МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD. Окружность с центром I, лежащим по другую сторону от прямой BD, нежели точка A, касается прямых AD, AC и BD, а окружность с центром J, лежащим по другую сторону от прямой AC, нежели точка B, касается прямых CB, AC и BD. Докажите, что $IC = JD$.

2. Пусть q — простое число, $m = q^3$ и $p(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, где α и β – вещественные числа. Докажите, что среди остатков при делении на q чисел $[p(1)]$, $[p(2)]$, $\ldots$, $[p(m)]$ встречается не менее $q/6$ различных.

3. Последовательность положительных вещественных чисел a_0, a_1, a_2, $\ldots$ такова, что

$$a_{n+2} \leqslant \frac{2023a_n}{a_n a_{n+1} + 2023}$$

для всех целых чисел $n \geqslant 0$. Докажите, что или $a_{2023} < 1$, или $a_{2024} < 1$.

4. Альпака выбирает множество A, состоящее из m целых неотрицательных чисел, и сообщает это множество Барсуку. Далее Альпака и Барсук играют в следующую игру. У них имеется выражение

$$E = v_0 \cdot 2^0 + v_1 \cdot 2^1 + \ldots + v_{99} \cdot 2^{99}.$$

Каждым ходом игрок пишет 0 или 1 вместо одного из (ранее не заменённых) v_i. Ходят по очереди, начинает Барсук. После 100 ходов подсчитывается значение полученного выражения. При каком наименьшем m Альпака может выбрать множество A и играть так, чтобы значение полученного выражения оказалось в A?

5. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M, L и K (в порядке B, M, L, K, C) так, что $BM = ML = LK = KC$. Оказалось, что $\angle ACB = \angle MAB$. Докажите, что $\angle LAK > 1{,}5\angle CAK$.

6. *Разбиением* множества X называется набор его непересекающихся подмножеств, которые в объединении дают X. У множества M взяли три разбиения на 999 подмножеств. Оказалось, что для любого подмножества A из первого разбиения, подмножества B из второго и C из третьего, $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| \geqslant 999$. Какое наименьшее количество элементов может быть в M?

7. Пусть S — конечное множество натуральных чисел. Предположим, что имеется ровно 2023 упорядоченные пары (x, y) элементов из S, в которых произведение xy является точным квадратом. Докажите, что можно найти по крайней мере четыре различных элемента в S таких, что ни одно из их попарных произведений не является точным квадратом. Примечание: например, если $S = \{1, 2, 4\}$, таких упорядоченных пар ровно пять: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$, и $(4, 4)$.

8. Сумма вещественных чисел a, b и c равна 1. Докажите, что если три числа $a + bc$, $b + ca$ и $c + ab$ рациональны и отличны от нуля, то числа a, b и c тоже рациональны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD. Окружность с центром I, лежащим по другую сторону от прямой BD, нежели точка A, касается прямых AD, AC и BD, а окружность с центром J, лежащим по другую сторону от прямой AC, нежели точка B, касается прямых CB, AC и BD. Докажите, что $IC = JD$.

2. Натуральное число n поделили на 2023 и получили неполное частное a и остаток b. Натуральное число k поделили на 2023 и получили неполное частное b и остаток c. Натуральное число ℓ поделили на 2023 и получили неполное частное c и остаток a. Может ли сумма $n + k + \ell$ быть кубом натурального числа?

3. Последовательность положительных вещественных чисел a_0, a_1, a_2, ... такова, что

$$a_{n+2} \leqslant \frac{2023a_n}{a_n a_{n+1} + 2023}$$

для всех целых чисел $n \geqslant 0$. Докажите, что или $a_{2023} < 1$, или $a_{2024} < 1$.

4. Альпака выбирает множество A, состоящее из m целых неотрицательных чисел, и сообщает это множество Барсуку. Далее Альпака и Барсук играют в следующую игру. У них имеется выражение

$$E = v_0 \cdot 2^0 + v_1 \cdot 2^1 + \ldots + v_{99} \cdot 2^{99}.$$

Каждым ходом игрок пишет 0 или 1 вместо одного из (ранее не заменённых) v_i. Ходят по очереди, начинает Барсук. После 100 ходов подсчитывается значение полученного выражения. При каком наименьшем m Альпака может выбрать множество A и играть так, чтобы значение полученного выражения оказалось в A?

5. На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M, L и K (в порядке B, M, L, K, C) так, что $BM = ML = LK = KC$. Оказалось, что $\angle ACB = \angle MAB$. Докажите, что $\angle LAK > 1{,}5\angle CAK$.

6. *Разбиением* множества X называется набор его непересекающихся подмножеств, которые в объединении дают X. У множества M взяли три разбиения на 999 подмножеств. Оказалось, что для любого подмножества A из первого разбиения, подмножества B из второго и C из третьего, $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| \geqslant 999$. Какое наименьшее количество элементов может быть в M?

7. Пусть S — конечное множество натуральных чисел. Предположим, что имеется ровно 2023 упорядоченные пары (x, y) элементов из S, в которых произведение xy является точным квадратом. Докажите, что можно найти по крайней мере четыре различных элемента в S таких, что ни одно из их попарных произведений не является точным квадратом. Примечание: например, если $S = \{1, 2, 4\}$, таких упорядоченных пар ровно пять: $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$, и $(4, 4)$.

8. Сумма вещественных чисел a, b и c равна 1. Докажите, что если три числа $a + bc$, $b + ca$ и $c + ab$ рациональны и отличны от нуля, то числа a, b и c тоже рациональны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD. Окружность с центром I, лежащим по другую сторону от прямой BD, нежели точка A, касается прямых AD, AC и BD, а окружность с центром J, лежащим по другую сторону от прямой AC, нежели точка B, касается прямых CB, AC и BD. Докажите, что $IC = JD$.

2. Натуральное число n поделили на 2023 и получили неполное частное a и остаток b. Натуральное число k поделили на 2023 и получили неполное частное b и остаток c. Натуральное число ℓ поделили на 2023 и получили неполное частное c и остаток a. Может ли сумма $n + k + \ell$ быть кубом натурального числа?

3. Сумма чисел $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$ равна 2023 (a, b и c — вещественные числа). Чему может быть равно произведение этих чисел?

4. Альпака выбирает множество A, состоящее из m целых неотрицательных чисел, и сообщает это множество Барсуку. Далее Альпака и Барсук играют в следующую игру. У них имеется выражение

$$E = v_0 \cdot 2^0 + v_1 \cdot 2^1 + \ldots + v_{99} \cdot 2^{99}.$$

Каждым ходом игрок пишет 0 или 1 вместо одного из (ранее не заменённых) v_i. Ходят по очереди, начинает Барсук. После 100 ходов подсчитывается значение полученного выражения. При каком наименьшем m Альпака может выбрать множество A и играть так, чтобы значение полученного выражения оказалось в A?

5. Площадь правильного десятиугольника $A_1A_2\ldots A_{10}$ равна 2023. А какова площадь четырёхугольника $A_1A_2A_6A_7$?

6. У Сары есть 10 блоков, пронумерованных числами от 1 до 10. Она хочет построить из всех этих блоков башню. Каждый блок, кроме самого нижнего, можно класть либо на блок с бóльшим номером, либо на блок, номер которого меньше ровно на 1. Например, можно положить блоки в порядке 10, 8, 9, 7, 6, 3, 4, 5, 1, 2 снизу вверх. Сколькими способами можно составить башню?

7. Куб $77 \times 77 \times 77$ составлен из горизонтальных кирпичей $3 \times 1 \times 1$ (двух направлений), вертикальных кирпичей $1 \times 1 \times 4$ и кубиков $1 \times 1 \times 1$ (некоторые типы могут отсутствовать). Найдите наименьшее возможное количество кубиков $1 \times 1 \times 1$.

8. Сумма вещественных чисел a, b и c равна 1. Докажите, что если три числа $a + bc$, $b + ca$ и $c + ab$ рациональны и отличны от нуля, то числа a, b и c тоже рациональны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD. Окружность с центром I, лежащим по другую сторону от прямой BD, нежели точка A, касается прямых AD, AC и BD, а окружность с центром J, лежащим по другую сторону от прямой AC, нежели точка B, касается прямых CB, AC и BD. Докажите, что $IC = JD$.

2. Натуральное число n поделили на 96 и получили неполное частное a и остаток b. Натуральное число k поделили на 96 и получили неполное частное b и остаток a. Оказалось, что $n + k$ является квадратом натурального числа. Чему может быть равно $n + k$?

3. Сумма чисел $\frac{a+b}{c}$, $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$ равна 2023 (a, b и c — вещественные числа). Чему может быть равно произведение этих чисел?

4. На доске написано выражение $*^{2023} + *^{2022} + \ldots + *^2 + *$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки нечётными цифрами, начинает Петя. Когда все звёздочки заменены, игроки подсчитывают значение полученного выражения. Вася хочет добиться того, чтобы оно было простым, Петя хочет ему помешать. Сможет ли Вася добиться своей цели независимо от действий Пети?

5. Площадь правильного десятиугольника $A_1A_2 \ldots A_{10}$ равна 2023. А какова площадь четырёхугольника $A_1A_2A_6A_7$?

6. У Сары есть 10 блоков, пронумерованных числами от 1 до 10. Она хочет построить из всех этих блоков башню. Каждый блок, кроме самого нижнего, можно класть либо на блок с бóльшим номером, либо на блок, номер которого меньше ровно на 1. Например, можно положить блоки в порядке 10, 8, 9, 7, 6, 3, 4, 5, 1, 2 снизу вверх. Сколькими способами можно составить башню?

7. В шахматном турнире в течение 7 дней играли 8 мастеров. Каждый день игрались 4 игры, в которых участвовали все мастера. В конце турнира выяснилось, что каждый сыграл с каждым ровно один раз. Докажите, что к концу пятого дня турнира образовалась группа из 4 шахматистов, которые уже сыграли между собой все партии.

8. В узлах клетчатой решетки по спирали расставляют числа 1, 2, 3, … Потом в центре каждой клетки пишут сумму чисел в её углах. Верно ли, что в центрах бесконечно многих клеток будут написаны числа, делящиеся на 20242023?