МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Найдите все пары натуральных чисел m, n таких, что $(m+n)$-значное число $\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$ является квадратом натурального числа.

2. Нечётное натуральное число $n > 1$ поделили с остатком на все натуральные числа, меньшие n. Оказалось, что сумма всех получившихся остатков равна $\frac{(n-1)^2}{4}$. Найдите все такие n.

3. Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на клетчатом квадрате 2023×2023. В центральной клетке квадрата сидит шоколадная лягушка. В свой ход волшебник выбирает одно из четырех направлений, параллельных сторонам квадрата, и заколдовывает лягушку прыгнуть на d клеток в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка (за пределы квадрата выпрыгивать нельзя). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Альбус начинает, ходят волшебники по очереди. Кто из волшебников может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

4. В стране 28 городов, между некоторыми парами городов проложены односторонние дороги. При этом между любыми двумя городами проложено не более одной дороги. Известно, что для любых 16 городов есть циклический маршрут, проходящий по каждому из них ровно один раз (и не проходящий по другим городам). Докажите, что из любых 17 городов можно выбрать 15 таких, что существует циклический маршрут, проходящий по каждому из этих 15 городов ровно один раз (и не проходящий по другим городам).

5. Десять положительных чисел выписали в строчку в порядке возрастания. Оказалось, что все разности между соседними числами равны, и что удвоенное второе по счету число больше четвертого по счету. Докажите, что упятеренное произведение всех чисел, стоящих на нечетных местах, больше произведения всех чисел, стоящих на четных местах.

6. В квадрате 100×100 каждую клетку разбили на два треугольника, проведя какую-то диагональ клетки. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно покрасить все эти треугольники так, чтобы любые два треугольника, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета?

7. В зале 100 мудрецов, все друг друга видят. Каждому мудрецу надели чёрную, белую или зелёную шляпу. Все мудрецы одновременно должны написать на бумажках гипотезы о цветах своих шляп. Если хоть один не угадает цвет своей шляпы — всех казнят. Мудрецам дали посовещаться заранее, и они знают, что расклад шляп будет выбран случайно из множества всех 3^{100} раскладов. Поэтому мудрецы хотят выбрать себе стратегии так, чтобы число раскладов, в которых все угадывают, было максимально возможным. Чему равно это число?

8. Строка из 2023 цифр, каждая из которых — ноль или единица, называется *няшной*, если в ней есть не менее семи единиц подряд. Строка из 2024 цифр, каждая из которых — ноль или единица, называется *годной*, если в ней есть не менее восьми одинаковых цифр подряд. Найдите отношение количеств няшных и годных строк.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите все пары натуральных чисел m, n таких, что $(m+n)$-значное число $\underbrace{33\ldots3}_{m}\underbrace{66\ldots6}_{n}$ является квадратом натурального числа.

2. Сумма остатков от деления натурального числа N на все натуральные числа, меньшие N, равна N. Найдите все такие N.

3. Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на клетчатом квадрате 2023×2023. В центральной клетке квадрата сидит шоколадная лягушка. В свой ход волшебник выбирает одно из четырех направлений, параллельных сторонам квадрата, и заколдовывает лягушку прыгнуть на d клеток в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка (за пределы квадрата выпрыгивать нельзя). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Альбус начинает, ходят волшебники по очереди. Кто из волшебников может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

4. Хозяин цирка расставил 100 блох на числовой прямой, причем никакие две блохи не оказались в одной точке. Устроившись, блохи начинают прыгать по следующим правилам. Каждую секунду каждая блоха выбирает ближайшую по расстоянию точку, занятую одной или несколькими другими блохами (если таких точек две, то из них выбирается правая), а затем все блохи одновременно прыгают на выбранные ими точки. Через некоторое время все блохи собрались ровно в двух точках. За какое наименьшее количество секунд это могло произойти?

5. Положительные числа $a < b < c < d < e$ таковы, что все разности между соседними числами равны. Известно, что $2b > d$. Докажите, что $5ad > 2be$.

6. В квадрате 100×100 каждую клетку разбили на два треугольника, проведя какую-то диагональ клетки. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно покрасить все эти треугольники так, чтобы любые два треугольника, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета?

7. В зале 99 мудрецов, все друг друга видят. Каждому мудрецу надели чёрную или белую шляпу. Все мудрецы одновременно должны написать на бумажках гипотезы о цветах своих шляп. Если хоть один не угадает цвет своей шляпы — всех казнят. Мудрецам дали посовещаться заранее, и они знают, что расклад шляп будет выбран случайно из множества всех 2^{99} раскладов. Поэтому мудрецы хотят выбрать себе стратегии так, чтобы число раскладов, в которых все угадывают, было максимально возможным. Чему равно это число, и как действовать мудрецам?

8. Строка из 2023 цифр, каждая из которых — 0 или 1, называется *няшной*, если в ней есть не менее семи нулей подряд. Строка из 2024 цифр, каждая из которых — 0 или 1, называется *годной*, если она начинается с 1, и в ней есть не менее восьми одинаковых цифр подряд. Докажите, что няшных и годных строк — поровну.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Андрей вставил в последовательности 222222222 (9 двоек) между некоторыми цифрами знаки арифметических действий: «+», «−», «×», «÷», но не скобки так, что значение полученного выражения — трёхзначное число. А чему, самое большее, оно может быть равно?

2. Сумма остатков от деления натурального числа N на все натуральные числа, меньшие N, равна N. Найдите все такие N.

3. Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на клетчатом квадрате 2023×2023. В центральной клетке квадрата сидит шоколадная лягушка. В свой ход волшебник выбирает одно из четырех направлений, параллельных сторонам квадрата, и заколдовывает лягушку прыгнуть на d клеток в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка (за пределы квадрата выпрыгивать нельзя). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Альбус начинает, ходят волшебники по очереди. Кто из волшебников может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

4. Хозяин цирка расставил 100 блох на числовой прямой, причем никакие две блохи не оказались в одной точке. Устроившись, блохи начинают прыгать по следующим правилам. Каждую секунду каждая блоха выбирает ближайшую по расстоянию точку, занятую одной или несколькими другими блохами (если таких точек две, то из них выбирается правая), а затем все блохи одновременно прыгают на выбранные ими точки. Мог ли хозяин цирка расставить блох так, что через 10 000 секунд они будут находиться ровно в четырёх точках?

5. Положительные числа $a < b < c < d < e$ таковы, что все разности между соседними числами равны. Известно, что $2b > d$. Докажите, что $5ad > 2be$.

6. В квадрате 8×8 каждую клетку разбили на два треугольника, проведя какую-то диагональ клетки. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно покрасить эти треугольники так, чтобы любые два треугольника, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета?

7. В зале 99 мудрецов, все друг друга видят. Каждому мудрецу надели чёрную или белую шляпу. Все мудрецы одновременно должны написать на бумажках гипотезы о цветах своих шляп. Если хоть один не угадает цвет своей шляпы — всех казнят. Мудрецам дали посовещаться заранее, и они знают, что расклад шляп будет выбран случайно из множества всех 2^{99} раскладов. Поэтому мудрецы хотят выбрать себе стратегии так, чтобы число раскладов, где все угадывают, было не менее 2^{98}. Смогут ли они это сделать?

8. По кругу расставлены 100 волшебников — некоторые рыцари, а остальные лжецы (все волшебники знают, кто есть кто). Любой из них может сказать: «Я меняю сущность своих соседей (т.е. превращаю рыцаря в лжеца, и наоборот). Вжух!» Но тот, кто в данный момент рыцарь, действительно меняет сущность соседей, а тот, кто в данный момент лжец, ничего не меняет, только говорит так. Докажите, что в любой ситуации волшебники смогут действовать так, что в процессе этих превращений останется не более двух рыцарей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 08.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Можно ли вставить между некоторыми цифрами в последовательности 222222222 (9 двоек) знаки арифметических действий: «$+$», «$-$», «$\times$», «$\div$», но не скобки так, чтобы значение полученного выражения было равно 999?

2. Сумма остатков от деления натурального числа N на все натуральные числа, меньшие N, равна N. Найдите все такие N.

3. Волшебники Альбус и Геллерт играют в игру на клетчатом квадрате 2023×2023. В центральной клетке квадрата сидит шоколадная лягушка. В свой ход волшебник выбирает одно из четырех направлений, параллельных сторонам квадрата, и заколдовывает лягушку прыгнуть на d клеток в выбранном направлении, где d изначально равно 1 и увеличивается на 1 после каждого прыжка (за пределы квадрата выпрыгивать нельзя). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Альбус начинает, ходят волшебники по очереди. Кто из волшебников может обеспечить себе победу независимо от действий соперника?

4. Хозяин цирка расставил 100 блох на числовой прямой, причем никакие две блохи не оказались в одной точке. Устроившись, блохи начинают прыгать по следующим правилам. Каждую секунду каждая блоха выбирает ближайшую по расстоянию точку, занятую одной или несколькими другими блохами (если таких точек две, то из них выбирается правая), а затем все блохи одновременно прыгают на выбранные ими точки. Мог ли хозяин цирка расставить блох так, что через 10 000 секунд они будут находиться ровно в четырёх точках?

5. Положительные числа $a < b < c < d$ таковы, что $d - c = c - b = b - a$ и $2b > d$. Докажите, что $8ac > 3bd$.

6. В квадрате 8×8 каждую клетку разбили на два треугольника, проведя какую-то диагональ клетки. В какое наименьшее количество цветов заведомо можно покрасить эти треугольники так, чтобы любые два треугольника, имеющие общую сторону или вершину, были покрашены в разные цвета?

7. Учитель решил накормить свой класс пиццей. При этом он придумал следующий квест. Он выбрал 11 локаций в школе и пронумеровал их числами от 1 до 11. Его план состоит в том, чтобы поместить в i-ю локацию бумажку, на которой написано, что нужно идти в $i+1$-ю локацию, а в 11-ю локацию — пиццу. Таким образом, стартовав из 1-й локации школьники пройдут квест и найдут пиццу. Учитель передал бумажки помощнику, чтобы тот разложил их по локациям. Однако тот забыл, куда нужно положить какую бумажку и разложил их в случайном порядке. Всегда ли школьники смогут найти пиццу?

8. По кругу расставлены 100 волшебников — половина рыцари, а остальные лжецы (все волшебники знают, кто есть кто). При этом ровно два рыцаря соседствуют с лжецами. Любой из них может сказать: «Я меняю сущность своих соседей (т.е. превращаю рыцаря в лжеца, и наоборот). Вжух!» Но тот, кто в данный момент рыцарь, действительно меняет сущность соседей, а тот, кто в данный момент лжец, ничего не меняет, только говорит так. Докажите, что волшебники смогут действовать так, что в процессе этих превращений останется не более двух рыцарей.