МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На отрезке $[0;1]$ выбраны вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$). Докажите, что можно выбрать числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, каждое из которых равно 0 или 1, так, чтобы для всех натуральных k и ℓ, $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$, выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{i=k}^{\ell}(a_i - b_i)\right| \leqslant \frac{n}{n+1}.$$

2. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка O такая, что $MO = MB = MC$. Перпендикуляры из точки M на BO и CO пересекают отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Из точек P и Q опустили перпендикуляры PK и QN на отрезок BC. На отрезках AP и AQ вне треугольника ABC построены прямоугольники $APXY$ и $AQZT$. Прямые KT и AB пересекаются в точке D, прямые NY и AC пересекаются в точке E. Докажите, что прямые DE, XZ и PQ пересекаются в одной точке или параллельны.

3. На плоскости отмечено n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим через c_k, где $k = 3, 4, \ldots, n$, количество выпуклых k-угольников с вершинами в данных n точках, внутри которых нет других точек. Докажите, что число

$$-c_3 + c_4 - c_4 + \ldots + (-1)^n c_n$$

зависит только от n, но не от того, как расположены точки.

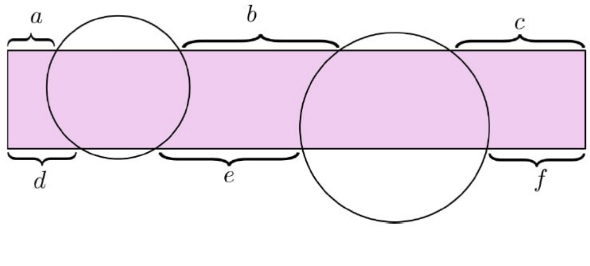
4. Множество $S = \{4, 8, 9, 16, \ldots\}$ состоит из всех чисел вида n^m, где $n, m \in \mathbb{N}$ и $n, m \geqslant 2$. Обозначим через $f(t)$ количество различных представлений числа t в виде суммы различных чисел из S. Например, $f(5) = 0$ и $f(17) = 1$ ($17 = 8+9$). Найдите наибольшее натуральное t такое, что $f(t) = 3$.

5. Докажите, что существуют различные натуральные a и b, большие $1\,000\,000$, для которых $a^b + 1$ делится на $b^a + 1$.

6. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ (не обязательно различные), одновременно удовлетворяющие следующим условиям:
(i) число $a_1 a_2 \ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 100$;
(ii) для каждого $k = 1, 2, \ldots, 100$ найдутся индексы i, j такие, что $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ и число $a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_{100}$ не делится на $a_i + a_j$?

7. Каждые два из n городов соединены одной ориентированной синей или красной дорогой. Докажите, что найдётся такой город, из которого в любой другой город можно проехать по одноцветному пути.

8. Две непересекающиеся окружности пересекают прямоугольник, как показано на картинке (на нижней и верхней сторонах прямоугольника по 4 точки пересечения с окружностями). Докажите, что $a - b + c - d + e - f = 0$.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n^3+1 не имеет делителей вида k^3+1, отличных от n^3+1.

2. На медиане AM треугольника ABC отмечена точка O такая, что $MO = MB = MC$. Перпендикуляры из точки M на BO и CO пересекают отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Из точек P и Q опустили перпендикуляры PK и QN на отрезок BC. На отрезках AP и AQ вне треугольника ABC построены прямоугольники $APXY$ и $AQZT$. Прямые KT и AB пересекаются в точке D, прямые NY и AC пересекаются в точке E. Докажите, что прямые DE, XZ и PQ пересекаются в одной точке или параллельны.

3. На плоскости отмечено n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим через c_k, где $k = 3, 4, \ldots, n$, количество выпуклых k-угольников с вершинами в данных n точках, внутри которых нет других точек. Докажите, что число

$$-c_3 + c_4 - c_4 + \ldots + (-1)^n c_n$$

зависит только от n, но не от того, как расположены точки.

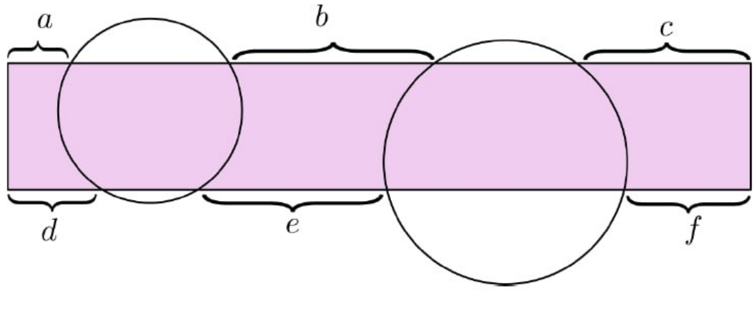
4. Множество $S = \{4, 8, 9, 16, \ldots\}$ состоит из всех чисел вида n^m, где $n, m \in \mathbb{N}$ и $n, m \geqslant 2$. Обозначим через $f(t)$ количество различных представлений числа t в виде суммы различных чисел из S. Например, $f(5) = 0$ и $f(17) = 1$ ($17 = 8+9$). Найдите наибольшее натуральное t такое, что $f(t) = 3$.

5. Докажите, что существуют различные натуральные a и b, большие $1\,000\,000$, для которых $a^b + 1$ делится на $b^a + 1$.

6. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ (не обязательно различные), одновременно удовлетворяющие следующим условиям:
(i) число $a_1 a_2 \ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 100$;
(ii) для каждого $k = 1, 2, \ldots, 100$ найдутся индексы i, j такие, что $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ и число $a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_{k+1} \ldots a_{100}$ не делится на $a_i + a_j$?

7. Каждые два из n городов соединены одной ориентированной синей или красной дорогой. Докажите, что найдётся такой город, из которого в любой другой город можно проехать по одноцветному пути.

8. Две непересекающиеся окружности пересекают прямоугольник, как показано на картинке (на нижней и верхней сторонах прямоугольника по 4 точки пересечения с окружностями). Докажите, что $a - b + c - d + e - f = 0$.



LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 03.05–09.05.2023

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n^3+1 не имеет делителей вида k^3+1, отличных от n^3+1.

2. BC — меньшая сторона трапеции $ABCD$. На боковых сторонах AB и CD во внешнюю сторону построены квадраты $ABPQ$ и $CDEF$. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку BC делит отрезок PF пополам.

3. Пусть

$$P(n,k)=(kn+1)\cdot(kn+2)\cdot(kn+3)\cdot\ldots\cdot(kn+k-1)\cdot(kn+k).$$

Докажите, что для любых натуральных n, k, ℓ имеет место неравенство

$$P(n,k+\ell)\cdot k^k\cdot\ell^\ell<P(n,k)\cdot P(n,\ell)\cdot(k+\ell)^{k+\ell}.$$

4. Множество $S=\{4,8,9,16,\ldots\}$ состоит из всех чисел вида n^m, где $n,m\in\mathbb{N}$ и $n,m\geqslant 2$. Докажите, что любое число, большее 100, можно представить в виде суммы различных чисел из S.

5. Зайнаб изготовила ожерелье из 1734 бусин, на них в некотором порядке написаны числа 290, 291, …, 2023. Докажите, что в этом ожерелье найдутся три идущие подряд бусины, числа на которых являются длинами сторон треугольника.

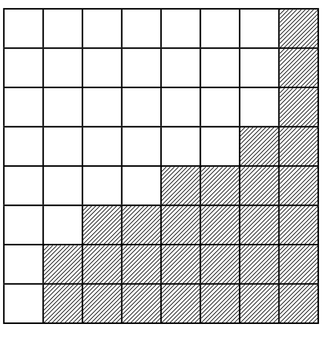
6. Точки D и E расположены на сторонах AB и BC соответственно треугольника ABC таким образом, что $2\frac{CE}{BC}=\frac{AD}{AB}$. Точка P лежит на стороне AC. Докажите, что DE перпендикулярно PE тогда и только тогда, когда PE — биссектриса угла DPC.

7. Каждые два из n городов соединены одной ориентированной синей или красной дорогой. Докажите, что найдется такой город, из которого в любой другой город можно проехать по одноцветному пути.

8. В квадратной таблице $n\times n$ закрашено несколько клеток так, что клетки справа и снизу от каждой закрашенной — тоже закрашены. Пусть в столбцах таблицы закрашено $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ клеток (при перечислении слава направо), а в строках — $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ клеток (сверху вниз). Докажите, что наборы чисел

$$a_1,\quad a_2-1,\quad a_3-2,\quad \ldots, a_n-n+1 \qquad \text{и} \qquad b_1,\quad b_2-1,\quad b_3-2,\quad \ldots,\quad b_n-n+1$$

совпадают (т.е. отличаются только порядком чисел). Например, рассмотрим таблицу



a_k :	0	2	3	3	4	4	5	8
a_k-k+1 :	0	1	1	0	0	-1	-1	1
b_k :	1	1	1	2	4	6	7	7
b_k-k+1 :	1	0	-1	-1	0	1	1	0

LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 03.05–09.05.2023

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n^3+1 не имеет делителей вида k^3+1, отличных от n^3+1.

2. BC — меньшая сторона трапеции $ABCD$. На боковых сторонах AB и CD во внешнюю сторону построены квадраты $ABPQ$ и $CDEF$. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку BC делит отрезок PF пополам.

3. Солдаты стоят в виде прямоугольника $n \times (n+2)$ с n столбцами, расстояние между соседними солдатами один шаг. По команде сержанта каждый солдат сделал один шаг вверх, или влево, или вправо, или вниз. В результате солдаты оказались выстроенными в прямоугольник $(n+2) \times n$ с $n+2$ столбцами. Докажите, что n чётно.

4. Положительные вещественные числа a, b, c, d удовлетворяют неравенствам $a+b+c+d \leqslant \frac{5}{2}$ и $ab+bc+cd+da \geqslant 1$. Докажите, что $|a-b+c-d| \leqslant \frac{3}{2}$.

5. Зайнаб изготовила ожерелье из 1734 бусин, на них в некотором порядке написаны числа 290, 291, …, 2023. Докажите, что в этом ожерелье найдутся три идущие подряд бусины, числа на которых являются длинами сторон треугольника.

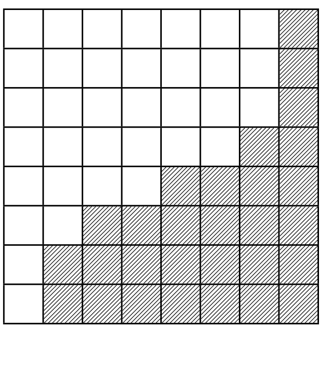
6. Точки D и E расположены на сторонах AB и BC соответственно треугольника ABC таким образом, что $2\frac{CE}{BC} = \frac{AD}{AB}$. Точка P лежит на стороне AC. Докажите, что DE перпендикулярно PE тогда и только тогда, когда PE — биссектриса угла DPC.

7. Имеется 100 городов, между которыми 2400 дорог, каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Эти дороги обслуживаются 80 дорожными компаниями, по 30 дорог у каждой компании. Если компания обслуживает какую-то дорогу, соединяющую два города, то в каждом из этих городов она должна иметь ремонтный пункт. Докажите, что в каком-то городе хотя бы у 8 компаний есть ремонтные пункты.

8. В квадратной таблице $n \times n$ закрашено несколько клеток так, что клетки справа и снизу от каждой закрашенной — тоже закрашены. Пусть в столбцах таблицы закрашено $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ клеток (при перечислении слава направо), а в строках — $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ клеток (сверху вниз). Докажите, что наборы чисел

$$a_1, \quad a_2-1, \quad a_3-2, \quad \ldots, a_n-n+1 \qquad \text{и} \qquad b_1, \quad b_2-1, \quad b_3-2, \quad \ldots, \quad b_n-n+1$$

совпадают (т.е. отличаются только порядком чисел). Например, рассмотрим таблицу



a_k :	0	2	3	3	4	4	5	8
a_k-k+1 :	0	1	1	0	0	-1	-1	1
b_k :	1	1	1	2	4	6	7	7
b_k-k+1 :	1	0	-1	-1	0	1	1	0