

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Числа a , b и c , отличные от 0 и -1 , таковы, что

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3\right) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} - 3\right) = -1.$$

Чему может быть равно выражение

$$\left(\frac{a+b}{2} + ab\right) \left(\frac{b+c}{2} + bc\right) \left(\frac{a+c}{2} + ac\right)?$$

2. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $\angle A = 2\angle B$. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка D , на стороне AB отмечена точка E , а на луче DE — точка F , причём $AC = CD$, $BE = DE$ и $AD = DF$. Докажите, что $BD = BF$.

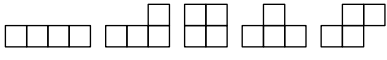
3. На доске написано выражение $*^{2023} + *^{2022} + \dots + *^2 + *$. Петя и Вася по очереди заменяют по одной звездочке на нечётные цифры, начинает Петя. Затем считается значение выражения. Вася хочет добиться того, чтобы оно являлось простым числом, Петя хочет ему помешать. Сможет ли Вася добиться своего независимо от действий Пети?

4. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle AMD = \angle CDM = 90^\circ$. Докажите, что $AB + CD > AD$.

5. На плоскости нарисована ломаная, у которой никакие три вершины не лежат на одной прямой. На каждом звене написано количество других звеньев, которые оно пересекает. Известно, что среди выписанных чисел есть все целые числа от 0 до 2023. Какое наименьшее число звеньев может содержать эта ломаная?

6. Найдите все последовательности натуральных чисел a_1, a_2, \dots такие, что для любого натурального n выполнено равенство $(n^2 + 1)a_n = n(a_{n^2} + 1)$.

7. В стране есть 100 городов и несколько дорог, каждая из которых соединяет два города. Путешественник заметил, что каким бы способом ни разделить города страны на две части, между этими двумя частями будет не более 400 дорог. Докажите, что существует 7 городов, никакие два из которых не соединены напрямую дорогой.

8. Назовём *тетрамино* такие фигурки:  (их можно поворачивать и переворачивать). Докажите, что для любого натурального n количество способов разбить прямоугольник $2 \times 2n$ на тетрамино является точным квадратом. Разбиения, отличающиеся поворотами и отражениями, считаются различными.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Числа a , b и c , отличные от 0 и -1 , таковы, что

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3\right) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} - 3\right) = -1.$$

Чему может быть равно выражение

$$\left(\frac{a+b}{2} + ab\right) \left(\frac{b+c}{2} + bc\right) \left(\frac{a+c}{2} + ac\right)?$$

2. Для какого наименьшего натурального n квадрат 4×4 можно разрезать на n прямоугольников с периметрами $1, 2, 3, \dots, n$? Стороны прямоугольников параллельны сторонам квадрата и могут иметь произвольные длины.

3. На доске написано выражение $*^{2023} + *^{2022} + \dots + *^2 + *$. Петя и Вася по очереди заменяют по одной звездочке на нечётные цифры, начинает Петя. Затем считается значение выражения. Вася хочет добиться того, чтобы оно являлось простым числом, Петя хочет ему помешать. Сможет ли Вася добиться своего независимо от действий Пети?

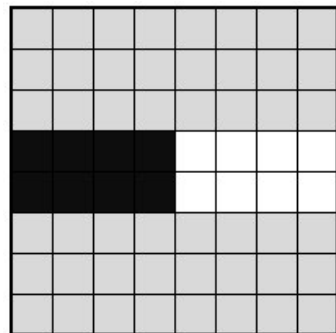
4. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle AMD = \angle CDM = 90^\circ$. Докажите, что $AB + CD > AD$.

5. На плоскости нарисована ломаная, у которой никакие три вершины не лежат на одной прямой. На каждом звене написано количество других звеньев, которые оно пересекает. Известно, что среди выписанных чисел есть все целые числа от 0 до 9. Какое наименьшее число звеньев может содержать эта ломаная?

6. Найдите все последовательности целых чисел a_1, a_2, \dots такие, что для любого натурального n выполнено равенство $(n^2 + 1)a_n = na_{n^2}$.

7. В стране есть 100 городов и несколько дорог, каждая из которых соединяет два города. Путешественник заметил, что каким бы способом ни разделить города страны на две части, между этими двумя частями будет не более 600 дорог. Докажите, что всего в стране не более 1200 дорог.

8. Вадим хочет покрасить клетки серого квадрата 8×8 в чёрный и белый цвета так, чтобы клетки каждого цвета по отдельности образовывали связную фигуру. Часть клеток уже покрашены (см. рисунок). Докажите, что количество способов завершить раскраску является точным квадратом. Фигура называется связной, если любые две клетки внутри нее можно связать последовательностью клеток, где каждая граничит по стороне со следующей.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ВТОРАЯ ЛИГА

1. Про ненулевые числа a, b, c известно, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Чему может быть равно значение выражения

$$\frac{1}{(a+b+c)^{2023}} - \frac{1}{a^{2023}} - \frac{1}{b^{2023}} - \frac{1}{c^{2023}}?$$

2. Для какого наименьшего натурального n квадрат 4×4 можно разрезать на n прямоугольников с периметрами $1, 2, 3, \dots, n$? Стороны прямоугольников параллельны сторонам квадрата и могут иметь произвольные длины.

3. На доске написано выражение $*^{2023} + *^{2022} + \dots + *^2 + *$. Петя и Вася по очереди заменяют по одной звездочке на нечётные цифры, начинает Петя. Затем считается значение выражения. Вася хочет добиться того, чтобы оно являлось простым числом, Петя хочет ему помешать. Сможет ли Вася добиться своего независимо от действий Пети?

4. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $\angle AMD = \angle CDM = 90^\circ$. Докажите, что $AB + CD > AD$.

5. На плоскости нарисована ломаная, у которой никакие три вершины не лежат на одной прямой. На каждом звене написано количество других звеньев, которые оно пересекает. Известно, что среди выписанных чисел есть все целые числа от 0 до 9. Какое наименьшее число звеньев может содержать эта ломаная?

6. В стране есть 100 городов и несколько дорог, каждая из которых соединяет два города. Путешественник заметил, что каким бы способом ни разделить города страны на две части, между этими двумя частями будет не более 400 дорог. Докажите, что существует город, из которого выходит не более 16 дорог.

7. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) , для которых выполняется равенство $2pq + 3pr = 5qr$.

8. Сколькими способами можно окрасить все клетки квадрата 100×100 в красный и синий цвета таким образом, чтобы любые две клетки, имеющие ровно одну общую точку, были окрашены в различные цвета? Раскраски, отличающиеся поворотами и отражениями, считаются различными.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 05.05.2023, МЛАДШАЯ ГРУППА
ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Курс тугрика к рублю меняется каждый день. Начинаящий финансист Вовочка действует по следующей схеме: если стоимость одного тугрика в рублях выше, чем была вчера, то половину своих тугриков он меняет на рубли; в противном случае он меняет половину своих рублей на тугрики. В понедельник 1 тугрик стоил 120 рублей, а у Вовочки к концу дня было 2880 рублей и 24 тугрика. Во вторник 1 тугрик стоил уже 90 рублей, а в четверг — 180 рублей. К концу четверга у Вовочки было 5940 рублей и несколько тугриков. Сколько рублей стоил тугрик в среду? Укажите все варианты. Количество рублей и тугриков может быть нецелым.

2. Можно ли квадрат 4×4 разрезать на 9 прямоугольников с периметрами $1, 2, 3, \dots, 9$? Стороны прямоугольников параллельны сторонам квадрата и могут иметь произвольные длины.

3. На доске написано выражение $*^5 + *^5 + *^5 + *^5 + *^5$. Петя и Вася по очереди заменяют по одной звездочке на нечётные цифры, начинает Петя. Затем считается значение выражения. Вася хочет добиться того, чтобы оно являлось простым числом, Петя хочет ему помешать. Сможет ли Вася добиться своего независимо от действий Пети?

4. На высоте BH остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка L , что $\angle LAN = 45^\circ$. Оказалось, что $AB = CL$. Найдите градусную меру угла ACB .

5. На плоскости нарисована ломаная, у которой никакие три вершины не лежат на одной прямой. На каждом звене написано количество других звеньев, которые оно пересекает. Известно, что среди выписанных чисел есть все целые числа от 0 до 9. Какое наименьшее число звеньев может содержать эта ломаная?

6. В стране есть 100 городов и несколько дорог, каждая из которых соединяет два города. Путешественник заметил, что каким бы способом ни разделить города страны на две части, между этими двумя частями будет не более 400 дорог. Докажите, что существует город, из которого выходит не более 56 дорог.

7. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) , для которых выполняется равенство $2pq + 3pr = 5qr$.

8. Сколькими способами можно окрасить все клетки квадрата 100×100 в красный и синий цвета таким образом, чтобы любые две клетки, имеющие ровно одну общую точку, были окрашены в различные цвета? Раскраски, отличающиеся поворотами и отражениями, считаются различными.