МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 – 4 МЕСТА

1. Есть три кучки по 101 камешку. Чип и Дейл играют в следующую игру: за ход игрок берет три камешка из одной кучки и один из другой. Начинает игру Чип. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

2. За столом сидят 100 бизнесменов, у каждого из которых есть натуральное число рублей. Каждую минуту все бизнесмены с наибольшим количеством денег (таких может быть несколько) одновременно отдают по одному рублю каждому из бизнесменов с наименьшим количеством денег (бизнесмены могут уходить в минус). Например, для 5 бизнесменов, если у них было 1, 1, 1, 2, 2 рублей соответственно, то через минуту у них будет 3, 3, 3, -1, -1 рублей соответственно. Найдите наименьшее натуральное число S, такое, что если изначально у бизнесменов в сумме не менее S рублей, то гарантированно ни один из них никогда не уйдет в минус.

3. У Васи есть словарь $\mathcal{D}$, состоящий из m различных стобуквенных слов, содержащих только буквы A и B. В каждую клетку таблицы 100×100 Вася хочет вписать либо букву A, либо букву B так, чтобы каждый столбец таблицы содержал слово из $\mathcal{D}$ при чтении сверху вниз, и каждая строка таблицы содержала слово из $\mathcal{D}$ при чтении слева направо. При каком наименьшем m Вася заведомо сможет заполнить таблицу нужным образом, независимо от того, какие слова находятся в $\mathcal{D}$?

4. На доске записано 2023 натуральных числа. Каждую минуту Аня стирает два числа на доске и заменяет их суммой, разностью, произведением или частным.
Например, если Аня стирает числа 6 и 3, она может заменить их одним из чисел из набора

$$\{6+3, 6-3, 3-6, 6\times 3, 6\div 3, 3\div 6\} = \left\{9, 3, -3, 18, 2, \frac{1}{2}\right\}.$$

Через 2022 минуты на доске осталось только число -2023. Докажите, что по тем же правилам и с теми же начальными числами Аня могла действовать так, чтобы через 2022 минуты на доске осталось только число 2023.

5. В теннисном турнире участвовали 1000 человек, каждый с каждым сыграл ровно один раз, ничьих не было. Докажите, что всех игроков можно поставить в ряд так, чтобы каждый из 998 человек, стоящих не на краю, либо победил обоих своих соседей, либо проиграл обоим соседям.

6. Сто ведьм проходят вступительное испытание на факультет Прорицания. Их выстроили в круг, и каждая сделала три предсказания (одно про себя, другое про соседку слева и третье про соседку справа), зачислят ли каждую из них на факультет. Приемная комиссия выслушала предсказания и теперь хочет зачислить на факультет тех и только тех ведьм, кто сделал хотя бы два верных предсказания из трех. Верно ли, что комиссии гарантированно удастся это сделать?

7. В строку выписано 300 различных натуральных чисел. Назовем два числа в строке (не обязательно соседних) *возрастающей парой*, если левое из них меньше, чем правое, и *убывающей парой*, если правое меньше, чем левое. Найдите наибольшее k, обладающее свойством: в каждой строке из 300 различных чисел есть не менее k непересекающихся возрастающих пар или не менее k непересекающихся убывающих пар.

8. Даны натуральные числа a, b и c такие, что $a > b > c > 1$. При этом b — наибольший делитель числа a, отличный от a. Кроме того, c — наибольший делитель числа b, отличный от b. Докажите, что число $a + b + c$ имеет нечётный простой делитель.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5 – 8 МЕСТА; ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 – 4 МЕСТА

1. Оля хочет разбить доску 8×8 на доминошки так, чтобы от любой доминошки можно было добраться до любой другой, совершив не более k переходов, каждый раз переходя в доминошку, имеющую с данной хотя бы один общий отрезочек границы. При каком наименьшем k это возможно?

2. За столом сидят 100 бизнесменов, у каждого из которых есть натуральное число рублей. Каждую минуту все бизнесмены с наибольшим количеством денег (таких может быть несколько) одновременно отдают по одному рублю каждому из бизнесменов с наименьшим количеством денег (бизнесмены могут уходить в минус). Например, для 5 бизнесменов, если у них было 1, 1, 1, 2, 2 рублей соответственно, то через минуту у них будет 3, 3, 3, -1, -1 рублей соответственно. Найдите наименьшее натуральное число S, такое, что если изначально у бизнесменов в сумме не менее S рублей, то гарантированно ни один из них никогда не уйдет в минус.

3. В квадратной таблице 30×30 расставили натуральные числа так, что для любых натуральных i и j, не превосходящих 30, на пересечении i-ого столбца и j-ой строки стоит число $i + j$ (столбцы упорядочены слева направо от 1 до 30, строки сверху вниз от 1 до 30). За одну операцию Дима может выбрать в этой таблице любой квадрат 3×3 и ко всем числам в его клетках прибавить по единице. Может ли он за несколько операций все числа в таблице сделать кратными 3?

4. На доске записано 2023 натуральных числа. Каждую минуту Аня стирает два числа на доске и заменяет их суммой, разностью, произведением или частным.
Например, если Аня стирает числа 6 и 3, она может заменить их одним из чисел из набора

$$\{6+3, 6-3, 3-6, 6\times 3, 6\div 3, 3\div 6\} = \left\{9, 3, -3, 18, 2, \frac{1}{2}\right\}.$$

Через 2022 минуты на доске осталось только число -2023. Докажите, что по тем же правилам и с теми же начальными числами Аня могла действовать так, чтобы через 2022 минуты на доске осталось только число 2023.

5. Состоялся однокруговой теннисный турнир, в котором приняли участие 100 человек. За победу в матче давалось 1 очко, за поражение 0 (ничьих в теннисе не бывает). Сергей видит, сколько очков набрал каждый участник по окончании турнира. Он пытается определить результаты всех матчей. Для этого он выбирает пару участников, которую ещё не выбирал, и высказывает предположение о результате матча между ними. Ему сообщают, угадал ли он. После этого он выбирает новую пару, и так продолжается, пока не закончатся пары. Верно ли, что Сергей всегда может действовать так, чтобы угадать исход более чем в половине всех матчей?

6. Сто ведьм проходят вступительное испытание на факультет Прорицания. Их выстроили в круг, и каждая сделала три предсказания (одно про себя, другое про соседку слева и третье про соседку справа), зачислят ли каждую из них на факультет. Приемная комиссия выслушала предсказания и теперь хочет зачислить на факультет тех и только тех ведьм, кто сделал хотя бы два верных предсказания из трех. Верно ли, что комиссии гарантированно удастся это сделать?

7. У Димы есть коробка, в которой изначально 1000 конфет. За пределами коробки находится бесконечное количество сладостей трех видов: конфеты, шоколадки и маффины. Каждую минуту Дима может сделать одну из следующих замен:

- две конфеты из коробки на одну шоколадку,
- два маффина из коробки на одну шоколадку,
- две шоколадки из коробки на одну конфету и один маффин,
- одну конфету и одну шоколадку из коробки на один маффин,
- один маффин и одну шоколадку из коробки на одну конфету.

Может ли через какое-то время в коробке остаться только один предмет?

8. Даны натуральные числа a, b и c такие, что $a > b > c > 1$. При этом b — наибольший делитель числа a, отличный от a. Кроме того, c — наибольший делитель числа b, отличный от b. Докажите, что число $a + b + c$ имеет нечётный простой делитель.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023 ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5 – 8 МЕСТА; ВТОРАЯ ЛИГА (ВСЯ); ТРЕТЬЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1 – 2 МЕСТА

1. Оля хочет разбить доску 8×8 на доминошки так, чтобы от любой доминошки можно было добраться до любой другой, совершив не более k переходов, каждый раз переходя в доминошку, имеющую с данной хотя бы один общий отрезочек границы. При каком наименьшем k это возможно?

2. За столом сидят 100 бизнесменов, у каждого из которых есть натуральное число рублей. Каждую минуту все бизнесмены с наибольшим количеством денег (таких может быть несколько) одновременно отдают по одному рублю каждому из бизнесменов с наименьшим количеством денег (бизнесмены могут уходить в минус). Например, для 5 бизнесменов, если у них было 1, 1, 1, 2, 2 рублей соответственно, то через минуту у них будет 3, 3, 3, -1, -1 рублей соответственно. Найдите наименьшее натуральное число S, такое, что если изначально у бизнесменов в сумме не менее S рублей, то гарантированно ни один из них никогда не уйдет в минус.

3. В квадратной таблице 30×30 расставили натуральные числа так, что для любых натуральных i и j, не превосходящих 30, на пересечении i-ого столбца и j-ой строки стоит число $i + j$ (столбцы упорядочены слева направо от 1 до 30, строки сверху вниз от 1 до 30). За одну операцию Дима может выбрать в этой таблице любой квадрат 3×3 и ко всем числам в его клетках прибавить по единице. Может ли он за несколько операций все числа в таблице сделать кратными 3?

4. Андрей написал на доске десять последовательных натуральных чисел, после чего стёр два из них. Оказалось, что сумма оставшихся чисел равна 2023. А какие числа могли быть стёрты?

5. Из 152 одинаковых с виду монет 7 фальшивые. Все фальшивые монеты имеют одинаковый вес, и все настоящие монеты имеют одинаковый вес, но фальшивые монеты легче настоящих монет. Как найти 19 настоящих монет при помощи трех взвешиваний на чашечных весах?

6. Сто ведьм проходят вступительное испытание на факультет Прорицания. Их выстроили в круг, и каждая сделала три предсказания (одно про себя, другое про соседку слева и третье про соседку справа), зачислят ли каждую из них на факультет. Приемная комиссия выслушала предсказания и теперь хочет зачислить на факультет тех и только тех ведьм, кто сделал хотя бы два верных предсказания из трех. Верно ли, что комиссии гарантированно удастся это сделать?

7. У Димы есть коробка, в которой лежит 1000 конфет. За пределами коробки находится неограниченное количество конфет, шоколадок и маффинов. Дима может сделать одну из следующих замен:

- две конфеты из коробки на одну шоколадку,
- два маффина из коробки на одну шоколадку,
- две шоколадки из коробки на одну конфету и один маффин,
- одну конфета и одну шоколадку из коробки на одни маффин,
- один маффин и одну шоколадку из коробки на одну конфету.

Сможет ли Дима с помощью таких замен добиться того, что через некоторое время в коробке останется только одна конфета (и больше ничего)?

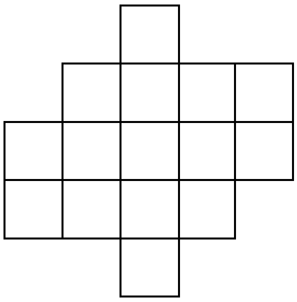
8. Даны натуральные числа a и b, такие, что $a > b > 1$, и b — наибольший делитель числа a, отличный от a. Докажите, что число $a + b$ имеет нечётный простой делитель.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 09.05.2023
ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3 – 10 МЕСТА

1. Оля хочет разбить доску 8×8 на доминошки так, чтобы от любой доминошки можно было добраться до любой другой, совершив не более k переходов, каждый раз переходя в доминошку, имеющую с данной хотя бы один общий отрезочек границы. При каком наименьшем k это возможно?

2. За столом сидят 100 бизнесменов, у каждого из которых есть натуральное число рублей. Каждую минуту все бизнесмены с наибольшим количеством денег (таких может быть несколько) одновременно отдают по одному рублю каждому из бизнесменов с наименьшим количеством денег (бизнесмены могут уходить в минус). Например, для 5 бизнесменов, если у них было 1, 1, 1, 2, 2 рублей соответственно, то через минуту у них будет 3, 3, 3, -1, -1 рублей соответственно. Найдите наименьшее натуральное число S, такое, что если изначально у бизнесменов в сумме не менее S рублей, то гарантированно ни один из них никогда не уйдет в минус.

3. На какое наименьшее количество (больше одной) одинаковых фигур можно разрезать по линиям сетки фигуру, изображенную на рисунке? Напоминаем, что одинаковыми называются фигуры, которые можно совместить наложением (фигуры можно поворачивать и переворачивать).



4. На доске записано 10 последовательных натуральных чисел. Одно из них стерли. Сумма оставшихся девяти чисел оказалась равна 2023. Какое число могло быть стёрто?

5. Из 152 одинаковых с виду монет 7 фальшивые. Все фальшивые монеты имеют одинаковый вес, и все настоящие монеты имеют одинаковый вес, но фальшивые монеты легче настоящих монет. Как найти 19 настоящих монет при помощи трех взвешиваний на чашечных весах?

6. Девятнадцать ведьмаков стоят в кругу у костра. В начале магического ритуала каждый ведьмак честно сказал одну из трёх фраз: «У меня меч длиннее, чем у каждого из моих соседей», «У меня меч короче, чем у каждого из моих соседей» или «У меня меч длиннее, чем у одного из моих соседей и короче, чем у другого.» Фраза «У меня меч длиннее, чем у каждого из моих соседей» прозвучала три раза. Сколько раз прозвучала фраза «У меня меч длиннее, чем у одного из моих соседей и короче, чем у другого»?

7. У Димы есть коробка, в которой лежит 1000 конфет. За пределами коробки находится неограниченное количество конфет, шоколадок и маффинов. Дима может сделать одну из следующих замен:

- две конфеты из коробки на одну шоколадку,
- два маффина из коробки на одну шоколадку,
- две шоколадки из коробки на одну конфету и один маффин,
- одну конфета и одну шоколадку из коробки на одни маффин,
- один маффин и одну шоколадку из коробки на одну конфету.

Сможет ли Дима с помощью таких замен добиться того, что через некоторое время в коробке останется только одна конфета (и больше ничего)?

8. Даны натуральные числа a и b, такие, что $a > b > 1$, и b — наибольший делитель числа a, отличный от a. Докажите, что число $a + b$ имеет нечётный простой делитель.