МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА, ФИНАЛ

1. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$. Оказалось, что для любых натуральных k и ℓ число $a_k + a_\ell$ делится на $k + \ell$. Докажите, что для любых натуральных $k \neq \ell$ число $a_k - a_\ell$ делится на $k - \ell$.

2. Витя задумал натуральное число n от 1 до 50. За ход Петя выбирает натуральное число m и задает Вите вопрос: «Верно ли, что n делится на m?», — на который Витя отвечает правдиво. За какое наименьшее число вопросов Петя гарантированно сможет угадать число Вити?

3. Про ненулевые числа a, b, c известно, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 3$. Докажите, что

$$5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 4\left(ab + bc + ca\right) \geqslant 6.$$

4. Игорь и Саша играют в игру. Вначале Игорь рисует на листе бумаге выпуклый 2023-угольник черной ручкой. Затем они по очереди, начиная с Саши, проводят в этом многоугольнике по одной диагонали красным, синим или зеленым карандашом, пока все диагонали не будут проведены. Саша выигрывает, если в результате одна из частей, на которые будет разбит многоугольник, окажется тупоугольным треугольником с одноцветной границей. Если такой части не образуется, побеждает Игорь. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

5. Существуют ли три таких различных натуральных числа $a, b, c > 1000$, что любые два из них можно выписать друг за другом (в каком-то порядке) так, чтобы полученное число было точным квадратом?

6. Сто ведьм проходят вступительное испытание на факультет Прорицания. Их выстроили в круг, и каждая сделала три предсказания (про себя, соседку слева и соседку справа), зачислят ли их на факультет. Приемная комиссия выслушала предсказания и теперь хочет зачислить на факультет тех и только тех ведьм, кто сделал хотя бы два верных предсказания из трех. Верно ли, что комиссии гарантированно удастся это сделать?

7. В школе три класса по n человек в каждом, все $3n$ человек разного роста. Назовем разбиение этих людей на n групп по три человека *хорошим*, если в каждой группе все ученики из разных классов. В каждой группе выбирают самого высокого человека. Назовем таких людей *большими*. Оказалось, что в любом хорошем разбиении есть хотя бы 10 больших людей из каждого класса. При каком наименьшем n такое могло быть?

8. Равные диагонали AD и CE выпуклого пятиугольника $ABCDE$ пересекаются в точке F. Оказалось, что $\angle AFB = \angle AFE = \angle BAE = \angle BDC$. Докажите, что $BF + DF = CF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3–8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА, ФИНАЛ

1. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$. Оказалось, что для любых натуральных k и ℓ число $a_k + a_\ell$ делится на $k + \ell$. Докажите, что для любых натуральных $k \neq \ell$ число $a_k - a_\ell$ делится на $k - \ell$.

2. У Васи есть словарь, состоящий из нескольких стобуквенных слов, содержащих только буквы A и B. В каждую клетку таблицы 100×100 Вася хочет вписать либо букву A, либо букву B так, чтобы каждый столбец таблицы был словом из словаря при чтении сверху вниз, и каждая строка таблицы была словом из словаря при чтении слева направо. Чему равно наименьшее натуральное число m такое, что если в словаре есть не менее m различных слов, то Вася заведомо сможет заполнить таблицу нужным образом, независимо от того, какие слова находятся в словаре?

3. Про ненулевые числа a, b, c известно, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 3$. Докажите, что

$$5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 4\,(ab + bc + ca) \geqslant 6.$$

4. Игорь и Саша играют в игру. Вначале Игорь рисует на листе бумаге выпуклый 2023-угольник черной ручкой. Затем они по очереди, начиная с Саши, проводят в этом многоугольнике по одной диагонали красным, синим или зеленым карандашом, пока все диагонали не будут проведены. Саша выигрывает, если в результате одна из частей, на которые будет разбит многоугольник, окажется тупоугольным треугольником с одноцветной границей. Если такой части не образуется, побеждает Игорь. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

5. Существуют ли три таких различных натуральных числа $a, b, c > 1000$, что любые два из них можно выписать друг за другом (в каком-то порядке) так, чтобы полученное число было точным квадратом?

6. Сто ведьм проходят вступительное испытание на факультет Прорицания. Их выстроили в круг, и каждая сделала три предсказания (про себя, соседку слева и соседку справа), зачислят ли их на факультет. Приемная комиссия выслушала предсказания и теперь хочет зачислить на факультет тех и только тех ведьм, кто сделал хотя бы два верных предсказания из трех. Верно ли, что комиссии гарантированно удастся это сделать?

7. Дано натуральное число k. Назовем покраску натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов *интересной*, если для некоторого натурального $n \leqslant 2023$ ровно n чисел покрашены в тот же цвет, что и число n (считая само число n). Оказалось, что существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с суммой 2023, что любая покраска натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов, в которой ровно a_1 чисел 1-го цвета, ровно a_2 чисел 2-го цвета, и т.д., ровно a_k чисел k-го цвета, является интересной. При каких k такое возможно?

8. Равные диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $\angle AOB = 120^\circ$. На отрезке AO отмечена точка P, а на отрезке BO — точка Q так, что $AQ = PD$ и $CQ = PB$. Докажите, что $AO + BO + PO + QO = CO + DO$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$. Оказалось, что для любых натуральных k и ℓ число $a_k + a_\ell$ делится на $k + \ell$. Докажите, что для любых натуральных $k \neq \ell$ число $a_k - a_\ell$ делится на $k - \ell$.

2. У Васи есть словарь, состоящий из нескольких стобуквенных слов, содержащих только буквы A и B. В каждую клетку таблицы 100×100 Вася хочет вписать либо букву A, либо букву B так, чтобы каждый столбец таблицы был словом из словаря при чтении сверху вниз, и каждая строка таблицы была словом из словаря при чтении слева направо. Чему равно наименьшее натуральное число m такое, что если в словаре есть не менее m различных слов, то Вася заведомо сможет заполнить таблицу нужным образом, независимо от того, какие слова находятся в словаре?

3. Для $a, b \neq 0$ оказалось, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 3$. Докажите, что $5\left(a^2 + b^2\right) + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} > 9 + 8ab$.

4. Игорь и Саша играют в игру. Вначале Игорь рисует на листе бумаге выпуклый 2023-угольник черной ручкой. Затем они по очереди, начиная с Саши, проводят в этом многоугольнике по одной диагонали красным, синим или зеленым карандашом, пока все диагонали не будут проведены. Саша выигрывает, если в результате одна из частей, на которые будет разбит многоугольник, окажется тупоугольным треугольником с одноцветной границей. Если такой части не образуется, побеждает Игорь. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

5. Вадим выбрал натуральное число n, у которого ровно 210 натуральных делителей (включая единицу и само число n). Он выписал все эти делители в ряд в порядке убывания. Может ли сумма первого и четвертого числа в получившемся ряду быть степенью простого числа?

6. Сто ведьм проходят вступительное испытание на факультет Прорицания. Их выстроили в круг, и каждая сделала три предсказания (про себя, соседку слева и соседку справа), зачислят ли их на факультет. Приемная комиссия выслушала предсказания и теперь хочет зачислить на факультет тех и только тех ведьм, кто сделал хотя бы два верных предсказания из трех. Верно ли, что комиссии гарантированно удастся это сделать?

7. Дано натуральное число k. Назовем покраску натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов *интересной*, если для некоторого натурального $n \leqslant 2023$ ровно n чисел покрашены в тот же цвет, что и число n (считая само число n). Оказалось, что существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с суммой 2023, что любая покраска натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов, в которой ровно a_1 чисел 1-го цвета, ровно a_2 чисел 2-го цвета, и т.д., ровно a_k чисел k-го цвета, является интересной. При каких k такое возможно?

8. Равные диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $\angle AOB = 120^\circ$. На отрезке AO отмечена точка P, а на отрезке BO — точка Q так, что $AQ = PD$ и $CQ = PB$. Докажите, что $AO + BO + PO + QO = CO + DO$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Состоялся однокруговой теннисный турнир, в котором приняло участие 100 человек. За победу в матче давалось 1 очко, за поражение 0 (ничьих в теннисе не бывает). Сергей видит, сколько очков набрал каждый участник в результате турнира. Он пытается определить результаты всех матчей. Для этого он выбирает пару участников, которую ещё не выбирал, и высказывает предположение о результате матча между ними. Ему сообщают, угадал ли он. После этого он выбирает новую пару, и так продолжается, пока не закончатся пары. Верно ли, что Сергей всегда может действовать так, чтобы угадать исход более чем в половине всех матчей?

2. Для $a, b \neq 0$ оказалось, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 3$. Докажите, что $5\left(a^2+b^2\right) + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} > 9 + 8ab$.

3. Игорь и Саша играют в игру. Вначале Игорь рисует на листе бумаге выпуклый 2023-угольник черной ручкой. Затем они по очереди, начиная с Саши, проводят в этом многоугольнике по одной диагонали красным, синим или зеленым карандашом, пока все диагонали не будут проведены. Саша выигрывает, если в результате одна из частей, на которые будет разбит многоугольник, окажется тупоугольным треугольником с одноцветной границей. Если такой части не образуется, побеждает Игорь. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

4. Даны натуральные числа a и b такие, что $a > b > 1$ и b — наибольший делитель числа a, отличный от a. Докажите, что число $a + b$ не является степенью двойки.

5. Между Машей и Таней состоялся следующий диалог о любимом числе Маши.

– Моё любимое число составляется так: берём две разные ненулевые цифры x и y и записываем $\overline{xxxxxyyyyy}$. Оно, кстати, делится и на x, и на y, – сказала Маша.

– Я не знаю, что у тебя за число, но среди четырёх подходящих чисел, что я придумала, ты можешь взять одно, прибавить к нему второе, вычесть из результата третье и ты получишь четвёртое! – сказала Таня.

– Прикольно! Я уверена, что моё любимое число среди этих четырёх! – сказала Маша.

– Теперь я знаю твоё число! – сказала Таня.

А чему же равно Машино любимое число?

6. На поле 10×10 для морского боя спрятаны 12 трёхпалубных кораблей (прямоугольники 1×3, не соприкасающиеся даже вершинами). Какого наименьшего количества выстрелов хватит, чтобы наверняка ранить хотя бы один из них?

7. Дано натуральное число k. Назовем покраску натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов *интересной*, если для некоторого натурального $n \leqslant 2023$ ровно n чисел покрашены в тот же цвет, что и число n (считая само число n). Оказалось, что существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с суммой 2023, что любая покраска натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов, в которой ровно a_1 чисел 1-го цвета, ровно a_2 чисел 2-го цвета, и т.д., ровно a_k чисел k-го цвета, является интересной. При каких k такое возможно?

8. Равные диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $\angle AOB = 120^\circ$. На отрезке AO отмечена точка P, а на отрезке BO — точка Q так, что $AQ = PD$ и $CQ = PB$. Докажите, что $AO+BO+PO+QO = CO+DO$.

LX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 03.05 – 09.05.2023

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Состоялся однокруговой теннисный турнир, в котором приняло участие 100 человек. За победу в матче давалось 1 очко, за поражение 0 (ничьих в теннисе не бывает). Сергей видит, сколько очков набрал каждый участник в результате турнира. Он пытается определить результаты всех матчей. Для этого он выбирает пару участников, которую ещё не выбирал, и высказывает предположение о результате матча между ними. Ему сообщают, угадал ли он. После этого он выбирает новую пару, и так продолжается, пока не закончатся пары. Верно ли, что Сергей всегда может действовать так, чтобы угадать исход более чем в половине всех матчей?

2. Для $a, b \neq 0$ оказалось, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 3$. Докажите, что $5\left(a^2+b^2\right) + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} > 9 + 8ab$.

3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a > b > 1$ и b — наибольший делитель числа a, отличный от a. Докажите, что число $a + b$ не является степенью двойки.

4. Между Машей и Таней состоялся следующий диалог о любимом числе Маши.

– Моё любимое число составляется так: берём две разные ненулевые цифры x и y и записываем $\overline{xxxxxyyyyy}$. Оно, кстати, делится и на x, и на y, – сказала Маша.

– Я не знаю, что у тебя за число, но среди четырёх подходящих чисел, что я придумала, ты можешь взять одно, прибавить к нему второе, вычесть из результата третье и ты получишь четвёртое! – сказала Таня.

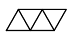
– Прикольно! Я уверена, что моё любимое число среди этих четырёх! – сказала Маша.

– Теперь я знаю твоё число! – сказала Таня.

А чему же равно Машино любимое число?

5. Дано натуральное число k. Назовем покраску натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов *интересной*, если для некоторого натурального $n \leqslant 2023$ ровно n чисел покрашены в тот же цвет, что и число n (считая само число n). Оказалось, что существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ с суммой 2023, что любая покраска натуральных чисел от 1 до 2023 в k цветов, в которой ровно a_1 чисел 1-го цвета, ровно a_2 чисел 2-го цвета, и т.д., ровно a_k чисел k-го цвета, является интересной. При каких k такое возможно?

6. В треугольнике ABC известно, что $AC = 2$, $AB = 3$ и $BC = 4$. На стороне AB выбрана точка D так, что $AD = 1$. Внутри угла BAC выбрана точка E такая, что $2\angle DEC = \angle BAC = \angle EDB$. Найдите BE.

7. На бумаге с треугольными клеточками нарисован клетчатый многоугольник. Оказалось, что его можно разрезать без остатка на 2023 фигурки вида . Докажите, что этот многоугольник нельзя разрезать на 2023 фигурки вида .

8. Из 152 монет 7 фальшивых. Все фальшивые монеты имеют одинаковый вес, и все настоящие монеты имеют одинаковый вес, но фальшивые легче настоящих. Определите 19 настоящих монет на чашечных весах без гирь за три взвешивания.