КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 04.05.2023
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА. РЕШЕНИЯ

1. В ящике были красные, синие, жёлтые и зелёные шары. Незнайка неправильно посчитал, что в ящике 10% шаров красные, 20% синие, 50% жёлтые и 70% зелёные. Дело в том, что он считал проценты не от общего количества всех шаров, а от общего количества шаров каких-то трех цветов (оставшийся, четвертый цвет назовем *забытым*). А какие бы результаты Незнайка получил, если бы считал проценты от количества шаров забытого цвета?

Ответ. $20\%, 40\%, 100\%, 140\%$. **Решение.** Нам нужны те три цвета, сумма процентов которых в подсчете Незнайки равна 100, а значит это красные, синие и зеленые. Желтые составляют 50% от остальных трех, значит если бы считали проценты от числа желтых, то числа бы стали вдвое больше. Итого, ответ $20\%, 40\%, 100\%, 140\%$.

2. Паша взял два трёхзначных числа, возвел каждое в квадрат и записал полученные числа друг за другом без пробела. Получилось некоторое десятизначное число. Могут ли не менее семи цифр в записи этого десятизначного числа равняться 3?

Ответ. Не могут. **Решение.** Предположим противное. Заметим, что в десятичной записи квадрата трёхзначного числа не меньше 5 цифр, а значит, в каждом из выбранных квадратов ровно 5 цифр. По принципу Дирихле в десятичной записи одного из двух квадратов присутствуют хотя бы 4 цифры 3. Но квадрат натурального числа не может заканчиваться на цифру 3. Значит, один из двух квадратов имеет вид $\overline{3333a}$, где a — некоторая цифра. Но $182^2 = 33124 < \overline{3333a} < 183^2 = 33489$, поэтому таких квадратов не существует.

3. На стороне AB треугольника ABC нашлась такая точка D, что $AB = CD$. В треугольнике BCD проведена биссектриса DE. Докажите, что из отрезков AD, BE и EC можно сложить треугольник.

Решение. Отложим на продолжении стороны AB за точку B точку D' такую, что $AD = BD'$. Имеем $DC = AD + BD = BD + BD' = DD'$. Тогда треугольники DED' и DEC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $D'E = EC$, то есть треугольник $BD'E$ — искомый.

4. В кубе $3 \times 3 \times 3$ в каждом единичном кубике находится лампочка. Изначально все лампочки выключены. За ход разрешается «нажать» на один из 26 кубиков на границе, и лампочки во всех кубиках, имеющих с выбранным общую грань (в том числе и в нём самом) переключаются. Можно ли через некоторое количество ходов сделать включенной только лампочку в центре исходного куба?

Ответ. Нельзя. **Решение.** Поделим кубики на угловые (их 8), рёберные (их 12), гранные (их 6) и средний. Пусть x и y — суммарное количество нажатий на гранные и рёберные кубики соответственно. Заметим, что x нечётно (иначе центральная лампочка окажется выключенной). Посмотрим на гранные кубики — их необходимо в сумме переключить чётное количество раз. Но количество таких переключений равно $x+2y$ (при каждом нажатии на гранный кубик переключается лампочка в нём, а при каждом нажатии на рёберный кубик переключаются лампочки в двух смежных гранных кубиках), и это число не может оказаться чётным.

5. В строчку выписаны все натуральные делители числа n в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Оказалось, что при любом натуральном i от 2 до k включительно либо d_i делится на d_{i-1}, либо $d_i - 1$ делится на d_{i-1}. Докажите, что n имеет не более двух различных простых делителей.

Решение. Предположим, что у n есть хотя бы 3 различных простых делителя $p < q < r$. Пусть $q = d_i$. Заметим, что оба числа n/d_i и n/d_{i-1} делятся на r. Значит, n/d_{i-1} делится на n/d_i, то есть d_i делится на d_{i-1}. Но $1 < d_{i-1} < q$, откуда получаем противоречие.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором, $AB = BC = CD$, $\angle B = \angle C = 140^\circ$ и $\angle A = \angle D = 50^\circ$. Найдите градусную меру углов треугольника ACE.

Ответ. 30°, 40°, 110°. **Решение.** Построим на стороне BC вовнутрь исходного пятиугольника равносторонний треугольник BCE'. Заметим, что $\angle ABE' = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$. При этом треугольник BAE' — равнобедренный с основанием AE', откуда $\angle BAE' = \angle BE'A = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$. То есть прямая AE совпала с прямой AE'. Аналогично прямая DE совпала с прямой DE'. Значит, точки E и E' совпадают. Тогда $\angle AEC = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$. Из равнобедренности треугольника ABC получаем $\angle BAC = \angle BCA = 20^\circ$, откуда $\angle CAE = 30^\circ$. Тогда $\angle ACE = 180^\circ - 110^\circ - 30^\circ = 40^\circ$.

7. В комнате находятся 99 человек. Каждую минуту из комнаты выходит человек, у которого количество знакомых среди присутствующих хотя бы на 2 больше, чем у каждого из остальных. Через несколько минут такого человека не нашлось. Какое минимальное количество людей могло остаться к этому моменту в комнате? (Знакомства взаимные.)

Ответ. 51 человек. **Решение. Оценка.** Рассмотрим граф с 99 вершинами, рёбра соответствуют знакомствам. Выкидывание вершины с рёбрами не увеличивает степени остальных, потому степень каждого следующего выходящего (на момент выхода) хотя бы на 2 меньше предыдущей. Поэтому их степени не больше 98, 96, ... 4, 2 соответственно. Но удалить вершину степени 2 невозможно, так как есть ещё ненулевые степени, а вершины степени 1 и 0 не подходят по условию. Таким образом, из комнаты выйдет не более 48 человек.

Пример. Пусть человек с номером $1 \leqslant k \leqslant 48$ знаком с людьми с номерами от $2k+1$ до 99, других знакомств нет. Уходить они будут по порядку от 1 до 48. На момент ухода k-го человека: ему не знакомы только k следующих за ним, остальным из этих 48 — хотя бы $k+1$ следующих и предыдущий, а последним 51 — хотя бы 50, что тоже не меньше $k+2$.

8. Саша выписал на доску 2023 правильные дроби. Оказалось, что для любого натурального числа n от 1 до k можно выбрать несколько из выписанных дробей с суммой n. При каком наибольшем k такое возможно?

Ответ. 2021. **Решение. Оценка.** Заметим, что $k \leqslant 2022$, так как сумма 2023 правильных дробей меньше 2023. Если $k = 2022$, то сумма всех дробей на доске равна 2022, а значит, сумма любых 2022 дробей больше, чем $2022 - 1 = 2021$, а сумма любых 2021 дроби меньше 2021. То есть число 2021 мы не получим. Следовательно, $k \leqslant 2021$.

Пример. Обозначим через $k_i = 1 - \frac{1}{2^i}$. Возьмём дроби $k_1, k_1, k_2, k_2, \ldots, k_{1011}, k_{1011}, k_{1010}$. Заметим, что сумма всех таких дробей равна $2023 - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{1010}}) - \frac{1}{2^{1010}} = 2021$. Чтобы получить натуральное число $s \leqslant 1010$ достаточно взять дроби $k_1, k_2, \ldots, k_{s-1}, k_s, k_s$. Их сумма будет равна $s + 1 - 1 = s$. С другой стороны, чтобы получить $s \geqslant 1011$, можно выбрать дроби с суммой $2021 - s$, а затем взять оставшиеся. Их сумма будет как раз $2021 - (2021 - s) = s$.