LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 7.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a+b+\text{НОД}(a,b) = b+c+\text{НОД}(b,c) = a+c+\text{НОД}(a,c)$. Верно ли, что какие-то два числа равны?

2. Все натуральные числа от 1 до 100 разбили на две группы по 50 чисел. Может ли разность произведений чисел в этих группах быть натуральной степенью двойки?

3. Из доски 4×100 (с 4 строками и 100 столбцами) вырезали три клетки. Разрешается несколько её клеток закрасить синим цветом. Назовем *рекой* последовательность синих клеток, в которой каждая следующая клетка граничит по стороне с предыдущей. Докажите, что есть не менее 8^{99} раскрасок, в которых найдется река, текущая от первого столбца до последнего включительно.

4. На доске выписано 100 чисел, необязательно различных. Для каждого из $2^{100}-1$ способов выбрать набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Какое наибольшее количество записанных сумм могут оказаться равны 1?

Например, если бы на доске были написаны числа -1, 2, 2, то в тетради были бы записаны: один раз число 4, один раз 3, два раза 2, два раза 1, один раз -1. Итого, две единицы.

5. Алиса и Вера играют в игру. У них есть 2022 бутылочки с молоком объемом 200 мл каждая. Изначально в каждой бутылочке по 30 мл молока. Игроки делают ходы по очереди, начинает Алиса. В свой ход каждый игрок совершает одно из двух действий:

(1) Выбрать бутылочку, в которой не менее 100 мл молока, и выпить половину молока из неё.

(2) Выбрать две бутылочки, в каждой из которых менее 100 мл молока, перелить молоко из одной во вторую, и выбросить пустую бутылочку.

Проигрывает та, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

6. В чемпионате по водному поло участвовало $n \geq 2$ команд, любые две команды сыграли друг с другом ровно один раз. За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков и в итоговой таблице были упорядочены в порядке убывания очков. Однако через несколько дней организаторы обнаружили, что произошла техническая ошибка, и все результаты были учтены неверно. Все матчи, которые ранее считались результативными, на самом деле закончились в ничью, а все матчи, которые раньше считались ничейными, на самом деле закончились победой одной из команд. После того как результаты были пересчитаны, организаторы вывесили новую упорядоченную таблицу результатов, в которой все команды опять набрали разное число очков.

При каких n могло так оказаться, что в правильной таблице команды упорядочились в обратном порядке (т.е. команда, которая раньше была первой, стала последней, второй — предпоследней и т.д.)?

7. У шеф-повара есть круглая пицца, разрезанная на 200 кусков при помощи 100 прямолинейных разрезов, проходящих через центр пиццы. Также у повара есть n различных соусов. Каждый соус повар положил на некоторые 100 подряд идущих кусков пиццы. После этого повар подсчитал, сколько соусов попало на каждый кусок. Чему может быть равна сумма наибольшего и наименьшего из подсчитанных поваром чисел? (Ответ может зависеть от n.)

8. Дано 100-значное число n. Известно, что в числах n и $2n$ цифры идут слева направо в порядке нестрогого возрастания. Докажите, что какая-то цифра встречается в n хотя бы 25 раз.

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 7.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a + \text{НОД}(a, b) = b + \text{НОД}(b, c) = c + \text{НОД}(a, c)$. Верно ли, что все числа равны?

2. Все натуральные числа от 1 до 100 разбили на две группы по 50 чисел. Может ли разность произведений чисел в этих группах быть натуральной степенью двойки?

3. Из доски 4×100 (с 4 строками и 100 столбцами) вырезали три клетки. Разрешается несколько её клеток закрасить синим цветом. Назовем *рекой* последовательность синих клеток, в которой каждая следующая клетка граничит по стороне с предыдущей. Докажите, что есть не менее 8^{99} раскрасок, в которых найдется река, текущая от первого столбца до последнего включительно.

4. На доске выписано 100 чисел, необязательно различных. Для каждого из $2^{100} - 1$ способов выбрать набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Какое наибольшее количество записанных сумм могут оказаться равны 1?

Например, если бы на доске были написаны числа -1, 2, 2, то в тетради были бы записаны: один раз число 4, один раз 3, два раза 2, два раза 1, один раз -1. Итого, две единицы.

5. Аня и Беня по очереди отмечают по одной точке на прямой (все точки должны быть различны), Аня ходит первой. После каждого хода получившееся множество точек должно быть симметрично относительно некоторой точки прямой (не обязательно одной из отмеченных). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

6. В чемпионате по водному поло участвовало 100 команд, любые две команды сыграли друг с другом ровно один раз. За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков и в итоговой таблице были упорядочены в порядке убывания очков. Однако через несколько дней организаторы обнаружили, что произошла техническая ошибка, и все результаты были учтены неверно. Все матчи, которые ранее считались результативными, на самом деле закончились в ничью. И все матчи, которые раньше считались ничейными, на самом деле закончились победой одной из команд. После того как результаты были пересчитаны, организаторы вывесили новую упорядоченную таблицу результатов, в которой все команды опять набрали разное число очков.

Могло ли так оказаться, что в правильной таблице команды упорядочились в обратном порядке (т.е. команда, которая раньше была первой, стала последней, второй — предпоследней и т.д.)?

7. У шеф-повара есть круглая пицца, разрезанная на 200 кусков при помощи 100 прямолинейных разрезов, проходящих через центр пиццы. Также у повара есть n различных соусов. Каждый соус повар положил на некоторые 100 подряд идущих кусков пиццы. После этого повар подсчитал, сколько соусов попало на каждый кусок. Чему может быть равна сумма наибольшего и наименьшего из подсчитанных поваром чисел? (Ответ может зависеть от n.)

8. Дано 100-значное число n. Известно, что в числах n и $2n$ цифры идут слева направо в порядке нестрогого возрастания. Докажите, что какая-то цифра встречается в n хотя бы 25 раз.

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 7.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a+\text{НОД}(a,b) = b+\text{НОД}(b,c) = c+ \text{НОД}(a,c)$. Верно ли, что все числа равны?

2. Какое наименьшее натуральное значение может принимать дробь

$$\frac{\text{К} \times \text{О} \times \text{Т} - \text{П} \times \text{Ё} \times \text{С}}{\text{М} \times \text{Я} \times \text{У}},$$

если разными буквами обозначены разные ненулевые цифры, а крестиками — умножение?

3. Из доски 4×100 (с 4 строками и 100 столбцами) вырезали три клетки. Разрешается несколько её клеток закрасить синим цветом. Назовем *рекой* последовательность синих клеток, в которой каждая следующая клетка граничит по стороне с предыдущей. Докажите, что есть не менее 8^{99} раскрасок, в которых найдется река, текущая от первого столбца до последнего включительно.

4. На доску выписали три не обязательно различных числа a, b и c. Какое наибольшее количество чисел среди a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$ и $a+b+c$ могут оказаться равны 1?

5. Аня и Беня по очереди отмечают по одной точке на прямой (все точки должны быть различны), Аня ходит первой. После каждого хода получившееся множество точек должно быть симметрично относительно некоторой точки прямой (не обязательно одной из отмеченных). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

6. В чемпионате по водному поло участвовало 7 команд, любые две команды сыграли друг с другом ровно один раз. За победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков и в итоговой таблице были упорядочены в порядке убывания очков. Однако через несколько дней организаторы обнаружили, что произошла техническая ошибка, и все результаты были учтены неверно. Все матчи, которые ранее считались результативными, на самом деле закончились в ничью. И все матчи, которые раньше считались ничейными, на самом деле закончились победой одной из команд. После того как результаты были пересчитаны, организаторы вывесили новую упорядоченную таблицу результатов, в которой все команды опять набрали разное число очков.

Могло так оказаться, что в правильной таблице команды упорядочились в обратном порядке (т.е. команда, которая раньше была первой, стала последней, второй — предпоследней и т.д.)?

7. У шеф-повара есть круглая пицца, разрезанная на 200 кусков при помощи 100 прямолинейных разрезов, проходящих через центр пиццы. Также у повара есть n различных соусов. Каждый соус повар положил на некоторые 100 подряд идущих кусков пиццы. После этого повар подсчитал, сколько соусов попало на каждый кусок. Чему может быть равна сумма наибольшего и наименьшего из подсчитанных поваром чисел? (Ответ может зависеть от n.)

8. Дано 100-значное число n. Известно, что в числах n и $2n$ цифры идут слева направо в порядке нестрогого убывания. Докажите, что какая-то цифра встречается в n хотя бы 20 раз.

LVIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 05.05-11.05.2022

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 7.05.2022
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Про натуральные числа a, b, c известно, что $a+\text{НОД}(a,b) = b+\text{НОД}(b,c) = c+ + \text{НОД}(a,c)$. Верно ли, что все числа равны?

2. Какое наименьшее натуральное значение может принимать дробь

$$\frac{\text{К}\times\text{О}\times\text{Т}-\text{П}\times\text{Ё}\times\text{С}}{\text{М}\times\text{Я}\times\text{У}},$$

если разными буквами обозначены разные ненулевые цифры, а крестиками — умножение?

3. Дана доска 4×100 (с 4 строками и 100 столбцами). Разрешается несколько её клеток закрасить синим, а остальные — красным цветом. Назовем *рекой* последовательность одноцветных клеток, в которой каждая следующая клетка граничит по стороне с предыдущей. Докажите, что есть не менее 2^{200} раскрасок, в которых найдется и синяя, и красная река, текущая от первого столбца до последнего, включительно.

4. На доске выписано 20 чисел, необязательно различных. Для каждого из $2^{20}-1$ способов выбрать набор из нескольких выписанных чисел Дима записал в тетрадку сумму чисел в выбранном наборе. Могло ли оказаться, что число 1 выписано в тетрадке более 500 000 раз?
Например, если бы на доске были написаны числа -1, 2, 2, то в тетради были бы записаны: один раз число 4, один раз 3, два раза 2, два раза 1, один раз -1. Итого, две единицы.

5. Аня и Беня по очереди отмечают по одной точке на прямой (все точки должны быть различны), Аня ходит первой. После каждого хода получившееся множество точек должно быть симметрично относительно некоторой точки прямой (не обязательно одной из отмеченных). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Есть ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

6. Представьте число 2022 в виде разности двух палиндромов, т.е. чисел, одинаково читающихся слева направо и справа налево.

7. У шеф-повара есть круглая пицца, разрезанная на 200 кусков при помощи 100 прямолинейных разрезов, проходящих через центр пиццы. Также у повара есть n различных соусов. Каждый соус повар положил на некоторые 100 подряд идущих кусков пиццы. После этого повар подсчитал, сколько соусов попало на каждый кусок. Чему может быть равна сумма наибольшего и наименьшего из подсчитанных поваром чисел? (Ответ может зависеть от n.)

8. Малыш разрезал торт на несколько одинаковых кусков. Карлсон начал есть торт и остановился, когда не съеденными остались только три куска. В этот момент Малыш подсчитал, что Карлсон съел три четверти торта и ещё три четверти куска. На сколько кусков торт был порезан изначально?