МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) отмечена точка D такая, что $AD < DB$. Точки P и Q на сторонах BC и CA соответственно таковы, что $\angle DPB = \angle DQA = 90^\circ$. На отрезке CQ отмечена точка E такая, что $PE = EQ$. Описанные окружности треугольников ABC и CPQ вторично пересекаются в точке F. Оказалось, что точки P, E и F лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle ACB = 90^\circ$.

2. Даны положительные числа a, b, c и d. Докажите, что число d — целое тогда и только тогда, когда можно найти положительные числа e и f так, чтобы при всех вещественных x выполнялось равенство

$$\left[\frac{\left[\frac{x+a}{b}\right]+c}{d}\right] = \left[\frac{x+e}{f}\right].$$

3. Биссектриса CL прямоугольного треугольника ABC (с прямым углом B) пересекает высоту BH в точке D. Описанная окружность треугольника BLH пересекает катет BC в точке E. Докажите, что $DE \parallel AC$.

4. Вова выбрал бесконечное множество S целых чисел. Он называет целое число *чистым*, если оно представляется в виде суммы нескольких различных чисел из S единственным образом, и *грязным* в противном случае (то есть если представляется несколькими разными способами или вообще не представляется). Докажите, что грязных чисел либо не существует, либо бесконечно много.

5. У Васи есть клетчатая доска $n \times n$ ($n \geqslant 3$ — нечётное число) и n^2 фишек с числами $1, 2, \ldots, n^2$. Вася по очереди выставляет фишки на свободные клетки доски. Каждый раз, когда в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел на выставленных к настоящему моменту фишках становится кратной n, Вася получает очко (например, если Вася выставляет число n на пустую доску, он получает 2 очка). Какое наибольшее количество очков может заработать Вася?

6. Для последовательности вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такой, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, определим $b_i = a_1 + \cdots + a_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Оказалось, что $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geqslant 0$ при всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$. Докажите, что $\max\limits_{1\leqslant \ell \leqslant n} |a_\ell| \geqslant \max\limits_{1\leqslant m\leqslant n} |b_m|$.

7. На плоскости проведены $n > 10$ прямых общего положения. Докажите, что среди них есть прямая, с каждой стороны от которой не меньше $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{10}\right]$ точек пересечения проведенных прямых (точки пересечения, расположенные на этой прямой, не учитываются).

8. Дан граф. Вова хочет записать в каждую вершину целое число так, чтобы для любой вершины число, записанное в ней, было равно количеству соседних с ней вершин, в которых записано четное число. Вова нашел уже 99 способов записать так числа. Обязательно ли он может найти ещё хотя бы один?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТА

1. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) отмечена точка D такая, что $AD < DB$. Точки P и Q на сторонах BC и CA соответственно таковы, что $\angle DPB = \angle DQA = 90^\circ$. На отрезке CQ отмечена точка E такая, что $PE = EQ$. Описанные окружности треугольников ABC и CPQ вторично пересекаются в точке F. Оказалось, что точки P, E и F лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle ACB = 90^\circ$.

2. Даны положительные числа a, b, c и d. Докажите, что число d — целое тогда и только тогда, когда можно найти положительные числа e и f так, чтобы при всех вещественных x выполнялось равенство

$$\left[\frac{\left[\frac{x+a}{b}\right]+c}{d}\right] = \left[\frac{x+e}{f}\right].$$

3. Биссектриса CL прямоугольного треугольника ABC (с прямым углом B) пересекает высоту BH в точке D. Описанная окружность треугольника BLH пересекает катет BC в точке E. Докажите, что $DE \parallel AC$.

4. Для каких натуральных n числа $1, 2, 3, \ldots, 2n$ можно разбить на две группы по n чисел таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе?

5. У Васи есть клетчатая доска $n \times n$ ($n \geqslant 3$ — нечётное число) и n^2 фишек с числами $1, 2, \ldots, n^2$. Вася по очереди выставляет фишки на свободные клетки доски. Каждый раз, когда в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел на выставленных к настоящему моменту фишках становится кратной n, Вася получает очко (например, если Вася выставляет число n на пустую доску, он получает 2 очка). Какое наибольшее количество очков может заработать Вася?

6. Для последовательности вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такой, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, определим $b_i = a_1 + \cdots + a_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Оказалось, что $b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geqslant 0$ при всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$. Докажите, что $\max\limits_{1\leqslant \ell\leqslant n} |a_\ell| \geqslant \max\limits_{1\leqslant m\leqslant n} |b_m|$.

7. Игорь отметил 768 точек на окружности. Оказалось, что длины дуг между всеми парами соседних точек равны $1, 2, 3, \ldots, 768$ в некотором порядке. Какое наибольшее количество пар диаметрально противоположных точек могло получиться у Игоря?

8. Дан граф. Вова хочет записать в каждую вершину целое число так, чтобы для любой вершины число, записанное в ней, было равно количеству соседних с ней вершин, в которых записано четное число. Вова нашел уже 99 способов записать так числа. Обязательно ли он может найти ещё хотя бы один?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) отмечена точка D такая, что $AD < DB$. Точки P и Q на сторонах BC и CA соответственно таковы, что $\angle DPB = \angle DQA = 90°$. На отрезке CQ отмечена точка E такая, что $PE = EQ$. Описанные окружности треугольников ABC и CPQ вторично пересекаются в точке F. Оказалось, что точки P, E и F лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

2. Даны положительные числа a, b, c и d. Докажите, что число d — целое тогда и только тогда, когда можно найти положительные числа e и f так, чтобы при всех вещественных x выполнялось равенство

$$\left[\frac{\left[\frac{x+a}{b}\right]+c}{d}\right] = \left[\frac{x+e}{f}\right].$$

3. Биссектриса CL прямоугольного треугольника ABC (с прямым углом B) пересекает высоту BH в точке D. Описанная окружность треугольника BLH пересекает катет BC в точке E. Докажите, что $DE \parallel AC$.

4. Для каких натуральных n числа 1, 2, 3, $\ldots$, $2n$ можно разбить на две группы по n чисел таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе?

5. У Васи есть клетчатая доска $n \times n$ ($n \geqslant 3$ — нечётное число) и n^2 фишек с числами 1, 2, $\ldots$, n^2. Вася по очереди выставляет фишки на свободные клетки доски. Каждый раз, когда в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел на выставленных к настоящему моменту фишках становится кратной n, Вася получает очко (например, если Вася выставляет число n на пустую доску, он получает 2 очка). Какое наибольшее количество очков может заработать Вася?

6. Положительные числа a и b (не обязательно целые) таковы, что $a^2 + b^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\dfrac{a^2(a+b^3)}{b-b^3} + \dfrac{b^2(b+a^3)}{a-a^3}$?

7. Перед двумя игроками колода из 99 одинаковых карт рубашкой вверх и одна карта «Взрывной Котенок» (рубашки у всех карт, включая Взрывного Котенка, одинаковые). Первый игрок кладёт Взрывного Котенка рубашкой вверх в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котенок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору рубашкой вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от ходов соперника?

8. На окружности отмечены 2022 точки, одна из них красная, а остальные — синие. Коля перекрашивает точки, за один раз проделывая одну из двух операций:
(1) Выбрать две соседние точки одного цвета и у обеих изменить цвет.
(2) Выбрать две точки разного цвета, между которыми ровно одна другая точка, и изменить цвет у обеих.
Может ли Коля через несколько таких операций получить раскраску, в которой каждая точка имеет цвет, противоположный изначальному?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. На отрезке AC отмечена точка M такая, что $AB = AM$. На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка N такая, что $\angle AMN = 40^\circ$. Найдите величину угла $\angle BNC$

2. Найдите все натуральные числа n и простые числа p, для которых выполняется равенство $(n-p)^3 = n+p$.

3. Биссектриса CL прямоугольного треугольника ABC (с прямым углом B) пересекает высоту BH в точке D. Описанная окружность треугольника BLH пересекает катет BC в точке E. Докажите, что $DE \parallel AC$.

4. Докажите, что ни для какого натурального числа n числа $1, 2, 3, \ldots, 12n-2$ нельзя разбить на две группы по $6n-1$ чисел в каждой таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе.

5. У Васи есть клетчатая доска $n \times n$ ($n \geqslant 3$ — нечётное число) и n^2 фишек с числами $1, 2, \ldots, n^2$. Вася по очереди выставляет фишки на свободные клетки доски. Каждый раз, когда в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел на выставленных к настоящему моменту фишках становится кратной n, Вася получает очко (например, если Вася выставляет число n на пустую доску, он получает 2 очка). Какое наибольшее количество очков может заработать Вася?

6. Положительные числа a и b (не обязательно целые) таковы, что $a^2 + b^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\dfrac{a^2(a+b^3)}{b-b^3} + \dfrac{b^2(b+a^3)}{a-a^3}$?

7. Перед двумя игроками колода из 99 одинаковых карт рубашкой вверх и одна карта «Взрывной Котенок» (рубашки у всех карт, включая Взрывного Котенка, одинаковые). Первый игрок кладёт Взрывного Котенка рубашкой вверх в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котенок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору рубашкой вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от ходов соперника?

8. На окружности отмечены 2022 точки, одна из них красная, а остальные — синие. Коля перекрашивает точки, за один раз проделывая одну из двух операций:
(1) Выбрать две соседние точки одного цвета и у обеих изменить цвет.
(2) Выбрать две точки разного цвета, между которыми ровно одна другая точка, и изменить цвет у обеих.
Может ли Коля через несколько таких операций получить раскраску, в которой каждая точка имеет цвет, противоположный изначальному?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 11.05.2022
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. На отрезке AC отмечена точка M такая, что $AB = AM$. На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка N такая, что $\angle AMN = 40^\circ$. Найдите величину угла $\angle BNC$

2. Найдите все натуральные числа n и простые числа p, для которых выполняется равенство $(n-p)^3 = n+p$.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны, а диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $CD = AO$, $BC = OD$ и CA — биссектриса угла BCD. Найдите величину угла $\angle ABC$.

4. Докажите, что ни для какого натурального числа n числа $1, 2, 3, \ldots, 12n-2$ нельзя разбить на две группы по $6n-1$ чисел в каждой таким образом, чтобы сумма чисел в первой группе делилась на сумму чисел во второй группе.

5. В школьной сети 10 компьютеров. Некоторые пары компьютеров связаны друг с другом проводом (не более, чем одним). Всего использовано 36 проводов. К компьютеру директора школы подходит большее, чем к любому другому, число проводов. Сколько проводов подходит к компьютеру директора?

6. Положительные числа a и b (не обязательно целые) таковы, что $a^2 + b^2 = 1$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\dfrac{a^2(a+b^3)}{b-b^3} + \dfrac{b^2(b+a^3)}{a-a^3}$?

7. Перед двумя игроками колода из 99 одинаковых карт рубашкой вверх и одна карта «Взрывной Котенок» (рубашки у всех карт, включая Взрывного Котенка, одинаковые). Первый игрок кладёт Взрывного Котенка рубашкой вверх в любое место колоды по своему выбору, а затем они по очереди делают ходы (начинает первый). Каждым ходом можно взять 7 или 13 верхних карт, и если среди них есть Взрывной Котенок — нужно положить его в любое место оставшейся колоды по своему выбору рубашкой вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков сможет обеспечить себе победу вне зависимости от ходов соперника?

8. На окружности отмечены 2022 точки, одна из них красная, а остальные — синие. Коля перекрашивает точки, за один раз проделывая одну из двух операций:
(1) Выбрать две соседние точки одного цвета и у обеих изменить цвет.
(2) Выбрать две точки разного цвета, между которыми ровно одна другая точка, и изменить цвет у обеих.
Может ли Коля через несколько таких операций получить раскраску, в которой каждая точка имеет цвет, противоположный изначальному?