

8. Криворукий бармен разливает лимонад из двух графинов по 100 кружкам. Один графин у него в правой руке, другой в левой, и орудует он ими по очереди (начиная с правой). Правой он всегда наливает в какую-нибудь кружку 100 мл лимонада, а левой — 50 мл. На каждую из этих операций он всегда тратит 1 секунду. Изначально в каждой кружке либо 50 мл лимонада, либо пусто. Бармен хочет как можно скорее добиться того, чтобы во всех кружках стало поровну лимонада. Верно ли, что он может гарантированно уложиться в 230 секунд, независимо от изначального количества пустых кружек? (Запас лимонада в графинах и объем кружек не ограничены.)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА
ТРЕТЬЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-2 МЕСТА

1. На окружности отмечены 2022 точки, одна из них красная, а остальные — зеленые. Коля перекрашивает точки, за один раз проделывая одну из двух операций:

1) Выбрать две точки одного цвета, между которыми нет других точек, и у обеих изменить цвет на противоположный.

2) Выбрать две точки разного цвета, между которыми ровно одна другая точка, и у обеих изменить цвет на противоположный.

Может ли Коля через несколько таких операций получить раскраску, в которой каждая точка имеет цвет, противоположный изначальному?

2. Докажите, что числа 1, 2, 3, ..., 22 нельзя разбить на две группы по 11 чисел в каждой таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе.

3. Можно ли какой-нибудь прямоугольник разрезать на 5 прямоугольников с одинаковым отношением большей стороны к меньшей, так чтобы ни у каких двух из них не было равных по длине сторон?

4. Может ли у каждого из 100 подряд идущих натуральных чисел сумма цифр быть не кратной 13?

5. Двое играют в игру. Перед ними колода из 99 одинаковых карт рубашкой вверх и еще одна карта «Взрывной Котенок» (рубашки у всех карт, включая Взрывного Котенка, одинаковые). Первый игрок кладёт Взрывного Котенка рубашкой вверх в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котенок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору рубашкой вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от ходов соперника?

6. Натуральное число $n > 1$ не делится на m^2 ни для какого натурального $m > 1$. Верно ли, что для любого такого n всегда можно выбрать половину всех его делителей так, чтобы для любых двух выбранных делителей a и b число $a^2 + ab + n$ не являлось квадратом натурального числа?

7. Можно ли по кругу расставить 143 натуральных числа таким образом, чтобы сумма всех этих чисел не делилась на 143, а для любого числа сумма каких-то нескольких (хотя бы одного, но меньше 143) чисел, стоящих подряд по часовой стрелке, начиная с этого числа, делилась бы на 143?

8. Криворукий бармен разливает лимонад из двух графинов по 100 кружкам. Один графин у него в правой руке, другой в левой, и орудует он ими по очереди (начиная с правой). Правой он всегда наливает в какую-нибудь кружку 100 мл лимонада, а левой — 50 мл. На каждую из этих операций он всегда тратит 1 секунду. Изначально в каждой кружке либо 50 мл лимонада, либо пусто. Бармен хочет как можно скорее добиться того, чтобы во всех кружках стало поровну лимонада. Верно ли, что он может гарантированно уложиться в 200 секунд, независимо от изначального количества пустых кружек? (Запас лимонада в графинах и объем кружек не ограничены.)

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Есть чашечные весы и четыре гирьки. На гирьках указаны массы 10 г, 11 г, 12 г и 13 г, причём известно, что 13-граммовая гирька перепутана с одной из остальных. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти 13-граммовую гирьку?

2. Докажите, что числа 1, 2, 3, …, 22 нельзя разбить на две группы по 11 чисел в каждой таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе.

3. Клетчатый прямоугольник R разрезан по линиям клеток на 5 прямоугольников так, что ни у каких двух нет одинаковых сторон. Может ли площадь R быть меньше 75? (Квадрат тоже считается прямоугольником.)

4. Может ли у каждого из 50 подряд идущих натуральных чисел сумма цифр быть не кратной 13?

5. Двое играют в игру. Перед ними колода из 99 одинаковых карт рубашкой вверх и еще одна карта «Взрывной Котенок» (рубашки у всех карт, включая Взрывного Котенка, одинаковые). Первый игрок кладёт Взрывного Котенка рубашкой вверх в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котенок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору рубашкой вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от ходов соперника?

6. В ряд выписано 8 троек. При помощи знаков $+$, $-$, $\times$, $:$ и скобок получите выражение, равное 2022. Например, $(3 \times 33 - 33 - 33) : 3 = 11$.

7. Несколько друзей играли в шашки. Имея всего один комплект шашек, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал ровно две, а проигравший — ровно четыре следующие партии. Сколько могло быть игроков, если сыграли они хотя бы 100 партий?

8. В школьной сети 10 компьютеров. Некоторые пары компьютеров связаны друг с другом проводом (не более, чем одним). Всего использовано 36 проводов. К компьютеру директора школы подходит большее, чем к любому другому, число проводов. Сколько проводов подходит к компьютеру директора?