МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В школе запустили 20 кружков. За один вопрос можно про любые два кружка узнать, какие ученики ходят в оба эти кружка, а какие ходят ровно в один из них. За какое наименьшее количество вопросов можно узнать списки посещающих каждый кружок?

2. Определим последовательность вещественных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2021}, a_{2022}$ следующим образом:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2022} \text{ при } n = 0, 1, \ldots, 2021.$$

Докажите, что $a_{2022} < \frac{1}{2} < a_{2021}$.

3. Дима поставил в k клеток доски 10×10 единицы, а в остальные клетки — нули. За один ход можно прибавить 1 ко всем клеткам некоторого "креста" (крест — это объединение строчки и столбца, содержащее 19 клеток). При каком наименьшем натуральном k Дима может действовать так, чтобы все числа стали равны?

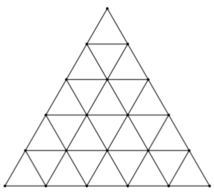
4. На окружности отмечено n точек и проведены $n-1$ хорда так, что (i) хорды не пересекаются по внутренним точкам и (ii) любые две отмеченные точки соединены ломаной. В каждой точке стоит по фишке. За один ход можно поменять местами две фишки, соединённые хордой, и стереть эту хорду. Докажите, что через несколько таких ходов можно добиться того, чтобы каждая фишка сдвинулась к ближайшей по часовой стрелке отмеченной точке. Стирать все рёбра не обязательно.

5. В равностороннем треугольнике ABC, в котором $AB = 2$, на сторонах AC и BC выбраны точки X и Y. Когда треугольник согнули по линии XY, вершина C попала на сторону AB. Докажите, что $XY \geqslant 1$.

6. 1000-значное число N состоит из ненулевых цифр. Если цифры N разбить на пары рядом стоящих, то в любой паре цифра, стоящая левее, втрое меньше цифры, стоящей правее. Докажите, что N не может быть степенью простого числа.

7. Найдите все простые числа p и q, для которых каждое из чисел $p + 4q$ и $q + 4p$ — точный квадрат.

8. Равносторонний треугольник разбили тремя наборами параллельных прямых на n^2 одинаковых равносторонних треугольников (n — натуральное число, большее 1; на картинке показано разбиение для $n = 5$). После этого каждый маленький треугольник покрасили в один из трёх цветов. Раскраска называется *хорошенькой*, если соседи каждой клетки или все покрашены в один цвет, или все в разные цвета. Сколько всего существует хорошеньких раскрасок этого треугольника?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На окружности отмечено n точек и проведены $n-1$ хорда так, что (i) хорды не пересекаются по внутренним точкам и (ii) любые две отмеченные точки соединены ломаной. В каждой точке стоит по фишке. За один ход можно поменять местами две фишки, соединённые хордой, и стереть эту хорду. Докажите, что через несколько таких ходов можно добиться того, чтобы каждая фишка сдвинулась к ближайшей по часовой стрелке отмеченной точке. Стирать все рёбра не обязательно.

2. Найдите сумму
$$C^2_{C^2_3} + C^2_{C^2_4} + C^2_{C^2_5} + \ldots + C^2_{C^2_{40}}.$$
Ответ не должен содержать многоточие и знаки суммирования. Напомним, что C_n^k — это количество способов выбрать k элементов из n-элементного множества.

3. В равностороннем треугольнике ABC, в котором $AB = 2$, на сторонах AC и BC выбраны точки X и Y. Когда треугольник согнули по линии XY, вершина C попала на сторону AB. Докажите, что $XY \geqslant 1$.

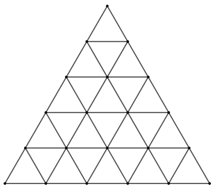
4. 1000-значное число N состоит из ненулевых цифр. Если цифры N разбить на пары рядом стоящих, то в любой паре цифра, стоящая левее, втрое меньше цифры, стоящей правее. Докажите, что N не может быть степенью простого числа.

5. Круг разбит на $n \geqslant 3$ секторов. Петя и Вася играют в следующую игру. У Васи есть неограниченный запас фишек трёх цветов. Каждый ход Вася даёт Пете одну из фишек, причём Вася обязан менять цвет фишки каждый ход. Петя должен поставить фишку в один из свободных секторов. При этом, если в соседних секторах есть фишка такого же цвета, то она сразу же снимается (если таких две, то снимается одна из них по выбору Пети). Петя хочет заполнить все n секторов за конечное число ходов. При каких n Вася сможет ему помешать?

6. Различные вещественные числа x, y и z таковы, что $x^2 = zx + y$ и $y^2 = zy + x$. Докажите, что $x^2 + y^2 + 1 = z^2$.

7. Натуральное число n можно за одну операцию либо заменить на $5n+1$, либо на $5n-1$, либо поделить на 2 или на 3 (если делится). Верно ли, что из любого натурального числа можно за несколько операций получить 1?

8. Равносторонний треугольник разбили тремя наборами параллельных прямых на n^2 одинаковых равносторонних треугольников (n — натуральное число, большее 1; на картинке показано разбиение для $n = 5$). После этого каждый маленький треугольник покрасили в один из трёх цветов. Раскраска называется *хорошенькой*, если соседи каждой клетки или все покрашены в один цвет, или все в разные цвета. Сколько всего существует хорошеньких раскрасок этого треугольника?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. У Оли было 8 карточек с буквами У, Р, Т, У, Р, Н, И, Р, и она начала ставить эти карточки на свободные места в примере $\star\star\star + \star\star = \star\star\star$. Она хотела получить ребус и решить его (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, числа не могут начинаться с 0). После того, как Оля поставила всего три карточки, учитель сказал: “Как ни ставь другие карточки, итоговый ребус не будет иметь решения!” Какие карточки и на какие места поставила Оля? Приведите один из возможных примеров и объясните, почему учитель оказался прав.

2. В равностороннем треугольнике ABC, в котором $AB = 2$, на сторонах AC и BC выбраны точки X и Y. Когда треугольник согнули по линии XY, вершина C попала на сторону AB. Докажите, что $XY \geqslant 1$.

3. 1000-значное число N состоит из ненулевых цифр. Если цифры N разбить на пары рядом стоящих, то в любой паре цифра, стоящая левее, втрое меньше цифры, стоящей правее. Докажите, что N не может быть степенью простого числа.

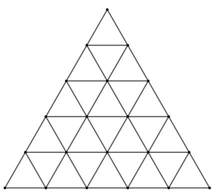
4. Круг разбит на 6 секторов. Петя и Вася играют в следующую игру. У Васи есть неограниченный запас фишек трёх цветов. Каждый ход Вася даёт Пете одну из фишек, причём Вася обязан менять цвет фишки каждый ход. Петя должен поставить фишку в один из свободных секторов. При этом, если в соседних секторах есть фишка такого же цвета, то она снимается (если таких две, то снимается одна из них по выбору Пети). Сможет ли Петя за конечное число ходов заполнить все 6 секторов, как бы ни играл Вася?

5. Различные вещественные числа x, y и z таковы, что $x^2 = zx + y$ и $y^2 = zy + x$. Докажите, что $x^2 + y^2 + 1 = z^2$.

6. В компании мальчиков и девочек больше четырех детей. У каждого ребёнка в этой компании есть единственный лучший друг и единственная лучшая подруга (причем если А — лучший друг или подруга Б, то обратное может быть неверно). Если у двух девочек разные лучшие друзья-мальчики, то они точно лучшие подруги друг для друга. Докажите, что некоторого ребёнка хотя бы трое считают лучшим другом или подругой.

7. На плоскости нарисована окружность и отмечен её центр. Как построить с помощью циркуля и линейки правильный двенадцатиугольник, все вершины которого находятся на окружности, если циркулем разрешено воспользоваться только один раз? Многоугольник называется правильным, если все его внутренние углы равны между собой и все стороны равны между собой.

8. Равносторонний треугольник разбили тремя наборами параллельных прямых на n^2 одинаковых равносторонних треугольников (n — натуральное число, большее 1; на картинке показано разбиение для $n = 5$). После этого каждый маленький треугольник покрасили в один из трёх цветов. Раскраска называется *хорошенькой*, если соседи каждой клетки или все покрашены в один цвет, или все в разные цвета. Сколько всего существует хорошеньких раскрасок этого треугольника?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 10.05.2022, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. У Оли было 8 карточек с буквами У, Р, Т, У, Р, Н, И, Р, и она начала ставить эти карточки на свободные места в примере $\star\star\star + \star\star = \star\star\star$. Она хотела получить ребус и решить его (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, числа не могут начинаться с 0). После того, как Оля поставила всего три карточки, учитель сказал: "Как ни ставь другие карточки, итоговый ребус не будет иметь решения!" Какие карточки и на какие места поставила Оля? Приведите один из возможных примеров и объясните, почему учитель оказался прав.

2. Круг разбит на 5 секторов. Петя и Вася играют в следующую игру. У Васи есть неограниченный запас фишек трёх цветов. Каждый ход Вася даёт Пете одну из фишек, причём Вася обязан менять цвет фишки каждый ход. Петя должен поставить фишку в один из свободных секторов. При этом, если в соседних секторах есть фишка такого же цвета, то она снимается (если таких две, то снимается одна из них по выбору Пети). Сможет ли Петя за конечное число ходов заполнить все 5 секторов вне зависимости от действий Васи?

3. Различные вещественные числа x, y и z таковы, что $x^2 = zx + y$ и $y^2 = zy + x$. Докажите, что $x^2 + y^2 + 1 = z^2$.

4. В компании мальчиков и девочек больше четырех детей. У каждого ребёнка в этой компании есть единственный лучший друг и единственная лучшая подруга (причем если А — лучший друг или подруга Б, то обратное может быть неверно). Если у двух девочек разные лучшие друзья-мальчики, то они точно лучшие подруги друг для друга. Докажите, что некоторого ребёнка хотя бы трое считают лучшим другом или подругой.

5. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$ и $3AB = AC$. Докажите, что $\angle B < 105^\circ$.

6. Различные ненулевые цифры a, b, c таковы, что наибольший общий делитель чисел $10a + b$, $10b + c$, $10c + a$ равен двузначному числу d. Чему может равняться d?

7. На доске написаны натуральные числа от 1 до 2022. Лёня стёр 1010 чисел. Найдите все такие k, что среди оставшихся чисел обязательно найдутся два числа с суммой k.

8. Клетчатый квадрат $n\times n$ разбит на n^2 квадратиков 1×1. Каждый из $2n(n+1)$ отрезков длины 1, являющийся стороной некоторого квадратика 1×1, покрасили в красный или синий цвет. Известно, что количество красных отрезков не превосходит n^2. При каких n можно гарантированно утверждать, что найдется квадратик 1×1, у которого хотя бы три стороны покрашены в синий?