LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. Киров, 03.05-09.05.2023

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. *В ящике были красные, синие, жёлтые и зелёные шарики. Незнайка неправильно посчитал, что в ящике 10% шаров красные, 20% синие, 50% жёлтые и 70% зелёные. Дело в том, что он считал проценты не от общего количества всех шаров, а от общего количества шаров каких-то трех цветов (оставшийся, четвертый цвет назовем* забытым*). А какие бы результаты Незнайка получил, если бы считал проценты от количества шаров забытого цвета?*

Решение. Нам нужны те три цвета, сумма процентов которых в подсчете Незнайки равна 100, а значит это красные, синие и зеленые. Желтые составляют 50% от остальных трех, значит если бы считали проценты от числа желтых, то числа бы стали вдвое больше. Итого, ответ $20\%, 40\%, 100\%, 140\%$.

2. *Фишка двигается по клеткам доски* 100×100*, начиная с левой нижней угловой клетки и каждым ходом перемещаясь в соседнюю по стороне клетку. Будем говорить, что* произошел поворот*, если из двух последовательных ходов фишки один вертикальный, а другой горизонтальный (в любом порядке). Фишка посетила хотя бы по одному разу каждую клетку диагонали, ведущей из левого нижнего угла доски в правый верхний (исходная клетка считается уже посещенной). Какое наименьшее количество поворотов могло при этом произойти?*

Ответ: 99. **Решение.** Пример: нужно сделать ход на 1 вправо, затем на 2 вверх, на 2 вправо, на 2 вверх, на 2 вправо, и т.д., пока не доберемся до правого-верхнего угла (последний ход будет длины 1). Всего поворотов будет 99, так как каждый из них совершался после очередного посещения диагональной клетки (всех кроме правой верхней). Оценка: Между любыми двумя последовательными посещениями клеток диагонали фишка должна совершить хотя бы один поворот, поэтому поворотов не менее 99.

3. *Каждое из десяти положительных чисел равно квадрату суммы оставшихся девяти. Обязательно ли все эти десять чисел равны?*

Ответ: Обязательно. **Решение.** Предположим, что такие числа, не все равные друг другу, нашлись. Пусть S — сумма всех чисел, m — наименьшее из чисел, M — наибольшее из чисел. Так как не все числа равны, то $M > m$. Но тогда

$$m = (S - m)^2 > (S - M)^2 = M.$$

Противоречие.

4. *Выпуклый многоугольник разделен на два многоугольника одной из своих диагоналей. У получившихся двух многоугольников суммарно на 290 диагоналей меньше, чем у исходного многоугольника. Сколько может быть сторон у исходного многоугольника?*

Ответ: 36 или 292. **Решение.** Пусть мы провели диагональ AB, которая поделила наш многоугольник на два с количеством сторон $x + 2$ и $y + 2$. Тогда из множества диагоналей пропала сама AB и те диагонали, которые её пересекали, а таких было xy. Следовательно,

$$xy + 1 = 290 \iff xy = 289 = 17^2.$$

Легко видеть, что подходят варианты $x = y = 17$, $x = 1$ $y = 289$ или $x = 289, y = 1$, откуда и получаем ответ.

5. *В кубе $3 \times 3 \times 3$ в каждом из 27 единичных кубиков находится лампочка. Изначально все лампочки выключены. За ход разрешается нажать на один из 26 кубиков на границе, и лампочки во всех кубиках, имеющих с выбранным общую грань (в том числе и в нём самом), переключаются. Можно ли через некоторое количество ходов добиться того, чтобы все лампочки оказались включены?*

Решение. Поделим кубики на угловые (их 8), рёберные (их 12), гранные (их 6) и средний. Пусть x и y — суммарное количество нажатий на гранные и рёберные кубики соответственно. Заметим, что x нечётно (иначе центральная лампочка окажется выключенной). Посмотрим на гранные кубики — их необходимо в сумме переключить чётное количество раз. Но количество таких переключений равно $x + 2y$ (при каждом нажатии на гранный кубик переключается лампочка в нём, а при каждом нажатии на рёберный кубик переключаются лампочки в двух смежных гранных кубиках), и это число не может оказаться чётным.

6. *При каком наименьшем натуральном n число из n единиц будет делиться на число из ста семёрок?*

Ответ: 300. **Решение.** Заметим, что число из k единиц делится на 7 тогда и только тогда, когда $k \vdots 6$ ($111111 = 15873 \cdot 7$, значит по шесть единиц из числа можно вычеркивать, и затем остается убедиться, что число из не более пяти единиц на 7 не делится). Из этого получаем, что, во-первых, $n \vdots 6$, и во-вторых, что число из 100 единиц взаимно просто с 7. Следовательно, чтобы число делилось на число из 100 семерок необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 7 и на число из 100 единиц. Докажем, что число из n единиц делится на число из 100 единиц тогда и только тогда, когда $n \vdots 100$. Действительно, если вычеркнуть в числе первые 100 единиц, то остаток от деления числа на число из 100 единиц сохранится. Вычёркивая так несколько раз, получим число, меньшее числа из 100 единиц. Но тогда делимость будет только для числа 0. Итак, n должно удовлетворять двум условиям: n кратно 6 и n кратно 100. Наименьшее такое n — это $\text{НОК}(6, 100) = 300$.

7. *В компании из 100 человек некоторые знакомы друг с другом. Каждую минуту из компании уходит человек, который имеет знакомых* **больше***, чем любой из оставшихся. Через несколько минут такого человека не нашлось. Какое наименьшее количество людей могло остаться к этому моменту в компании?*

Ответ: 3. **Решение.** *Оценка.* Предположим, что могло остаться не более двух человек. Рассмотрим момент, когда осталось ровно три человека A, B, C. Пусть A — тот, у кого больше всех знакомых. Если у A один знакомый, то у кого-то из B и C тоже есть один знакомый (сам A), но тогда у A не больше всех знакомых. Следовательно, у A два знакомых и он знаком с B и C. Пусть D — человек, который ушел перед A. Так как у A хотя бы два знакомых из B, C и D, то у D их должно быть не менее 3. Значит, D знаком с A, B и C. Но тогда и у A три знакомых. Противоречие.

Пример. Выстроим людей в ряд и познакомим каждого со всеми, кроме его соседей в ряду. Кроме того, не будем знакомить 1 и 3 человек в ряду. Последний человек в ряду знаком со всеми, кроме одного (если людей больше трех). А все остальные люди в ряду имеют как минимум двух незнакомых. Более того, после ухода последнего получается ряд, вновь удовлетворяющий условиям выше. Следовательно, люди будут уходить, пока не останется 3 человека.

8. *За большим круглым столом стоят 1 000 000 пронумерованных от 1 до 1 000 000 по часовой стрелке стульев. Султан рассадил на них 1 000 000 мудрецов. Каждый мудрец знает номер своего стула и видит только 1000 следующих за ним по часовой* *стрелке мудрецов. Каждому мудрецу надели колпак черного или белого цвета, и они должны одновременно записать каждый на своей бумажке либо слово «Белый», либо слово «Черный». Мудрецы имели возможность договориться перед испытанием. Могут ли они действовать так, чтобы хотя бы у* 1000 *из них слово на бумажке соответствовало цвету своего колпака?*

Решение. Разобьём мудрецов на 1000 циклов с шагом 1000. Пусть каждый мудрец смотрит только на следующего мудреца в своём цикле. Покажем, как обеспечить хотя бы один успех в каждом из 1000 циклов (тогда хотя бы 1000 мудрецов угадают свой цвет). Выделим заранее в каждом цикле одного мудреца (например, того, чей номер стула от 1 до 1000). Пусть в каждом цикле каждый мудрец, кроме выделенного, напишет на бумажке цвет колпака, отличный от цвета колпака следующего по циклу мудреца, а выделенный мудрец напишет тот же цвет, что и у следующего в цикле. Если в цикле все мудрецы, кроме выделенного, ошиблись, то все колпаки в цикле одинакового цвета. Тогда в этом цикле свой цвет угадает выделенный мудрец.