LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 8.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Числа от 1 до 100 расставлены в ряд. Оказалось, что любое некрайнее число больше хотя бы одного из своих соседей. Петя для каждой пары соседних чисел в ряду вычел из большего числа меньшее и записал получившиеся 99 разностей себе в блокнот. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех записанных в блокнот разностей?

2. По окружности расставлено $n \geqslant 3$ корзин. В каждую корзину положили по одному камню. Оля несколько раз проделывает следующую операцию. Она находит такие три различные корзины A, B и C, что между A и B столько же корзин, сколько между A и C, причем в корзине A лежит хотя бы один камень. Затем она перекладывает все камни из B в C (или из C и B).

При каких n Оля может добиться того, чтобы через $n-2$ операции в какой-нибудь корзине оказался $n-1$ камень?

3. Дано натуральное число $n > 2$. Рассматриваются все возможные последовательности натуральных чисел, в которых первые два числа различны и не превосходят n, а каждое следующее равно полусумме двух предыдущих. Пусть самая длинная такая последовательность состоит из ℓ чисел. Докажите, что количество таких последовательностей из ℓ чисел не больше n.

4. Каждая клетка доски 41×41 окрашена в синий или красный цвет, причём клеток каждого из цветов не менее 780. Докажите, что можно выбрать 40 клеток: 20 синих и 20 красных таким образом, что никакие две выбранные клетки не стоят в одной строке или в одном столбце.

5. Вадим выписывает числа на доску. Изначально он пишет на доске какое-то число, большее 100. Далее Вадим берет число x, выписанное последним, и дописывает на доску число $x^2 - 1$. Может ли Вадим выбрать начальное число так, чтобы для любого простого числа рано или поздно на доске появилось число, которое делится на это простое?

6. На тренировку вышли 11 футболистов. Футболисты пронумерованы различными числами от 1 до 11. Тренер выдал каждому игроку список из 100 инструкций вида:

1) когда мяч попадет к тебе первый раз, дай пас игроку номер x_1;
2) когда мяч попадет к тебе второй раз, дай пас игроку номер x_2;

$\vdots$

100) когда мяч попадет к тебе в сотый раз, дай пас игроку номер x_{100}.

Числа $x_1, \ldots, x_{100}$ — от 1 до 11. Себе пас давать нельзя. Разные игроки могли получить разные списки инструкций. В начале тренировки тренер отдает мяч игроку номер 1 и далее игроки перепасовываются согласно их инструкциям. Но один из игроков — хулиган, поэтому когда мяч попадает ему первый раз, он отдает пас кому захочет, а когда мяч попадает ему второй раз, он забирает мяч себе, и тренировка заканчивается. Если какому-то игроку мяч попадает в 101-й раз, тренировка также заканчивается. Тренер не знает, кто из игроков хулиган. Может ли он составить списки инструкций так, чтобы каждый игрок (включая хулигана) хотя бы один раз за тренировку сделал пас, независимо от того, кто является хулиганом?

7. Сумма 20 натуральных чисел равна 2022. Может ли для некоторого натурального k сумма их k-ых степеней равняться $100\,000\,000$?

8. В ряд кладут 2022 монеты, каждая орлом или решкой вверх. Аня называет последовательность из 1011 символов, каждый из которых орёл или решка. Саша должна удалить из ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Сколько существует способов изначально положить монеты так, чтобы Саша могла удалить монеты независимо от того, какую последовательность назовет Аня?

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 8.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Числа от 1 до 100 расставлены в ряд. Оказалось, что любое некрайнее число больше хотя бы одного из своих соседей. Петя для каждой пары соседних чисел в ряду вычел из большего числа меньшее и записал получившиеся 99 разностей себе в блокнот. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех записанных в блокнот разностей?

2. По окружности расставлено 100 корзин по 100 камней в каждой. Оля несколько раз проделывает следующую операцию. Она находит такие три различные корзины A, B и C, что между A и B столько же корзин, сколько между A и C, причем в B должен быть хотя бы один камень, а в C хотя бы два. Затем Оля перекладывает один камень из B в A и два камня из C в A. Может ли Оля добиться того, чтобы через несколько операций в какой-нибудь корзине оказалось не менее 9999 камней?

3. Дано натуральное число $n > 2$. Рассматриваются все возможные последовательности натуральных чисел, в которых первые два числа различны и не превосходят n, а каждое следующее равно полусумме двух предыдущих. Пусть самая длинная такая последовательность состоит из ℓ чисел. Докажите, что количество таких последовательностей из ℓ чисел не больше n.

4. Все клетки доски 100×100 раскрасили в красный и синий цвета так, чтобы красных и синих клеток было поровну. Верно ли, что обязательно можно расставить 100 не бьющих друг друга ладей на клетки, среди которых поровну красных и синих?

5. Существуют ли такие натуральные числа a и d, что $\text{НОК}(a, a+d) = \text{НОК}(a, a+2d)$?

6. На тренировку вышли 11 футболистов. Футболисты пронумерованы различными числами от 1 до 11. Тренер выдал каждому игроку список из 100 инструкций вида:

1) когда мяч попадет к тебе первый раз, дай пас игроку номер x_1;
2) когда мяч попадет к тебе второй раз, дай пас игроку номер x_2;

$\vdots$

100) когда мяч попадет к тебе в сотый раз, дай пас игроку номер x_{100}.

Числа $x_1, \ldots, x_{100}$ — от 1 до 11. Себе пас давать нельзя. Разные игроки могли получить разные списки инструкций. В начале тренировки тренер отдает мяч игроку номер 1 и далее игроки перепасовываются согласно их инструкциям. Но один из игроков — хулиган, поэтому когда мяч попадает ему первый раз, он отдает пас кому захочет, а когда мяч попадает ему второй раз, он забирает мяч себе, и тренировка заканчивается. Если какому-то игроку мяч попадает в 101-й раз, тренировка также заканчивается. Тренер не знает, кто из игроков хулиган. Может ли он составить списки инструкций так, чтобы каждый игрок (включая хулигана) хотя бы один раз за тренировку сделал пас, независимо от того, кто является хулиганом?

7. Сумма 20 натуральных чисел равна 1 000 000. Может ли для некоторого натурального k сумма k-ых степеней этих чисел равняться 100 000 000 000 000?

8. В ряд кладут 2022 монеты, каждая орлом или решкой вверх. Аня называет последовательность из 1011 символов, каждый из которых орёл или решка. Саша должна удалить из ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Сколько существует способов изначально положить монеты так, чтобы Саша могла удалить монеты независимо от того, какую последовательность назовет Аня?

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 8.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Числа от 1 до 100 расставлены в ряд. Оказалось, что любое некрайнее число больше хотя бы одного из своих соседей. Петя для каждой пары соседних чисел в ряду вычел из большего числа меньшее и записал получившиеся 99 разностей себе в блокнот. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех записанных в блокнот разностей?

2. По окружности расставлено 2022 корзины. В каждую корзину положили по одному камню. Далее Оля несколько раз проделывает следующую операцию: выбирает корзину A, а также целое число $0 \leqslant k < 1010$, берёт все камни из двух таких корзин B и C, что между B и A, а также между A и C ровно k других корзин, и кладёт их в одну из B или C. Может ли Оля добиться того, чтобы через несколько операций в какой-нибудь корзине оказалось не менее 2021 камня?

3. В ребусе ПЁС – КОТ = ГАВ разные буквы означают разные цифры (нули в начале чисел не допускаются). Какое наименьшее возможное значение может принимать КОТ?

4. Все клетки доски 100×100 раскрасили в красный и синий цвета так, чтобы красных и синих клеток было поровну. Верно ли, что обязательно можно расставить 100 не бьющих друг друга ладей на клетки, среди которых поровну красных и синих?

5. Существуют ли такие взаимно простые натуральные числа a и d, что $\text{НОК}(a, a+d) = \text{НОК}(a, a+2d)$? Напомним, что два числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

6. На тренировку вышли 11 футболистов и встали в круг. Тренер выдал каждому игроку список из 3 последовательных инструкций. Инструкции бывают двух видов: «дай пас соседу слева» или «дай пас соседу справа». В i-ой инструкции написано, что делать игроку, когда мяч попадает к нему в i-ый раз (если к какому-то игроку мяч попадает в 4-й раз, тренировка заканчивается). Разные игроки могли получить разные списки инструкций.

В начале тренировки тренер отдает мяч одному из игроков (по своему выбору) и далее игроки перепасовываются согласно их инструкциям. Но один из игроков — хулиган, поэтому когда мяч попадает ему первый раз, он отдает пас кому захочет (кроме себя), а когда мяч попадает ему второй раз, он забирает мяч себе, и тренировка также заканчивается. Тренер не знает, кто из игроков хулиган. Может ли он составить списки инструкций и выбрать, кому в начале отдать мяч так, чтобы каждый игрок (включая хулигана) хотя бы один раз за тренировку сделал пас, независимо от того, кто является хулиганом?

7. Сумма 20 натуральных чисел равна 1 000 000. Может ли для некоторого натурального k сумма k-ых степеней этих чисел равняться 100 000 000 000 000?

8. В ряд кладут 20 монет, каждая орлом или решкой вверх. Аня называет последовательность из 10 символов, каждый из которых орёл или решка. Саша должна удалить из ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Докажите, что существует хотя бы 1000 способов изначально положить монеты так, чтобы Саша могла удалить монеты независимо от того, какую последовательность назовет Аня?

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 8.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Числа от 1 до 100 расставлены в ряд. Оказалось, что любое некрайнее число больше хотя бы одного из своих соседей. Петя для каждой пары соседних чисел в ряду вычел из большего числа меньшее и записал получившиеся 99 разностей себе в блокнот. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех записанных в блокнот разностей?

2. По окружности расставлено 2022 корзины. В каждую корзину положили по одному камню. Далее Оля несколько раз проделывает следующую операцию: выбирает корзину A, а также целое число $0 \leqslant k < 1010$, берёт все камни из двух таких корзин B и C, что между B и A, а также между A и C ровно k других корзин, и кладёт их в одну из B или C. Может ли Оля добиться того, чтобы через несколько операций в какой-нибудь корзине оказалось не менее 2021 камня?

3. В ребусе ПЁС – КОТ = ГАВ разные буквы означают разные цифры (нули в начале чисел не допускаются). Какое наименьшее возможное значение может принимать КОТ?

4. Все клетки доски 8×8 раскрасили в красный и синий цвета так, чтобы красных и синих клеток было поровну. Верно ли, что обязательно можно расставить 8 не бьющих друг друга ладей на клетки, среди которых поровну красных и синих?

5. Существуют ли такие взаимно простые натуральные числа a и d, что $\text{НОК}(a, a + d) = \text{НОК}(a, a + 2d)$? Напомним, что два числа называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

6. На пляж пришли 210 школьников. Может ли оказаться, что у одного из них один друг среди пришедших, у двоих — по 2, у троих — по 3, ..., у двадцати — по 20?

7. Сумма 20 натуральных чисел равна 2022. Может ли сумма их квадратов равняться 100 000 000?

8. В ряд кладут 20 монет, каждая орлом или решкой вверх. Аня называет последовательность из 10 символов, каждый из которых орёл или решка. Саша должна удалить из ряда половину монет так, чтобы оставшиеся монеты слева направо образовывали последовательность, названную Аней. Докажите, что возможно изначально положить монеты так, чтобы Саша могла удалить монеты независимо от того, какую последовательность назовет Аня.