LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 05.05–11.05.2022

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 06.05.2022
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Про четыре положительных числа a, b, c, d известно, что

$$\frac{a+b}{c+d} < \frac{a+d}{b+c} < \frac{c+d}{a+b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Упорядочьте числа a, b, c, d в порядке возрастания.

2. У короля имеются n камер, расположенных по кругу и пронумерованных числами от 1 до n по часовой стрелке, в каждой из которых изначально сидит по узнику. В один из дней король решил выпустить всех узников, кроме одного, по следующему алгоритму. Вначале он подходит к камере №1. Подходя к камере №k, в которой ещё сидит узник, король хихикает и делает следующее:

- если суммарно осталось не больше $k+1$ узника, то король выпускает всех, кроме узника в камере номер k, и процесс заканчивается;
- иначе он выпускает следующих по часовой стрелке k узников, и подходит к камере следующего узника (т.е. $k+1$-го от узника в камере №k).

При каком наименьшем $n > 2022$ останется только узник в камере №1?

3. На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ за точку A отметили точку E. Оказалось, что $ED = DB = BA$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ABD лежит на прямой EC.

4. Обозначим через $d(k)$ количество натуральных делителей натурального числа k. Докажите, что для каждого натурального n,

$$d(1) + d(3) + d(5) + \ldots + d(2n-1) < d(2) + d(4) + d(6) + \ldots + d(2n).$$

5. Страна состоит из 999 областей — равных равносторонних треугольников таких, что любые две граничащие имеют общую сторону или вершину. Между любыми двумя соседними по стороне областями есть закрытый проезд. Если открыть все проезды, то из каждой области можно будет добраться до любой другой. Президент может выбрать два закрытых проезда из одной области и издать указ, открывающий эти проезды, причем в обе стороны. Докажите, что в любой такой стране президент может добиться того, чтобы из любой области можно было проехать в любую другую.

6. Саша и Серёжа написали на доске по положительному числу, меньшему 1. Каждую минуту каждый из мальчиков сравнивает свое число с $\frac{1}{2}$ и, если оно меньше $\frac{1}{2}$, прибавляет к нему $\frac{1}{2}$, а иначе — возводит его в квадрат. Докажите, что, если в начале числа мальчиков были различны, то будет момент, когда они проделают разные действия.

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90°$) на биссектрисе CL как на диаметре построена окружность ω. Она пересекает отрезок BC в точке E. Отрезок AE пересекает ω в точке F. Докажите, что треугольник FBC равнобедренный.

8. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в 1201 цвет так, что в каждом клетчатом прямоугольнике периметра 100 цвета все клеток различны. Докажите, что в каждом прямоугольнике 1×1201 цвета всех клеток различны.