


**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023**  
**ГРУППА СТАРТ, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. На острове рыцарей и лжецов находятся 2023 туземца (каждый — рыцарь или лжец; рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Приехавший на остров антрополог Станислав спросил каждого, сколько у него друзей среди туземцев, и записал 2023 ответа. Все ответы оказались целыми числами от 0 до 2022 (ответы могли совпадать). Антрополог Станислав по этим ответам точно понял, что на острове не менее  $k$  лжецов. При каком наибольшем  $k$  такое могло быть?

2. Петя и Вася поочередно закрашивают клетки в прямоугольнике  $30 \times 60$  (первым ходит Петя). Каждым ходом Петя закрашивает квадратик  $1 \times 1$ , а Вася — фигурку вида  (или получающуюся из нее поворотом). Нельзя закрашивать уже закрашенные клетки. Когда Вася не может сделать ход, Петя закрашивает все оставшиеся клетки. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы гарантированно закрасить хотя бы на 200 клеток больше, чем Петя.

3. Калькулятор имеет четыре кнопки: две жёлтые — «+2», «−2» и две красные — « $\times 3$ », « $\div 3$ » (последняя работает только если число на экране делится на три). Запрещается три раза подряд нажимать на жёлтые кнопки. Можно ли из числа  $112^{211}$  получить число  $212^{121}$  так, чтобы в ходе вычислений никакое число не появилось бы на экране дважды?

4. В школе учится 80 шестиклассников, и у каждого из них есть ровно три близких друга среди оставшихся. Двадцать шестиклассников купили билеты на предстоящий концерт. Если у какого-то шестиклассника в какой-то момент хотя бы два его близких друга купили билеты, он тоже покупает билет. Возможно ли, что все шестиклассники в итоге купят билеты на концерт?

5. Сумма чисел, обратных некоторым ста натуральным числам, равна 1. Докажите, что любое из этих ста чисел, кроме самого маленького, не превосходит умноженного на 100 произведения всех чисел, среди этих ста, которые меньше этого числа.


6. Есть три стакана с разбавленным соком (в стаканах разное количество жидкости). Если перелить всю жидкость из первого стакана во второй, то в получившейся смеси будет 25% сока. Если из первого в третий — 30% сока. Если из второго в третий — 50% сока. Докажите, что если перелить жидкости из первого и второго стаканов в третий, то в получившейся смеси будет менее 40% сока.

7. По кругу расставлено 2023 натуральных числа. Известно, что если к любому числу прибавить 1, то оно поделится на следующее за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее число в круге?

8. 30 бюрократов образовали несколько комиссий, в каждую комиссию входит хотя бы один бюрократ. Оказалось, что для любых двух комиссий количество бюрократов, которые состоят ровно в одной из них, отлично от 15. Какое наибольшее количество комиссий могло быть?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023 ГРУППА СТАРТ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На острове рыцарей и лжецов находится 2023 туземца (каждый — рыцарь или лжец; рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Приехавший на остров антрополог Станислав спросил каждого, сколько у него друзей среди туземцев, и записал 2023 ответа. Все ответы оказались целыми числами от 0 до 2022 (ответы могли совпадать). Докажите, что антрополог не мог из этих ответов сделать вывод, что более половины жителей острова — лжецы.

2. Петя и Вася поочередно закрашивают клетки в прямоугольнике  $30 \times 60$  (первым ходит Петя). Каждым ходом Петя закрашивает квадратик  $1 \times 1$ , а Вася — фигурку вида  (или получающуюся из нее поворотом). Нельзя закрашивать уже закрашенные клетки. Когда Вася не может сделать ход, Петя закрашивает все оставшиеся клетки. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы гарантированно закрасить хотя бы на 200 клеток больше, чем Петя.

3. Натуральные числа от 1 до 100 разбили на несколько групп так, что суммы чисел во всех группах равны, и ни в одной группе нет двух подряд идущих чисел. Каково наибольшее возможное количество групп?

4. Умница Наденька и хулиган Вася составили по одному примеру на сложение, а потом заменили цифры буквами (одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными; замены у обоих одинаковые). У Наденьки получились осмысленные слова:

$$\text{СОВА} + \text{КРОВ} + \text{РЕКИ} + \text{ИКАР} + \text{ЕВРО} + \text{ПАНК} + \text{ПЕС} = \text{КИРОВ},$$

а у Васи — какая-то абракадабра:

$$\text{АНСН} + \text{НИИП} + \text{ВСПЕ} = \text{ВСНЕИ}.$$

Определите, каким буквам могли соответствовать какие цифры.

5. Сумма чисел, обратных некоторым ста натуральным числам, равна 1. Докажите, что любое из этих ста чисел, кроме самого маленького, не превосходит умноженного на 100 произведения всех чисел, среди этих ста, которые меньше этого числа.

6. Есть три стакана с разбавленным соком (в стаканах разное количество жидкости). Если перелить всю жидкость из первого стакана во второй, то в получившейся смеси будет 25% сока. Если из первого в третий — 30% сока. Если из второго в третий — 50% сока. Докажите, что если перелить жидкости из первого и второго стаканов в третий, то в получившейся смеси будет менее 40% сока.


7. По кругу расставлено 2023 натуральных числа. Известно, что если к любому числу прибавить 1, то оно поделится на следующее за ним по часовой стрелке. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее число в круге?

8. На полке стоят 10 одинаковых с виду чашек, упорядоченных слева направо. В каждой изначально лежит по 10 камешков. Алиса и Вася каждый ход по порядку выполняют следующее:

- Алиса, не заглядывая внутрь чашек, пишет на бумажке последовательность целых неотрицательных чисел с суммой, равной количеству чашек, и передает бумажку Васе. Вася берет по одному камешку из каждой чашки, и перераспределяет эти камешки слева направо по чашкам в соответствии с последовательностью, написанной на бумажке.
  - После этого Вася сообщает Алисе, сколько в какой из чашек камешков. Затем Вася уничтожает все пустые чашки.
  - Наконец, Вася незаметно для Алисы меняет местами две чашки.
- Докажите, что Алиса может действовать так, чтобы в какой-то момент осталось не более 4 чашек.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023 ГРУППА СТАРТ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На острове рыцарей и лжецов находится 2023 туземца (каждый — рыцарь или лжец; рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Приехавший на остров антрополог Станислав спросил каждого, сколько у него друзей среди туземцев, и записал 2023 ответа. Все ответы оказались целыми числами от 0 до 2022 (ответы могли совпадать). Докажите, что антрополог не мог из этих ответов сделать вывод, что более половины жителей острова — лжецы.

2. Петя и Вася поочередно закрашивают клетки в прямоугольнике  $30 \times 60$  (первым ходит Петя). Каждым ходом Петя закрашивает квадратик  $1 \times 1$ , а Вася — фигурку вида  (или получающуюся из нее поворотом). Нельзя закрашивать уже закрашенные клетки. Когда Вася не может сделать ход, Петя закрашивает все оставшиеся клетки. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы гарантированно закрасить хотя бы на 200 клеток больше, чем Петя.

3. Натуральные числа от 1 до 100 разбили на несколько групп так, что суммы чисел во всех группах равны, и ни в одной группе нет двух подряд идущих чисел. Каково наибольшее возможное количество групп?

4. Умница Наденька и хулиган Вася составили по одному примеру на сложение, а потом заменили цифры буквами (одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными; замены у обоих одинаковые). У Наденьки получились осмысленные слова:

$$\text{СОВА} + \text{КРОВ} + \text{РЕКИ} + \text{ИКАР} + \text{ЕВРО} + \text{ПАНК} + \text{ПЕС} = \text{КИРОВ},$$

а у Васи — какая-то абракадабра:

$$\text{АНСН} + \text{НИИП} + \text{ВСПЕ} = \text{ВСНЕИ}.$$

А чему равна сумма  $\text{КИРОВ} + \text{ВСНЕИ}$ ?

5. Натуральные числа от 1 до  $n$  покрасили в два цвета. Оказалось, что любые два числа с разницей 50 или 60 — разноцветные. Найдите максимально возможное  $n$ .


6. Есть три стакана с разбавленным соком (в стаканах разное количество жидкости). Если перелить всю жидкость из первого стакана во второй, то в получившейся смеси будет 25% сока. Если из первого в третий — 30% сока. Если из второго в третий — 50% сока. Докажите, что если перелить жидкости из первого и второго стаканов в третий, то в получившейся смеси будет менее 40% сока.

7. На доске  $8 \times 8$  закрашили прямоугольник  $1 \times 4$ , а потом разрезали доску по линиям сетки на 4 равные части. Могло ли так оказаться, что каждая часть содержит ровно одну закрашенную клетку?

8. В каждом из 499 пакетов лежат две сладости: или две слойки, или две шоколадки, или одна слойка и одна шоколадка. При этом ровно половина слоев лежит в пакетах с шоколадками. Может ли Дима перераспределить сладости так, чтобы половина шоколадок оказалась в пакетах со слойками, и в каждом пакете лежало по две сладости?

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 06.05.2023 ГРУППА СТАРТ, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На острове рыцарей и лжецов находятся 2023 туземца (каждый — рыцарь или лжец; рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Приехавший на остров антрополог Станислав спросил каждого, сколько у него друзей среди туземцев, и записал 2023 ответа. Все ответы оказались целыми числами от 0 до 2022 (ответы могли совпадать). Могло ли так случиться, что антрополог по этим ответам точно понял, что на острове не менее 1011 лжецов?

2. Петя и Вася поочередно закрашивают клетки в прямоугольнике  $12 \times 12$  (первым ходит Петя). Каждым ходом Петя закрашивает квадратик  $1 \times 1$ , а Вася — фигурку вида  (или получающуюся из нее поворотом). Нельзя закрашивать уже закрашенные клетки. Когда Вася не может сделать ход, Петя закрашивает все оставшиеся клетки. Докажите, что Вася может действовать так, чтобы гарантированно закрасить хотя бы на 16 клеток больше, чем Петя.

3. Все натуральные числа от 1 до 10 разбили на две группы по пять чисел в каждой. В первой группе нет чисел, отличающихся друг от друга на 1, а во второй группе есть ровно одна пара чисел, отличающихся друг от друга на 1. Сумма всех чисел в первой группе на 1 меньше, чем во второй. Какие числа могли попасть в первую группу?

4. Умница Наденька и хулиган Вася составили по одному примеру на сложение, а потом заменили цифры буквами (одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными; замены у обоих одинаковые). У Наденьки получились осмысленные слова:

$$\text{СОВА} + \text{КРОВ} + \text{РЕКИ} + \text{ИКАР} + \text{ЕВРО} + \text{ПАНК} + \text{ПЕС} = \text{КИРОВ},$$

а у Васи — какая-то абракадабра:

$$\text{АНСН} + \text{НИИП} + \text{ВСПЕ} = \text{ВСНЕИ}.$$

А чему равна сумма КИРОВ + ВСНЕИ?

5. Натуральные числа от 1 до  $n$  покрасили в два цвета. Оказалось, что любые два числа с разницей 50 или 60 — разноцветные. Найдите максимально возможное  $n$ .

6. Есть три стакана с разбавленным соком (в стаканах разное количество жидкости). Если перелить всю жидкость из первого стакана во второй, то в получившейся смеси будет 25% сока. Если из первого в третий — 30% сока. Если из второго в третий — 50% сока. Докажите, что если перелить жидкости из первого и второго стаканов в третий, то в получившейся смеси будет менее 40% сока.

7. На доске  $8 \times 8$  закрашили прямоугольничек  $1 \times 4$ , а потом разрезали доску по линиям сетки на 4 равные части. Могло ли так оказаться, что каждая часть содержит ровно одну закрашенную клетку?

8. В каждом из 499 пакетов лежат две сладости: или две слойки, или две шоколадки, или одна слойка и одна шоколадка. При этом ровно половина слоев лежит в пакетах с шоколадками. Может ли Дима перераспределить сладости так, чтобы половина шоколадок оказалась в пакетах со слойками, и в каждом пакете лежало по две сладости?