Решения задач командной олимпиады 8 класса

1. *Выпуклый многоугольник разделен на два многоугольника одной из своих диагоналей. У получившихся двух многоугольников суммарно на 290 диагоналей меньше, чем у исходного многоугольника. Сколько может быть сторон у исходного многоугольника?*

Ответ: 36 или 292. **Решение.** Пусть мы провели диагональ d, которая поделила многоугольник на две части с количеством сторон $x+2$ и $y+2$. Тогда из множества диагоналей пропала сама диагональ d, а также xy диагоналей, которые её пересекали. Следовательно,

$$xy + 1 = 290 \quad \Longleftrightarrow \quad xy = 289 = 17^2.$$

Легко видеть, что подходят варианты $x = y = 17$, $x = 1$ $y = 289$ или $x = 289, y = 1$, откуда и получаем ответ.

2. *Найдите все тройки целых чисел (a, b, c), удовлетворяющие системе уравнений $a^2 + a = b + c$, $b^2 + b = c + a$, $c^2 + c = a + b$.*

Ответ: $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$. **Решение.** Не будем использовать условие, что числа a, b и c целые. Прибавим $a+1$ к обеим частям первого уравнения, $b+1$ к обеим частям второго, $c+1$ к обеим частям третьего. Получится система уравнений

$$(a+1)^2 = (b+1)^2 = (c+1)^2 = a + b + c + 1.$$

Если числа $a+1$, $b+1$, $c+1$ неотрицательны, то $a = b = c$ и из первого уравнения в условии задачи находим, что все эти числа равны 0 или 1. Если же, скажем, $a+1$ и $b+1$ разных знаков, т.е. $a+1 = -(b+1)$, то $a+b = -2$, и тогда третье уравнение из условия задачи не выполнено ни при каких c, так как дискриминант квадратного трёхчлена c^2+c+2 отрицательный.

3. *На mn мягких квадратных ковриках, уложенных в виде прямоугольника $m \times n$, сидят mn воспитанников детского садика. Каждый малыш смотрит в направлении одной из сторон прямоугольника. Когда няня хлопает в ладоши, каждый ребёнок переползает на соседний коврик в направлении, в котором он смотрел, и поворачивается на 90° влево или вправо по своему младенческому усмотрению. Если малыш выползает с коврика на холодный пол, он плачет. Если два малыша оказываются на одном коврике, они плачут. При каких m и n эти попозушки могут продолжаться без слёз неограниченно долго?*

Ответ: Если m и n оба чётны. **Решение.** Если m и n оба чётны, то раскрасим коврики в четыре цвета, как показано на рисунке.

1	2	1	2	$\cdots$
3	4	3	4	$\cdots$
1	2	1	2	$\cdots$
3	4	3	4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Прямоугольник разбивается на квадратики 2×2, и дети могут ползать внутри квадратиков по циклу: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

Если же хотя бы одно чисел m и n нечётно, то при той же раскраске количество клеток цвета 1 больше количества клеток цвета 4. Заметим, что через два хода все дети все дети с ковриков 1-го цвета окажутся на ковриках 4-го цвета. Поэтому слёзы неизбежны.

4. *Дан треугольник ABC с углами $\angle BAC = 90^\circ$ и $\angle ACB = 54^\circ$. На биссектрисе BD выбрана точка E такая, что $DE = DC$. Докажите, что $BE = 2AD$.*

Решение. Отметим на прямой AC за точку A такую точку F, что $AD = AF$. В треугольнике FBD медиана BA является высотой, а значит он равнобедренный. Тогда из счёта углов следует, что $\angle ABD = \angle CBD = \angle ABF = 18^\circ$, $\angle CBF = \angle BCF = 54^\circ$. А значит, треугольник FBC равнобедренный и $FB = FC$. Следовательно, $BE = BD - DE = BF - DE = CF - CD = 2AD$, что и требовалось доказать.

5. *Докажите при всех натуральных n неравенство*

$$2^{2^n(n-2)+n+2} \leqslant (2^n)! \leqslant 2^{2^n(n-1)+1}.$$

Решение. Для начала заметим следующие тождества. Во-первых, $2^x + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \ldots + 2^{x+k} = 2^{x+k+1}$, откуда $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \ldots + 2^{x+k} = 2^{x+k+1} - 2^x$. А тогда

$$\begin{aligned}
1 + 2\cdot2 + 3\cdot4 + 4\cdot8 + \ldots + n\cdot2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} + \\
+2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} + \\
+4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} + \\
+8 + \ldots + 2^{n-1} \ldots = \\
= (2^n - 1) + (2^n - 2) + \ldots + (2^n - 2^{n-1}) = n\cdot2^n - (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) = n\cdot2^n - (2^n - 1) = (n-1)\cdot2^n - 1.
\end{aligned}$$

И отметим еще одно тождество, которое сразу сводится к только что доказанному:

$$1\cdot2 + 2\cdot4 + 3\cdot8 + 4\cdot16 + \ldots + (n-1)\cdot2^{n-1} = 1 + 2\cdot2 + 3\cdot4 + 4\cdot8 + \ldots + n\cdot2^{n-1} - (1 + 2 + \ldots 2^{n-1}) = (n-2)2^n + 2.$$

Докажем, что $(2^n)! \leqslant 2^{2^n(n-1)+1}$. Заметим, что $3, 4 \leqslant 4, \quad 5, 6, 7, 8 \leqslant 8, \quad \ldots, \quad 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n \leqslant 2^n$. Тогда

$$(2^n)! \leqslant 2^1 \cdot 4^2 \cdot 8^4 \cdot \ldots \cdot (2^n)^{2^{n-1}} = 2^{1+2\cdot 2+3\cdot 4+4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2^{n-1}} = 2^{2^n(n-1)+1}.$$

Докажем, что $2^{2^n(n-2)+n+2} \leqslant (2^n)!$. Заметим, что $2, 3 \geqslant 2, \quad 4, 5, 6, 7 \geqslant 4, \quad \ldots, \quad 2^{n-1}, \ldots, 2^n-1 \geqslant 2^{n-1}$. Тогда

$$(2^n)! \geqslant 2^2 \cdot 4^4 \cdot 8^8 \cdot \ldots \cdot (2^{n-1})^{2^{n-1}} \cdot 2^n = 2^{1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 8+4\cdot 16+\ldots+(n-1)\cdot 2^{n-1}} \cdot 2^n = 2^{(n-2)2^n+2+n}.$$

6. *Дано простое число $p > 2023$ и натуральные числа a и b, не делящиеся на p. Пусть $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ — все простые числа, меньшие $\sqrt[4]{\frac{p}{2}}$. Для каждого числа p_i подобрали такое натуральное число $q_i < p$, что $p_iq_i - 1$ делится на p. Докажите, что среди остатков при делении на p чисел $aq_1 + b$, $aq_2 + b$, $\ldots$, $aq_m + b$ встречается не более трёх остатков q_i.*

Решение. Очевидно, все числа aq_i+b дают разные остатки при делении на p; если $aq_i+b \equiv aq_j+b \pmod p$, то $aq_i \equiv aq_j \pmod p$, откуда (поскольку $(a,p)=1$) $q_i \equiv q_j \pmod p$, то есть $q_i = q_j$ и $i = j$.

Если $q_i \equiv aq_i + b \pmod p$, то, очевидно, $a \not\equiv 1 \pmod p$, и $b \equiv q_i(1-a) \pmod p$. Отсюда вычет $q_i \bmod p$ определяется однозначно, то есть такое q_i может быть только одно.

Наконец, оценим количество пар (i,j), $i \neq j$, в которых $q_i \equiv aq_j + b \pmod p$. Для любых двух таких пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2), очевидно, $q_{i_1} - q_{i_2} \equiv a(q_{j_1} - q_{j_2}) \pmod p$ Предположим, что есть хотя бы три таких пары (i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), и наибольшее из простых чисел с этими индексами – это одно из чисел p_{i_3} и p_{j_3}. Записывая предыдущее сравнение для этих пар, получаем

$$(q_{i_1} - q_{i_2})(q_{j_1} - q_{j_3}) \equiv (q_{i_1} - q_{i_3})(q_{j_1} - q_{j_2}) \pmod p.$$

Домножая это сравнение на $p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}$ (и вспоминая, что $p_iq_j \equiv 1 \pmod p$), получаем

$$p_{i_3}p_{j_2}(p_{i_2} - p_{i_1})(p_{j_3} - p_{j_1}) \equiv p_{i_2}p_{j_3}(p_{i_3} - p_{i_1})(p_{j_2} - p_{j_1}) \pmod p.$$

По условию обе стороны сравнения по абсолютной величине меньше $p/2$. Поэтому они равны:

$$p_{i_3}p_{j_2}(p_{i_2} - p_{i_1})(p_{j_3} - p_{j_1}) = p_{i_2}p_{j_3}(p_{i_3} - p_{i_1})(p_{j_2} - p_{j_1}).$$

Следовательно, p_{i_3} – делитель разности $p_{j_2} - p_{j_1}$, а p_{j_3} – делитель разности $p_{i_2} - p_{i_1}$. Но тогда, вопреки сделанному предположению, ни одно из чисел p_{i_3} и p_{j_3} – не наибольшее. Значит, пар не более двух, что в сочетании с, возможно, имеющимся единственным i, для которого $q_i \equiv aq_j + b \pmod p$, даёт не более трёх общих остатков в двух множествах.

7. *Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Биссектриса угла BKC пересекает основания BC, AD в точках X, Y. Серединный перпендикуляр к XY пересекает боковые стороны AB, CD в точках P, Q. Докажите, что $PXQY$ — ромб.*

Решение. Пусть M — середина отрезка XY. Проведем через точку M прямые B_1D_1 и A_1C_1, параллельные диагоналям трапеции (точки A_1 и D_1 лежат на прямой AD, точки B_1 и C_1 лежат на прямой BC). Тогда трапеция $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм (так как точка пересечения его диагоналей лежит на средней линии). Пусть P_1 и Q_1 — точки пересечения серединного перпендикуляра MQ с отрезками A_1B_1 и C_1D_1, ясно, что P_1XQ_1Y — параллелограмм. Поскольку MQ_1 является также биссектрисой угла C_1MD_1,

$$C_1Q_1 : Q_1D_1 = MC_1 : MD_1 = MC_1 : MB_1 = CC_1 : BB_1$$

(последнее в силу подобия и одинаковой расположенности треугольников BKC и B_1MC_1). Но в трапеции D_1CC_1D точка пересечения диагоналей делит диагональ C_1D_1 в отношении $CC_1 : D_1D = CC_1 : BB_1$. Таким образом, точка пересечения диагоналей трапеции D_1CC_1D — это Q_1, следовательно, $Q = Q_1$. Аналогично $P = P_1$, чтд.

8. *В музее висят более 50 картин, написанные 15 красками. У каждых двух картин наборы использованных на них красок отличаются. Докажите, что можно найти четыре разных картины A, B, C и D такие, что каждая краска присутствующая и на A, и на B, есть хотя бы на одной из картин C и D.*

Решение. Пусть всего картин S. Будем говорить, что краска **запрещает** упорядоченную четвёрку картин (A, B, C, D), если она есть на картинах A и B, и её нет на картинах C и D. Тогда нам нужно найти четвёрку картин, которую не запрещает ни одна из красок. Предположим, что i-я краска присутствует на x_i картинах. Тогда i-я краска запрещает $x_i \cdot (x_i - 1) \cdot (S - x_i) \cdot (S - 1 - x_i)$ четвёрок картин, так как имеется x_i способов выбрать A, $x_i - 1$ способов выбрать B, $S - x_i$ способов выбрать C и $S - 1 - x_i$ способов выбрать D. По неравенству о средних

$$x_i \cdot (x_i - 1) \cdot (S - x_i) \cdot (S - 1 - x_i) \leqslant \frac{(x_i + (x_i - 1) + (S - 1 - x_i) + (S - x_i))^4}{4^4} = \frac{(S-1)^4}{16}.$$

Следовательно, 15 цветов запрещают не более $15 \cdot \dfrac{(S-1)^4}{16}$ четвёрок. А всего четвёрок картин $S \cdot (S-1) \cdot (S-2) \cdot (S-3)$, что больше, чем $\dfrac{15(S-1)^4}{16}$, так как $S(S-1) > (S-1)^2$ и $16(S-2)(S-3) = 16S^2 - 80S + 96 = (15S^2 - 30S + 15) + (S^2 - 50S + 81) > 15(S-1)^2$ (в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $S^2 - 50S + 81 = S(S-50) + 81 > 0$ при $S > 50$). Значит, четвёрок картин больше, чем могут запретить цвета, откуда и следует решение задачи.

Замечание. На самом деле неравенство $S \cdot (S-1) \cdot (S-2) \cdot (S-3) > \dfrac{15(S-1)^4}{16}$ верно при $S \geqslant 34$, соответственно, приведенное рассуждение остается верным, если число картин не меньше 34.