

Командная олимпиада. Группа Старт.

1. Поезд въезжает в туннель длиной 300 м, двигаясь с постоянной скоростью. От момента въезда передней части поезда в туннель до момента въезда задней части поезда в туннель проходит 10 секунд. После этого поезд мгновенно тормозит и дальше движется со скоростью, в полтора раза меньше исходной. В итоге поезд полностью выезжает из туннеля ещё через 50 секунд. Какова длина поезда?

2. В компании из 100 человек любые десять человек имеют общего знакомого среди остальных. Докажите, что любые пять человек из этой компании имеют не менее шести общих знакомых среди остальных.

3. Дано некоторое стозначное число X без нулей, единиц, восьмёрок и девяток в записи. К его первой, третьей, пятой, ..., 99-ой слева цифрам прибавили по двойке и получили число A . Из второй, четвёртой, шестой, ..., сотой слева цифры числа X вычли по двойке и получили число B . Оказалось, что A делится на B . Чему могло быть равно число X ?

4. По кругу расположены 100 кочек, на 10 из них сидит по одной лягушке. Лягушки пронумерованы числами от 1 до 10. По команде все лягушки одновременно прыгают: лягушка номер 1 прыгает на соседнюю с ней кочку справа или слева, лягушка номер 2 прыгает через одну кочку направо или налево, и так далее, лягушка номер 10 прыгает через 9 кочек направо или налево. После нескольких команд оказалось, что на каждой кочке побывала хотя бы одна лягушка. Докажите, что хотя бы одна лягушка дважды побывала на одной и той же кочке.

5. Алёна написала четыре различных положительных числа, причём произведение двух самых больших из них равно самому маленькому. Оказалось, что если она одновременно заменит каждое из чисел на удвоенное произведение всех остальных, то получит тот же самый набор чисел. Докажите, что все числа Алёны больше $1/2$.

6. В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит рыцарь или лжец. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт. Каждый заявил, что в клетках, соседних с его клеткой по стороне, стоит поровну лжецов и рыцарей. Может ли на доске быть ровно 2023 рыцаря?

7. Вера выложила в ряд 2023 монеты, чередуя решки и орлы, начиная с решки: РОРОРОР...РОР (Р — решка, О — орел).

За один ход Вера может перевернуть одну монету ряда, соблюдая следующие правила. Первым ходом Вера может перевернуть любую из монет. Во все последующие ходы Вера может переворачивать только монету, соседнюю с той, которую она перевернула предыдущим ходом (монета не является соседней сама себе). Определите наименьшее возможное количество ходов, за которое Вера сможет перевернуть все монеты орлом вверх.

8. Вася хочет написать на волшебной доске натуральное число, которое доска будет преобразовывать по такому правилу: если в какой-то момент на доске оказалось число $x < 2^{99}$, через минуту оно заменяется на число $x^2 + 2^{99}$, а если число $x \geq 2^{99}$, то через минуту оно уменьшается ровно вдвое. Может ли Вася написать на доске число так, чтобы оно всегда оставалось целым?