LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 03.05–09.05.2023

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023
# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 И 3 МЕСТА
# ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

**1.** Равные диагонали $AD$ и $CE$ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке $F$. Оказалось, что $\angle AFB = \angle AFE = \angle BAE = \angle BDC$. Докажите, что $BF + DF = CF$.

**2.** Последовательность $a_n$ задана рекуррентным соотношением $a_0 = 1$, $a_1 = x + 1$, $a_{n+2} = xa_{n+1} - a_n$, где $x$ — натуральное число. Докажите, что найдется бесконечно много $x$, для которых в последовательности нет простых чисел.

**3.** Натуральное число $n$ назовём *хорошим*, если в результате приписывания к нему справа любого количества единиц получается составное число. Существует ли бесконечно много натуральных $n$, для которых оба числа $n$ и $n + 1$ — хорошие?

**4.** Дано натуральное число $k$ и (не обязательно различные) натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 2023$. Оказалось, что при любой раскраске всех натуральных чисел от 1 до 2023 в $k$ цветов, в которой чисел первого цвета ровно $a_1$, чисел второго цвета ровно $a_2$, ..., чисел $k$-го цвета ровно $a_k$, найдётся такое натуральное $x \leqslant 2023$, что чисел цвета, в который покрашен $x$, имеется ровно $x$. При каких $k$ такое возможно?

**5.** Неотрицательные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют условиям $a+b \leqslant c+1$, $b+c \leqslant a+1$ и $c + a \leqslant b + 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2abc + 1$.

**6.** На Уральский турнир приехало 696 участников, некоторые из них знакомы. По правилам турнира познакомиться могут только те участники, у которых хотя бы двое общих знакомых. При каком наименьшем изначальном количестве пар знакомых может оказаться, что к концу турнира все участники станут попарно знакомы?

**7.** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. В треугольнике $ACD$ выбрана точка $P$. Оказалось, что $S(PAE) = 28$, $S(PAD) = 12$, $S(PCD) = 7$. Найдите $S(ABCDEF)$.

**8.** Даны сто пар целых неотрицательных чисел $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, ..., $(a_{100}, b_{100})$. Для какого наибольшего количества пар $(i, j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant 100$, может выполняться условие $|a_i b_j - a_j b_i| = 1$?

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023
# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5 И 7 МЕСТА
# ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3, 5 И 7 МЕСТА

**1.** Равные диагонали $AC$ и $BD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$, причем $\angle AOB = 120^\circ$. На отрезке $AO$ отмечена точка $P$, а на отрезке $BO$ — точка $Q$ так, что $AQ = PD$ и $CQ = PB$. Докажите, что $BO + AO + PO + QO = CO + DO$.

**2.** В строку выписано 999 различных натуральных чисел. Назовем два числа в строке (не обязательно соседних) *возрастающей парой*, если левое из них меньше, чем правое, и *убывающей парой*, если правое меньше, чем левое. Найдите наибольшее $k$, обладающее свойством: в каждой строке из 999 различных чисел найдется не менее $k$ непересекающихся возрастающих пар или не менее $k$ непересекающихся убывающих пар.

**3.** Натуральное число $n$ назовём *хорошим*, если в результате приписывания к нему справа любого количества единиц получается составное число. Докажите, что существует такое натуральное число $n$, для которого оба числа $n$ и $n + 1$ — хорошие.

**4.** Дано натуральное число $k$ и (не обязательно различные) натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, причём $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 2023$. Оказалось, что при любой раскраске всех натуральных чисел от 1 до 2023 в $k$ цветов, в которой чисел первого цвета ровно $a_1$, чисел второго цвета ровно $a_2$, ..., чисел $k$-го цвета ровно $a_k$, найдётся такое натуральное $x \leqslant 2023$, что чисел цвета, в который покрашен $x$, имеется ровно $x$. При каких $k$ такое возможно?

**5.** Неотрицательные числа $a$, $b$, $c$ удовлетворяют условиям $a+b \leqslant c+1$, $b+c \leqslant a+1$ и $c + a \leqslant b + 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2abc + 1$.

**6.** В теннисном турнире участвовало 1000 человек, каждый с каждым сыграл один раз, ничьих нет. Докажите, что всех игроков можно поставить в ряд так, чтобы каждый из 998 человек, стоящих не на краю, либо победил обоих своих соседей, либо проиграл обоим соседям.

**7.** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. В треугольнике $ACD$ выбрана точка $P$. Оказалось, что $S(PAE) = 28$, $S(PAD) = 12$, $S(PCD) = 7$. Найдите $S(ABCDEF)$.

**8.** Вещественные числа $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ таковы, что $0 < |x_1| < |x_2| < \cdots < |x_n|$. Рассмотрим $2^n$ сумм, составленных из разных чисел $x_i$ (включая пустую сумму, которую мы считаем равной 0). Докажите, что эти суммы образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда набор $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ пропорционален набору $(1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1})$.

LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 03.05–09.05.2023

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023
# СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Равные диагонали $AC$ и $BD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$, причем $\angle AOB = 120^\circ$. На отрезке $AO$ отмечена точка $P$, а на отрезке $BO$ — точка $Q$ так, что $AQ = PD$ и $CQ = PB$. Докажите, что $BO + AO + PO + QO = CO + DO$.

**2.** В строку выписано 999 различных натуральных чисел. Назовем два числа в строке (не обязательно соседних) *возрастающей парой*, если левое из них меньше, чем правое, и *убывающей парой*, если правое меньше, чем левое. Найдите наибольшее $k$, обладающее свойством: в каждой строке из 999 различных чисел найдется не менее $k$ непересекающихся возрастающих пар или не менее $k$ непересекающихся убывающих пар.

**3.** Дано натуральное число $n > 1$, пусть $d < n$ — его наибольший делитель. Оказалось, что число $d + 1$ является делителем $n + 1$. Докажите, что $n$ — простое число.

**4.** За столом сидят 100 бизнесменов, у каждого из которых есть натуральное число рублей. Каждую минуту все бизнесмены с наибольшим количеством денег (таких может быть несколько) одновременно отдают по одному рублю каждому из бизнесменов с наименьшим количеством денег (бизнесмены могут уходить в минус). Например, для 5 бизнесменов, если у них было 1, 1, 1, 2, 2 рублей соответственно, то через минуту у них будет 3, 3, 3, $-1$, $-1$ рублей соответственно. Найдите наименьшее натуральное число $S$, такое, что если изначально у бизнесменов в сумме было не менее $S$ рублей, то гарантированно никто из них не уйдет в минус.

**5.** Пусть $d(n)$ обозначает количество положительных делителей натурального числа $n$. Докажите, что существует натуральное число $n$ такое, что при всех $i = 1, 2, \ldots, 10$ выполнялись неравенства

$$\frac{d(n)}{d(n-i)} > 10 \qquad \text{и} \qquad \frac{d(n)}{d(n+i)} > 10.$$

**6.** В теннисном турнире участвовало 1000 человек, каждый с каждым сыграл один раз, ничьих нет. Докажите, что всех игроков можно поставить в ряд так, чтобы каждый из 998 человек, стоящих не на краю, либо победил обоих своих соседей, либо проиграл обоим соседям.

**7.** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. В треугольнике $ACD$ выбрана точка $P$. Оказалось, что $S(PAE) = 28$, $S(PAD) = 12$, $S(PCD) = 7$. Найдите $S(ABCDEF)$.

**8.** Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $0 < |x_1| < |x_2| < \cdots < |x_n|$. Рассмотрим $2^n$ сумм, составленных из разных чисел $x_i$ (включая пустую сумму, которую мы считаем равной 0). Докажите, что эти суммы образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда набор $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ пропорционален набору $(1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1})$.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023
# СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** Равные диагонали $AC$ и $BD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$, причем $\angle AOB = 120^\circ$. На отрезке $AO$ отмечена точка $P$, а на отрезке $BO$ — точка $Q$ так, что $AQ = PD$ и $CQ = PB$. Докажите, что $BO + AO + PO + QO = CO + DO$.

**2.** В строку выписано 999 различных натуральных чисел. Назовем два числа в строке (не обязательно соседних) *возрастающей парой*, если левое из них меньше, чем правое, и *убывающей парой*, если правое меньше, чем левое. Найдите наибольшее $k$, обладающее свойством: в каждой строке из 999 различных чисел найдется не менее $k$ непересекающихся возрастающих пар или не менее $k$ непересекающихся убывающих пар.

**3.** Дано натуральное число $n > 1$, пусть $d < n$ — его наибольший делитель. Оказалось, что число $d + 1$ является делителем $n + 1$. Докажите, что $n$ — простое число.

**4.** За столом сидят 100 бизнесменов, у каждого из которых есть натуральное число рублей. Каждую минуту все бизнесмены с наибольшим количеством денег (таких может быть несколько) одновременно отдают по одному рублю каждому из бизнесменов с наименьшим количеством денег (бизнесмены могут уходить в минус). Например, для 5 бизнесменов, если у них было 1, 1, 1, 2, 2 рублей соответственно, то через минуту у них будет 3, 3, 3, $-1$, $-1$ рублей соответственно. Найдите наименьшее натуральное число $S$, такое, что если изначально у бизнесменов в сумме было не менее $S$ рублей, то гарантированно никто из них не уйдет в минус.

**5.** Дано $n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что

$$|x_1| = 1, \quad |x_2| = 2, \quad |x_3| = 4, \quad \ldots, \quad |x_n| = 2^{n-1}.$$

Докажите, что суммы всевозможных наборов из этих чисел образуют множество из $2^n$ последовательных целых чисел. Считаем, что сумма пустого набора чисел равна 0.

**6.** В теннисном турнире участвовало 1000 человек, каждый с каждым сыграл один раз, ничьих нет. Докажите, что всех игроков можно поставить в ряд так, чтобы каждый из 998 человек, стоящих не на краю, либо победил обоих своих соседей, либо проиграл обоим соседям.

**7.** Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. На диагонали $AC$ выбрана точка $P$. Оказалось, что $S(PAE) = 28$, $S(PCD) = 7$. Найдите $S(ABCDEF)$.

**8.** Пусть $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_5$ — длины сторон некоторого пятиугольника. Докажите, что

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geqslant \sqrt{2 \cdot (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)}.$$