LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 03-09.05.2023

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 04.05.2023
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. Выпуклый многоугольник разделен на два многоугольника одной из своих диагоналей. У получившихся двух многоугольников суммарно на 290 диагоналей меньше, чем у исходного многоугольника. Сколько может быть сторон у исходного многоугольника?

2. Найдите все тройки целых чисел (a, b, c), удовлетворяющие системе уравнений

$$a^2 + a = b + c, \qquad b^2 + b = c + a, \qquad c^2 + c = a + b.$$

3. На mn мягких квадратных ковриках, уложенных в виде прямоугольника $m \times n$, сидят mn воспитанников детского садика. Каждый малыш смотрит в направлении одной из сторон прямоугольника. Когда няня хлопает в ладоши, каждый ребёнок переползает на соседний коврик в направлении, в котором он смотрел, и поворачивается на 90° влево или вправо по своему младенческому усмотрению. Если малыш выползает с коврика на холодный пол, он плачет. Если два малыша оказываются на одном коврике, они плачут. При каких m и n эти furthermore поползушки могут продолжаться без слёз неограниченно долго?

4. Дан треугольник ABC с углами $\angle BAC = 90^\circ$ и $\angle ACB = 54^\circ$. На биссектрисе BD выбрана точка E такая, что $DE = DC$. Докажите, что $BE = 2AD$.

5. Докажите при всех натуральных n неравенство

$$2^{2^n(n-2)+n+2} \leqslant (2^n)! \leqslant 2^{2^n(n-1)+1}.$$

6. Дано простое число $p > 2023$ и натуральные числа a и b, не делящиеся на p. Пусть $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ — все простые числа, меньшие $\sqrt[4]{\frac{p}{2}}$. Для каждого числа p_i подобрали такое натуральное число $q_i < p$, что $p_i q_i - 1$ делится на p. Докажите, что среди остатков при делении на p чисел $aq_1 + b$, $aq_2 + b$, $\dots$, $aq_m + b$ встречается не более трёх остатков q_i.

7. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Биссектриса угла BKC пересекает основания BC, AD в точках X, Y. Серединный перпендикуляр к XY пересекает боковые стороны AB, CD в точках P, Q. Докажите, что $PXQY$ — ромб.

8. В музее висят более 50 картин, написанные 15 красками. У каждых двух картин наборы использованных на них красок отличаются. Докажите, что можно найти четыре разные картины A, B, C и D такие, что каждая краска присутствующая и на A, и на B, есть хотя бы на одной из картин C и D.