

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне AC отмечена точка D , а на стороне BC — точка E , причём $BD = BE = DE$. Докажите, что на отрезке CD найдутся такие точки F и G , что $AD = EF = EG = FG$.

2. Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на квадрате с длиной стороны 2023 метра, окруженном лавой. В центре квадрата сидит жаба. В свой ход волшебник выбирает направление, параллельное стороне квадрата, и заколдовывает жабу прыгнуть на d метров в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка. Волшебник, отправивший жабу в лаву, проигрывает. Альбус начинает, ходят волшебники по очереди. У кого из волшебников есть выигрышная стратегия?

3. Дано натуральное число a . Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел $a, a^2 + 1, a^3 + 2, \dots, a^{16} + 15$?

4. В стране 28 городов, между некоторыми городами проходят односторонние дороги. При этом нет двух таких городов A и B , что существует и дорога из A в B , и из B в A . Известно, что для любых 16 городов есть циклический маршрут, проходящий по каждому городу ровно один раз (и не проходящий по другим городам). Докажите, что из любых 17 городов можно выбрать 15 таких, что существует циклический маршрут, проходящий по каждому из этих 15 городов ровно один раз (и не проходящий по другим городам).

5. Строка длины 2023 из 0 и 1 называется *няшной*, если в ней есть 7 единиц подряд. Строка длины 2024 из 0 и 1 называется *годной*, если в ней есть 8 одинаковых символов подряд. Каких строк больше, няшных или годных, и во сколько раз?

6. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I . Внешняя биссектриса угла AIC пересекает сторону AB в точке D . Точки E и F на отрезке AC отмечены так, что $\angle AIB = \angle ABE$ и $\angle BID = \angle ABF$. Докажите, что $BC < CE + 4EF$.

7. Десять положительных чисел выписали в строчку в порядке возрастания. Оказалось, что все разности между соседними числами равны, и что удвоенное второе по счету число больше четвертого по счету. Докажите, что упятеренное произведение всех чисел, стоящих на нечетных местах, больше произведения всех чисел, стоящих на четных местах.

8. Вадим выбрал натуральное число d . Оказалось, что существуют натуральные числа с суммой цифр 7, дающие при делении на d остатки $d - 1$ и $d - 2$. Докажите, что любого натурального $k > 100$ существует натуральное число с суммой цифр k , делящееся на d .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дан треугольник ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне AC отмечена точка D , а на стороне BC — точка E , причём $BD = BE = DE$. Докажите, что на отрезке CD найдутся такие точки F и G , что $AD = EF = EG = FG$.

2. Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на квадрате с длиной стороны 2023 метра, окруженном лавой. В центре квадрата сидит жаба. В свой ход волшебник выбирает направление, параллельное стороне квадрата, и заколдовывает жабу прыгнуть на d метров в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка. Волшебник, отправивший жабу в лаву, проигрывает. Альбус начинает, ходят волшебники по очереди. У кого из волшебников есть выигрышная стратегия?

3. Дано натуральное число a . Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел $a, a^2 + 1, a^3 + 2, \dots, a^{16} + 15$?

4. В стране 28 городов, между некоторыми городами проходят односторонние дороги. При этом нет двух таких городов A и B , что существует и дорога из A в B , и из B в A . Известно, что для любых 27 городов есть циклический маршрут, проходящий по каждому городу ровно один раз (и не проходящий по другим городам). Какое наименьшее число дорог может быть в этой стране?

5. Строка длины 2023 из 0 и 1 называется *няшной*, если в ней есть 7 единиц подряд. Строка длины 2024 из 0 и 1 называется *годной*, если в ней есть 8 одинаковых символов подряд. Каких строк больше, няшных или годных, и во сколько раз?

6. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на продолжении боковой стороны AC за точку C — точка E , причём $\angle ADC = \angle BDE$. Точка F на луче DC выбрана так, что прямые EF и BC перпендикулярны. Докажите, что $DE < CD + 2CF$.

7. Десять положительных чисел выписали в строчку в порядке возрастания. Оказалось, что все разности между соседними числами равны, и что удвоенное второе по счету число больше четвертого по счету. Докажите, что упятеренное произведение всех чисел, стоящих на нечетных местах, больше произведения всех чисел, стоящих на четных местах.

8. Вадим выбрал натуральное число d . Оказалось, что существуют натуральные числа с суммой цифр 7, дающие при делении на d остатки $d - 1$ и $d - 2$. Докажите, что любого натурального $k > 100$ существует натуральное число с суммой цифр k , делящееся на d .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан квадрат $ABCD$. Отмечена точка E такая, что $\angle CAE = 90^\circ$, точки E и C лежат по разные стороны от прямой AD . При этом $BE = AC$. Найдите величину угла ABE .

2. Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на квадрате с длиной стороны 2023 метра, окруженном лавой. В центре квадрата сидит жаба. В свой ход волшебник выбирает направление, параллельное стороне квадрата, и заколдовывает жабу прыгнуть на d метров в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка. Волшебник, отправивший жабу в лаву, проигрывает. Альбус начинает, ходят волшебники по очереди. У кого из волшебников есть выигрышная стратегия?

3. Строка длины 10 из 0 и 1 называется *няшной*, если в ней есть 3 единицы подряд. Строка длины 11 из 0 и 1 называется *годной*, если в ней есть 4 одинаковых символа подряд. Каких строк больше, няшных или годных, и во сколько раз?

4. В клетки таблицы 5×5 вписываются k двоек и $25 - k$ единиц. Известно, что можно вписать цифры так, чтобы сумма пяти цифр в каждой строке была простым числом. Однако, при любой такой расстановке хотя бы одна сумма пяти цифр в столбце обязательно будет составным числом. Чему равно k ? Укажите все возможные варианты.

5. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на продолжении боковой стороны AC за точку C — точка E , причем $\angle ADC = \angle BDE$. Точка F на луче DC выбрана так, что прямые EF и BC перпендикулярны. Докажите, что $DE < CD + 2CF$.

6. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что число $2023(p+1)(q+1)(r+1)$ делится на pqr .

7. Десять положительных чисел выписали в строчку в порядке возрастания. Оказалось, что все разности между соседними числами равны, и что удвоенное второе по счету число больше четвертого по счету. Докажите, что упятеренное произведение всех чисел, стоящих на нечетных местах, больше произведения всех чисел, стоящих на четных местах.

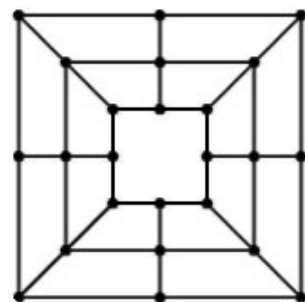
8. Альберт составляет последовательность чисел, первые 2023 из которых — это в точности числа от 1 до 2023, в некотором порядке. Каждое последующее число Альберт вычисляет так: берет 2023 предыдущих чисел и вычитает наименьшее среди них из наибольшего. Докажите, что Альберт мог поставить первые 2023 числа в таком порядке, что после 10000000-го члена последовательности встретятся числа больше 1.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА

ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан квадрат $ABCD$. Отмечена точка E такая, что $\angle CAE = 90^\circ$, точки E и C лежат по разные стороны от прямой AD . При этом $BE = AC$. Найдите величину угла ABE .

2. В парке k милиционеров ловят одного хулигана, соблюдая следующие правила. Каждую минуту милиционеры перемещаются по аллее с одной площадки на соседнюю, либо остаются неподвижными (и не могут изменить это решение в течение минуты). Хулиган проворнее, поэтому принимает решение, переместиться на соседнюю площадку, либо остаться на месте, после милиционеров. По окончании одной минуты и все милиционеры, и хулиган обязаны находиться на каких-нибудь площадках. Все участники движения видят друг друга. Если хулиган окажется в одной точке с милиционером, он будет пойман. Найдите наименьшее k , при котором милиционеры могут поймать хулигана при любом их начальном расположении. План парка указан на рисунке (площадки — точки, аллеи — отрезки).



3. Учитель решил накормить свой класс пиццей. При этом он придумал следующий квест. Он выбрал 11 локаций в школе и пронумеровал их числами от 1 до 11. Его план состоит в том, чтобы поместить в i -ю локацию бумажку, на которой написано, что нужно идти в $i + 1$ -ю локацию ($i = 1, \dots, 10$), а в 11-ю локацию — пиццу. Таким образом, стартовав из 1-й локации школьники пройдут квест и найдут пиццу. Учитель передал бумажки помощнику, чтобы тот разложил их по локациям. Однако тот забыл, куда нужно положить какую бумажку и разложил их в случайном порядке. Всегда ли школьники смогут найти пиццу?

4. Строка длины 7 из 0 и 1 называется *няшной*, если в ней есть 3 единицы подряд. Строка длины 8 из 0 и 1 называется *годной*, если в ней есть 4 одинаковых символа подряд. Найдите отношение количеств няшных и годных строк.

5. В клетки таблицы 5×5 вписываются k двоек и $25 - k$ единиц. Известно, что можно вписать цифры так, чтобы сумма пяти цифр в каждой строке была простым числом. Однако, при любой такой расстановке хотя бы одна сумма пяти цифр в столбце обязательно будет составным числом. Чему равно k ? Укажите все возможные варианты.

6. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что число $2023(p + 1)(q + 1)(r + 1)$ делится на pqr .

7. Барон Мюнхгаузен увидел на доске равенство $4a^2 + 9b^2 + 36c^2 = 4a + 6b + 12c - 3$ и заявил, что он знает, чему равно число $a + b + c$. Не привирает ли барон?

8. Альберт составляет последовательность чисел, первые 2023 из которых — это в точности числа от 1 до 2023, в некотором порядке. Чтобы определить каждое последующее число, Альберт берет медиану 2023 предыдущих чисел. Сколько разных значений может принимать 1 000 000-й член последовательности? Медиана набора чисел — число, которое находится в середине этого набора, если его упорядочить по возрастанию.