МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ № 3. 08.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Описанная окружность треугольника ABC вторично пересекает высоты AA_1, BB_1 и CC_1 точках X, Y и Z соответственно. Докажите, что

$$\frac{AH}{AX} + \frac{BH}{BY} + \frac{CH}{CZ} \geqslant \frac{3}{2}.$$

2. Строка длины 2023 из нулей и единиц называется *няшной*, если в ней есть 7 единиц подряд. Строка длины 2024 из нулей и единиц называется *годной*, если в ней есть 8 одинаковых символов подряд. Каких строк больше: няшных или годных, и во сколько раз?

3. Лара находится в лабиринте, имеющем форму конечного связного плоского графа (вершины — комнаты, ребра — коридоры). За один ход Лара должна перейти по коридору в соседнюю комнату. В лабиринте 100 зомби. За один ход каждый зомби перемещается в соседнюю комнату, двигаясь по кратчайшему (содержащему наименьшее количество рёбер) пути к Ларе. Если таких путей несколько, зомби выбирает один из путей по своему усмотрению. Сначала в лабиринте размещаются зомби (где хотят), потом себе место выбирает Лара, и погоня начинается — первой ходит Лара, потом все зомби, потом снова Лара и т. д. Существует ли лабиринт, в котором Лара сможет убегать от зомби (т.е. не оказываться с ними в одной комнате) неограниченно долго при любом их начальном расположении?

4. В параллелограмме $ABCD$ $(AB < BC)$ из точки B опустили перпендикуляр BE на диагональ AC. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BD, пересекает луч BA и отрезок BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $EP = EQ$. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. В возрастающей арифметической прогрессии с натуральными членами суммы цифр первого и второго членов равны 2023 и 2024 соответственно. Докажите, что каждое натуральное число, большее некоторого N, является суммой цифр некоторого члена этой прогрессии.

6. Даны натуральное число m и n целых чисел, расставленных по кругу. Для каждого из n чисел посчитали, какое наименьшее количество чисел, начиная с него, нужно взять по часовой стрелке, чтобы сумма взятых чисел делилась на m (чисел может оказаться больше n, если придётся пойти на второй круг). Докажите, что сумма найденных n количеств не больше mn.

7. Назовём *удвоением* отрезка $[a-b, a+b]$ вещественной прямой отрезок $[a-2b, a+2b]$. Докажите, что существует натуральное число M, обладающее следующим свойством: во всяком конечном множестве A точек вещественной прямой можно выбрать подмножество B, содержащее не более M точек и такое, что для любых 100 отрезков, покрывающих B, их удвоения покрывают A.

8. Найдите наибольшее число λ такое, что при любом натуральном n

$$\text{НОК}(n+1, n+2, \ldots, n+10) \geqslant \lambda \cdot \text{НОК}(n, n+1, \ldots, n+9).$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ № 3. 08.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке H. Описанная окружность треугольника ABC вторично пересекает высоты AA_1, BB_1 и CC_1 точках X, Y и Z соответственно. Докажите, что

$$\frac{AH}{AX}+\frac{BH}{BY}+\frac{CH}{CZ}\geqslant\frac{3}{2}.$$

2. Строка длины 2023 из нулей и единиц называется *няшной*, если в ней есть 7 единиц подряд. Строка длины 2024 из нулей и единиц называется *годной*, если в ней есть 8 одинаковых символов подряд. Каких строк больше: няшных или годных, и во сколько раз?

3. Лара находится в лабиринте, имеющем форму конечного связного плоского графа (вершины — комнаты, ребра — коридоры). За один ход Лара должна перейти по коридору в соседнюю комнату. В лабиринте 100 зомби. За один ход каждый зомби перемещается в соседнюю комнату, двигаясь по кратчайшему (содержащему наименьшее количество рёбер) пути к Ларе. Если таких путей несколько, зомби выбирает один из путей по своему усмотрению. Сначала в лабиринте размещаются зомби (где хотят), потом себе место выбирает Лара, и погоня начинается — первой ходит Лара, потом все зомби, потом снова Лара и т. д. Существует ли лабиринт, в котором Лара сможет убегать от зомби (т.е. не оказываться с ними в одной комнате) неограниченно долго при любом их начальном расположении?

4. В параллелограмме $ABCD$ $(AB < BC)$ из точки B опустили перпендикуляр BE на диагональ AC. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BD, пересекает луч BA и отрезок BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $EP = EQ$. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. В возрастающей арифметической прогрессии с натуральными членами суммы цифр первого и второго членов равны 2023 и 2024 соответственно. Докажите, что каждое натуральное число, большее некоторого N, является суммой цифр некоторого члена этой прогрессии.

6. Даны натуральное число m и n целых чисел, расставленных по кругу. Для каждого из n чисел посчитали, какое наименьшее количество чисел, начиная с него, нужно взять по часовой стрелке, чтобы сумма взятых чисел делилась на m (чисел может оказаться больше n, если придётся пойти на второй круг). Докажите, что сумма найденных n количеств не больше mn.

7. Для каждого натурального n докажите, что

$$C_n^n+\frac{1}{2}C_{n+1}^n+\ldots+\frac{1}{2^k}C_{n+k}^n+\ldots+\frac{1}{2^n}C_{2n}^n=2^n.$$

8. Найдите наибольшее число λ такое, что при любом натуральном n

$$\text{НОК}(n+1,n+2,\ldots,n+10)\geqslant\lambda\cdot\text{НОК}(n,n+1,\ldots,n+9).$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ № 3. 08.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На стороне AB треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Прямая параллельная BC и проходящая через M пересекается с прямой параллельной AC и проходящей через N в точке S. Докажите, что $\angle CSM = \angle CSN$.

2. Квадрат 99×99 разрезали на квадраты со сторонами $1, 2, \ldots, 9$, все девять размеров использованы. Будем называть ряд клеток (горизонталь или вертикаль) *нечётным*, если он пересекает нечётное число квадратиков. Найдите наименьшее возможное количество нечётных рядов.

3. Лара находится в лабиринте, имеющем форму конечного связного плоского графа (вершины — комнаты, ребра — коридоры). За один ход Лара должна перейти по коридору в соседнюю комнату. В лабиринте 100 зомби. За один ход каждый зомби перемещается в соседнюю комнату, двигаясь по кратчайшему (содержащему наименьшее количество рёбер) пути к Ларе. Если таких путей несколько, зомби выбирает один из путей по своему усмотрению. Сначала в лабиринте размещаются зомби (где хотят), потом себе место выбирает Лара, и погоня начинается — первой ходит Лара, потом все зомби, потом снова Лара и т. д. Существует ли лабиринт, в котором Лара сможет убегать от зомби (т.е. не оказываться с ними в одной комнате) неограниченно долго при любом их начальном расположении?

4. В параллелограмме $ABCD$ $(AB < BC)$ из точки B опустили перпендикуляр BE на диагональ AC. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BD, пересекает луч BA и отрезок BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $EP = EQ$. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. В возрастающей арифметической прогрессии с натуральными членами суммы цифр первого и второго членов равны 2023 и 2024 соответственно. Докажите, что каждое натуральное число, большее некоторого N, является суммой цифр некоторого члена этой прогрессии.

6. Для $a, b > 0$ докажите неравенство

$$2\sqrt{a + \frac{1}{b}} + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 5.$$

7. Для каждого натурального n докажите, что

$$C_n^n + \frac{1}{2}C_{n+1}^n + \ldots + \frac{1}{2^k}C_{n+k}^n + \ldots + \frac{1}{2^n}C_{2n}^n = 2^n.$$

8. Докажите, что при всех натуральных n выполняется неравенство

$$\text{НОК}(n+1, n+2, \ldots, n+10) \geqslant \frac{1}{10\,000} \cdot \text{НОК}(n, n+1, \ldots, n+9).$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ № 3. 08.05.2023
СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На стороне AB треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Прямая параллельная BC и проходящая через M пересекается с прямой параллельной AC и проходящей через N в точке S. Докажите, что $\angle CSM = \angle CSN$.

2. Квадрат 99×99 разрезали на квадраты со сторонами $1, 2, \ldots, 9$, все девять размеров использованы. Будем называть ряд клеток (горизонталь или вертикаль) *нечётным*, если он пересекает нечётное число квадратиков. Найдите наименьшее возможное количество нечётных рядов.

3. Лара находится в лабиринте, имеющем форму конечного связного плоского графа (вершины — комнаты, ребра — коридоры). За один ход Лара должна перейти по коридору в соседнюю комнату. В лабиринте 3 зомби. За один ход каждый зомби перемещается в соседнюю комнату, двигаясь по кратчайшему (содержащему наименьшее количество рёбер) пути к Ларе. Если таких путей несколько, зомби выбирает один из путей по своему усмотрению. Сначала в лабиринте размещаются зомби (где хотят), потом себе место выбирает Лара, и погоня начинается — первой ходит Лара, потом все зомби, потом снова Лара и т. д. Существует ли лабиринт, в котором Лара сможет убегать от зомби (т.е. не оказываться с ними в одной комнате) неограниченно долго при любом их начальном расположении?

4. В параллелограмме $ABCD$ $(AB < BC)$ из точки B опустили перпендикуляр BE на диагональ AC. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BD, пересекает луч BA и отрезок BC в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $EP = EQ$. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

5. Альберт составляет последовательность чисел, первые 2023 из которых — это в точности числа от 1 до 2023, в некотором порядке. Каждое последующее число Альберт вычисляет так: берет 2023 предыдущих чисел и вычитает наименьшее среди них из наибольшего. Докажите, что Альберт мог поставить первые 2023 числа в таком порядке, что после 10000000-го члена последовательности встретятся числа больше 1.

6. Для $a, b > 0$ докажите неравенство

$$\sqrt{a + \frac{1}{b}} + b + \frac{1}{a} \geqslant 3.$$

7. Для каждого натурального n докажите, что

$$C_n^n + \frac{1}{2}C_{n+1}^n + \ldots + \frac{1}{2^k}C_{n+k}^n + \ldots + \frac{1}{2^n}C_{2n}^n = 2^n.$$

8. Докажите, что при всех натуральных n выполняется неравенство

$$\text{НОК}(n+1, n+2, \ldots, n+10) \geqslant \frac{1}{10\,000} \cdot \text{НОК}(n, n+1, \ldots, n+9).$$