LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 03.05-09.05.2023

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. В ящике были красные, синие, жёлтые и зелёные шарики. Незнайка неправильно посчитал, что в ящике 10% шаров красные, 20% синие, 50% жёлтые и 70% зелёные. Дело в том, что он считал проценты не от общего количества всех шаров, а от общего количества шаров каких-то трех цветов (оставшийся, четвертый цвет назовем *забытым*). А какие бы результаты Незнайка получил, если бы считал проценты от количества шаров забытого цвета?

2. Фишка двигается по клеткам доски 100×100, начиная с левой нижней угловой клетки и каждым ходом перемещаясь в соседнюю по стороне клетку. Будем говорить, что *произошел поворот*, если из двух последовательных ходов фишки один вертикальный, а другой горизонтальный (в любом порядке). Фишка посетила хотя бы по одному разу каждую клетку диагонали, ведущей из левого нижнего угла доски в правый верхний (исходная клетка считается уже посещенной). Какое наименьшее количество поворотов могло при этом произойти?

3. Каждое из десяти положительных чисел равно квадрату суммы оставшихся девяти. Обязательно ли все эти десять чисел равны?

4. Выпуклый многоугольник разделен на два многоугольника одной из своих диагоналей. У получившихся двух многоугольников суммарно на 290 диагоналей меньше, чем у исходного многоугольника. Сколько может быть сторон у исходного многоугольника?

5. В кубе $3 \times 3 \times 3$ в каждом из 27 единичных кубиков находится лампочка. Изначально все лампочки выключены. За ход разрешается нажать на один из 26 кубиков на границе, и лампочки во всех кубиках, имеющих с выбранным общую грань (в том числе и в нём самом), переключаются. Можно ли через некоторое количество ходов добиться того, чтобы все лампочки оказались включены?

6. При каком наименьшем натуральном n число из n единиц будет делиться на число из ста семёрок?

7. В компании из 100 человек некоторые знакомы друг с другом. Каждую минуту из компании уходит человек, который имеет знакомых **больше**, чем любой из оставшихся. Через несколько минут такого человека не нашлось. Какое наименьшее количество людей могло остаться к этому моменту в компании?

8. За большим круглым столом стоят 1 000 000 пронумерованных от 1 до 1 000 000 по часовой стрелке стульев. Султан рассадил на них 1 000 000 мудрецов. Каждый мудрец знает номер своего стула и видит только 1000 следующих за ним по часовой стрелке мудрецов. Каждому мудрецу надели колпак черного или белого цвета, и они должны одновременно записать каждый на своей бумажке либо слово «Белый», либо слово «Черный». Мудрецы имели возможность договориться перед испытанием. Могут ли они действовать так, чтобы хотя бы у 1000 из них слово на бумажке соответствовало цвету своего колпака?