

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n поделили на 2023 и получили неполное частное a и остаток b . Натуральное число k поделили на 2023 и получили неполное частное b и остаток c . Натуральное число ℓ поделили на 2023 и получили неполное частное c и остаток a . Может ли сумма $n + k + \ell$ быть кубом натурального числа?
2. При каких n можно положить несколько непересекающихся домино на доску $n \times 30$ так, чтобы каждое домино граничило по стороне ровно с тремя пустыми клетками, а каждая пустая клетка — ровно с двумя домино? (Домино — это прямоугольник из двух клеток).
3. В каждую клетку полоски 1×20 записана цифра так, что сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках отлична от 45. Верно ли, что всегда можно заменить нули на ненулевые цифры так, чтобы сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках по-прежнему отличалась от 45?
4. В стране 100 городов и есть несколько дорог, каждая из которых соединяет два города и любые два города соединены не более, чем одной дорогой. Путешественник заметил, что каким бы способом ни распределить города страны по двум республикам, между этими двумя республиками будет не более 400 дорог. Докажите, что существует 7 городов, никакие два из которых не соединены напрямую дорогой.
5. В каждой клетке таблицы 8×8 написано натуральное число. Для каждой пары соседних по стороне клеток Дима вычислил произведение чисел в этой паре клеток, а затем все полученные произведения сложил. Андрей, наоборот, вычислил суммы чисел во всех парах соседних по стороне клеток и все полученные суммы перемножил. Могло ли так оказаться, что итоговое число Димы оканчивается на 101, а итоговое число Андрея — на 100?
6. Есть 2^{100} одинаковых с виду монет, среди которых все, кроме двух, настоящие (они весят одинаково), и две фальшивые (они тоже весят одинаково, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих). Как, используя чашечные весы, разделить все имеющиеся монеты на две кучки одинакового веса за 99 взвешиваний?
7. По кругу расположены $n \geq 100$ целых чисел. Оказалось, что для любых пяти подряд расположенных (именно в таком порядке) по кругу чисел a, b, c, d, e , выполняется условие $a + c + e = b + d$. Для каких n можно заведомо утверждать, что все n чисел равны нулю?
8. В каждой из точек 1, 2, 3 числовой прямой сидит блоха. Если одна блоха находится в точке a , а другая — в точке b , то блоха, сидящая в точке a , может перепрыгнуть в точку $2b - a$ (блохе разрешается прыгать в неположительные точки, и разрешается прыгать в точку с другой блохой). Может ли так случиться, что блохи через несколько прыжков окажутся в точках $2^{100}, 3^{100}, 2^{100} + 3^{100}$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n поделили на 2023 и получили неполное частное a и остаток b . Натуральное число k поделили на 2023 и получили неполное частное b и остаток c . Натуральное число ℓ поделили на 2023 и получили неполное частное c и остаток a . Может ли сумма $n + k + \ell$ быть кубом натурального числа?

2. Можно ли положить несколько непересекающихся домино на доску 20×30 так, чтобы каждое домино граничило по стороне ровно с тремя пустыми клетками, а каждая пустая клетка — ровно с двумя домино? (Домино — это прямоугольник из двух клеток).

3. В каждую клетку полосы 1×20 записана цифра так, что сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках отлична от 45. Верно ли, что всегда можно заменить нули на ненулевые цифры так, чтобы сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках по-прежнему отличалась от 45?

4. В стране 100 городов и есть несколько дорог, каждая из которых соединяет два города, и любые два города соединены не более, чем одной дорогой. Путешественник заметил, что каким бы способом ни распределить города страны по двум республикам, между этими двумя республиками будет не более 600 дорог. Докажите, что всего в стране не более 1200 дорог.

5. В каждой клетке таблицы 8×8 написано натуральное число. Для каждой пары соседних по стороне клеток Дима вычислил произведение чисел в этой паре клеток, а затем все полученные произведения сложил. Андрей, наоборот, вычислил суммы чисел во всех парах соседних по стороне клеток и все полученные суммы перемножил. Могло ли так оказаться, что итоговое число Димы оканчивается на 101, а итоговое число Андрея — на 100?

6. Есть 2^{100} одинаковых с виду монет, среди которых все, кроме двух, настоящие (они весят одинаково), и две фальшивые (они тоже весят одинаково, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих). Как, используя чашечные весы, разделить все имеющиеся монеты на две кучки одинакового веса за 99 взвешиваний?

7. По кругу расположены $n \geq 4$ положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех подряд расположенных (именно в таком порядке) по кругу чисел a, b, c, d , выполняется условие $a + d = b + c$. Для каких n можно заведомо утверждать, что все n чисел равны?

8. В каждой из точек $2^{100}, 5^{25}, 5^{100}$ числовой прямой сидит блоха. Если одна блоха находится в точке a , а другая — в точке b , то блоха, сидящая в точке a , может перепрыгнуть в точку $2b - a$ (блохе разрешается прыгать в неположительные точки, и разрешается прыгать в точку с другой блохой). Может ли так случиться, что блохи через несколько прыжков окажутся в точках $2^{100}, 5^{50}, 5^{100}$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральное число n поделили на 2023 и получили неполное частное a и остаток b . Натуральное число k поделили на 2023 и получили неполное частное b и остаток c . Натуральное число ℓ поделили на 2023 и получили неполное частное c и остаток a . Может ли сумма $n + k + \ell$ быть кубом натурального числа?

2. Можно ли положить несколько непересекающихся домино на доску 20×30 так, чтобы каждое домино граничило по стороне ровно с тремя пустыми клетками, а каждая пустая клетка — ровно с двумя домино? (Домино — это прямоугольник из двух клеток).

3. В каждую клетку полосы 1×20 записана цифра так, что сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках отлична от 45. Верно ли, что всегда можно заменить нули на ненулевые цифры так, чтобы сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках по-прежнему отличалась от 45?

4. В стране 100 городов и есть несколько дорог, каждая из которых соединяет два города и любые два города соединены не более, чем одной дорогой. Путешественник заметил, что каким бы способом ни распределить города страны по двум республикам, между этими двумя республиками будет не более 1200 дорог. Докажите, что существуют четыре города A, B, C, D , такие, что A не соединен дорогой с B , B не соединен с C , C не соединен с D , D не соединен с A .

5. В каждой клетке таблицы 8×8 написано натуральное число. Для каждой пары соседних по стороне клеток Дима вычислил произведение чисел в этой паре клеток, а затем все полученные произведения сложил. Андрей, наоборот, вычислил суммы чисел во всех парах соседних по стороне клеток и все полученные суммы перемножил. Могло ли так оказаться, что у обоих мальчиков итоговые числа оканчиваются на 1?

6. Есть шестнадцать одинаковых с виду монет, среди которых все, кроме двух, настоящие (они весят одинаково), и две фальшивые (они тоже весят одинаково, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих). Как, используя чашечные весы, разделить все имеющиеся монеты на две кучки одинакового веса за три взвешивания?

7. По кругу расположены 13 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех подряд расположенных (именно в таком порядке) по кругу чисел a, b, c, d , выполняется условие $a + d = b + c$. Обязательно ли все 13 чисел равны?

8. В каждой из точек 1, 2, 3 числовой прямой сидит блоха. Если одна блоха находится в точке a а другая — в точке b , то блоха, сидящая в точке a , может перепрыгнуть в точку $3b - a$ (блохе разрешается прыгать в неположительные точки, и разрешается прыгать в точку с другой блохой). Может ли так случиться, что блохи через несколько прыжков окажутся в точках $2^{100}, 3^{100}, 6^{100}$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023

ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Сколько решений имеет ребус, приведённый ниже (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры, числа не начинаются с нуля)?

$$\begin{array}{r}
 \\
 \\
 + \\
 \hline

 \end{array}$$

2. Можно ли положить несколько непересекающихся домино на доску 20×30 так, чтобы каждое домино граничило по стороне ровно с тремя пустыми клетками, а каждая пустая клетка — ровно с двумя домино? (Домино — это прямоугольник из двух клеток).

3. В каждую клетку полосы 1×20 записана цифра так, что сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках отлична от 45. Верно ли, что всегда можно заменить нули на ненулевые цифры так, чтобы сумма цифр в любых девяти подряд идущих клетках по-прежнему отличалась от 45?

4. В стране 100 городов и есть несколько дорог, каждая из которых соединяет два города и любые два города соединены не более, чем одной дорогой. Путешественник заметил, что каким бы способом ни распределить города страны по двум республикам, между этими двумя республиками будет не более 400 дорог. Докажите, что существует город, из которого выходит не более 56 дорог.

5. Оля хочет покрасить доску 8×8 в несколько цветов так, чтобы ни в одном столбце, строке или диагонали (из любого количества клеток) не нашлось трёх одноцветных клеток. Какое наименьшее количество цветов понадобится Оле?

6. Есть шестнадцать одинаковых с виду монет, среди которых все, кроме двух, настоящие (они весят одинаково), и две фальшивые (они тоже весят одинаково, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих). Как, используя чашечные весы, разделить все имеющиеся монеты на две кучки одинакового веса за три взвешивания?

7. По кругу расположены 13 положительных чисел. Оказалось, что для любых четырех подряд расположенных (именно в таком порядке) по кругу чисел a, b, c, d , выполняется условие $a + d = b + c$. Обязательно ли все 13 чисел равны?

8. В каждой из точек 1, 2, 3 числовой прямой сидит блоха. Если одна блоха находится в точке a а другая — в точке b , то блоха, сидящая в точке a , может перепрыгнуть в точку $3b - a$ (блохе разрешается прыгать в неположительные точки, и разрешается прыгать в точку с другой блохой). Может ли так случиться, что блохи через несколько прыжков окажутся в точках 2, 3, 6?