LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 05.05 – 11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Точка P не лежит ни на одной из диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, но лежит внутри него. Докажите, что $S_{PAB} \cdot S_{PCD} \neq S_{PBC} \cdot S_{PAD}$.

2. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c существует натуральное число k такое, что числа $a^k + bc$, $b^k + ca$, $c^k + ab$ имеют общий делитель, больший 1.

3. В графе с $2n$ вершинами нет петель и кратных рёбер. При этом степень каждой вершины не более 19. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы не более чем у $3n$ рёбер совпали цвета концов.

4. Натуральные числа x, y и z таковы, что

$$\frac{x+y+z}{3} = \sqrt{\frac{x^2y + y^2z + z^2x}{x+y+z}}.$$

Докажите, что $x = y = z$.

5. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$. Пусть H — такая точка на отрезке AD, что $BH \perp AD$, I — такая точка на отрезке AC, что $AI = AB$, O — середина отрезка AD. Прямая, проходящая через I и перпендикулярная OI, пересекает отрезки BH и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что $IF = 2IE$.

6. Алиса и Вера играют в игру. У них есть 2022 бутылочки с молоком объемом 200 мл каждая. Изначально в каждой бутылочке по 30 мл молока. Первой ходит Алиса. За каждый ход игрок может совершить одно из двух действий

- выбрать бутылочку, в которой не менее 100 мл молока и выпить половину молока из неё.
- выбрать две бутылочки, в каждой из которых менее 100 мл молока, перелить молоко из одной во вторую, и выбросить пустую бутылочку.

Проигрывает та, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

7. Наибольшее из положительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n равно M, а наименьшее равно m. Известно, что для попарно различных i, j, k если $a_i \leqslant a_j \leqslant a_k$, то $a_i a_k \leqslant a_j^2$. Докажите, что $a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant m^2 M^{n-2}$.

8. Даны целые неотрицательные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n. На окружности отмечены точки P_1, P_2, $\ldots$, P_n (именно в таком порядке), делящие её на n равных дуг. На плоскости проведены m окружностей так, что для каждого i количество окружностей, внутри которых лежит точка P_i равно a_i. При каком наименьшем m это возможно? (Ответ необходимо выразить формулой от a_1, a_2, $\ldots$, a_n, формула может использовать функции max и min.)

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 05.05 – 11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Точка P не лежит ни на одной из диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, но лежит внутри него. Докажите, что $S_{PAB} \cdot S_{PCD} \neq S_{PBC} \cdot S_{PAD}$.

2. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a+b+\text{НОД}(a,b) = b+c+\text{НОД}(b,c) = a+c+\text{НОД}(a,c)$. Верно ли, что какие-то два числа равны?

3. В графе с $2n$ вершинами нет петель и кратных рёбер. При этом степень каждой вершины не более 19. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы не более чем у $3n$ рёбер совпали цвета концов.

4. Найдите все такие натуральные k, для которых существует бесконечно много натуральных n, удовлетворяющих двум условиям:

- число n представимо в виде произведения двух натуральных чисел, отличающихся ровно на k;
- число $n+k$ является квадратом натурального числа.

5. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Пусть H — такая точка на отрезке AD, что $BH \perp AD$, I — такая точка на отрезке AC, что $AI = AB$, O — середина отрезка AD. Прямая, проходящая через I и перпендикулярная OI, пересекает отрезки BH и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что $IF = 2IE$.

6. Алиса и Вера играют в игру. У них есть 2022 бутылочки с молоком объемом 200 мл каждая. Изначально в каждой бутылочке по 30 мл молока. Первой ходит Алиса. За каждый ход игрок может совершить одно из двух действий

- выбрать бутылочку, в которой не менее 100 мл молока и выпить половину молока из неё.
- выбрать две бутылочки, в каждой из которых менее 100 мл молока, перелить молоко из одной во вторую, и выбросить пустую бутылочку.

Проигрывает та, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

7. Наибольшее из положительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n равно M, а наименьшее равно m. Известно, что для попарно различных i, j, k если $a_i \leqslant a_j \leqslant a_k$, то $a_i a_k \leqslant a_j^2$. Докажите, что $a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant m^2 M^{n-2}$.

8. На окружности отмечены точки P_1, P_2, $\ldots$, P_{2022} (именно в таком порядке), делящие её на 2022 равных дуг. На плоскости проведены m окружностей так, что для каждого i количество окружностей, внутри которых лежит точка P_i равно числу, на 1 большему, чем остаток i при делении на 3. При каком наименьшем m это возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. На прямой, проходящей через точку C перпендикулярно BC отмечена точка D такая, что $CD = AC$ и точка D находится в разных полуплоскостях с точкой A относительно прямой BC. Отрезки BC и AD пересекаются в точке E. Оказалось, что $AC = 3EC$. Найдите $\frac{AB}{EC}$.

2. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a+b+\text{НОД}(a,b) = b+c+\text{НОД}(b,c) = a + c + \text{НОД}(a,c)$. Верно ли, что какие-то два числа равны?

3. В графе с $2n$ вершинами нет петель и кратных рёбер. При этом степень каждой вершины не более 19. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 5 цветов так, чтобы не более чем у $3n$ рёбер совпали цвета концов.

4. Карл написал на доске систему из трёх уравнений, каждое из которых имеет вид $a + b = c$ или $a \cdot b = c$, а потом даже решил её в натуральных числах! Об этом прознала Клара и захотела узнать решение системы Карла. Карл не хочет, чтобы Клара узнала его решение, поэтому он успел стереть с доски все знаки арифметических операций (сложения или умножения). На доске осталась система

$$\begin{cases} x \quad z = 15 \\ x \quad y = 12 \\ x \quad x = 36 \end{cases}.$$

Значения каких переменных в решении Карла сможет найти Клара?

5. В треугольнике ABC угол $\angle B = 45^\circ$. На сторонах AB и BC вне треугольника ABC построены квадраты $ABDE$ и $CBFG$. Точка M — середина отрезка EG. Докажите, что $MA = MC$.

6. Аня и Беня по очереди отмечают по одной точке на прямой (все точки должны быть различны), Аня ходит первой. После каждого хода получившееся множество точек должно быть симметрично относительно некоторой точки прямой (не обязательно одной из отмеченных). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

7. Наибольшее из положительных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n равно M, а наименьшее равно m. Известно, что для попарно различных i, j, k если $a_i \leqslant a_j \leqslant a_k$, то $a_i a_k \leqslant a_j^2$. Докажите, что $a_1 a_2 \ldots a_n \geqslant m^2 M^{n-2}$.

8. На доске выписано 100 чисел, необязательно различных. Для каждого из $2^{100}-1$ способов выбрать набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Найдите наибольшее возможное число единиц, которое может быть записано в тетради Димы. Например, если бы на доске были написаны числа -1, 2, 2, то в тетради были бы записаны 3 один раз, 4 один раз, 2 два раза, -1 один раз, 1 два раза. Итого, 2 единицы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 07.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. На прямой, проходящей через точку C перпендикулярно BC отмечена точка D такая, что $CD = AC$ и точка D находится в разных полуплоскостях с точкой A относительно прямой BC. Отрезки BC и AD пересекаются в точке E. Оказалось, что $AC = 3EC$. Найдите $\frac{AB}{EC}$.

2. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a+b+\text{НОД}(a,b) = b+c+\text{НОД}(b,c) = a+c+\text{НОД}(a,c)$. Верно ли, что какие-то два числа равны?

3. У шеф-повара есть круглая пицца, разрезанная на 200 кусков при помощи 100 прямолинейных разрезов, проходящих через центр пиццы. Также у повара есть n различных соусов. Каждый соус повар положил на некоторые 100 подряд идущих кусков пиццы. После этого повар подсчитал, сколько соусов попало на каждый кусок. Пусть m и M наименьшее и наибольшее из полученных чисел. Чему может быть равно $m + M$ (ответ может зависеть от n)?

4. Карл написал на доске систему из трёх уравнений, каждое из которых имеет вид $a + b = c$ или $a \cdot b = c$, а потом даже решил её в натуральных числах! Об этом прознала Клара и захотела узнать решение системы Карла. Карл не хочет, чтобы Клара узнала его решение, поэтому он успел стереть с доски все знаки арифметических операций (сложения или умножения). На доске осталась система

$$\begin{cases} x \quad z = 15 \\ x \quad y = 12 \\ x \quad x = 36 \end{cases}.$$

Значения каких переменных в решении Карла сможет найти Клара?

5. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка P так, что $\angle PAC = 45°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AP пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что $PQ \perp BC$.

6. Аня и Беня по очереди отмечают по одной точке на прямой (все точки должны быть различны), Аня ходит первой. После каждого хода получившееся множество точек должно быть симметрично относительно некоторой точки прямой (не обязательно одной из отмеченных). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

7. Дано 100-значное число n. Известно, что в числах n и $2n$ цифры идут слева направо в порядке нестрогого возрастания. Докажите, что какая-то цифра встречается в n хотя бы 25 раз.

8. На доске выписано 100 чисел, необязательно различных. Для каждого из $2^{100}-1$ способов выбрать набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Найдите наибольшее возможное число единиц, которое может быть записано в тетради Димы. Например, если бы на доске были написаны числа -1, 2, 2, то в тетради были бы записаны 3 один раз, 4 один раз, 2 два раза, -1 один раз, 1 два раза. Итого, 2 единицы.