МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Назовем натуральное число *интересным*, если оно имеет вид n^m, где n и m — натуральные числа, большие 1. Конечно ли множество натуральных чисел, которые представляются в виде суммы попарно различных интересных чисел не более чем тысячью способами? (Представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Так, для числа 36 есть три представления: $36 = 36$, $36 = 9 + 27$, $36 = 4 + 32$.)

2. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ (не обязательно различные) такие, что произведение $A = a_1 a_2 \ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 100$, а также для каждого натурального $1 \leqslant k \leqslant 100$ найдутся индексы $i < j$ такие, что число A/a_k не делится на $a_i + a_j$?

3. Дан полный граф на 26 вершинах. Каждое его ребро покрашено в один из 10 цветов. Катя хочет покрасить вершины в те же 10 цветов так, чтобы не нашлось двух вершин A и B одного цвета, соединенных ребром того же цвета. Всегда ли она сможет осуществить свой план?

4. По кругу расставлены n положительных чисел. Оказалось, что для любых стоящих рядом чисел x и y выполнено равенство $x^2 - xy + y^2 = 111$. При каких значениях n можно утверждать, что все эти n чисел одинаковые?

5. Даны натуральные числа $k < n$. Клетки доски $n \times n$ покрашены в черный и белый цвет. Известно, что для каждой черной клетки в «кресте» из строчки и столбца, на пересечении которых она находится, не менее $2k$ белых клеток. Какое наибольшее количество клеток доски могут быть черными?

6. Стороны четырехугольника равны 1, 2, 3, 4 (именно в таком порядке, четырехугольник не обязательно выпуклый). Докажите, что сумма его диагоналей больше, чем 5.

7. На острове рыцарей и лжецов находится 2023 туземца (каждый — рыцарь или лжец). Приехавший на остров антрополог Станислав спросил каждого, сколько у того друзей среди туземцев, и записал 2023 ответа. Все ответы оказались целыми числами от 0 до 2022 (ответы могли совпадать). Антрополог Станислав по этим ответам точно понял, что на острове не менее k лжецов. При каком наибольшем k такое могло быть?

8. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AC = BD$. На стороне BC выбрана точка E, а на продолжении стороны AC за точку C — точка F так, что $\angle BDC = \angle BED = \angle ABF$. Луч DE пересекает отрезок BF в точке G. Докажите, что треугольник ABG — равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовем натуральное число *интересным*, если оно имеет вид n^m, где n и m — натуральные числа, большие 1. Конечно ли множество натуральных чисел, которые представляются в виде суммы попарно различных интересных чисел не более чем тысячью способами? (Представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Так, для числа 36 есть три представления: $36 = 36$, $36 = 9 + 27$, $36 = 4 + 32$.)

2. Существуют ли натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} (не обязательно различные) такие, что произведение $A = a_1a_2 \ldots a_{100}$ делится на $a_i + a_j$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 100$, а также для каждого натурального $1 \leqslant k \leqslant 100$ найдутся индексы $i < j$ такие, что число A/a_k не делится на $a_i + a_j$?

3. Дан полный граф на 26 вершинах. Каждое его ребро покрашено в один из 10 цветов. Катя хочет покрасить вершины в те же 10 цветов так, чтобы не нашлось двух вершин A и B одного цвета, соединенных ребром того же цвета. Всегда ли она сможет осуществить свой план?

4. По кругу расставлены n положительных чисел. Оказалось, что для любых стоящих рядом чисел x и y выполнено равенство $x^2 - xy + y^2 = 111$. При каких значениях n можно утверждать, что все эти n чисел одинаковые?

5. Клетки доски $n \times n$ покрашены в черный и белый цвет. Известно, что для каждой черной клетки в «кресте» из строчки и столбца, на пересечении которых она находится, не менее трех белых клеток. Какое наибольшее количество клеток доски могут быть черными?

6. Учительница попросила Сашу нарисовать замкнутую ломаную $ABCDEA$ с заданными длинами звеньев: $AB = 1, BC = 2, CD = 3, DE = 4, EA = 5$. Саша нарисовал ломаную, так, что точка D лежит на отрезке BE, а точка C — на отрезке AE. Докажите, что Саша не справился с заданием.

7. На острове рыцарей и лжецов находится 2023 туземца (каждый — рыцарь или лжец). Приехавший на остров антрополог Станислав спросил каждого, сколько у того друзей среди туземцев, и записал 2023 ответа. Все ответы оказались целыми числами от 0 до 2022 (ответы могли совпадать). Антрополог Станислав по этим ответам точно понял, что на острове не менее k лжецов. При каком наибольшем k такое могло быть?

8. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AC = BD$. На стороне BC выбрана точка E, а на продолжении стороны AC за точку C — точка F так, что $\angle BDC = \angle BED = \angle ABF$. Луч DE пересекает отрезок BF в точке G. Докажите, что треугольник ABG — равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z, такие что

$$x^3 + y^3 = 2z^3$$

и число $x + y + z$ простое.

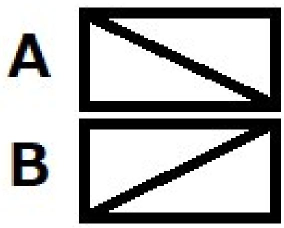
2. По кругу расставлены n положительных чисел. Оказалось, что для любых стоящих рядом чисел x и y выполнено равенство $x^2 - xy + y^2 = 111$. При каких значениях n можно утверждать, что все эти n чисел одинаковые?

3. Клетки доски 8×8 покрашены в черный и белый цвет. Известно, что для каждой черной клетки в «кресте» из строчки и столбца, на пересечении которых она находится, не менее трех белых клеток. Какое наибольшее количество клеток доски могут быть черными?

4. На острове рыцарей и лжецов находится 2023 туземца (каждый — рыцарь или лжец). Приехавший на остров антрополог Станислав спросил каждого, сколько у того друзей среди туземцев, и записал 2023 ответа. Все ответы оказались целыми числами от 0 до 2022 (ответы могли совпадать). Антрополог Станислав по этим ответам точно понял, что на острове не менее k лжецов. При каком наибольшем k такое могло быть?

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AC = BD$. На стороне BC выбрана точка E, а на продолжении стороны AC за точку C — точка F так, что $\angle BDC = \angle BED = \angle ABF$. Луч DE пересекает отрезок BF в точке G. Докажите, что $AB = BG$.

6. У Тани есть 1000 непрозрачных картонных прямоугольников размером 1×2 клетки, на лицевой стороне которых проведена одна из диагоналей. При этом у нее не менее двух прямоугольников каждого из видов A и B. Таня хочет выложить их на клетчатой плоскости лицевой стороной вверх так, чтобы прямоугольники не накладывались друг на друга, границы прямоугольников шли по линиям сетки, а все проведенные диагонали образовывали один многоугольник. Всегда ли у Тани получится это сделать?



7. Есть три стакана с разбавленным соком. В стаканах разное количество жидкости. Если перелить всю жидкость из первого стакана во второй, то в получившейся смеси будет 25% сока. Если из первого в третий — 30% сока. Наконец, при переливании жидкости из второго стакана в третий — 50% сока. Докажите, что если перелить жидкости из первого и второго стаканов в третий, то в получившейся смеси будет менее, чем 40% сока.

8. Найдите все натуральные n такие, что числа $12n + 1$ и $75n + 49$ являются квадратами натуральных чисел.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Среди 15 монет 2 фальшивые. Если в детектор положить три монеты, среди которых есть фальшивые, то он укажет на одну из фальшивых в нём. Если же в детектор положить три монеты, среди которых нет фальшивых, то он сообщит об этом. За какое наименьшее количество использований детектора можно заведомо определить обе фальшивые монеты?

2. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z, такие что

$$x^3 + y^3 = 2z^3$$

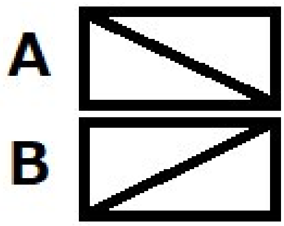
и число $x + y + z$ простое.

3. Клетки доски 8×8 покрашены в черный и белый цвет. Известно, что для каждой черной клетки в «кресте» из строчки и столбца, на пересечении которых она находится, не менее двух белых клеток. Какое наибольшее количество клеток доски могут быть черными?

4. Двадцать спортсменов должны перед началом соревнований выстроиться в ряд. Каждому разрешили высказать любое число пожеланий вида *такой-то спортсмен должен стоять в этом ряду левее меня* (некоторые из них могли и промолчать). Могло ли случиться, что существует ровно 1024 способа выстроить спортсменов так, чтобы все их пожелания были удовлетворены?

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что $AC = BD$. На стороне BC выбрана точка E, а на продолжении стороны AC за точку C — точка F так, что $\angle BDC = \angle BED = \angle ABF$. Луч DE пересекает отрезок BF в точке G. Докажите, что $AB = BG$.

6. У Тани есть 1000 непрозрачных картонных прямоугольников размером 1×2 клетки, на лицевой стороне которых проведена одна из диагоналей. При этом у нее не менее двух прямоугольников каждого из видов A и B. Таня хочет выложить их на клетчатой плоскости лицевой стороной вверх так, чтобы прямоугольники не накладывались друг на друга, границы прямоугольников шли по линиям сетки, а все проведенные диагонали образовывали один многоугольник. Всегда ли у Тани получится это сделать?



7. Есть три стакана с разбавленным соком. В стаканах разное количество жидкости. Если перелить всю жидкость из первого стакана во второй, то в получившейся смеси будет 25% сока. Если из первого в третий — 30% сока. Наконец, при переливании жидкости из второго стакана в третий — 50% сока. Докажите, что если перелить жидкости из первого и второго стаканов в третий, то в получившейся смеси будет менее, чем 40% сока.

8. Найдите все натуральные n такие, что числа $12n + 1$ и $75n + 49$ являются квадратами натуральных чисел.